Appunti di

Analisi Matematica

per Ingegneria

Lorenzo Brasco

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Ferrara
Via Machiavelli 35, 44121 Ferrara, Italy
E-mail address: lorenzo.brasco@unife.it

Indice

Capitolo 1

Strumenti di base

1. Quantificatori

Fissiamo innanzitutto un po' di notazioni e di linguaggio matematico di base. Questo ci permetterà di presentare con chiarezza gli argomenti che seguiranno.

- il simbolo $\forall$ vuol dire "*per ogni*"
- il simbolo $\exists$ vuol dire "*esiste*"
- il simbolo $\exists!$ vuol dire "*esiste ed è unico*"
- spesso useremo il simbolo ":" per dire "*tale che*"

Introduciamo ancora qualche altra notazione: useremo la barra "/" per negare un simbolo. Ad esempio

$$\nexists \quad \text{vuol dire "non esiste".}$$

Vedremo altri esempi di negazione in seguito.

2. Un po' di logica

In matematica, una *proposizione* $\mathcal{P}$ è un enunciato di cui si può decidere in modo univoco se esso è vero (V) oppure falso (F). Facciamo subito un esempio: useremo il simbolo $\mathbb{N}$ per indicare l'insieme dei numeri naturali (vedi Sezione 3).

Esempio 1.2.1 ("Matematizzare" una proposizione)**.** Proviamo a formalizzare in linguaggio matematico la proposizione seguente

$$\mathcal{P} = \text{" esiste un numero naturale più grande di tutti gli altri''}$$

Possiamo riscrivere $\mathcal{P}$ nel modo seguente:

$$\mathcal{P} = \text{"}\exists M \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq M''$$

Beninteso, **questa proposizione è falsa** (sapreste dire perché?).

Definizione 1.2.2 (Negazione)**.** Se $\mathcal{P}$ è una proposizione, si chiama *negazione di* $\mathcal{P}$ la nuova proposizione (che denoteremo con "non $\mathcal{P}$") definita dalla *tavola di verità* seguente

$\mathcal{P}$	non $\mathcal{P}$
V	F
F	V

In altre parole, non $\mathcal{P}$ è la proposizione che è vera se $\mathcal{P}$ è falsa e viceversa.

Esempio 1.2.3 (Negare una proposizione)**.** Torniamo alla proposizione $\mathcal{P}$ dell'Esempio 1.2.1. Vogliamo mostrare che $\mathcal{P}$ è falsa. Per farlo, *ci basta provare che* non $\mathcal{P}$ *è vera.* Bisognerà quindi scrivere la negazione di $\mathcal{P}$ e dimostrare che questa nuova proposizione è vera. Neghiamo $\mathcal{P}$:

$$\text{non}\,\mathcal{P} = \text{“}\forall M \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \,:\, M < n''.$$

Adesso è facile dimostrare che non $\mathcal{P}$ è vera. Comunque scelto un numero $M \in \mathbb{N}$, prendo $n = M+1$. Esso è ancora un numero di $\mathbb{N}$ ed inoltre $M < n$. Quindi non $\mathcal{P}$ è vera, ovvero $\mathcal{P}$ è falsa.

Osservazione 1.2.4. L'esempio precedente ci da un'idea di come fare a negare una proposizione che contenga dei quantificatori, quali $\forall$ e $\exists$. Per esempio, notiamo qua sotto due regole per negare una tale proposizione:

- $\forall$ diventa $\exists$;
- $\exists$ diventa $\forall$.

Date due proposizioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, se ne può costruire una terza, usando un *connettivo logico*. Vediamo i principali esempi.

Definizione 1.2.5 (Congiunzione)**.** Si chiama *congiunzione di* $\mathcal{P}$ *e* $\mathcal{Q}$ la nuova proposizione (che denoteremo "$\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$") definita dalla tavola di verità seguente

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Altrimenti detto, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ è la proposizione che è vera soltanto se entrambe $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono vere (e falsa in tutti gli altri casi).

Definizione 1.2.6 (Disgiunzione)**.** Si chiama *disgiunzione di* $\mathcal{P}$ *e* $\mathcal{Q}$ la proposizione (che denoteremo "$\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$") definita dalla seguente tavola di verità

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Altrimenti detto, $\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$ è la proposizione che è vera se almeno una tra $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ è vera (e falsa se entrambe $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ lo sono).

Esempio 1.2.7 (Connettivi e negazione)**.** È facile vedere che

$$\text{non}(\mathcal{P}\ \text{o}\ \mathcal{Q}) = (\text{non}\,\mathcal{P})\ \text{e}\ (\text{non}\,\mathcal{Q}), \tag{1.2.1}$$

e che

$$\text{non}(\mathcal{P}\,\text{e}\,\mathcal{Q}) = (\text{non}\,\mathcal{P})\,\text{o}\,(\text{non}\,\mathcal{Q}). \tag{1.2.2}$$

È sufficiente fare le tavole di verità corrispondenti

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	non $\mathcal{P}$	non $\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$	non($\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$)	(non $\mathcal{P}$) e (non $\mathcal{Q}$)
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

e le ultime due colonne coincidono, dimostrando quindi (1.2.1). L'altra relazione (1.2.2) si dimostra in modo simile (*fare come esercizio*).

Definizione 1.2.8 (Implicazione)**.** La proposizione "$\mathcal{P}$ *implica* $\mathcal{Q}$" (che denoteremo "$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$") coincide formalmente con la proposizione "$\mathcal{Q}$ o (non $\mathcal{P}$)". Essa è definita quindi tramite la tavola di verità seguente

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	non $\mathcal{P}$	$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

In particolare, si vede che se $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ è vera e se $\mathcal{P}$ è anch'essa vera, allora necessariamente anche $\mathcal{Q}$ deve esserlo. Si dice allora che

- "*$\mathcal{P}$ è una condizione sufficiente perché $\mathcal{Q}$ sia vera*"
- "*$\mathcal{Q}$ è una condizione necessaria perché $\mathcal{P}$ sia vera*"

Osservazione 1.2.9 (Cosa sono i Teoremi?)**.** Il concetto di "implicazione" è importantissimo per il nostro corso. Infatti, tutti i Teoremi ed i risultati che enunceremo nel seguito, saranno delle proposizioni della forma

$$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q},$$

dove

$$\mathcal{P} = \text{“ipotesi del Teorema''},$$
$$\mathcal{Q} = \text{“tesi del Teorema''}.$$

In tali casi, dimostrare un Teorema vorrà dire "dimostrare che $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ è vera", ovvero dovremo dimostrare che supponendo vere le ipotesi, allora necessariamente la tesi deve essere anch'essa vera.

Esempio 1.2.10 (Implicazione)**.** Consideriamo le due proposizioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ seguenti:

$$\mathcal{P} = \text{“la mia macchina è una Ferrari''}$$

e

$$\mathcal{Q} = \text{“la mia macchina è italiana''}.$$

Dal momento che le Ferrari sono macchine italiane, si vede subito che se $\mathcal{P}$ è vera, allora anche $\mathcal{Q}$ è vera. Abbiamo dunque che l'implicazione

$$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q},$$

è vera. Al contrario, una vettura può essere italiana, senza necessariamente essere una Ferrari. Quindi l'implicazione

$$\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P},$$

è falsa.

Usando la definizione di implicazione, si ha

$$\text{“non } \mathcal{Q} \Longrightarrow \text{non } \mathcal{P}'' = \text{“non } \mathcal{P} \text{ o non (non } \mathcal{Q})'' = \text{“} \mathcal{Q} \text{ o non } \mathcal{P}'' = \text{“} \mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}''.$$

In altre parole, si ha che

$$\text{“}\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}'' = \text{“non } \mathcal{Q} \Longrightarrow \text{non } \mathcal{P}''.$$

Quindi, dovendo dimostrare che “$\mathcal{P}$ *implica* $\mathcal{Q}$” è vera, si può equivalentemente mostrare che “non $\mathcal{Q}$ *implica* non $\mathcal{P}$” è vera.

Vediamo con un esempio, come possiamo sfruttare questa osservazione.

