Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA A
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2017/2018

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

PRIMA PARTE

- *Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.*
- *La seconda parte verrà corretta* **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*
- *Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.*

Esercizio 1. *Trovare l'insieme $\mathcal{S}$ di* **tutte** *le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione* $\log_2(x+2) = \log_4(x+4)$

$\mathcal{S} = \{0\}$

Esercizio 2. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 1$$

Esercizio 3. *Dire per quali $\alpha > 0$ l'integrale generalizzato seguente risulta convergente*

$$\int_1^{+\infty} x \log\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+1}}\right) dx \qquad \alpha > \frac{1}{2}$$

Esercizio 4. *Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie seguente risulta convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} \qquad -1 \le \alpha < 1 \qquad \textit{per } \alpha = -1 \textit{ la serie converge, ma non assolutamente}$$

Esercizio 5. *Si trovino l'estremo superiore e l'estremo inferiore sull'insieme $(0, +\infty)$ della seguente funzione*

$$\sup_{x\in(0,+\infty)} \frac{2x+1}{3x+2} = \frac{2}{3} \qquad \inf_{x\in(0,+\infty)} \frac{2x+1}{3x+2} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 6. *Si calcoli il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sin(x^2) - x^2\right)^2}{\cos(x+1)\,(e^{x^2} - \cos x)^4 \log(1 + \sin^4 x)} = \frac{4}{3^6 \cos(1)}$$

Esercizio 7. *Dare lo sviluppo di Taylor fino all'ordine 3 centrato in 0 con resto di Peano, della funzione*

$$f(x) = \frac{1}{1 - \arctan x} = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

Esercizio 8. *Dire quali tra le seguenti serie numeriche risultano convergenti*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^7 \frac{(1400)^n}{n!} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{(\log n)^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n\, n!}{(3n)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Esercizio 9. *Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \cos(x+1)$ nel punto $(-1, 1)$.*

$$y = 1$$

Esercizio 10. *Si trovi una primitiva F della funzione $f(x) = x \sin x$.*

$$F(x) = -x \cos x + \sin x$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (8 punti)**.** *Studiare la funzione*

$$x \mapsto \left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right|$$

tracciandone un grafico qualitativo quanto più possibile preciso.

Domanda bonus (2 punti): si dica se la funzione precedente è invertibile

- *in caso affermativo, si calcoli la sua funzione inversa;*
- *in caso negativo, si trovi un intervallo sulla quale la funzione diventa invertibile e calcolare la sua inversa.*

Soluzione. Dividiamo l'analisi della funzione in punti.

Dominio e proprietà di base. La funzione è definita per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$|x| \neq 1 \qquad \text{ovvero per } x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Si osservi che la funzione è sempre positiva (a causa della presenza del valore assoluto) e non si annulla mai (dato che $x^2 + 8 \neq 0$). Inoltre, si vede facilmente che

$$\left|\frac{(-x)^2+8}{|-x|-1}\right| = \left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right|, \qquad \text{per ogni } x \in D,$$

ovvero **la funzione è pari**. Si osservi inoltre che

$$||x|-1| = \begin{cases} |x|-1, & \text{se } x < -1 \text{ oppure } x > 1 \\ 1-|x|, & \text{se } -1- < x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-1, & \text{se } x > 1 \\ 1-x, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1+x, & \text{se } -1- < x < 0 \\ -x-1, & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

Limiti ed asintoti. Calcoliamo i limiti della funzione nei punti di accumulazione del dominio D che non gli appartengono: abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+8}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} \left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2+8}{x-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to1^-} \left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2+8}{1-x} = +\infty.$$

Inoltre, grazie alla parità della funzione abbiamo anche

$$\lim_{x\to-\infty} \left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+8}{-x-1} = +\infty,$$

e

$$\lim_{x\to-1} \left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = +\infty.$$

La funzione ha quindi due asintoti verticali, in corrispondenza di $x = 1$ e $x = -1$. Verifichiamo la presenza di asintoti obliqui: si ha

$$\alpha = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = \lim_{x+\infty} \frac{1}{x} \frac{x^2+8}{x-1} = 1$$

e

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} \left[\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2+8}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+8-x^2+x}{x-1} = 1.$$

Abbiamo quindi che

$$y = \alpha x + \beta = x + 1,$$

è un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Grazie alla parità della funzione, otteniamo che anche

$$y = -x + 1,$$

è un asintoto obliquo, stavolta per $x \to -\infty$.

Derivabilità e intervalli di monotonia. Studiamo adesso gli intervalli di monotonia della funzione in esame: osserviamo innanzitutto che la funzione in esame è derivabile in ogni $x \in D$ per cui

$$\frac{x^2+8}{|x|-1} \neq 0 \qquad \text{e} \qquad |x| \neq 0.$$

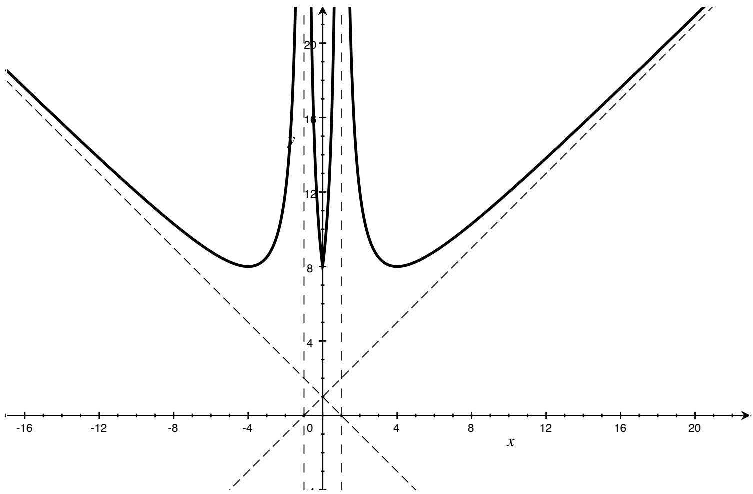

FIGURA 1. La funzione dell'Esercizio 11.

