Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA A
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2019/2020

`Libri, appunti e calcolatrici` non ammessi

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}\,\arcsin\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right) = \frac{1}{e}$$

Esercizio 2. *Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione* $f(x) = \arctan(x^2)$ *nel punto* $(-\sqrt[4]{3}, \pi/3)$.

$$y = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt[4]{3}}{2}\,(x + \sqrt[4]{3})$$

Esercizio 3. *Si trovi una primitiva* F *della funzione* $f(x) = \sqrt{2\,x+1}$.

$$F(x) = \frac{1}{3}\,(2\,x+1)^{\frac{3}{2}}$$

Esercizio 4. *Trovare l'insieme* S *delle soluzioni dell'equazione* $\cos(x+1) = \sin x$

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + k\,\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Esercizio 5. *Si trovino* sup *e* inf *della funzione* $f(x) = (x+2)/(x-1)$ *sull'intervallo* $(1, +\infty)$

$$\sup_{(1,+\infty)} f = +\infty \qquad\qquad \inf_{(1,+\infty)} f = 1$$

Esercizio 6. *Si dica per quali* α *la serie seguente risulta convergente*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^\alpha + 1}\right)\right) \qquad \alpha > \frac{1}{2}$$

Esercizio 7. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile invertibile, tale che* $f(0) = 1,\ f(1) = 0,\ f'(0) = 3$ *e* $f'(1) = 2$. *Si dia il valore della derivata della funzione inversa* f^{-1} *nel punto* $y = 1$

$$\frac{df^{-1}}{dy}(1) = \frac{1}{3}$$

Esercizio 8. *Si calcoli il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x) - x}{1 - \cos x} = -1$$

Esercizio 9. *Si dia la sviluppo di Taylor all'ordine* 3 *centrato in* $x = 0$ *con resto di Peano della funzione*

$$\sin(x - x^3) = x - \frac{7}{6}\,x^3 + o(x^3)$$

Esercizio 10. *Dire quali tra le seguenti serie numeriche risultano convergenti*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^7 + \log n}{3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 4^n}{5^n + 4^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = \arcsin\left(\left|\frac{x+1}{x^2+1}\right|\right)$$

avendo cura di tracciarne un grafico quanto più preciso possibile.

Soluzione. Dividiamo lo studio in vari punti.

(1) **Dominio**. Cominciamo dal dominio di definizione. Ricordando che la funzione arcoseno è definita sull'intervallo chiuso $[-1, 1]$, dobbiamo richiedere che risulti

$$-1 \le \left|\frac{x+1}{x^2+1}\right| \le 1.$$

Dal momento che il valore assoluto è sempre positivo, la prima disuguaglianza è sempre soddisfatta. Occupiamoci di risolvere la seconda: osservando che si ha sempre $x^2 + 1 > 0$, tale disuguaglianza è equivalente alla seguente

$$|x + 1| \le x^2 + 1.$$

Al fine di risolvere questa disuguaglianza, ricordiamo che

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \ge -1, \\ -x-1, & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

Abbiamo quindi

- per $x \ge -1$

$$\begin{aligned} |x+1| \le x^2+1 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad x+1 \le x^2+1 \\ &\Longleftrightarrow \qquad x \le x^2 \\ &\Longleftrightarrow \qquad 0 \le x\,(x-1) \\ &\Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty). \end{aligned}$$

  Ricordando la restrizione iniziale, abbiamo allora

$$x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty);$$

- per $x < -1$

$$\begin{aligned} |x+1| \le x^2+1 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad -x-1 \le x^2+1 \\ &\Longleftrightarrow \qquad 0 \le x^2+x+2 \end{aligned}$$

  e l'ultima disuguaglianza è sempre vera. Abbiamo allora, tenendo conto della restrizione iniziale

$$x \in (-\infty, -1).$$

In conclusione, abbiamo che la funzione iniziale è definita sull'insieme

$$D = (-\infty, -1) \cup [-1, 0] \cup [1, +\infty) = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty).$$

Su tale insieme f è continua, in quanto composizione di funzioni continue.