Esempio 1.2.11 (Una proprietà dei numeri naturali)**.** Consideriamo la seguente proposizione

$$\text{“}\textit{se } n \in \mathbb{N} \textit{ è tale che } n^2 \textit{ è pari, allora } n \textit{ è pari}''.$$

Supponiamo di voler dimostrare che questa proposizione è vera. Osserviamo che scrivendo

$$\mathcal{P} = \text{“}n^2 \text{ è pari}'' \qquad \text{e} \qquad \mathcal{Q} = \text{“}n \text{ è pari}'',$$

la proposizione iniziale è della forma $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$. Per dimostrare che questa è vera, possiamo in modo equivalente dimostrare che

$$\text{non } \mathcal{Q} \Longrightarrow \text{non } \mathcal{P},$$

è vera. In altre parole, per dimostrare la proposizione iniziale, possiamo equivalentemente dimostrare che

$$\text{“}\textit{se } n \in \mathbb{N} \textit{ è dispari, allora } n^2 \textit{ è dispari}''$$

Dimostriamo questa implicazione: sia n un numero dispari. Allora esso si scriverà nella forma

$$n = 2\,k + 1, \qquad \text{per un certo } k \in \mathbb{N}.$$

Facendo il quadrato, si ottiene

$$n^2 = 4\,k^2 + 2\,k + 1.$$

Si osservi che $4\,k^2$ è divisibile per 2, quindi pari; ugualmente $2\,k$ è divisibile per 2, quindi pari. La loro somma $4\,k^2 + 2\,k$ è quindi anch'essa pari. Abbiamo quindi che il suo successivo, ovvero $4\,k^2 + 2\,k + 1$ deve essere dispari. Ma quest'ultimo coincide proprio con n^2, che è quindi dispari, come volevamo.

Definizione 1.2.12 (Equivalenza)**.** La proposizione “$\mathcal{P}$ *è equivalente a* $\mathcal{Q}$” (che denoteremo “$\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$”) coincide con la proposizione “$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{Q}$”. Essa è dunque definita dalla seguente tavola di verità

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$	$\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

In particolare, se $\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$ è vera, si dice allora che $\mathcal{P}$ è vera se e soltanto se $\mathcal{Q}$ è vera, oppure che

$$\text{“}\mathcal{P} \textit{ è una condizione necessaria e sufficiente per } \mathcal{Q}\text{”}$$

Esempio 1.2.13 (Equivalenza)**.** Consideriamo $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ le due proposizione seguenti

$$\mathcal{P} = \text{“un quadrato ha area 1 } m^2{}''$$

e

$$\mathcal{Q} = \text{“un quadrato ha il lato lungo 1 } m''.$$

Stavolta possiamo dire che

$$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$$

grazie alla formula che ci da l'area del quadrato in funzione della lunghezza del lato.

Memento. Fate sempre attenzione ad utilizzare il simbolo di doppia implicazione "$\iff$" in modo corretto.

Esempio 1.2.14 (Un errore tipico)**.** Diamo l'esempio di un errore tipico nell'utilizzo del simbolo "$\iff$". Supponiamo di dover risolvere il seguente esercizio (molto semplice): trovare tutte le soluzioni x dell'equazione

$$x^2 = 1.$$

Può succedere che uno studente un po' distratto abbia voglia di scrivere

$$\text{“}x^2 = 1 \quad \iff \quad x = 1''$$

e di concluderne quindi che $x = 1$ è l'unica soluzione. Ma **questo non è corretto!** In questo caso, la sola implicazione che è vera è la seguente

$$\text{“}x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 1'',$$

che non permette di completare l'esercizio (stiamo perdendo la soluzione $x = -1$). La soluzione corretta è

$$\text{“}x^2 = 1 \quad \iff \quad x = 1 \text{ oppure } x = -1''$$

3. Numeri naturali

L'insieme dei numeri naturali è denotato con la lettera $\mathbb{N}$. Detto in parole povere, $\mathbb{N}$ consiste dell'insieme dei numeri che si usano di solito per contare, i.e.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

In termini più rigorosi, l'insieme $\mathbb{N}$ può essere descritto attraverso i cosiddetti *assiomi di Peano*:

(1) 0 è un numero naturale, ovvero $0 \in \mathbb{N}$;

(2) il successivo di un numero naturale è anch'esso un numero naturale, ovvero

$$n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad n + 1 \in \mathbb{N};$$

(3) 0 non è il successivo di nessuno numero naturale;

(4) numeri naturali diversi hanno successivi diversi, ovvero

$$n \neq m \quad \Longrightarrow \quad n + 1 \neq m + 1 :$$

(5) se A è un insieme di numeri naturali che contiene 0 ed il successivo di ogni suo numero, allora $A = \mathbb{N}$.

L'assioma (5) sarà molto utile per un tipo di dimostrazioni, dette *per induzione*. Spieghiamo meglio questo concetto: supponiamo di avere una proposizione $\mathcal{P}(n)$ che dipende da un indice **naturale** n e di voler dimostrare che $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni n. Un esempio tipico è il seguente:

per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *si pone*[1]

$$\mathcal{P}(n) = \text{“} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2} \text{”}.$$

Dimostrare che $\mathcal{P}(n)$ *è vera per ogni* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

In questi casi, possiamo usare il seguente

Principio di induzione. *Se una proposizione* $\mathcal{P}(n)$ *è vera per* $n = 0$ *e se, supposta vera per un certo* $n \in \mathbb{N}$*, risulta vera anche per* $n+1$*, allora* $\mathcal{P}(n)$ *è vera per ogni* n*.*

Le dimostrazioni che sfruttano il principio di induzione, si compongono quindi di due passi:

Passo 1: base dell'induzione. Si dimostra che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per $n = 0$, i.e. si dimostra che $\mathcal{P}(0)$ è vera.

Passo 2: passo induttivo. Si dimostra che l'implicazione

$$\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1),$$

è vera.

Se si riescono a verificare questi due passi, allora utilizzando la struttura ricorsiva dei numeri naturali (in particolare l'assioma (5) di Peano), il Principio di Induzione assicura che $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni n.

Si veda l'Esercizio 1.8.9 per l'esempio presentato sopra.

4. Fattoriale e binomiale

Definizione 1.4.1. Sia $n \in \mathbb{N}$, si definisce il numero $n!$ (da leggersi n *fattoriale*) tramite la relazione ricorsiva

$$\begin{cases} 0! = 1, \\ (n+1)! = (n+1) \cdot n!, \qquad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

In altre parole, si ha

$$0! = 1, \qquad 1! = 1 \cdot 1 = 1, \qquad 2! = 2 \cdot 1 = 2, \qquad 3! = 3 \cdot 2! = 6, \qquad 4! = 4 \cdot 3! = 24,$$

e così via.

Si osservi che in base alla definizione, vale in particolare che

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n.$$

[1] Il simbolo $\sum_{k=1}^{n}$ vuol dire "*somma su* k *che va da* 1 *a* n" e quindi in generale

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Osservazione 1.4.2 (Significato del fattoriale)**.** Supponiamo di avere un insieme S formato da n elementi distinti. Poniamoci la domanda: quante $n-$uple diverse posso formare con gli elementi di S, senza che ci siano ripetizioni? In altre parole, immaginiamoci di avere a disposizione n caselle

$$\square \quad \square \quad \square \quad \dots \quad \square$$

da riempire con gli elementi di S. In ogni casella dobbiamo mettere uno ed un solo elemento di S. Quante saranno le combinazioni possibili?

Cominciamo dalla casella più a sinistra: per essa, abbiamo completa libertà di scelta, ovvero possiamo mettere un elemento qualsiasi di S. Abbiamo quindi n possibilità per la prima casella.

Una volta che abbiamo fatto la prima scelta, passiamo alla seconda casella: adesso abbiamo $n-1$ scelte, visto che un elemento di S l'abbiamo già usato per riempire la prima casella. In totale quindi, per riempire le prime due caselle, abbiamo a disposizione

$$n \cdot (n-1),$$

possibilità.

Avendo scelto due elementi per le prime due caselle, passiamo adesso alla terza casella: per essa, le possibilità si sono ridotte a $n-2$ (perché avevamo n elementi, ma 2 li abbiamo già piazzati). Per le prime tre caselle abbiamo quindi

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2),$$

possibilità. Proseguendo in questo modo fino ad esaurire gli elementi e le caselle, vediamo che abbiamo quindi

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots 2 \cdot 1 = n!,$$

possibilità, in totale.

Osservazione 1.4.3 (Fattoriale troncato)**.** Tenendo conto dell'interpretazione precedente, più in generale possiamo rispondere alla domanda seguente: dato un insieme S formato da n elementi e dato $1 \le k \le n$, quante $k-$uple con elementi distinti di S si possono formare? Tenendo conto che dobbiamo riempire adesso k caselle (e k non è necessariamente uguale al numero di elementi di S), possiamo ragionare come nel caso precedente ed ottenete che il numero che ci interessa è dato da

$$n \cdot (n-1) \cdot \ \dots \ \cdot (n-k+1).$$

Si osservi infatti che quando arriviamo a riempire la $k-$esima e ultima casella, abbiamo già riempito $k-1$ caselle. Ovvero, abbiamo già usato $k-1$ elementi di S. Le scelte a nostra disposizione sono quindi

$$\underbrace{n} - \underbrace{(k-1)} = n-k+1,$$

che spiega il perché dell'ultimo numero in alto.

