Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA A
– PROVA SCRITTA –
20 FEBBRAIO 2023

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2022/2023

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si dica per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie seguente converge*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1\right)}{n^\alpha} \qquad \alpha > \frac{1}{2}$$

Esercizio 2. *Si trovino le soluzioni dell'equazione trigonometrica* $\cos x = \cos(2\,x)$

$$x = 2\,k\,\pi, \qquad x = \frac{2\,k\,\pi}{3} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 3. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x - x^2) - x}{2\sqrt{1 + x + x^2} - 2 - \sin x} = -2$$

Esercizio 4. *Si dica quali tra le seguenti affermazioni risultano corrette per* $x \to +\infty$

$$\boxed{x\,\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \sim 1 \qquad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \qquad \boxed{\log_{100} x = o(\sqrt{x})} \qquad x^2 = o(x) \qquad \boxed{x^{20} = o(e^x)}$$

Esercizio 5. *Si dica quali tra le seguenti serie risultano convergenti*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n^2-1} \qquad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n} \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right]} \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{2^n + 7^n}}$$

Esercizio 6. *Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di* $f(x) = \arcsin(x)$ *nel punto* $(1/2, f(1/2))$

$$y = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Esercizio 7. *Si calcolino*

$$\min_{x \in [0,4]} (e^{x-1} - x) = 0 \qquad\qquad \max_{x \in [0,4]} (e^{x-1} - x) = e^3 - 4$$

Esercizio 8. *Si trovi una primitiva F della funzione* $f(x) = x\,\sin x$

$$F(x) = -x\,\cos x + \sin x$$

Esercizio 9. *Si calcoli l'area dell'insieme* $E = \{(x,y) \,:\, x \in [0,1],\, 0 \le y \le \cos x\}$

$$\text{Area} = \int_0^1 \cos x\,dx = \sin 1$$

Esercizio 10. *Si dia lo sviluppo di Taylor all'ordine 3 centrato in 0 con resto di Peano della funzione seguente*

$$\frac{1}{1 - \sin x} = 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}\,x^3 + o(x^3) \qquad \textit{per } x \to 0$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (9 punti)**.** *Si consideri la funzione definita da*

$$f(x) = \left|\frac{x-2}{x^2-3}\right|.$$

(1) *Si determini il dominio di definizione D di f;*

(2) *si dica se f è pari, dispari o nessuna delle due;*

(3) *si calcolino i limiti di f nei punti di accumulazione di D, che non appartengono a D;*

(4) *si trovino eventuali asintoti orizzontali o verticali;*

(5) *si determini l'insieme D' in cui f è derivabile;*

(6) *si determinino gli intervalli di monotonia di f;*

(7) *si calcolino i limiti di f' nei punti di $D \setminus D'$;*

(8) *si trovino eventuali punti di massimo/minimo locale/assoluto di f.*

Si tracci infine il grafico di f.

Soluzione. Procediamo punto per punto

(1) Il dominio è dato da

$$D = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\},$$

dal momento che per $x = \sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$ il denominatore è nullo;

(2) la funzione non può essere pari, dal momento che per esempio

$$f(-1) = \left|\frac{-1-2}{(-1)^2-3}\right| = \frac{3}{2} \neq \frac{1}{2} = \left|\frac{1-2}{(1)^2-3}\right| = f(1).$$

La funzione non può nemmeno essere dispari, dal momento che pur essendo definita per $x = 0$, risulta

$$f(0) = \frac{2}{3} \neq 0;$$

(3) dobbiamo calcolare il limite per $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to \sqrt{3}$ e $x \to -\sqrt{3}$. Si ha

$$\left|\frac{x-2}{x^2-3}\right| \sim \left|\frac{1}{x}\right|, \qquad \text{per } x \to +\infty \text{ e } \qquad x \to \infty,$$

da cui

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x-2}{x^2-3}\right| = \lim_{x\to-\infty}\left|\frac{x-2}{x^2-3}\right| = 0.$$

Inoltre si ha

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\left|\frac{x-2}{x^2-3}\right| = \lim_{x\to-\sqrt{3}}\left|\frac{x-2}{x^2-3}\right| = +\infty.$$

Come prima cosa, può essere utile determinare il segno della quantità, dal momento che non si tratta di forme indeterminate e che, in virtù del valore assoluto, si tratta sempre di quantità positive;

(4) in base alla discussione precedente, si ha che

$$y = 0 \qquad \text{asintoto orizzontale,}$$

$$x = \sqrt{3} \qquad \text{e} \qquad x = -\sqrt{3} \text{ asintoti verticali;}$$

(5) osserviamo innanzitutto che la funzione f è la composizione delle due funzioni seguenti

$$f_1 : D \to \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad f_2 : \mathbb{R} \to [0, +\infty),$$

definite da

$$f_1(x) = \frac{x-2}{x^2-3} \qquad \text{e} \qquad f_2(x) = |x|.$$

In altre parole, si ha

$$f(x) = f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x)).$$

La funzione f_1 è derivabile sul proprio dominio di definizione D, mentre f_2 non è derivabile in 0. Di conseguenza, la funzione composta f non è derivabile nei punti x per cui

$$f_1(x) = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{x-2}{x^2-3} = 0.$$

Osservando che l'ultima quantità è nulla solo per $x = 2$, abbiamo quindi che la funzione f è derivabile su

$$D' = D \setminus \{2\} = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3},\, 2\}.$$

Al fine di calcolare la derivata di f, ci conviene adesso studiare il segno della quantità

$$\frac{x-2}{x^2-3}.$$

Osservando che

$$x - 2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \geq 2,$$

e che

$$x^2 - 3 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty),$$

si ottiene che

$$\frac{x-2}{x^2-3} \geq \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup [2, +\infty).$$

