Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA A
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2018/2019

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si trovi una primitiva F della funzione $f(x) = \arctan(2\,x)$.*

$$F(x) = x\,\arctan(2\,x) - \frac{1}{4}\,\log(1+4\,x^2)$$

Esercizio 2. *Trovare l'insieme S delle soluzioni dell'equazione $2^{\cos x} = \sqrt{2}$*

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}\,:\,x = \frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi,\ z \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}\,:\,x = -\frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi,\ z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Esercizio 3. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}\,(\sqrt{n^2+1} - n) = \frac{1}{2\,e}$$

Esercizio 4. *Si trovino* sup *e* inf *della funzione $f(x) = (x^2+1)/(x^2-1)$ sull'intervallo $(-\infty,-1)$*

$$\sup_{(-\infty,-1)} f = +\infty \qquad\qquad \inf_{(-\infty,-1)} f = 1$$

Esercizio 5. *Si dica per quali α la serie seguente risulta convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha\,n}}{(2\,n)!} \qquad \alpha < 2$$

Esercizio 6. *Sia f derivabile in $x = 0$, tale che $f(0) = 1$, $f'(0) = 3$. Supponendo f invertibile, dare lo sviluppo di Taylor di f^{-1} all'ordine 1 centrato in 1, con resto di Peano*

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3} + o(y-1)$$

Esercizio 7. *Si calcoli il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - \sin(x)}{\log(1-x) - 1 + e^x} = 1$$

Esercizio 8. *Si dia la sviluppo di Taylor all'ordine 3 centrato in $x = 0$ con resto di Peano della funzione*

$$\sinh(x+x^2) = x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Esercizio 9. *Dire quali tra le seguenti serie numeriche risultano convergenti*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,\log(n!)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3\,n}}{(2\,n)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\,\sin\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right)$$

Esercizio 10. *Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \arccos(x+1)$ nel punto $(-1/2, \pi/3)$.*

$$y = \frac{\pi}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Studiare la funzione*

$$f(x)=\left|\sqrt{x^2+|x|+2}-2\right|,$$

avendo cura di tracciarne un grafico quanto più preciso possibile.

Soluzione. Osserviamo che la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, si tratta di una composizione di funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$, dunque è anch'essa continua. Osserviamo inoltre che

$$f(-x)=f(x),\qquad \text{per ogni } x\in\mathbb{R},$$

ovvero f è una funzione pari. Possiamo quindi ridurci a studiare f per $x\ge 0$, che diventa quindi

$$f(x)=\left|\sqrt{x^2+x+2}-2\right|,\qquad \text{per } x\ge 0.$$

Osserviamo che

$$\sqrt{x^2+x+2}-2\ge 0\qquad\iff\qquad x^2+x-2\ge 0.$$

Tenendo conto della restrizione $x\ge 0$, l'ultima condizione è equivalente a $x\ge 1$. Abbiamo dunque

$$f(x)=\left|\sqrt{x^2+x+2}-2\right|=\begin{cases}\sqrt{x^2+x+2}-2, & \text{se } x\ge 1,\\ \\ 2-\sqrt{x^2+x+2}, & \text{se } 0\le x<1.\end{cases}$$

La funzione f è sempre positiva e si annulla solo per $x=1$ (per $x\ge 0$). Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}{x}=1,$$

ed anche

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2+x+2}-2-x]&=\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-\frac{2}{x}-1\right)\\ &=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{2\,x}-\frac{2}{x}-1+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=-\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Quindi il grafico di f ha l'asintoto obliquo $y=x-3/2$ per $x\to+\infty$. Per simmetria, si ha che $y=-x-3/2$ è asintoto obliquo, per $x\to-\infty$.

Studiamo adesso il dominio di derivabilità della funzione: cominciamo restringendoci a $x\ge 0$. Ricordando che il valore assoluto non è derivabile nei punti in cui il suo argomento si annulla, si ha che f non è derivabile per i punti $x>0$ tali che

$$\sqrt{x^2+x+2}-2=0,$$

ovvero, per la discussione precedente, f non è derivabile per $x=1$. Per simmetria, f non è derivabile nemmeno per $x=-1$. Infine, il punto $x=0$ è anch'esso un punto di non derivabilità, dal momento che la funzione f contiene il termine $|x|$, che non è derivabile per $x=0$. Abbiamo quindi che f è derivabile per $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,1\}$.

