FAC-SIMILE DI COMPITO DI ANALISI 1
–CORREZIONE –

Prima parte

Lo studente scriva solo la risposta direttamente su questo foglio.

La seconda parte verrà corretta esclusivamente nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.

Esercizio 1. *Trovare l'insieme $\mathcal{S}$ di tutte le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione* $\sin(2\,x) = \sin x$

$$\mathcal{S} =$$

Soluzione. Si ricordi che due angoli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sono tali che $\sin\alpha = \sin\beta$ se e solo se

$$\alpha = \beta + 2\,k\,\pi \qquad \text{oppure} \qquad \alpha = (\pi - \beta) + 2\,k\,\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Usando questa informazione con $\alpha = 2\,x$ e $\beta = x$, si trova

$$2\,x = x + 2\,k\,\pi \qquad \text{oppure} \qquad 2\,x = (\pi - x) + 2\,k\,\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Svolgendo i necessari passaggi algebrici, otteniamo quindi

$$x = 2\,k\,\pi \qquad \text{oppure} \qquad x = (2\,k+1)\,\frac{\pi}{3}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Quindi l'insieme delle soluzioni è dato da

$$\mathcal{S} = \{2\,k\,\pi\,:\,k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{(2\,k+1)\,\frac{\pi}{3}\,:\,k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Questo termina l'esercizio. □

Esercizio 2. *Calcolare il limite della successione*

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^2\,(e^{\frac{2}{n^2}} - e^{-\frac{2}{n^2}})\right] =$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma identerminata $\infty \cdot 0$, ma possiamo riscriverlo nella forma $0/0$ come

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^2\,(e^{\frac{2}{n^2}} - e^{-\frac{2}{n^2}})\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{2}{n^2}} - e^{-\frac{2}{n^2}}}{\dfrac{1}{n^2}}.$$

Si osservi adesso che

$$e^{\frac{2}{n^2}} - e^{-\frac{2}{n^2}} = \left(e^{\frac{2}{n^2}} - 1\right) - \left(e^{-\frac{2}{n^2}} - 1\right) \sim \frac{2}{n^2} - \left(-\frac{2}{n^2}\right) = \frac{4}{n^2}.$$

Si ottiene quindi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{2}{n^2}} - e^{-\frac{2}{n^2}}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = 4.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 3. *Calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\tan^2(\log x)}{\cos(e^{x-1}-1)-1} =$$

Soluzione. Si usano le equivalenze asintotiche

$$\tan^2(\log x) = \tan^2(\log x) \sim \log^2 x = \log^2((x-1)+1) \sim (x-1)^2, \qquad \text{per } x \to 1,$$

e

$$\cos(e^{x-1}-1) - 1 \sim -\frac{(e^{x-1}-1)^2}{2} \sim -\frac{(x-1)^2}{2}, \qquad \text{per } x \to 1.$$

Il valore del limite è quindi -2. □

Esercizio 4. *Tra le serie seguenti, evidenziare quelle convergenti*

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{-\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$$

Soluzione. Si osservi innanzitutto che

$$0 < \cos\left(\frac{1}{n}\right) < 1, \qquad \text{per ogni } n \geq 1,$$

quindi le prime due serie sono a termini positivi. Per trattare le prime due serie, si osserva che

$$\begin{aligned} -\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= -\log\left(\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)+1\right) \\ &\sim -\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) \sim \frac{1}{2\,n^2}, \qquad \text{per } n \to \infty. \end{aligned}$$

Visto che $1/(2\,n^2)$ è l'$n-$esimo termine di una serie convergente, per il *criterio del confronto asintotico* si ottiene che la prima serie è convergente.

Dall'equivalenza asintotica precedente, si ottiene anche

$$\sqrt{-\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \sim \frac{1}{\sqrt{2}\,n}, \qquad \text{per } n \to \infty.$$

L'ultimo è l'$n-$esimo termine di una serie divergente (serie armonica), quindi sempre dal *criterio del confronto asintotico* si ottiene che la serie di partenza diverge.