(2) **Segno**. Ricordiamo che

$$\arcsin(t) \ge 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t \in [0, 1].$$

Abbiamo quindi che la nostra funzione è positiva se e soltanto se

$$\frac{|x+1|}{x^2+1} \in [0, 1].$$

L'ultima proprietà è soddisfatta per ogni $x \in D$, quindi la nostra funzione è sempre non-negativa. Inoltre, osservando che

$$\arcsin(t) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = 0,$$

e che

$$\frac{|x+1|}{x^2+1} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -1,$$

otteniamo che

$$f(x) \ge 0 \text{ per ogni } x \in D \qquad \text{e} \qquad f(x) = 0 \text{ se e solo se } x = -1.$$

Quindi $x = -1$ è punto di minimo globale per la nostra funzione e

$$\min_{x\in D} f(x) = 0.$$

(3) **Limiti nei punti notevoli**. Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \arcsin\left(\left|\frac{x+1}{x^2+1}\right|\right) = \arcsin(0) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arcsin\left(\left|\frac{x+1}{x^2+1}\right|\right) = \arcsin(0) = 0,$$

quindi $y = 0$ è un asintoto orizzontale per f, si a $+\infty$ che a $-\infty$. Abbiamo inoltre

$$\lim_{x\to0^-} \arcsin\left(\left|\frac{x+1}{x^2+1}\right|\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to1^+} \arcsin\left(\left|\frac{x+1}{x^2+1}\right|\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Si osservi che

$$x = 0 \qquad \text{e} \qquad x = 1,$$

sono punti di massimo globale e

$$\max_{x\in D} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

(4) **Derivabilità**. Ricordiamo che

$$t \mapsto \arcsin(t),$$

è derivabile per $t \in (-1, 1)$. La nostra funzione f sarà quindi derivabile in tutti i punti $x \in D$ tali che

$$\left|\frac{x+1}{x^2+1}\right| \neq \pm 1.$$

Ricordando inoltre che il valore assoluto non è derivabile quando l'argomento di annulla, dovremo anche richiedere che

$$\left|\frac{x+1}{x^2+1}\right| \neq 0.$$

La seconda condizione esclude automaticamente $x = -1$ dal dominio di derivabilità. La prima richiesta invece, ci impone di avere

$$|x+1| \neq x^2 + 1.$$

In base alla discussione del punto (1), questo sarà verificato per

$$x \neq 0 \qquad \text{e} \qquad x \neq 1.$$

In conclusione, il dominio di derivabilità di f è dato da

$$D' = D \setminus \{-1, 0, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (1, +\infty).$$

Su tale insieme f è derivabile in quanto composizione di funzioni derivabili.

(5) **Monotonia**. Usiamo il *test di monotonia*, ovvero studiamo il segno di f' su D'. Avendo un valore assoluto, è conveniente di nuovo distinguere due casi:

- se $x \in D'$ e $x > -1$, si ha

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$$

da cui

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)^2}}\,\frac{x^2+1-2\,x^2-2\,x}{(x^2+1)^2},$$

che è non-negativa per

$$1 - x^2 - 2\,x \geq 0 \qquad \text{ovvero} \qquad x \in \left[-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right].$$

Ricordando la restrizione iniziale ed osservando che

$$-1 < -1 + \sqrt{2} < -1 + 2 = 1,$$

abbiamo allora che f è crescente su $(-1, 0)$ e decrescente su $(1, +\infty)$;

- se $x \in D'$ e $x < -1$, si ha
$$f(x) = \arcsin\left(\frac{-x-1}{x^2+1}\right) = -\arcsin\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$$
da cui
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)^2}}\,\frac{x^2+2\,x-1}{(x^2+1)^2},$$
che è non-negativa per
$$x^2+2\,x-1 \geq 0 \qquad \text{ovvero} \qquad x \in (-\infty,-1-\sqrt{2}] \cup [-1+\sqrt{2},+\infty).$$
Ricordando la restrizione iniziale, abbiamo allora che f è crescente su $(-1-\sqrt{2}),-1$ e decrescente $(-\infty,-1-\sqrt{2})$. In particolare, si ha che
$$x = -1-\sqrt{2},$$
è un punto di massimo locale. Si osservi che
$$f(-1-\sqrt{2}) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) < \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} = \max_{x\in D} f(x),$$
quindi effettivamente si tratta soltanto di un massimo locale.

(6) **Comportamento nei punti di non derivabilità**. Vediamo adesso cosa succede quando ci avviciniamo ai punti
$$x \in D \setminus D'.$$
Si ha
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)^2}}\,\frac{1-x^2-2\,x}{(x^2+1)^2} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)^2}}\,\frac{1-x^2-2\,x}{(x^2+1)^2} = +\infty$$
$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)^2}}\,\frac{1-x^2-2\,x}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)^2}}\,\frac{x^2+2\,x-1}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}$$

Il punto $x = -1$ è dunque un punto angoloso, mentre i punti $x = 0$ e $x = 1$ sono punti a tangente verticale. In Figura 1 si trova un grafico approssimativo della funzione □

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Si trovi una primitiva della funzione*
$$f(x) = \frac{e^{3\,x}+1}{e^{3\,x}-e^x}$$
precisandone il dominio di definizione.