Esempio 1.4.4. Sia $S = \{a, b, c\}$ l'insieme formato dai 3 elementi a, b e c. Prendendo $k = 2$, tutte le coppie di elementi distinti di S sono date da

$$a\,b \qquad b\,a \qquad a\,c \qquad c\,a \qquad b\,c \qquad c\,b,$$

ovvero sono appunto $3 \cdot 2 = 6$, la formula trovata nell'Osservazione 1.4.3 con $n = 3$ e $k = 2$.

Definizione 1.4.5. Siano $n, k \in \mathbb{N}$, con $k \le n$. Il *coefficiente binomiale n su k* è il numero naturale definito da

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ \dots \ \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Osservazione 1.4.6 (Significato del coefficiente binomiale)**.** Supponiamo nuovamente di avere il nostro insieme S formato da n elementi distinti. Sia $1 \leq k \leq n$ e poniamoci una nuova domanda: quante $k-$uple diverse posso formare con gli elementi di S, senza che ci siano ripetizioni e senza tenere conto dell'ordine in cui scrivo gli elementi?

Cerchiamo innanzitutto di capire la domanda, ripartendo dall'Esempio 1.4.4. Supponiamo quindi di avere

$$S = \{a, b, c\},$$

e di voler sapere quante coppie di elementi distinti possiamo formare, **senza però** tenere conto dell'ordine in cui sono scritti gli elementi di ogni coppia. In altre parole, in questo nuovo problema

$$a\,b \qquad \text{oppure} \qquad b\,a,$$

sono esattamente la stessa coppia. Dal momento che nell'Esempio 1.4.4 abbiamo calcolato esplicitamente tutte le coppie di elementi distinti, non è difficile rispondere a questa nuova domanda: la risposta è infatti 3. Le coppie in questione sono infatti

$$a\,b \qquad b\,c \qquad a\,c.$$

Torniamo allora alla domanda che abbiamo posto all'inizio. Il numero che ci interessa si otterrà nel modo seguente:

$$\frac{\text{numero di } k-\text{uple di elementi distinti di } S}{\text{numero in cui disporre } k \text{ elementi distinti in modo diverso}} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ \dots \ \cdot (n-k+1)}{k!},$$

ovvero è esattamente il coefficiente binomiale n su k.

Esempio 1.4.7 (Una regola utile)**.** Siano $k, n \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$. Usando la definizione, non è difficile vedere che vale

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{1.4.3}$$

Infatti, scrivendo esplicitamente entrambi i coefficienti binomiali, si ha

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

e

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!},$$

che coincidono.

Esempio 1.4.8. Calcoliamo a titolo di esempio alcuni coefficienti binomiali notevoli. Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, allora si ha

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1,$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-1)!} = n,$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{1}{2}\,\frac{n\,(n-1)!}{(n-2)!} = \frac{1}{2}\,\frac{n\,(n-1)\,(n-2)!}{(n-2)!} = \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

Da questi, ricordando la formula (1.4.3), si ha anche

$$\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2},$$

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n,$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$$

5. Teoria degli insiemi

Sia A un *insieme*, utilizzeremo la notazione

$$x \in A,$$

per dire che *l'elemento x appartiene ad A*. In modo simile, useremo la notazione

$$x \notin A,$$

per dire la negazione della proposizione precedente, ovvero *l'elemento x non appartiene ad A*. Sia B un altro insieme, si dirà che B è un *sottoinsieme* di A se per ogni $x \in B$, si ha $x \in A$. Altrimenti detto, ogni elemento di B è contenuto in A, ovvero

$$\forall b \in B, \quad \text{si ha} \quad b \in A.$$

In tal caso, utilizzeremo la notazione

$$B \subset A.$$

Di conseguenza, avremo che due insiemi A, B sono eguali se e soltanto se

$$B \subset A \qquad \text{e} \qquad A \subset B.$$

In tal caso useremo la notazione $A = B$. Al contrario, la scrittura $B \not\subset A$ vuol dire che B *non è un sottoinsieme di A*, i.e. in formule

$$\exists b \in B \,:\, b \notin A.$$

Col simbolo $\emptyset$ denoteremo l'*insieme vuoto*, ovvero l'insieme che non contiene elementi. Ovviamente, vale sempre che

$$\emptyset \subset A,$$

e si indicherà con $\mathcal{P}(A)$ l'*insieme delle parti di A*, ovvero

$$\mathcal{P}(A) = \{B \,:\, B \subset A\}.$$

Esempio 1.5.1. Sia $A = \{a, b, c\}$, allora si ha

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Attenzione! Non bisogna fare confusione tra i simboli a e $\{a\}$. Col primo si indica un elemento di A, mentre il secondo indica un sottoinsieme di A che contiene il solo elemento a, e quindi $\{a\}$ è un elemento di $\mathcal{P}(A)$. La scrittura

$$a \in A$$

è corretta, mentre la scrittura

$$\{a\} \in A$$

non ha senso.

Definizione 1.5.2 (Operazioni sugli insiemi)**.** Siano A, B due insiemi, allora indicheremo:

$$\begin{array}{rcll} A \cup B &=& \{x : x \in A \text{ o } x \in B\} & \textit{unione di } A \textit{ e } B, \\ A \cap B &=& \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} & \textit{intersezione di } A \textit{ e } B, \\ A \setminus B &=& \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\} & \textit{differenza di } A \textit{ e } B, \\ A \Delta B &=& (A \setminus B) \cup (B \setminus A) & \textit{differenza simmetrica di } A \textit{ e } B, \\ A \times B &=& \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\} & \textit{prodotto cartesiano di } A \textit{ e } B. \end{array}$$

6. Insiemi di numeri

Tra gli insiemi, quelli per noi più importanti saranno gli insiemi di numeri. Richiamiamo i principali: abbiamo già visto l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, consideriamo anche

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\} \qquad \textit{numeri interi},$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ con } q \neq 0 \right\} \qquad \textit{numeri razionali.}$$

provvisti delle usuali operazioni di somma e prodotto. Possiamo subito vedere una differenza importante tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$ (o $\mathbb{N}$). Infatti, se $p/q < m/n \in \mathbb{Q}$, allora si ha anche

$$\frac{1}{2} \left(\frac{p}{q} + \frac{m}{n} \right) \in \mathbb{Q},$$

e

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} \right) < \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q} + \frac{m}{n} \right) < \frac{1}{2} \left(\frac{m}{n} + \frac{m}{n} \right) = \frac{m}{n}.$$

In altre parole, $\mathbb{Q}$ ha la seguente proprietà:

$$\forall x < y \in \mathbb{Q}, \ \exists z \in \mathbb{Q} \text{ tale che } x < z < y,$$

ovvero, tra due numeri razionali ne esiste sempre un terzo, distinto da entrambi. Questa proprietà è ovviamente falsa per $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$.

Si vede che effettivamente *i numeri razionali sono moltissimi*, per esempio per ogni $p/q \in \mathbb{Q}$, si ha che

$$\left(1 + \frac{p}{q}\right), \ \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{q}\right), \ \left(\frac{1}{3} + \frac{p}{q}\right), \dots, \left(\frac{1}{n} + \frac{p}{q}\right), \dots,$$

è una successione infinita di numeri appartenenti a $\mathbb{Q}$ che si accumulano verso p/q. D'altra parte, *i numeri razionali non sono abbastanza.* Per esempio, in natura esistono numeri che non è possibile scrivere sotto la forma

$$\frac{p}{q}, \qquad p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0. \tag{1.6.4}$$

Si tratta dei numeri che si chiamano *irrazionali.* È il caso per esempio della lunghezza della diagonale di un quadrato il cui lato misuri 1 (si veda Esercizio 1.8.24) o della lunghezza di una circonferenza di raggio 1. Un altro problema è che esistono successioni infinite di numeri razionali che convergono ad un numero che non si può scrivere sotto la forma (1.6.4). È il caso della successione

$$1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \dots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \dots$$

Da qui la necessità di introdurre

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{numeri irrazionali}\} \qquad \textit{numeri reali}$$

Definizione 1.6.1 (Intervalli)**.** Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, utilizzeremo le notazioni seguenti per gli *intervalli* di $\mathbb{R}$

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \le x \le b\} \qquad \textit{intervallo chiuso},$$
$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\} \qquad \textit{intervallo aperto},$$
$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \le x < b\} \qquad \textit{intervallo chiuso a sinistra}$$
$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \le b\} \qquad \textit{intervallo chiuso a destra}$$

Useremo anche le notazioni

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \ge a\},$$

e

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \le b\}.$$

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è caratterizzato dal seguente

Assioma di continuità. *Sia $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ una successione di intervalli chiusi, aventi la seguente proprietà*

$$I_{n+1} \textit{ coincide con una delle due metà di } I_n, \qquad \textit{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Allora esiste uno ed un solo $x_0 \in \mathbb{R}$ che appartenga a tutti gli intervalli I_n, ovvero

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap \dots I_n \cap \dots = \{x_0\}.$$

Osservazione 1.6.2 (Richiamo: il valore assoluto)**.** Se $x \in \mathbb{R}$, si definisce il suo *valore assoluto* $|x|$ come

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \ge 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Per alcune proprietà del valore assoluto, si veda la sezione Esercizi.