Per la terza serie (che è ancora a termini positivi), si può usare il *criterio del rapporto*. Infatti, posto $a_n = e^n/n!$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0,$$

e quindi la serie è convergente (perché $a_{n+1}/a_n \to \ell < 1$).

Infine, la quarta serie è a segni alterni e si presta per un'applicazione diretta del *criterio di Leibniz*. Utilizzando quest'ultimo, otteniamo che la serie è convergente. □

Esercizio 5. *Dire per quali $\alpha \geq 0$ la seguente serie a termini positivi è convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan(e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1)}{\sqrt{n}}$$

Soluzione. Si osservi innanzitutto che la serie è a termini positivi per n abbastanza, perché per $\alpha \geq 0$

$$e^{\frac{1}{n^\alpha}} > 1, \qquad \text{per ogni } n \geq 1,$$

e

$$e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1 < \frac{\pi}{2}, \qquad \text{definitivamente.}$$

Usando le equivalenze asintotiche

$$\tan(e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1) \sim e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1 \sim \frac{1}{n^\alpha}, \qquad \text{per } n \to \infty,$$

si ottiene per la serie in questione

$$\frac{\tan(e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1)}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}, \qquad \text{per } n \to \infty.$$

L'ultimo è l'$n-$esimo termine di una serie armonica generalizzata, che converge se e solo se $\alpha+1/2 > 1$ ovvero per $\alpha > 1/2$. Dal criterio del confronto asintotico, se ne conclude che la serie iniziale converge se e solo se $\alpha > 1/2$. $\square$

Esercizio 6. *Trovare una primitiva F su $\mathbb{R}$ della funzione $x \mapsto \sin^2(2\,x)$.*

$$F =$$

Soluzione. Si ricordi la formula di bisezione

$$\sin^2(2\,x) = \frac{1 - \cos(4\,x)}{2}.$$

Questo implica

$$\int \sin^2(2\,x)\,dx = \int \frac{1-\cos(4\,x)}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(4\,x)}{8} + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$. $\square$

Esercizio 7. *Usando uno sviluppo di Taylor fino all'ordine opportuno, calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{1-x^4} - e^{x^4}}{(\cos x - 1)^2 \arctan^2(2\,x^2)} =$$

Soluzione. Si ricordino i seguenti sviluppi di Taylor all'ordine 2, validi per $x \to 0$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2),$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\arctan x = x + o(x^2).$$

In particolare si ottiene

$$\frac{\dfrac{1}{1-x^4} - e^{x^4}}{(\cos x - 1)^2 \arctan^2(2\,x^2)} = \frac{(1 + x^4 + x^8 + o(x^8)) - \left(1 + x^4 + \dfrac{x^8}{2} + o(x^8)\right)}{\left(\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 \ (2\,x^2 + o(x^4))^2}$$

$$= \frac{\dfrac{x^8}{2} + o(x^8)}{\left(\dfrac{x^4}{4} + o(x^4)\right)\ (4\,x^4 + o(x^6))} = \frac{\dfrac{x^8}{2} + o(x^8)}{x^8 + o(x^8)}.$$

In definitiva, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{1-x^4} - e^{x^4}}{(\cos x - 1)^2 \arctan^2(2\,x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^8}{2} + o(x^8)}{x^8 + o(x^8)} = \frac{1}{2}.$$

□

Esercizio 8. *Si determinino*

$$\max_{x\in[0,2\,\pi]} \tan(\cos x) = \qquad\qquad \min_{x\in[0,2\,\pi]} \tan(\cos x) =$$