Soluzione. Osserviamo che la funzione f è definita sull'insieme $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, cerchiamo una primitiva definita sullo stesso insieme. Operando il cambio di variabile
$$e^x = t \qquad \text{ovvero} \qquad x = \log t,$$
si ha
$$\begin{aligned}\int \frac{e^{3\,x}+1}{e^{3\,x}-e^x}\,dx &= \int \frac{t^3+1}{t^3-t}\,\frac{1}{t}\,dt\\ &= \int \frac{t^3+1}{t^2\,(t^2-1)}\,dt\\ &= \int \frac{t^3+1}{t^2\,(t-1)\,(t+1)}\,dt.\end{aligned}$$

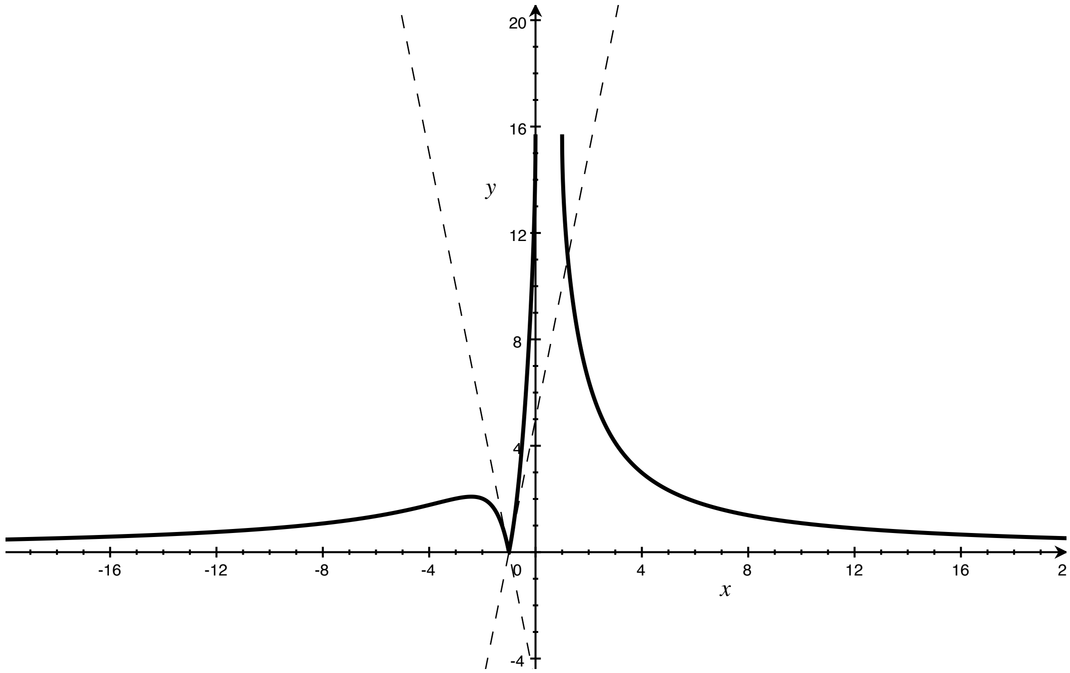

FIGURE 1. Il grafico della funzione f dell'Esercizio 11.

Per trovare una primitiva dell'ultima funzione, operiamo la decomposizione fratti semplici vista a lezione, ovvero cerchiamo quattro coefficienti A, B, C, D tali che

$$\frac{t^3+1}{t^2\,(t-1)\,(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{t+1}.$$

Moltitplicando per t^2 e poi prendendo il limite $t \to 0$, si trova

$$B = -1.$$

In modo analogo, si trova

$$C = 1 \qquad \text{e} \qquad D = 0.$$

Infine, sostituendo i valori trovati ed andando per identificazione, si trova anche $A = 0$. Abbiamo dunque

$$\int \frac{e^{3\,x}+1}{e^{3\,x}-e^x}\,dx = \int \left[-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t-1}\right]\,dt = \frac{1}{t} + \log|t-1|.$$

Tornando alla variabile originale, abbiamo che

$$F(x) = \frac{1}{e^x} + \log|e^x - 1|, \qquad \text{per } x \neq 0,$$

è una primitiva della funzione data. $\square$