Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA A
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2018/2019

Libri, appunti e calcolatrici **non ammessi**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si dica per quali α la serie seguente risulta convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n!}\,(e^{\frac{1}{n^\alpha}}-1) \qquad \alpha > 2$$

Esercizio 2. *Si trovi una primitiva F della funzione $f(x) = x\,\cos x$*

$$F(x) = x\,\sin x + \cos x$$

Esercizio 3. *Trovare l'insieme S delle soluzioni dell'equazione $\log_2(x^2+1) = e$*

$$S = \{\pm\sqrt{2^e - 1}\}$$

Esercizio 4. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{n\to\infty} \sin(\sqrt[3]{n^2})\left(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2}\right) = 0$$

Esercizio 5. *Si trovino* sup *e* inf *della funzione $f(x) = (x^2+1)/\sqrt{x^4+1}$ su $\mathbb{R}$*

$$\sup_{\mathbb{R}} f = \sqrt{2} \qquad\qquad \inf_{\mathbb{R}} f = 1$$

Esercizio 6. *Sia f derivabile 3 volte in $x = 0$, tale che valga lo sviluppo di Taylor $f(x) = 1 - x + x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$. Si dica quanto vale la derivata terza di f in $x = 0$*

$$f'''(0) = 6$$

Esercizio 7. *Si calcoli il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2\,x) - 2\,(\sin x - x + x\,\cos x)}{x^5} = \frac{1}{6}$$

Esercizio 8. *Si dia lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 centrato in $x = 0$ con resto di Peano della funzione*

$$\log(1 + x - x^2) = x - \frac{3}{2}\,x^2 + o(x^2)$$

Esercizio 9. *Dire quali tra le seguenti serie numeriche risultano convergenti*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-3}{n^5+6\,n^2-2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2019}}{e^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right)$$

Esercizio 10. *Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \arctan(x+1)$ nel punto $(\sqrt{3}-1, \pi/3)$.*

$$y = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\,(x + 1 - \sqrt{3}).$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = e^{-\frac{1}{|x^2-1|}}$$

avendo cura di tracciarne un grafico quanto più preciso possibile.

Soluzione. Il dominio di definizione della funzione è dato da $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Si tratta di una funzione continua e derivabile su D. Notiamo anche che f è funzione pari. Inoltre, si noti che l'argomento dell'esponenziale è sempre negativo e non si annulla mai, quindi sicuramente

$$e^{-\frac{1}{|x^2-1|}} < 1, \qquad \text{per ogni } x \in D. \tag{1}$$

E d'altra parte, in quanto esponenziale, si ha

$$e^{-\frac{1}{|x^2-1|}} > 0, \qquad \text{per ogni } x \in D.$$

È utile osservare che

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1, & \text{se } x < -1 \text{ oppure } x > 1, \\ 1-x^2, & \text{se } -1 \le x \le 1, \end{cases}$$

quindi la nostra funzione può essere scritta come

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2-1}}, & \text{se } x < -1 \text{ oppure } x > 1, \\ e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{se } -1 < x < 1, \end{cases}$$

Calcoliamo i limiti nei punti di accumulazione di D, che non appartengono a D: si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x^2-1}} = 1$$

e dalla parità di f, anche

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Quindi $y = 1$ è asintoto orizzontale, sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$ (non ci saranno quindi asintoti obliqui). Inoltre, tenendo conto di (1), abbiamo anche provato che

$$\sup_D f = 1.$$

Abbiamo anche

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} e^{-\frac{1}{|x^2-1|}} = 0.$$

Di nuovo dalla parità di f, si ottiene anche

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to1} f(x) = 0.$$

I due punti di accumulazione $x = 1$ e $x = -1$ sono quindi punti in cui f presenta una discontinuità di tipo eliminabile. In altre parole, se si definisce la nuova funzione

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x^2-1|}}, & \text{se } x \in D, \\ 0, & \text{se } |x| = 1, \end{cases}$$

si ha che essa è continua su tutto $\mathbb{R}$ e coincide con f su D. Osserviamo anche che abbiamo dimostrato che

$$\inf_D f = 0.$$

Veniamo adesso allo studio degli intervalli di monotonia di f: osserviamo innanzitutto che il dominio di derivabilità di f coincide con tutto il dominio iniziale D. Per non doverci complicare la vita col valore assoluto, distinguiamo due casi:

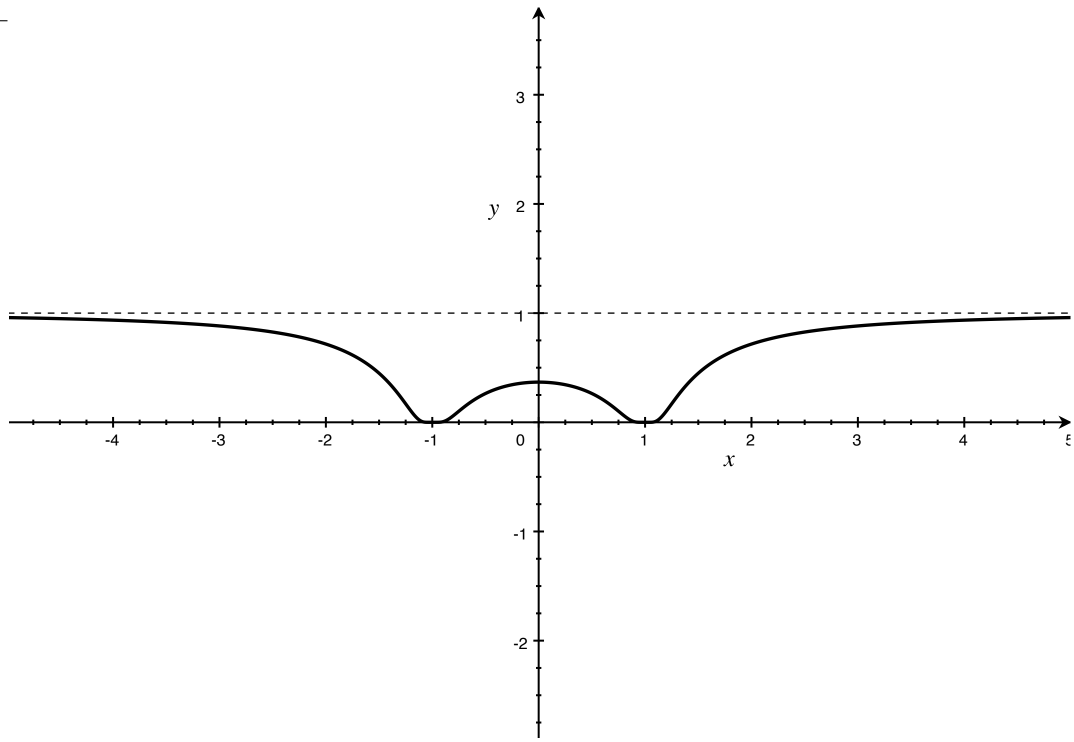
- se $-1 < x < 1$, allora

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{-\frac{1}{1-x^2}} = e^{-\frac{1}{1-x^2}} \, \frac{-2\,x}{(1-x^2)^2} \ge 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \le 0,$$

  quindi sull'intervallo $(-1, 1)$, la funzione crescente per $-1 < x \le 0$ e decrescente per $0 \le x < 1$. In particolare, $x = 0$ è un punto di massimo locale. Il valore del massimo locale corrispondente è

$$f(0) = e^{-1} < 1.$$

  Per la discussione precedente, abbiamo quindi che non si tratta di un massimo assoluto.



- se $x<-1$ oppure $x>1$, allora

$$f'(x)=\frac{d}{dx}e^{-\frac{1}{x^2-1}}=e^{-\frac{1}{1-x^2}}\,\frac{2\,x}{(1-x^2)^2}\geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x\geq 0,$$

  ovvero f è crescente su $(1,+\infty)$ e decrescente su $(-\infty,-1)$.

Infine, vediamo come si comporta la derivata nei punti $x=\pm 1$. Abbiamo

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+} e^{-\frac{1}{1-x^2}}\,\frac{2\,x}{(1-x^2)^2}=0,$$

dove abbiamo usato la gerarchia di infiniti

$$L^2=o(e^L), \qquad \text{se } L\to+\infty.$$

Si operi il cambio $1/(1-x^2)=L$ per ricondursi a tale limite notevole. In modo del tutto analogo

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-} e^{-\frac{1}{1-x^2}}\,\frac{-2\,x}{(1-x^2)^2}=0.$$

Otteniamo quindi che, anche se f' non è definita per $x=1$, si ha

$$\lim_{x\to 1} f'(x)=0.$$

Per parità della funzione, si ha anche

$$\lim_{x\to -1} f'(x)=0.$$

In definitiva, il grafico della funzione si avvicina ai due punti $(-1,0)$ e $(1,0)$ con tangente orizzontale. $\square$

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Si calcoli l'integrale seguente*

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x-\sin x}\,dx.$$

Soluzione. Vediamo due metodi diversi di calcolare l'integrale.

Primo metodo. Operiamo il cambio di variabili

$$x=2\,\arctan t,$$

ricordando che (*visto a lezione*)

$$\cos(2\,\arctan t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin(2\,\arctan t)=\frac{2\,t}{1+t^2}, \qquad dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

L'integrale da calcolare diventa quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x - \sin x}\, dx = \int_0^{\alpha} \frac{2}{1-t^2-2\,t}\, dx,$$

dove abbiamo posto per semplicità

$$\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \sqrt{\frac{1-\cos(\pi/6)}{1+\cos(\pi/6)}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}.$$

Si noti che abbiamo usato le formule di bisezione per calcolare la tangente di $\pi/12$.

Ci siamo quindi ricondotti al calcolo dell'integrale di una funzione razionale: si osservi che il denominatore $1-t^2-2\,t$ ha due radici reali distinte

$$t_1 = -1-\sqrt{2} \qquad t_2 = -1+\sqrt{2}.$$

Cerchiamo quindi due coefficienti reali $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$-\frac{2}{t^2+2\,t-1} = \frac{A}{t+1+\sqrt{2}} + \frac{B}{t+1-\sqrt{2}}.$$

Moltiplichiamo questa identità per $t+1+\sqrt{2}$ e facciamo il limite per t che tende a $-1-\sqrt{2}$, si ottiene

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

In modo analogo, si ottiene anche

$$B = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Abbiamo quindi ottenuto

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x - \sin x}\, dx &= \int_0^{\alpha} \frac{2}{1-t^2-2\,t}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\alpha} \frac{1}{t+1+\sqrt{2}}\, dt - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\alpha} \frac{1}{t+1-\sqrt{2}}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\log|t+1+\sqrt{2}|\right]_0^{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\log|t+1-\sqrt{2}|\right]_0^{\alpha} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left|\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left|\frac{\alpha+1+\sqrt{2}}{\alpha+1-\sqrt{2}}\right|.
\end{aligned}$$

Ricordando l'espressione di α, abbiamo concluso.

Secondo metodo. Osserviamo innanzitutto che

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Usando questa osservazione ed dperando il cambio di variabili $x+\pi/4 = t$, si ottiene allora

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x - \sin x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{12}\pi} \frac{1}{\cos t}\, dt.$$

Si può adesso operare il cambio di variabili $t = 2\,\arctan s$ e procedere come prima. $\square$