Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA A
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2017/2018

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Trovare l'insieme $\mathcal{S}$ di* **tutte** *le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione* $\cos(3x) = \cos x$

$$\mathcal{S} = \left\{x = \frac{\pi}{2} + k\,\frac{\pi}{2}\ :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Esercizio 2. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2\,n}\frac{\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{n^3}}{\sqrt{n}} = \frac{3}{2\,e^2}$$

Esercizio 3. *Dire per quali $\alpha > 0$ l'integrale generalizzato seguente risulta convergente*

$$\int_0^1 \frac{x^3+x^2}{x^\alpha - \log(1+x^\alpha)}\,dx \qquad 0 < \alpha < \frac{3}{2}$$

Esercizio 4. *Dire per quali $\alpha > 0$ la serie seguente risulta convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1 - \sin\frac{1}{n}\right)^2 \qquad \alpha > \frac{1}{2}$$

Esercizio 5. *Si trovino l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione $f(x) = x + x^{-1}$ sull'insieme* $(0,+\infty)$

$$\sup_{(0,+\infty)} f = +\infty \qquad\qquad \inf_{(0,+\infty)} f = 2$$

Esercizio 6. *Si calcoli il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x+x^3) - \sin^3 x - \log(1+x)}{\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2} - \cos(x^2)\right)^2} = -\frac{9}{4}$$

Esercizio 7. *Dare lo sviluppo di Taylor fino all'ordine 3 centrato in 0 con resto di Peano, della funzione*

$$f(x) = \frac{1}{1-\log(1+x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Esercizio 8. *Dire quali tra le seguenti serie numeriche risultano convergenti*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(1/n)}{\log n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi\,n)}{\sqrt[10]{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(12)^n}{n!}$$

Esercizio 9. *Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \arccos(x+2)$ nel punto* $(-2, \pi/2)$.

$$y = \frac{\pi}{2} - 2 - x$$

Esercizio 10. *Si trovi una primitiva F della funzione $f(x) = x^2\,e^x$.*

$$F(x) = (x^2 - 2\,x + 2)\,e^x$$

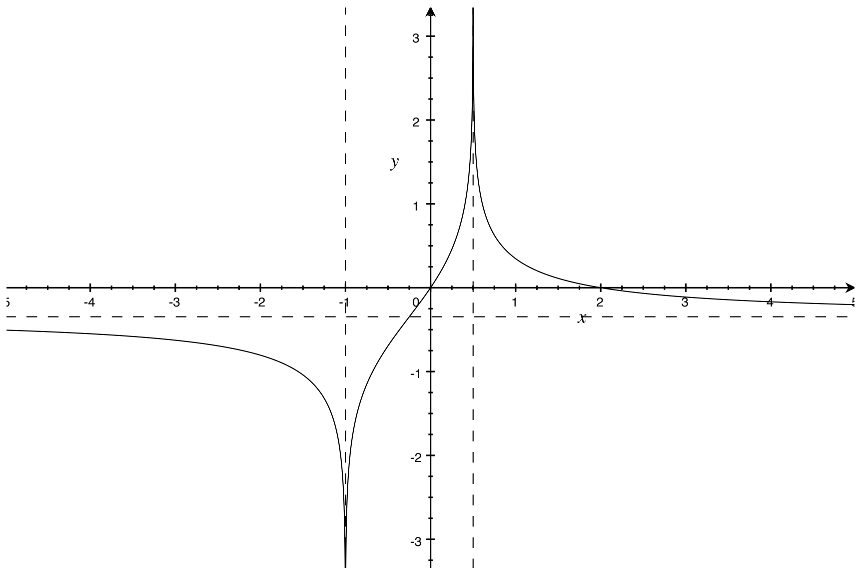

FIGURE 1. Il grafico della funzione dell'Esercizio 11

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti). *Studiare la funzione*

$$x \mapsto \log \sqrt{\left|\frac{x+1}{2\,x-1}\right|}$$

tracciandone un grafico qualitativo quanto più possibile preciso.

Domanda bonus (2 punti): si dica se la funzione precedente è invertibile

- *in caso affermativo, si calcoli la sua funzione inversa;*
- *in caso negativo, si trovi un intervallo sulla quale la funzione diventa invertibile e calcolare la sua inversa.*

Soluzione. La funzione è definita sull'insieme

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}.$$

Su D, essa è continua e derivabile almeno due volte. La funzione ha due asintoti verticali

$$x = -1 \qquad \text{e} \qquad x = \frac{1}{2},$$

e l'asintoto orizzontale

$$y = -\frac{1}{2}\log 2.$$

La funzione è crescente per

$$-1 < x < \frac{1}{2},$$

e decrescente altrimenti. La funzione è concava sugli intervalli

$$(-\infty, -1) \qquad \text{e} \qquad \left(-1, -\frac{1}{4}\right)$$

mentre è convessa su

$$\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Si omettono i calcoli che portano a queste considerazioni e si allega grafico della funzione. □

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Si trovi una primitiva definita sull'intervallo* $(-\pi, \pi)$ *della funzione*

$$x \mapsto \frac{1}{2 + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Soluzione. Una possibile primitiva è data da

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,\tan\frac{x}{2}\right), \qquad x \in (-\pi, \pi).$$

Per trovarla, bisogna ricordarsi che

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

e

$$\cos(2\,\arctan t) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Abbiamo dunque, usando il cambio di variabile

$$x = 2\,\arctan t,$$

che vale

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2 + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx = \int \frac{2}{5 - \cos x}\,dx &= \int \frac{2}{5 - \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}}\,\frac{2}{1 + t^2}\,dt \\
&= \int \frac{4}{4 + 6\,t^2}\,dt \\
&= \int \frac{1}{1 + \frac{3}{2}\,t^2}\,dt \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}}\,\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,t\right),
\end{aligned}$$

da cui la conclusione, osservando che

$$t = \tan\frac{x}{2}, \qquad \text{se } x \in (-\pi, \pi).$$

□