7. Estremo superiore ed estremo inferiore

Definizione 1.7.1. Sia $E \subset \mathbb{R}$ tale che $E \neq \emptyset$. Si dice che

- $M \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante di E* se
$$x \le M, \quad \forall x \in E;$$
- $m \in \mathbb{R}$ è un *minorante di E* se
$$x \ge m, \quad \forall x \in E.$$

Definizione 1.7.2. Sia $E \subset \mathbb{R}$ tale che $E \neq \emptyset$. Si dice che E è

- *limitato superiormente* se ammette un maggiorante;
- *limitato inferiormente* se ammette un minorante;
- *limitato* se è sia limitato superiormente che limitato inferiormente.

Esempio 1.7.3. Si consideri l'insieme

$$E = (-\infty, 2) \cup \{3, 4, 8\}.$$

Tale insieme è limitato superiormente (ogni numero maggiore o uguale a 8 è un maggiorante), ma non limitato inferiormente.

Esempio 1.7.4. Si consideri l'insieme

$$E = \left\{ \frac{1}{n} \, : \, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Osservando che E è costituito da un insieme di numeri che decrescono al crescere di n, si ha che

$$\frac{1}{n} \leq 1, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

ovvero E è limitato superiormente. D'altra parte, tutti i i numeri facenti parte di E sono positivi, ovvero

$$\frac{1}{n} \geq 0, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

ovvero E è anche limitato inferiormente.

Definizione 1.7.5. Sia $E \subset \mathbb{R}$ tale che $E \neq \emptyset$. Si definisce *estremo superiore di E* come:

- se E è limitato superiormente, il più piccolo tra i maggioranti di E. Indicando con M tale numero, si scriverà
$$\sup E = M;$$
- se E non è limitato superiormente, esso è $+\infty$ e si scriverà
$$\sup E = +\infty.$$

Definizione 1.7.6. Sia $E \subset \mathbb{R}$ tale che $E \neq \emptyset$. Si definisce *estremo inferiore di E* come:

- se E è limitato inferiormente, il più grande tra i minoranti di E. Indicando con m tale numero, si scriverà
$$\inf E = m;$$
- se E non è limitato inferiormente, esso è $-\infty$ e si scriverà
$$\inf E = -\infty.$$

Si osservi che a priori, le definizioni precedenti potrebbero essere mal poste. In altre parole, potrebbe non esistere il più piccolo dei maggioranti o il più grande dei minoranti. In tal caso, le definizioni date non avrebbero senso. In nostro soccorso, viene il seguente:

Teorema 1.7.7. *Sia $E \subset \mathbb{R}$ tale che $E \neq \emptyset$. Se E è limitato superiormente, allora esso ammette estremo superiore.*

Dimostrazione. Diamo un breve cenno della dimostrazione, presentando l'idea principale e tralasciando i dettagli. La dimostrazione si basa sull'uso dell'*Assioma di Continuità* che abbiamo visto sopra. Si parte infatti scegliendo due punti a_0 e b_0 con la seguente proprietà:

- b_0 è un maggiorante di E (esiste perché stiamo assumendo che E sia limitato superiormente);
- a_0 non è un maggiorante di E (visto che E è non vuoto, conterrà almeno un elemento x, allora possiamo scegliere $x - 1$ come punto a_0).

Consideriamo quindi l'intervallo chiuso $I_0 = [a_0, b_0]$. Dividiamolo in due tramite il suo punto medio

$$\frac{a_0 + b_0}{2},$$

e prendiamo il nuovo intervallo $I_1 = [a_1, b_1]$, dove

- $a_1 = a_0$ e $b_1 = (a_0 + b_0)/2$ se quest'ultimo è un maggiorante di E;
- $a_1 = (a_0 + b_0)/2$ e $b_2 = b_1$ se invece il punto medio non è un maggiorante di E.

Si procede in modo iterativo in questo modo, dividendo ad ogni passo in due l'intervallo e prendendo la metà il cui estremo di sinistra non è un maggiorante, mentre il secondo lo è. Si costruisce così una successione di intervalli dimezzati I_n, che in base all'Assioma di continuità contengono uno ed un solo punto comune, ovvero esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x_0\}.$$

Il punto x_0 è l'estremo superiore di E (omettiamo la verifica di quest'ultima affermazione). □

Definizione 1.7.8. Sia $E \subset \mathbb{R}$ tale che $E \neq \emptyset$. Supponiamo che E sia limitato superiormente e si chiami $M = \sup E$. Se $M \in E$, allora diremo che M è il *massimo di* E.

Definizione 1.7.9. Sia $E \subset \mathbb{R}$ tale che $E \neq \emptyset$. Supponiamo che E sia limitato inferiormente e si chiami $m = \inf E$. Se $m \in E$, allora diremo che m è il *minimo di* E.

8. Esercizi

8.1. Un po' di logica.

Esercizio 1.8.1. *Si scrivano le negazioni delle seguenti proposizioni*

(1) *La partita di calcio è interessante e la guarderò.*

(2) *La partita di calcio è interessante oppure non la guarderò.*

(3) *La SPAL ha vinto contro il Lecce e Tomovic ha segnato.*

8.2. Fattoriale e binomiale.

Esercizio 1.8.2 (Lo scassinatore maldestro). *Un ladro un po' maldestro è venuto in possesso di una valigia (prodotta dalla* Sansonait*) piena di oggetti di valore. La valigia è chiusa da un codice di sicurezza a* 3 *cifre, ogni cifra è un numero da* 0 *a* 9*. Il ladro non conosce il codice esatto di sbloccaggio e non ha con sé alcuno strumento per forzare l'apertura o indovinare il codice. L'unica cosa che il ladro sa, è che per le valigie* Sansonait *il codice di* 3 *cifre non contiene ripetizioni. Quanti codici possibili deve provare il ladro, prima di essere sicuro di aprire la valigia?*

Soluzione. Si osservi che i numeri da 0 a 9 sono in tutto 10. La domanda che ci viene posta può essere quindi riformulata nel modo seguente: dato un insieme S di 10 elementi, quante triple di numeri distinti posso formare con questi elementi? Ci basta usare la formula dell'Osservazione 1.4.3, con

$$n = 10 \qquad \text{e} \qquad k = 3.$$

Si ha quindi

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-k+1) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Ci sono quindi 720 combinazioni differenti possibili, per una valigia Sansonait. □

Esercizio 1.8.3. *Lo stesso ladro di cui sopra, si impossessa stavolta di una valigia di marca* Ronchelli*. Le valigie di questa marca hanno un codice di sicurezza apparentemente più complicato: infatti, il codice è composta da ben* 5 *cifre (ogni cifra è un numero da* 0 *a* 9*). Per poterla aprire però, è sufficiente in realtà digitare correttamente le* 5 *cifre che compongono il codice, non importa* *in che ordine siano messe le cifre. Sapendo di nuovo che il codice non contiene ripetizioni, quanti codici possibili deve provare il ladro, prima di essere sicuro di aprire la valigia?*

Soluzione. Stavolta, ci basterà usare la formula del binomiale con $n = 10$ e $k = 5$, dal momento che ogni codice è identificato dalle 5 cifre (tutte distinte) che lo compongono, non dal loro ordine. Si avrà allora

$$\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} = 252.$$

Come si può vedere, le valigie di marca RONCHELLI sono quindi molto meno sicure. □