Studiamo adesso gli intervalli di monotonia di f: possiamo restringerci a $x\ge 0$. Per $x\ne 1$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2\,x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}, & \text{se } x>1,\\ \\ -\dfrac{2\,x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}, & \text{se } 0<x<1,\end{cases}$$

ovvero abbiamo

$$f'(x)>0\quad \text{per } x>1\qquad \text{e}\qquad f'(x)<0\quad \text{per } 0<x<1.$$

Quindi f è crescente per $x\ge 1$ e decrescente per $0\le x\le 1$.

Infine, osserviamo che in corrispondenza dei punti di non derivabilità $x=0$, $x=1$ e $x=-1$ il grafico di f presenta dei punti angolosi. Infatti, si ha

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\frac{3}{4}\qquad \text{e}\qquad \lim_{x\to 1^-} f'(x)=-\frac{3}{4},$$

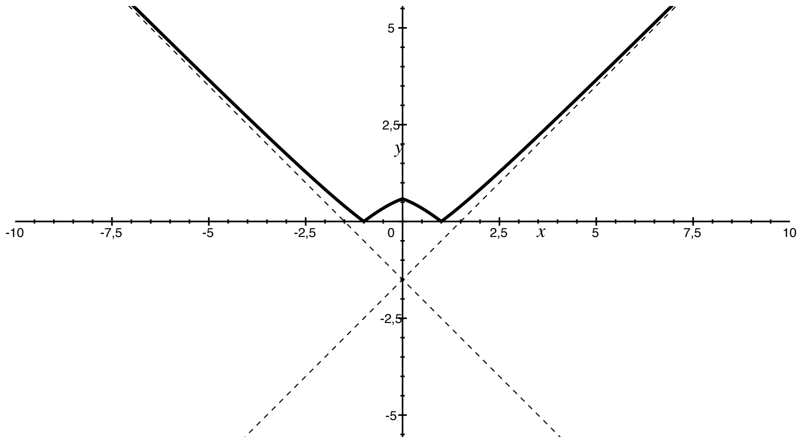

FIGURA 1. Il grafico di f, con i due asintoti obliqui.

ed anche

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$\square$

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Si calcoli il seguente integrale*

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{x^2+2\,x+2}\,dx.$$

Soluzione. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \sqrt{x^2+2\,x+2}\,dx = \int_{-1}^{0} \sqrt{(x+1)^2+1}\,dx &\overset{(x+1=t)}{=} \int_{0}^{1} \sqrt{t^2+1}\,dt \\
&\overset{(t=\sinh s)}{=} \int_{0}^{\arg\sinh(1)} \sqrt{1+\sinh^2 s}\,\cosh s\,ds \\
&= \int_{0}^{\arg\sinh(1)} \sqrt{\cosh^2 s}\,\cosh s\,ds \\
&= \int_{0}^{\arg\sinh(1)} \cosh^2 s\,ds.
\end{aligned}$$

Osserviamo adesso che, integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\arg\sinh(1)} \cosh^2 s\,ds = \int_{0}^{\arg\sinh(1)} \cosh s\,\cosh s\,ds &= \Big[\sinh s\,\cosh s\Big]_0^{\arg\sinh(1)} - \int_{0}^{\arg\sinh(1)} \sinh^2 s\,ds \\
&= \Big[\sinh s\,\cosh s\Big]_0^{\arg\sinh(1)} - \int_{0}^{\arg\sinh(1)} (\cosh^2 s - 1)\,ds
\end{aligned}$$

ovvero

$$2\int_{0}^{\arg\sinh(1)} \cosh^2 s\,ds = \Big[\sinh s\,\cosh s\Big]_0^{\arg\sinh(1)} + \int_{0}^{\arg\sinh(1)} ds.$$

In definitiva, si ha

$$\int_{0}^{\arg\sinh(1)} \cosh^2 s\,ds = \frac{1}{2}\,\left(\cosh(\arg\sinh(1)) + \arg\sinh(1)\right).$$

Ricordando che

$$\arg\sinh(x) = \log(x+\sqrt{x^2+1}) \qquad \text{e} \qquad \cosh(\arg\sinh(x)) = \sqrt{1+\sinh^2(\arg\sinh(x))} = \sqrt{1+x^2}$$

otteniamo in definitiva

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{x^2+2\,x+2}\,dx = \int_{0}^{\arg\sinh(1)} \cosh^2 s\,ds = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2}).$$

Questo conclude l'esercizio. $\square$