Soluzione. La funzione $x \mapsto \tan(\cos x)$ è continua su $[0, 2\,\pi]$, quindi dal Teorema di Weierstrass sappiamo che ammette massimo e minimo. Studiamo la monotonia della funzione sull'intervallo considerato: si ha

$$\frac{d}{dx} \tan(\cos x) = -\Big(1 + \tan^2(\cos x)\Big) \sin x.$$

Il segno della derivata coincide col segno di $-\sin x$, quindi si ha su $[0, 2\,\pi]$

$$\frac{d}{dx} \tan(\cos x) \ge 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in [\pi, 2\,\pi].$$

In altre parole, la funzione è decrescente su $[0, \pi]$ e crescente su $[\pi, 2\,\pi]$. Abbiamo quindi che $x = \pi$ è il punto di minimo, ovvero

$$\min_{x\in[0,2\,\pi]} \tan(\cos x) = \tan(\cos \pi) = -\tan(1)$$

Il massimo invece sarà assunto in una delle due estremità dell'intervallo: osservando che

$$\tan(\cos 0) = \tan(\cos(2\,\pi)) = \tan(1),$$

si trova che $x = 0$ e $x = 2\,\pi$ sono entrambi punti di massimo (globale) e vale pertanto

$$\max_{x\in[0,2\,\pi]} \tan(\cos x) = \tan(1)$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 9. *Dare lo sviluppo di Taylor all'ordine* 4 *con resto di Peano nel punto* $x_0 = 0$ *per la funzione arcoseno*

$$\arcsin x =$$

Proof. Si osservi innanzitutto che la funzione è dispari, quindi lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 avrà la forma

$$\arcsin x = x + \frac{f'''(0)}{6}\,x^3 + o(x^4), \qquad \text{per } x \to 0,$$

dove per calcolare il termine uno abbiamo usato l'equivalenza asintotica $\arcsin x \sim x$, per $x \to 0$. Ci manca da calcolare la derivata terza dell'arcoseno in 0. Si ha

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d^2}{dx^2}\arcsin x = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} + \frac{3\,x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}}.$$

L'ultima derivata calcolata in 0 da il valore 1. Abbiamo quindi ottenuto

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4), \qquad \text{per } x \to 0.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 10. *Trovare i 2 punti di flesso x_0 e x_1 della funzione $x \mapsto 1/(1+x^2)$*

$$x_0 = \qquad\qquad x_1 =$$

Proof. Studiamo gli intervalli di concavità della funzione in questione. Si ha

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x^2} = -\frac{2\,x}{(1+x^2)^2}, \qquad \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{1+x^2} = -\frac{2}{(1+x^2)^2} + \frac{8\,x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6\,x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

Il segno della derivata seconda è quindi

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{1+x^2} \geq 0 \qquad &\iff \qquad 3\,x^2 - 1 \geq 0 \\ &\iff \qquad x \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \ \text{ oppure } \ x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{e} \qquad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte non verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.

Esercizio 11 (6 punti)**.** *Si studi la funzione*

$$x \mapsto e^{\frac{1}{x-1}} \log x$$

tracciandone un grafico qualitativo quanto più possibile preciso.

Soluzione. Cominciamo col determinare il dominio della funzione. Deve aversi $x > 0$ e $x \neq 1$, quindi il dominio sarà dato dall'unione dei due intervalli aperti

$$D = (0,1) \cup (1,+\infty).$$

Inoltre, osserviamo che

$$e^{\frac{1}{x-1}} \log x \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > 1,$$

ed è quindi negativa per $0 < x < 1$. Calcoliamo adesso i limiti nei punti di accumulazione del dominio, che non fanno parte del dominio. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x-1}} \log x = -\infty.$$

Usando il cambio di variabile $1/(x-1) = t$ si ha anche

$$\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} \log x = \lim_{t\to -\infty} e^t \log\left(1+\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to -\infty} e^t \frac{1}{t} = 0.$$

Per il limite da destra, sempre con lo stesso cambio di variabile si ha

$$\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} \log x = \lim_{t\to +\infty} e^t \log\left(1+\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty.$$

Quindi in corrispondenza di $x = 1$, abbiamo un asintoto verticale "da destra". Infine, vale

$$\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x-1}} \log x = +\infty.$$

