Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA A
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2019/2020

`Libri, appunti e calcolatrici` **`non ammessi`**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione* $f(x) = \arccos(x+1)$ *nel punto* $(-1/2, \pi/3)$.

$$y = \frac{\pi}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Esercizio 2. *Si trovi una primitiva* F *della funzione* $f(x) = x\,e^x$.

$$F(x) = (x-1)\,e^x$$

Esercizio 3. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2\,n+1} = e^2$$

Esercizio 4. *Trovare l'insieme* S *delle soluzioni dell'equazione* $\log_9(2\,x-1) = \log_3 x$

$$S = \{1\}$$

Esercizio 5. *Si trovino* sup *e* inf *della funzione* $f(x) = \arctan(1/x^2)$ *sull'intervallo* $(1, +\infty)$

$$\sup_{(1,+\infty)} f = \frac{\pi}{4} \qquad \inf_{(1,+\infty)} f = 0$$

Esercizio 6. *Si dica per quali* α *la serie seguente risulta convergente*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{((2\,n)!)^\alpha} \qquad \alpha > \frac{1}{2}$$

Esercizio 7. *Si dica quali tra le seguenti funzioni ammettono un minimo assoluto in* $x = 0$

$$\boxed{f(x) = \arcsin(|x|)} \qquad \boxed{g(x) = x^2 + 1} \qquad h(x) = -(x^2-1)^2 \qquad \boxed{k(x) = \arctan(x^2+1)}$$

Esercizio 8. *Si calcoli il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1 - x)\,\sin(x+1)}{\log(1-x) + x} = -\sin(1)$$

Esercizio 9. *Si dia la sviluppo di Taylor all'ordine* 3 *centrato in* $x = 0$ *con resto di Peano della funzione*

$$\log(1 + x - x^2) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

Esercizio 10. *Dire quali tra le seguenti serie numeriche risultano convergenti*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + \log n}{n\,6^n} \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n + 2}} \qquad \boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2\,\log_2 n}}$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = \sqrt[3]{|x^3 - 1|}$$

avendo cura di tracciarne un grafico quanto più preciso possibile.

Soluzione. La funzione in esame è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è ivi continua, in quanto composizione di funzioni continue. Osserviamo anche che

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

e vale $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$. Quindi otteniamo che

$$\inf_{\mathbb{R}} f = \min_{\mathbb{R}} f = 0,$$

e $x = 1$ è l'unico punto di minimo globale. Osservando che

$$|x^3 - 1| \sim |x|^3, \qquad \text{per } |x| \to +\infty,$$

si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Osserviamo anche che f has due asintoti obliqui, per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$, rispettivamente. Infatti, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{x} = 1,$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \Big[f(x) - x\Big] = \lim_{x\to+\infty} \Big[\sqrt[3]{x^3 - 1} - x\Big] &= \lim_{x\to+\infty} x \left[\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}} - 1\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty} x \left(-\frac{1}{3\,x^3}\right) = 0.\end{aligned}$$

Questo mostra che $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Si ha anche

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{-x^3 - 1}}{x} = -1,$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \Big[f(x) + x\Big] = \lim_{x\to-\infty} \Big[\sqrt[3]{1 - x^3} + x\Big] &= \lim_{x\to-\infty} x \left[-\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}} + 1\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty} x \left(\frac{1}{3\,x^3}\right) = 0,\end{aligned}$$

da cui $y = -x$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

Studiamo adesso gli intervalli di monotonia della funzione f, utilizzando il *test di monotonia.* Per questo, dobbiamo prima analizzare il dominio di derivabilità della funzione. Ricordando che sia la radice cubica che il valore assoluto non sono derivabili quando il loro argomento si annulla, otteniamo che f è derivabile per $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Osservando che

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 - 1}, & \text{se } x \geq 1, \\ \\ \sqrt[3]{1 - x^3}, & \text{se } x < 1, \end{cases}$$

abbiamo allora che la derivata di f è data da

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{(x^3 - 1)^{\frac{2}{3}}}, & \text{se } x > 1, \\ \\ -\dfrac{x^2}{(1 - x^3)^{\frac{2}{3}}}, & \text{se } x < 1, \end{cases}$$

Quindi f è decrescente per $x < 1$ e crescente per $x > 1$. Si osservi che $x = 0$ è un punto a tangente orizzontale, che non è ne' di massimo ne' di minimo.