Esercizio 1.8.4. *Siamo alle Olimpiadi di Rio del 2016. Alla vigilia delle semifinali del torneo di calcio, gli organizzatori decidono di non farsi trovare impreparati e di coniare le medaglie per le prime 3 squadre classificate, ognuna con il nome della squadra. Non potendo prevedere il futuro, devono stampare tante medaglie quanti sono i possibili risultati finali. Ovvero?*

Soluzione. Stiamo chiaramente supponendo che le semifinali in questione siano 2 e quindi che le nazionali ancora rimaste in gioco siano 4. Abbiamo quindi un insieme formato da 4 elementi (le nazionali) e vogliamo sapere quante sono le possibili triple (cioè i possibili ordini di piazzamento), tenendo conto dell'ordine (non vogliamo che all'Honduras tocchi una medaglia d'oro con sopra scritto Germania, per esempio). Dobbiamo quindi usare la formula dell'Osservazione 1.4.3, con

$$n = 4 \qquad \text{e} \qquad k = 3.$$

Quindi il numero di medaglie da stampare è

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 1.8.5. *Siamo alle Olimpiadi di Londra del 2012. Ad una semifinale degli 800 m piani partecipano 8 concorrenti. Poichè solo i primi quattro accedono in finale, quante sono le possibili quadriple di finalisti?*

Soluzione. Abbiamo un insieme di 8 elementi (i concorrenti) e ci interessa sapere tutte le possibili quadriple che possiamo formare con questi elementi, senza che ci siano ripetizioni (un concorrente non può arrivare primo e terzo!) e senza tenere conto dell'ordine (basta arrivare tra i primi quattro per qualificarsi). Quindi siamo interessati al numero di sottoinsiemi contenenti 4 elementi distinti (in cui non ha importanza l'ordine). Dobbiamo allora usare il coefficiente binomiale con $n = 8$ e $k = 4$. La risposta è data allora da

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = 70.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 1.8.6. *La massima divisione del Campionato di calcio svizzero si chiama Super League e vi prendono parte* 10 *squadre. Il regolamento prevede che ogni squadra giochi contro tutte le altre, disputando contro ognuna di esse 2 partite di andata e 2 partite di ritorno. In quante giornate si articola la Super League svizzera?*

Soluzione. Innanzitutto, calcoliamo il numero totale di partite. Abbiamo un insieme di 10 elementi (le squadre) e siamo interessati a tutte le possibili coppie (che rappresentebbero le partite) che possiamo formare con questi elementi, senza ripetizioni (una squadra non può giocare contro se stessa) e tenendo conto dell'ordine (perchè vogliamo tenere conto dell'andata e del ritorno, ovvero del fatto che la partita Lugano-Grasshoppers differisce da quella Grasshoppers-Lugano), quindi usando la formula

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1),$$

con $n = 10$ e $k = 2$, si ha

$$10 \cdot 9 = 90,$$

che rappresenta il numero totale di partite, facendo un solo turno di andata e uno solo di ritorno. Il numero totale di partite sarà quindi 180 e considerando che ad ogni giornata di campionato si giocheranno 5 partite, si potrà sapere chi ha vinto la Super League aspettando esattamente $180/5 = 36$ giornate. □

Esercizio 1.8.7. *Per ogni* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *ed ogni* $1 \leq k \leq n$, *si ha*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Soluzione. Dobbiamo ricordarci che

$$k\,(k-1)! = k!.$$

È sufficiente scrivere esplicitamente i binomiali a primo membro e svolgere qualche calcolo, infatti si ha

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)\cdot(n-k)!} + \frac{n!\,k}{k\,(k-1)!\,(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} + \frac{n!\,k}{k!\,(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!\,(n-k+1) + n!\,k}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(n-k+1+k)}{k!\,(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)\,n!}{k!\,(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k},
\end{aligned}$$

che è esattamente ciò che volevamo provare. □

8.3. Principio di induzione.

Esercizio 1.8.8. *Dimostrare che per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$n \leq 2^n.$$

Soluzione. Procediamo per induzione. La disuguaglianza è ovviamente vera per $n = 0$, dal momento che $2^0 = 1$.

Supponiamo adesso che la disuguaglianza sia vera per un certo indice naturale n, ovvero che si abbia $n \leq 2^n$ (*ipotesi induttiva*). Dobbiamo dimostrare che questo implica che

$$n + 1 \leq 2^{n+1}.$$

Partiamo scrivendo $n + 1$ e maggiorando n grazie all'ipotesi induttiva, ovvero

$$n + 1 \leq 2^n + 1,$$

ed osserviamo che $2^n \geq 1$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Possiamo quindi proseguire con la maggiorazione

$$n + 1 \leq 2^n + 1 \leq 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

che è esattamente quello che volevamo. □

Esercizio 1.8.9. *Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}. \tag{1.8.5}$$

Soluzione. Procediamo per induzione: la (1.8.5) è ovviamente vera per $n = 1$, come è facile convincersi. Infatti in tal caso ambo i membri valgono 1.

Supponiamo adesso che la (1.8.5) sia vera per un qualche naturale n_0 (*ipotesi induttiva*), dobbiamo mostrare che questo implica la validità della stessa formula per il naturale successivo $n_0 + 1$. Se riusciamo a mostrare ciò, abbiamo finito grazie al principio di induzione. Abbiamo quindi

$$\sum_{k=1}^{n_0+1} k = (n_0 + 1) + \sum_{k=1}^{n_0} k,$$

e sfruttando l'ipotesi induttiva, sappiamo dire esplicitamente chi è la sommatoria a seconda membro, ovvero

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n_0+1} k &= (n_0 + 1) + \sum_{k=1}^{n_0} k\\ &= (n_0 + 1) + \frac{n_0\,(n_0+1)}{2},\end{aligned}$$

dopo di che basta svolgere un po' di semplici passaggi algebrici, per ottenere che

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n_0+1} k = (n_0 + 1) + \frac{n_0\,(n_0+1)}{2} &= \frac{2\,(n_0+1) + n_0\,(n_0+1)}{2}\\ &= \frac{(n_0+1)\,(n_0+2)}{2},\end{aligned}$$

ovvero la (1.8.5) è vera anche per $n_0 + 1$ e quindi possiamo concludere. □

Esercizio 1.8.10. *Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}. \tag{1.8.6}$$

Soluzione. Procediamo per induzione: la (1.8.6) è ovviamente vera per $n = 1$, come è facile convincersi. Supponiamo adesso che la (1.8.6) sia vera per un qualche naturale n_0 (*ipotesi induttiva*): è vero che questo implica la validità di (1.8.6) anche per il naturale successivo n_0+1? Se la risposta è sì abbiamo finito, grazie al principio di induzione.

Abbiamo quindi

$$\sum_{k=1}^{n_0+1} k^2 = (n_0 + 1)^2 + \sum_{k=1}^{n_0} k^2$$

e sfruttando l'ipotesi induttiva, sappiamo dire esplicitamente chi è la sommatoria a seconda membro, ovvero

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n_0+1} k^2 &= (n_0+1)^2 + \sum_{k=1}^{n_0} k^2 \\ &= (n_0+1)^2 + \frac{n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6},\end{aligned}$$

dopo di che basta svolgere un po' di semplici passaggi algebrici, per ottenere che

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n_0+1} k^2 &= (n_0+1)^2 + \frac{n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6} = \frac{6(n_0+1)^2 + n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6} \\ &= \frac{(n_0+1)[6n_0+6+n_0(2n_0+1)]}{6} = \frac{(n_0+1)(n_0+2)(2n_0+3)}{6},\end{aligned}$$

ovvero la (1.8.6) è vera anche per n_0+1 e quindi possiamo concludere. □

Esercizio 1.8.11. *Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha*

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \tag{1.8.7}$$

Osservazione 1.8.12. Più in generale, per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $i \in \mathbb{N}$, definiamo

$$N_i(n) = \sum_{k=1}^{n} k^i,$$

ovvero $N_i(n)$ è la somma delle potenze $i-$esime dei primi n numeri: in particolare, negli esercizi precedenti abbiamo trovato la forma esplicita per $N_i(n)$ quando $i = 1, 2, 3$. Si può provare la seguente formula ricorsiva per $N_i(n)$:

$$N_i(n) = \frac{1}{i+1}(n+1)^{i+1} - \frac{1}{i+1}\sum_{m=0}^{i-1}\binom{i+1}{m} N_m(n). \tag{1.8.8}$$

Infatti cominciamo osservando che, usando il cambio di indice $k = j+1$ e la formula del binomio di Newton (si veda Esercizio 1.8.15), si ottiene

$$N_i(n) = \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)^i = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{i}\binom{i}{m} j^m,$$

ovvero scambiando le sommatorie[2] nella precedente, si ha

$$\begin{aligned}N_i(n) = \sum_{m=0}^{i}\binom{i}{m}\left(\sum_{j=0}^{n-1} j^m\right) &= \sum_{m=0}^{i}\binom{i}{m} N_m(n-1) \\ &= N_i(n-1) + i\, N_{i-1}(n-1) + \sum_{m=0}^{i-2}\binom{i}{m} N_m(n-1).\end{aligned}$$

[2]Notare che i due indici j e m sono indipendenti.