Studiamo adesso gli intervall di monotonia: si ha

$$\frac{d}{dx} e^{\frac{1}{x-1}} \log x = -e^{\frac{1}{x-1}} \log x \frac{1}{(x-1)^2} + e^{\frac{1}{x-1}} \frac{1}{x} = e^{\frac{1}{x-1}} \left[-\frac{\log x}{(x-1)^2} + \frac{1}{x}\right].$$

Vogliamo sapere per quali x vale

$$e^{\frac{1}{x-1}} \left[-\frac{\log x}{(x-1)^2} + \frac{1}{x}\right] \geq 0.$$

Osservando che l'esponenziale è sempre positivo, la precedente è equivalente a

$$-\frac{\log x}{(x-1)^2} + \frac{1}{x} \geq 0.$$

Sul dominio della funzione, questa disuguaglianza è equivalente a

$$\text{(1)} \qquad \frac{(x-1)^2}{x} \geq \log x \qquad \text{ovvero a} \qquad x - 2 + \frac{1}{x} \geq \log x.$$

Si osservi che questa disuguaglianza non è risolvibile tramite metodi elementari. Osserviamo innanzitutto che

$$\log x < 0 \qquad \text{per } 0 < x < 1,$$

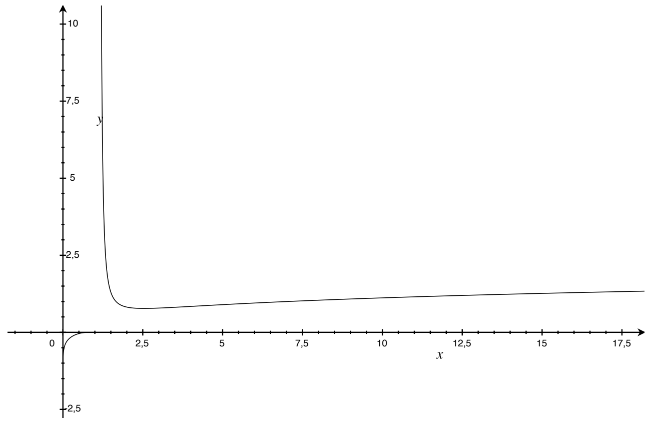

FIGURE 1. Il grafico della funzione dell'Esercizio 11

mentre

$$x - 2 + \frac{1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} > 0, \text{ per } 0 < x < 1.$$

Questo vuol dire che per $0 < x < 1$ la disuguaglianza (1) è verificata e quindi la funzione che stiamo studiando è crescente su questo intervallo.

Consideriamo adesso l'intervallo $x > 1$: usiamo gli strumenti del calcolo differenziale per determinare la disuguaglianza è verificata (1). Si introduca la funzione

$$h(x) = x - 2 + \frac{1}{x} - \log x, \qquad x \in (1, +\infty).$$

Studiamo i suoi intervalli di monotonia: si ha per $x > 1$

$$\begin{aligned} h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \geq 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad 1 \geq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x^2} \\ &\Longleftrightarrow \qquad x^2 \geq x + 1 \\ &\Longleftrightarrow \qquad x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Questo implica che la funzione h ha solo 2 intervall di monotonia: è decrescente su $0 < x < (1+\sqrt{5})/2$ e crescente per $x > (1+\sqrt{5})/2$. Osservando che

$$\lim_{x \to 1^+} h(x) = 0,$$

questo implica che h è negativa in un intervallo della forma $(1, x_0)$, per qualche x_0, e poi diventa positiva per $x > x_0$.

Da questa discussione, ne ricaviamo che la funzione iniziale è decrescente sullo stesso intervallo $(1, x_0)$ e crescente per $x > x_0$. Abbiamo quindi che la funzione iniziale ha un minimo locale in $x = x_0$ (si osservi che sull'intervallo $(1, +\infty)$, il punto x_0 è di minimo globale).