Questo è dovuto al fatto che la funzione *valore assoluto* non è derivabile nei punti in cui il suo argomento si annulla. Ora, la prima condizione è sempre soddisfatta, per la seconda invece dobbiamo richiedere che $x \neq 0$. In altre parole, la funzione di partenza è derivabile sull'insieme

$$E = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty) = D \setminus \{0\}.$$

Il punto $x = 0$ rappresenta un punto di non derivabilità che andrà studiato a parte. Calcoliamo la derivata della funzione per $x > 0$ e $x \neq 1$: distinguiamo due casi

Caso $0 < x < 1$: in tal caso

$$\frac{d}{dx}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = \frac{d}{dx}\,\frac{x^2+8}{1-x} = \frac{-x^2+2\,x+8}{(1-x)^2} \geq 0 \qquad \text{per ogni } 0 < x < 1.$$

Abbiamo quindi che per $0 < x < 1$ la funzione è monotona crescente (strettamente, la derivata non si annulla mai in questo intervallo);

Caso $x > 1$: in tal caso

$$\frac{d}{dx}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = \frac{d}{dx}\,\frac{x^2+8}{x-1} = \frac{x^2-2\,x-8}{(x-1)^2} \geq 0 \qquad \text{se e solo se } x \geq 4.$$

Abbiamo quindi che per $1 < x < 4$ la funzione è monotona decrescente, mentre per $x \geq 4$ la funzione è monotona crescente. Il punto $x = 4$ è quindi un punto di minimo locale. Vediamo se si tratta anche di un minimo assoluto: si osservi che

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = 8$$

ed inoltre

$$\lim_{x\to 4}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = 8.$$

Abbiamo quindi che $x = 0$ e $x = 4$ sono entrambi punti di minimo assoluto per la funzione e vale

$$\inf_{x\in D}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = \min_{x\in D}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = 8.$$

Si osservi anche che la monotonia della funzione per $x < 0$ si può adesso ricavare dalle considerazioni precedenti, ricordando che la funzione è pari. Infine, prestiamo attenzione al punto di non derivailità $x = 0$: si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{d}{dx}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = 2,$$

quindi $x = 0$ è un **punto angoloso**.

Intervalli di concavità e convessità. Si osservi che la funzione è in realtà derivabile due volte, là dove è derivabile almeno una volta. Calcoliamo la derivata seconda e studiamone il segno: di nuovo, possiamo limitarci al caso $x > 0$ grazie alla parità. Inoltre, come prima è utile dividere la discussione in due casi:

Caso $0 < x < 1$: in tal caso

$$\frac{d^2}{dx^2}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = \frac{d}{dx}\,\frac{-x^2+2\,x+8}{(1-x)^2} = \frac{18}{(1-x)^3} > 0 \qquad \text{per ogni } 0 < x < 1,$$

quindi la funzione è convessa per $0 < x < 1$.

Caso $x > 1$: in tal caso

$$\frac{d^2}{dx^2}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = \frac{d}{dx}\frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2} = \frac{18}{(x-1)^3} > 0 \qquad \text{per ogni } x > 1,$$

quindi la funzione è convessa per $x > 1$. Si faccia attenzione! A causa del punto $x = 1$ che non sta nel dominio della funzione, possiamo solo concludere che la funzione è convessa separatamente in ogni intervallo, ma **non** globalmente. Si veda la figura. □

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Calcolare il seguente integrale definito*

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x + 1}{\cos x\,(\cos x - 1)^2}\,\sin x\,dx.$$

Soluzione. Si effettua il cambio di variabile $\cos x = t$, allora osservando che

$$-\sin x\,dx = dt,$$

$$\frac{\pi}{4} \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\pi}{3} \mapsto \frac{1}{2},$$

si ottiene

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x + 1}{\cos x\,(\cos x - 1)^2}\,\sin x\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t^2+1}{t\,(t-1)^2}\,dt.$$

La funzione da integrare è una funzione razionale, il cui denominatore si annulla in $t = 0$ (radice semplice) e $t = 1$ (radice doppia). Effettuiamo la decomposizione in fratti semplici: cerchiamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{t^2+1}{t\,(t-1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{(t-1)^2}.$$

Moltiplicando per t ambo i membri e prendendo il limite per $t \to 0$, si ottiene

$$A = 1,$$

mentre moltiplicando per $(t-1)^2$ ambo i membri e prendendo il limite per $t \to 1$, si ottiene

$$C = 2.$$

Ci manca da determinare B, che deve verificare

$$\frac{t^2+1}{t\,(t-1)^2} = \frac{1}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{2}{(t-1)^2}.$$

Prendendo $t = -1$ nell'espressione precedente, otteniamo l'equazione

$$-\frac{1}{2} = -1 - \frac{B}{2} + \frac{1}{2},$$

ovvero

$$B = 0.$$

Abbiamo quindi ottenuto

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t^2+1}{t\,(t-1)^2}\,dt &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\frac{1}{t} + \frac{2}{(t-1)^2}\right] dt \\
&= \Big[\log|t|\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2\left[\frac{1}{t-1}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \log\sqrt{2} - 2\,\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1} + 2\,\frac{1}{\frac{1}{2} - 1} \\
&= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{4}{2-\sqrt{2}} - 4,
\end{aligned}$$

concludendo così l'esercizio. □