Osserviamo adesso che $N_i(n) - N_i(n-1) = n^i$ per definizione, quindi la relazione precedente può anche essere riscritta, portando $N_i(n-1)$ e la sommatoria a primo membro e dividendo per i, come

$$N_{i-1}(n-1) = \frac{1}{i} n^i - \frac{1}{i} \sum_{m=0}^{i-2} \binom{i}{m} N_m(n-1),$$

ovvero, visto che la precedente vale per ogni i e per ogni n, sostituendo i con $i+1$ e n con $n+1$ si ottiene la (1.8.8).

Esercizio 1.8.13. *Dimostrare che per ogni $n \geq 1$, il numero $n^3 + 5\,n$ è divisibile per 6.*

Soluzione. Conviene come sempre appellarci al principio di induzione: la tesi è ovviamente vera per $n = 1$, dal momento che in tal caso il numero in questione è

$$1^3 + 5 \cdot 1 = 6,$$

che è chiaramente divisibile per 6. Supponiamo adesso che per un certo naturale n_0, il numero $n_0^3 + 5\,n_0$ sia divisibile per 6 (*ipotesi induttiva*), vogliamo che lo stesso succeda anche per il naturale successivo $n_0 + 1$, ovvero vogliamo provare che $(n_0+1)^3 + 5\,(n_0+1)$ è anch'esso divisibile per 6. D'altronde si ha

$$(n_0+1)^3 + 5\,(n_0+1) = n_0^3 + 3n_0^2 + 3n_0 + 1 + 5n_0 + 5 = [n_0^3 + 5n_0] + [3n_0(n_0+1)] + 6,$$

e quest'ultima è la somma di tre numeri, tutti divisibili per 6: il primo $n_0^3 + 5n_0$ lo è per ipotesi induttiva, il terzo è 6, mentre il secondo $3\,n_0\,(n_0+1)$ è divisibile per 6 in quanto triplo prodotto del numero pari[3] $n_0\,(n_0+1)$. In conclusione, anche $(n_0+1)^3 + 5\,(n_0+1)$ è divisibile per 6. $\square$

Esercizio 1.8.14. *Dimostrare che per ogni $n \geq 1$, il numero $10^n - 1$ è divisibile per 9.*

Soluzione. Procediamo per induzione: come sempre, il primo passo è verificare che la nostra affermazione sia vera per il primo naturale per cui viene formulata, ovvero in questo caso per $n = 1$. D'altronde in tal caso il numero in questione è

$$10^1 - 1 = 9,$$

che è divisibile per 9. Adesso, domandiamoci cosa succede se assumiamo che la nostra affermazione sia vera per un certo naturale $n_0 \in \mathbb{N}$, ovvero assumiamo di sapere che $10^{n_0} - 1$ sia divisibile per 9 (*ipotesi induttiva*): lo stesso varrà per anche per $10^{n_0+1} - 1$? In effetti si ha

$$10^{n_0+1} - 1 = 10 \cdot 10^{n_0} - 1 = 10 \cdot 10^{n_0} - 10 + 9 = 10 \cdot (10^{n_0} - 1) + 9,$$

ovvero $10^{n_0+1} - 1$ è la somma di due numeri divisibili per 9 e quindi è anch'esso divisibile per 9. Per il principio di induzione, ne concludiamo che l'affermazione di partenza è vera per ogni $n \geq 1$. $\square$

Esercizio 1.8.15 (Binomio di Newton)**.** *Siano $x, y \in \mathbb{R}$ due numeri positivi. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k} \tag{1.8.9}$$

[3] Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n\,(n+1)$ è un numero pari.

Soluzione. Procediamo usando il principio di induzione: la verifica che (1.8.9) è vera per $n = 1$ è immediata. Supponiamo adesso di sapere che (1.8.9) sia vera per un certo $n_0 \in \mathbb{N}$, vorremmo dimostrare che allora essa è vera anche per il successivo naturale, ovvero per $n_0 + 1$.

Osserviamo innanzitutto che vale ovviamente

$$(x + y)^{n_0+1} = (x + y)\,(x + y)^{n_0},$$

dopo di che applichiamo l'ipotesi induttiva (ovvero il fatto che stiamo supponendo (1.8.9) vera per n_0), ottenendo quindi

$$\begin{aligned}(x + y)^{n_0+1} &= (x + y) \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} x^k\, y^{n_0-k} \\ &= x \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} x^k\, y^{n_0-k} + y \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} x^k\, y^{n_0-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} x^{k+1}\, y^{n_0-k} + \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} x^k\, y^{n_0-k+1}.\end{aligned}$$

A questo punto, riscriviamo la prima sommatoria cambiando il nome dell'indice di somma e ponendo $k = h - 1$, così da ottenere

$$\sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} x^{k+1}\, y^{n_0-k} = \sum_{h=1}^{n_0+1} \binom{n_0}{h-1} x^h\, y^{n_0-h+1},$$

in modo che abbiamo ottenuto

$$\begin{aligned}(x + y)^{n_0+1} &= \sum_{k=1}^{n_0+1} \binom{n_0}{k-1} x^k\, y^{n_0-k+1} + \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} x^k\, y^{n_0-k+1} \\ &= x^{n_0+1} + y^{n_0+1} + \sum_{k=1}^{n_0} \left[\binom{n_0}{k-1} + \binom{n_0}{k}\right] x^k y^{n_0-k+1}.\end{aligned}$$

Utilizzando adesso l'identità dimostrata nel Lemma 1.8.7, si ottiene

$$\begin{aligned}(x + y)^{n_0+1} &= x^{n_0+1} + y^{n_0+1} + \sum_{k=1}^{n_0} \binom{n_0+1}{k} x^k\, y^{n_0-k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n_0+1} \binom{n_0+1}{k} x^k\, y^{n_0-k+1},\end{aligned}$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo anche usato il fatto che (ricorda l'Esempio 1.4.8)

$$\binom{n_0+1}{0} = \binom{n_0+1}{n_0+1} = 1.$$

Quindi la (1.8.9) è vera anche per $n_0 + 1$. Per il principio di induzione, essa è vera per ogni $n \geq 1$. □

Esercizio 1.8.16. *Dimostrare che per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$2^{n-1} \leq n! \tag{1.8.10}$$

Soluzione. La proposizione è chiaramente vera per $n = 0$, ricordandosi che $0! = 1$ per definizione. Supponiamo adesso che (1.8.10) sia vera per un certo $n_0 \in \mathbb{N}$, mostriamo come questo implichi che (1.8.10) debba essere vera anche per il naturale successivo $n_0 + 1$. Si ha infatti per ipotesi induttiva

$$2^{n_0} = 2 \cdot 2^{n_0-1} \leq 2\, n_0!,$$

e d'altronde $2 \leq n_0 + 1$, appena $n_0 \geq 1$, quindi abbiamo provato

$$2^{n_0} \leq (n_0 + 1)!,$$

concludendo così la dimostrazione. □

Esercizio 1.8.17 (Somma geometrica)**.** *Sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha*

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}. \tag{1.8.11}$$

Soluzione. Procediamo per induzione: per $n = 0$ si vede facilmente che (1.8.11) è vera, infatti entrambi i membri coincidono con 1. Assumiamo adesso che per un certo $n_0 \in \mathbb{N}$ valga

$$\sum_{k=0}^{n_0} a^k = \frac{a^{n_0+1} - 1}{a - 1},$$

e consideriamo il passo $n_0 + 1$. Si ha

$$\sum_{k=0}^{n_0+1} a^k = \sum_{k=0}^{n_0} a^k + a^{n_0+1},$$

ed usando l'ipotesi induttiva (ovvero il fatto che (1.8.11) è vera per n_0) si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n_0+1} a^k = \sum_{k=0}^{n_0} a^k + a^{n_0+1} &= \frac{a^{n_0} - 1}{a - 1} + a^{n_0+1} \\ &= \frac{a^{n_0+1} - 1 + a^{n_0+2} - a^{n_0+1}}{a - 1} \\ &= \frac{a^{n_0+2} - 1}{a - 1}.\end{aligned}$$