Infine, analizziamo il punto di non derivabilità $x = 1$: abbiamo

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to1^+} f'(x) = +\infty,$$

quindi $x = 1$ è un punto di cuspide. $\square$

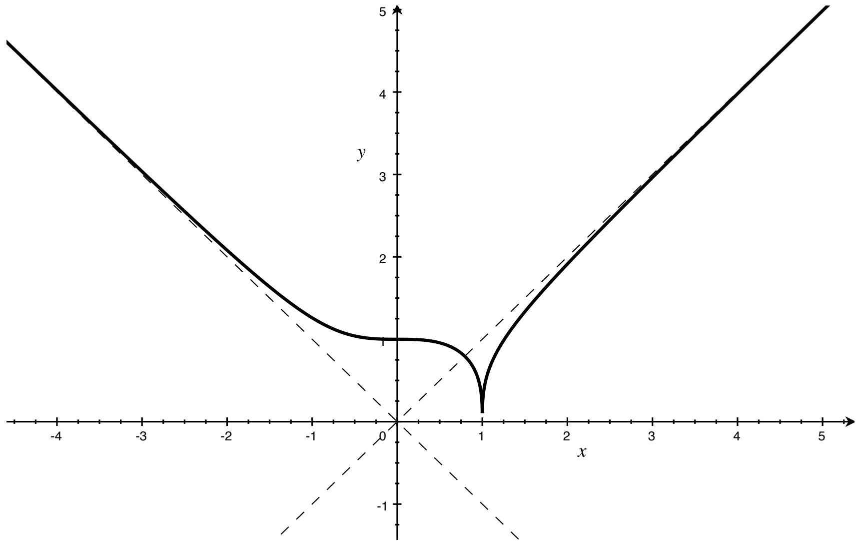

FIGURE 1. Il grafico della funzione dell'Esercizio 11. In evidenza i due asintotici obliqui. Si osservi il punto a tangente orizzontale $x = 0$.

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Si calcoli l'area dell'insieme*

$$E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0, 1],\, 0 \le y \le \sqrt{3 + 2\,x + x^2}\Big\}.$$

Soluzione. Ricordando la costruzione dell'integrale di Riemann, si tratta di calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \sqrt{3 + 2\,x + x^2}\, dx.$$

Osserviamo che

$$3 + 2\,x + x^2 = 2 + (1 + x)^2,$$

quindi operando il cambio di variabile $t = x + 1$ abbiamo

$$\int_0^1 \sqrt{3 + 2\,x + x^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{2 + t^2}\, dt.$$

Per calcolare questo integrale, raccogliamo $\sqrt{2}$ e scriviamo

$$\int_1^2 \sqrt{2 + t^2}\, dt = \sqrt{2} \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Facciamo adesso il cambio di variabile

$$s = \frac{t}{\sqrt{2}},$$

così che otteniamo

$$\int_1^2 \sqrt{2 + t^2}\, dt = \sqrt{2} \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{t^2}{2}}\, dt = 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + s^2}\, ds.$$

L'ultimo integrale è stato visto a lezione, si può calcolare usando il cambio di variabile

$$s = \sinh \tau \qquad \text{e quindi} \qquad ds = \cosh \tau\, d\tau.$$

Abbiamo allora

$$\int_0^1 \sqrt{3 + 2\,x + x^2}\, dx = 2 \int_{\operatorname{arg\,sinh} \frac{1}{\sqrt{2}}}^{\operatorname{arg\,sinh} \sqrt{2}} \cosh^2 \tau\, d\tau,$$

dove ricordiamo che $\operatorname{arg\,sinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione inversa del seno iperbolico, definita da

$$\operatorname{arg\,sinh}(\tau) = \log\Big(\tau + \sqrt{\tau^2 + 1}\Big).$$

Per concludere l'esercizio, ci manca da trovare una primitiva di $\cosh^2 \tau$. Possiamo usare una integrazione per parti

$$\begin{aligned}
\int \cosh^2 \tau\, d\tau &= \int \cosh \tau\, \cosh \tau\, d\tau \\
&= \sinh \tau\, \cosh \tau - \int \sinh^2 \tau\, d\tau \\
&= \sinh \tau\, \cosh \tau - \int \cosh^2 \tau\, d\tau + \int d\tau,
\end{aligned}$$

da cui quindi otteniamo che
$$\frac{\sinh\tau\,\cosh\tau+\tau}{2},$$
è una primitiva di $\cosh^2\tau$. In conclusione, abbiamo
$$\begin{aligned}\int_0^1\sqrt{3+2\,x+x^2}\,dx &= 2\int_{\operatorname{arg\,sinh}\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\operatorname{arg\,sinh}\sqrt{2}}\cosh^2\tau\,d\tau\\ &= [\sinh\tau\,\cosh\tau+\tau]_{\operatorname{arg\,sinh}\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\operatorname{arg\,sinh}\sqrt{2}}\\ &= \sqrt{2}\,\cosh(\operatorname{arg\,sinh}\sqrt{2})+\operatorname{arg\,sinh}\sqrt{2}\\ &-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\cosh\left(\operatorname{arg\,sinh}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\operatorname{arg\,sinh}\frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$
L'ultima espressione può essere semplificata, usando la definizione di $\operatorname{arg\,sinh}$ e ricordando che
$$\cosh(\operatorname{arg\,sinh}t)=\sqrt{1+t^2}.$$
Questo conclude l'esercizio. $\square$