Lo studio del segno della derivata seconda può essere omesso. □

Esercizio 12 (6 punti). *Si studino gli intervalli di monotonia della funzione (1 punto)*

$$x \mapsto \frac{1}{(2+\cos x)^2},$$

e se ne calcoli una primitiva (5 punti).

Soluzione. Osserviamo che la funzione in questione è definita e derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Si tratta inoltre di una funzione $2\,\pi-$periodica. Ci basta quindi studiarne la monotonia sull'intervallo $[0, 2\,\pi]$. Calcoliamone la derivata

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\,\sin x}{(2+\cos x)^3}.$$

Quindi sull'intervallo $[0, 2\,\pi]$ la funzione è crescente tra $[0, \pi]$ e decrescente tra $[\pi, 2\,\pi]$.

Passiamo adesso al calcolo di una primitiva della funzione in question. Usiamo il cambio di variabile

$$t = \tan\frac{x}{2}.$$

Ricordando che con tale cambio di variabile si ha

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2\,t}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt,$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(2+\cos x)^2}\,dx &= 2\int \frac{1}{\left(2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= 2\int \frac{1+t^2}{(3+t^2)^2}\,dt = 2\int \frac{1}{3+t^2}\,dt - 4\int \frac{1}{(3+t^2)^2}\,dt.\end{aligned} \tag{2}$$

Adesso calcoliamo separatamente gli ultimi due integrali: il primo è del tipo

$$\int \frac{1}{b+(x-a)^2}\,dx,$$

con $b = 3$ e $a = 0$. Abbiamo svolto questo tipo di integrali a lezione (2/11/2016), sappiamo che[1]

$$\int \frac{1}{b+(t-a)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{b}}\,\arctan\left(\frac{t-a}{\sqrt{b}}\right) + c,$$

quindi

$$2\int \frac{1}{3+t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

Per il secondo integrale, usiamo una piccola astuzia: moltiplichiamo e dividiamo per $2\,t$ ed integriamo per parti

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(3+t^2)^2}\,dt &= \int \underbrace{\frac{1}{2\,t}}_{g(t)}\,\underbrace{\frac{2\,t}{(3+t^2)^2}}_{f'(t)}\,dt \\ &= -\frac{1}{2\,t}\,\frac{1}{3+t^2} - \int \frac{1}{2\,t^2}\,\frac{1}{3+t^2}\,dt.\end{aligned}$$

Si osservi adesso che

$$\frac{1}{2\,t^2}\,\frac{1}{3+t^2} = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{t^2} - \frac{1}{3+t^2}\right],$$

[1]Ricordo brevemente che il calcolo di questo integrale si basa sul cambio di variabile

$$t = \frac{x-a}{\sqrt{b}}.$$

quindi riprendendo il calcolo precedente

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(3+t^2)^2}\,dt &= -\frac{1}{2\,t}\,\frac{1}{3+t^2} - \int \frac{1}{2\,t^2}\,\frac{1}{3+t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{2\,t}\,\frac{1}{3+t^2} - \frac{1}{6}\int \frac{1}{t^2}\,dt + \frac{1}{6}\int \frac{1}{3+t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{2\,t}\,\frac{1}{3+t^2} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{t} + \frac{1}{6\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

Si osservi che l'ultimo integrale l'avevamo già calcolato in precedenza. Unendo i risultati, dall'equazione (2) abbiamo quindi ottenuto

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(2+\cos x)^2}\,dx &= 2\int \frac{1}{3+t^2}\,dt - 4\int \frac{1}{(3+t^2)^2}\,dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{t}\,\frac{1}{3+t^2} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{t} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + c, \qquad c\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

Tornando alla variabile x, si ottiene la primitiva

$$F(x) = \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{\tan\frac{x}{2}}\,\frac{1}{3+\tan^2\frac{x}{2}} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}.$$

Questo conclude l'esercizio. $\square$