Questo dimostra che (1.8.11) è vera per $n_0 + 1$. □

Esercizio 1.8.18 (Il "falso" binomio di Newton)**.** *Siano $x, y \in \mathbb{R}$ due numeri positivi. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha*

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x - y) \sum_{k=0}^{n} x^k\, y^{n-k}. \tag{1.8.12}$$

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che se $x = y$ la formula è banalmente vera, perché ambo i membri valgono 0. Ugualmente, se $y = 0$ la formula è banalmente vera, visto che entrambi i termini valgono x^{n+1}- Supponiamo quindi $x \neq y$ e $y \neq 0$. Usando le proprietà delle potenze

$$y^{n-k} = y^n\, y^{-k} = y^n\, \frac{1}{y^k},$$

e quindi grazie alla formula (1.8.11) con $a = x/y$ si ha

$$\begin{aligned}(x-y)\sum_{k=0}^{n} x^k\,y^{n-k} = (x-y)\,y^n\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{y^k} &= (x-y)\,y^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x}{y}\right)^k \\ &= (x-y)\,y^n\,\frac{\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1}-1}{\dfrac{x}{y}-1} \\ &= (x-y)\,y^n\,\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{(x-y)\,y^n} \\ &= x^{n+1}-y^{n+1},\end{aligned}$$

come voluto. □

Osservazione 1.8.19 (Casi particolari del "falso" binomio di Newton)**.** Due casi particolari della formula precedente saranno probabilmente ben noti al lettore fin dalle scuole superiori. Si tratta dei casi $n = 1$ e $n = 2$: in tali casi la formula diventa rispettivamente

$$x^2 - y^2 = (x-y)\,(x+y),$$

e

$$x^3 - y^3 = (x-y)\,(x^2 + x\,y + y^2).$$

Esercizio 1.8.20 (Disuguaglianza di Bernoulli)**.** *Dimostrare che per ogni $x \geq -1$ ed ogni $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ vale*

$$(1+x)^n \geq 1 + n\,x. \tag{1.8.13}$$

Soluzione. Procediamo usando il principio di induzione. La disuguaglianza (1.8.13) è vera per ogni $x \geq -1$ quando $n = 1$, dato che entrambi i membri coincidono con $1 + x$.

Supponiamo adesso che (1.8.13) sia vera per un certo $n_0 \geq 1$ ed ogni $x \geq -1$. Dobbiamo dimostrare che allora (1.8.13) è vera anche per $n_0 + 1$. Osserviamo innanzitutto che

$$(1+x)^{n_0+1} = (1+x)^{n_0}\,(1+x),$$

dopo di che per ipotesi induttiva sappiamo che $(1+x)^{n_0} \geq 1 + n_0\,x$. Inoltre $x \geq -1$, quindi il termine $(1+x)$ è positivo, possiamo quindi dire che

$$(1+x)^{n_0+1} = (1+x)^{n_0}\,(1+x) \geq (1+n_0\,x)\,(1+x).$$

Sviluppando l'ultimo prodotto, troviamo quindi

$$(1+x)^{n_0+1} \geq 1 + (n_0+1)\,x + n_0\,x^2.$$

Osserviamo che l'ultimo termini è positivo, quindi abbiamo ottenuto

$$(1+x)^{n_0+1} \geq 1 + (n_0+1)\,x,$$

ovvero (1.8.13) al passo $n_0 + 1$, come volevamo. □

Esercizio 1.8.21. *Dimostrare che per ogni $n \geq 6$, si ha*

$$2^n\,n! \leq n^n. \tag{1.8.14}$$

Soluzione. Di nuovo, useremo il principio di induzione: partiamo intanto col verificare che (1.8.14) è vera per $n = 6$, infatti si ha

$$2^6\, 6! \leq 6^6,$$

con semplici calcoli[4]. Supponiamo adesso che (1.8.14) sia vera per un certo $n_0 \in \mathbb{N}$, vogliamo provare che lo stesso possiamo dire per il naturale successivo $n_0 + 1$. Osserviamo che si ha, sfruttando l'ipotesi induttiva

$$2^{n_0+1}(n_0+1)! = 2(n_0+1)2^{n_0} n_0! \leq 2(n_0+1)n_0^{n_0},$$

quindi se riusciamo a dimostrare che la quantità a secondo membro può essere stimata come segue

$$2(n_0+1)n_0^{n_0} \leq (n_0+1)^{n_0+1}, \tag{1.8.15}$$

abbiamo concluso, perchè avremmo dimostrato proprio che (1.8.14) è vera anche per $n_0 + 1$. Il problema quindi si è ridotto a dimostrare la validità di (1.8.15), ma d'altronde si vede subito che essa è equivalente a dimostrare che

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n_0}\right)^{n_0},$$

la quale è una conseguenza immediata della formula del Binomio di Newton dimostrata in precedenza, infatti

$$\left(1 + \frac{1}{n_0}\right)^{n_0} = \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} \frac{1}{n_0^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n_0} \binom{n_0}{k} \frac{1}{n_0^k} \geq 2,$$

concludendo così la dimostrazione. □

Esercizio 1.8.22. *Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha*

$$n^n \leq 3^n n!. \tag{1.8.16}$$

Soluzione. Usiamo il principio di induzione: la verifica che (1.8.16) è vera per $n = 0$ è immediata. Vediamo adesso cosa succede se supponiamo che (1.8.16) sia vera per un certo $n_0 \in \mathbb{N}$: se grazie a questo riusciamo a provare la validità di (1.8.16) anche per il successivo naturale $n_0 + 1$, abbiamo finito. Come prima, osserviamo che grazie all'ipotesi induttiva possiamo dire

$$3^{n_0+1}(n_0+1)! = 3(n_0+1)3^{n_0} n_0! \geq 3(n_0+1)n_0^{n_0}.$$

Supponiamo per un attimo di saper provare che

$$3\,(n_0+1)\,n_0^{n_0} \geq (n_0+1)^{n_0+1}, \tag{1.8.17}$$

di nuovo questo ci permetterebbe di provare che (1.8.16) è valida anche per $n_0 + 1$ e quindi di concludere. Resta quindi da provare che effettivamente vale la (1.8.17): con qualche passaggio algebrico, non è difficile vedere che questa è equivalente alla seguente

$$\left(1 + \frac{1}{n_0}\right)^{n_0} \leq 3,$$

[4]Non volendo sforzarsi con calcoli troppo lunghi (o non volendo usare la calcolatrice), non è difficile convincersi che $2^6\, 6! \leq 6^6 \iff 80 \leq 3^4$ e quest'ultima è ovviamente vera.

che cercheremo adesso di dimostrare. Usando nuovamente la formula del *binomio di Newton* (si veda Esercizio 1.8.15)

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n_0}\right)^{n_0} &= \sum_{k=0}^{n_0}\binom{n_0}{k}\frac{1}{n_0^k} = 2+\sum_{k=2}^{n_0}\binom{n_0}{k}\frac{1}{n_0^k} \\ &= 2+\sum_{k=2}^{n_0}\frac{n_0!}{k!(n_0-k)!}\,\frac{1}{n_0^k} = 2+\sum_{k=2}^{n_0}\frac{n_0\cdot(n_0-1)\cdot\,\dots\,\cdot(n_0-k+1)}{k!}\,\frac{1}{n_0^k} \\ &= 2+\sum_{k=2}^{n_0}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n_0}\right)\left(1-\frac{2}{n_0}\right)\cdot\,\dots\,\cdot\left(1-\frac{n_0-k+1}{n_0}\right) \\ &\le 2+\sum_{k=2}^{n_0}\frac{1}{k!}\le 2+\sum_{k=2}^{n_0}\frac{1}{2^{k-1}},\end{aligned}$$

dopo di che osserviamo che usando la (1.8.10), abbiamo

$$\frac{1}{k!}\le\frac{1}{2^{k-1}},$$

ovvero riprendendo da dove eravamo rimasti

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n_0}\right)^{n_0} &= 2+\sum_{k=2}^{n_0}\frac{1}{k!}\le 2+\sum_{h=1}^{n_0-1}\frac{1}{2^h} \\ &= 1+\sum_{h=0}^{n_0-1}\frac{1}{2^h} = 1+2\left(1-\frac{1}{2^{n_0}}\right)\le 3,\end{aligned}$$

concludendo così la dimostrazione. □

Osservazione 1.8.23. Si osservi che nella risoluzione degli ultimi due esercizi, abbiamo dimostrato

$$2\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le 3,\quad \text{per ogni } n\ge 1.$$