Di conseguenza possiamo scrivere

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-3}, & \text{se } x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup [2, +\infty), \\[2ex] \dfrac{2-x}{x^2-3}, & \text{se } x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2). \end{cases}$$

La derivata di f è dunque data da

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2 + 4\,x - 3}{(x^2-3)^2}, & \text{se } x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (2, +\infty), \\[2ex] \dfrac{x^2 - 4\,x + 3}{(x^2-3)^2}, & \text{se } x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2); \end{cases}$$

(6) al fine di determinare gli intervalli di monotonia, utilizziamo il *Test di monotonia* ed andiamo quindi a studiare il segno della derivata prima f'. Osserviamo che

$$\frac{-x^2 + 4\,x - 3}{(x^2-3)^2} \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 - 4\,x + 3 \leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 \leq x \leq 3.$$

Tenendo conto dell'espressione di f', abbiamo allora che

$$f \text{ è crescente su } (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (1, \sqrt{3}) \cup (2, 3),$$

e

$$f \text{ è decrescente su } (-\sqrt{3}, 1) \cup (\sqrt{3}, 2) \cup (3, +\infty).$$

Si osservi che i punti $x = 1$ e $x = 3$ sono a tangente orizzontale;

(7) in base alla discussione precedente, dobbiamo calcolare il limite di f' nel punto di non derivabilità 2. Si ha

$$\lim_{x \to 2^+} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{-x^2 + 4\,x - 3}{(x^2-3)^2} = 1,$$

e

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4\,x + 3}{(x^2-3)^2} = -1.$$

Quindi $x = 2$ risulta essere un punto angoloso, con rette “tangenti” date da

$$y = x - 2 \qquad \text{e} \qquad y = 2 - x;$$

(8) osserviamo che, dal punto (6), abbiamo che

$$x = 1 \text{ è punto di minimo locale,} \qquad x = 1 \text{ è punto di massimo locale.}$$

Inoltre, in base al punto (3), la funzione non è limitata superiormente, quindi f non ammette massimo assoluto e vale

$$\sup_{x \in D} f(x) = +\infty.$$

Infine, osserviamo che f è sempre positiva e si annulla soltanto per $x = 2$. Quindi $x = 2$ è punto di minimo assoluto e vale

$$\inf_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D} f(x) = f(2) = 0.$$

Possiamo adesso tracciare il grafico della funzione in esame e concludere così l'esercizio. □

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Si calcoli l'integrale seguente*

$$\int_0^1 x\,(\arctan x)^2\,dx.$$

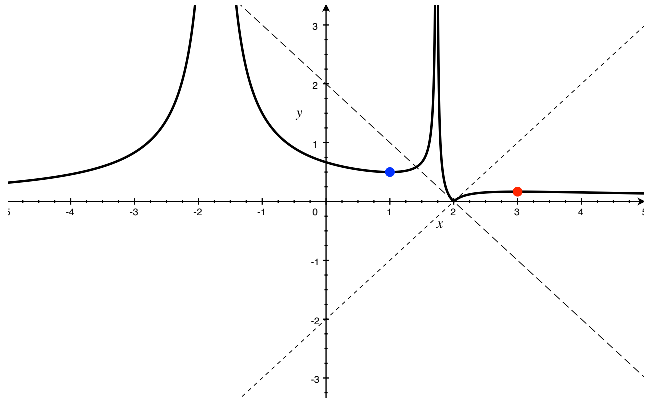

FIGURE 1. Il grafico della funzione dell'Esercizio 11. In evidenza, i punti del grafico $(1, f(1))$ (in blu) e $(3, f(3))$ (in rosso). Le due rette tratteggiate rappresentano le due "tangenti limite" nel punto angoloso $x = 2$.

Soluzione. Utilizziamo la formula di integrazione per parti

$$\int_0^1 f'(x)\, g(x)\, dx = \Big[f(x)\, g(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 f(x)\, g'(x)\, dx,$$

facendo la scelta

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \qquad \text{e} \qquad g(x) = (\arctan x)^2.$$

Si ottiene allora

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\,(\arctan x)^2\, dx &= \left[\frac{x^2}{2}\,(\arctan x)^2\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,\frac{2}{1+x^2}\,\arctan x\, dx \\
&= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,\arctan x\, dx \\
&= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,\arctan x\, dx \\
&= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \arctan x\, dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\arctan x\, dx.
\end{aligned}$$

Osserviamo adesso che

$$\frac{1}{1+x^2}\,\arctan x = \frac{d}{dx}\frac{(\arctan x)^2}{2},$$

da cui otteniamo allora

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\arctan x\, dx = \left[\frac{(\arctan x)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}.$$

Usando questo fatto nella catena di uguaglianze precedenti, abbiamo ottenuto

$$\int_0^1 x\,(\arctan x)^2\, dx = \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \arctan x\, dx + \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi^2}{16} - \int_0^1 \arctan x\, dx.$$

L'ultimo integrale è stato visto anche a Lezione e si può calcolare usando nuovamente la formula di integrazione per parti, prendendo stavolta

$$f(x) = x \qquad \text{e} \qquad g(x) = \arctan x.$$

Si ottiene allora

$$\int_0^1 \arctan x\, dx = \Big[x\,\arctan x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\,\log(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\,\log 2.$$

In definitiva, si ottiene

$$\int_0^1 x\,(\arctan x)^2\, dx = \frac{\pi^2}{16} - \int_0^1 \arctan x\, dx = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \log\sqrt{2}.$$

Questo conclude l'esercizio. $\square$