8.4. Numeri reali.

Esercizio 1.8.24. *Dimostrare che $\sqrt{2}$ non è numero razionale.*

Soluzione. Procediamo per contraddizione. Supponiamo quindi che $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$, in tal caso esistono $p,q\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ tali che

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}.$$

Possiamo supporre che questa frazione sia irriducibile (i.e. p e q non hanno divisori comuni, a parte 1). L'identità precedente implica dunque

$$2\,q^2=p^2, \tag{1.8.18}$$

ovvero p è un numero naturale il cui quadrato è un numero pari. Ricordando quello che abbiamo dimostrato nell'Esempio 1.2.11, si ottiene che anche p è pari. Quindi esiste $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ tale che

$$p=2\,m.$$

Utilizziamo adesso questa informazione in (1.8.18), questo implica che

$$2\,q^2=4\,m^2\qquad\text{e quindi}\qquad q^2=2\,m^2.$$

Di nuovo, questo vuol dire che q^2 è pari quindi anche q lo è. Arriviamo quindi ad una contraddizione: abbiamo trovato che sia p che q sono pari. Questo contraddice il fatto che la frazione p/q sia irriducibile. Dunque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

Esercizio 1.8.25. *Sia $a \geq 0$, si dimostri che*

$$|x| \leq a \qquad \Longleftrightarrow \qquad -a \leq x \leq a.$$

Soluzione. Dimostriamo le due implicazioni

$$|x| \leq a \qquad \Longrightarrow \qquad -a \leq x \leq a,$$

e

$$|x| \leq a \qquad \Longleftarrow \qquad -a \leq x \leq a,$$

separatemente.

Supponiamo che $|x| \leq a$, in base alla definizione abbiamo due possibilità:

- $x \geq 0$, allora in tal caso $x = |x| \leq a$. Inoltre, per ipotesi $-a \leq 0$ e dal momento che $x \geq 0$, abbiamo quindi anche $-a \leq x$. Quindi in tal caso, abbiamo sicuramente
$$-a \leq x \leq a;$$
- $x < 0$, in tal caso dalla definizione di valore assoluto si avrà $-x = |x| \leq a$, ovvero $-a \leq x$. D'altra parte, $a \geq 0$ quindi si ha anche $x < 0 \leq a$. In conclusione, anche in questo caso si ha
$$-a \leq x \leq a.$$

Abbiamo quindi dimostrato che

$$|x| \leq a \qquad \Longrightarrow \qquad -a \leq x \leq a.$$

Proviamo adesso l'implicazione contraria. Si assuma che $-a \leq x \leq a$, questo vuol dire che

$$x \leq a \qquad \text{e} \qquad -x \leq a.$$

Dal momento che

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

questo implica che $|x| \leq a$, come volevamo. □

Esercizio 1.8.26. *Sia $a \geq 0$, si dimostri che*

$$|x| > a \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < -a \textit{ oppure } x > a.$$

Soluzione. Si osservi che $|x| > a$ è la negazione di $|x| \leq a$. Inoltre, la proposizione $-a \leq x \leq a$ è la congiunzione delle due proposizioni

$$\text{“}x \leq a\text{''} \text{ e } \text{“}-a \leq x\text{''}.$$

Ricordando la relazione tra connettivi logici e negazione (Esempio 1.2.7), si ottiene quindi

$$|x| > a \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{non“}x \leq a\text{'' o non“}-ax \leq x\text{''},$$

ovvero

$$|x| > a \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < -a \text{ oppure } x > a,$$

proprio come volevamo. □

Esercizio 1.8.27 (Disuguaglianza triangolare)**.** *Si dimostri che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, vale*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Soluzione. Si osservi che in base alla definizione, si ha

$$-|x| \leq x \leq |x|,$$

e

$$-|y| \leq y \leq |y|.$$

Sommando queste due disuguaglianze, si trova

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Usando l'Esercizio 1.8.25 con $a = |x| + |y|$, si ottiene la conclusione desiderata. □

Esercizio 1.8.28. *Si trovino le soluzioni reali della seguente equazione*

$$\Big||x| - 1\Big| = 2.$$

Soluzione. Distinguiamo innanzitutto due casi: $x \geq 0$ oppure $x < 0$.

Caso A: $x \geq 0$. In tal caso, $|x| = x$ e l'equazione da risolvere diventa

$$|x - 1| = 2.$$

Dobbiamo quindi discutere a sua volta due sottocasi: $x \geq 1$ oppure $x < 1$.

- Caso A.1: $x \geq 0$ e $x \geq 1$. In altre parole, stiamo supponendo $x \geq 1$. In tal caso, l'equazione da risolvere diventa
$$x - 1 = 2 \qquad \text{ovvero} \qquad x = 3.$$
Si noti che la soluzione trovata $x = 3$ è ammissibile;
- Caso A.2: $x \geq 0$ e $x < 1$. Stiamo adesso supponendo che $0 \leq x < 1$. L'equazione da risolvere è
$$1 - x = 2 \qquad \text{ovvero} \qquad x = -1.$$
Si noti però che tale soluzione non è ammissibile, in quanto $-1 \notin [0, 1)$.

Caso B: $x < 0$. In tal caso, $|x| = -x$ e l'equazione da risolvere diventa

$$|-x - 1| = 2 \qquad \text{ovvero} \qquad |x + 1| = 2.$$

Dobbiamo quindi discutere a sua volta due sottocasi: $x \geq -1$ oppure $x < -1$.

- Caso B.1: $x < 0$ e $x \geq -1$. In altre parole, stiamo supponendo $-1 \leq x < 0$. In tal caso, l'equazione da risolvere diventa
$$x + 1 = 2 \qquad \text{ovvero} \qquad x = 1.$$
Si noti che la soluzione trovata $x = 1$ non è ammissibile;
- Caso B.2: $x < 0$ e $x < -1$. Stiamo adesso supponendo che $x < -1$. L'equazione da risolvere è
$$-1 - x = 2 \qquad \text{ovvero} \qquad x = -3.$$
Si noti che tale soluzione è ammissibile.

Riassumendo, tutte le soluzioni dell'equazione di partenza sono $x = 3$ oppure $x = -3$. □

8.5. Estremo superiore ed estremo inferiore.

Esercizio 1.8.29. *Si consideri l'insieme*

$$E = (-2, 3] \cap [-1, 2) \cup \{4, 9\}.$$

Si calcolino $\sup E, \inf E, \max E$ *e* $\min E$.

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che

$$(-2, 3] \cap [-1, 2) = [-1, 2),$$

quindi

$$E = [-1, 2) \cup \{4, 9\}.$$

Si vede immediatamente che E è limitato, inoltre si ha

$$\sup E = 9 \qquad \text{e} \qquad \inf E = -1.$$

Osserviamo che $-1 \in E$ e $9 \in E$, quindi si ha

$$\max E = \sup E = 9 \qquad \text{and} \qquad \min E = \inf E = -1.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 1.8.30. *Si consideri l'insieme*

$$E = \left\{ \frac{n}{2\,n+1} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si calcolino $\sup E$ *e* $\inf E$. *Si dica se* E *ammette massimo e/o minimo.*

Soluzione. Osserviamo che E è formato da numeri positivi, ovvero

$$\frac{n}{2\,n+1} \geq 0, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

In altre parole, E è limitato inferiormente e 0 è un minorante. Non è difficile vedere che

$$0 \in E,$$

quindi

$$0 = \inf E = \min E.$$

Osserviamo anche che

$$\frac{n}{2\,n+1} \leq \frac{n}{2\,n} = \frac{1}{2}, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

ovvero E è anche limitato superiormente, infatti $1/2$ è un maggiorante. Osserviamo però che $1/2$ non è il massimo di E, infatti

$$\frac{1}{2} \in E \quad \Longleftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } \frac{n}{2\,n+1} = \frac{1}{2},$$

e l'ultima condizione è equivalente a

$$2\,n = 2\,n + 1,$$

che è ovviamente impossibile. In altre parole, $1/2 \notin E$. Dimostriamo però che $1/2$ è il più piccolo dei maggioranti, ovvero che

$$\sup E = \frac{1}{2}.$$

Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists x_\varepsilon \in E \text{ tale che } \frac{1}{2} - \varepsilon < x_\varepsilon.$$

Ricordando che tutti gli elementi di E sono della forma $n/(2\,n+1)$, dobbiamo quindi dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{n_\varepsilon}{2\,n_\varepsilon + 1}.$$

Per trovare un tale indice $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, ci basta risolvere l'ultima disequazione:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{n_\varepsilon}{2\,n_\varepsilon + 1} \qquad &\Longleftrightarrow \qquad (2\,n_\varepsilon + 1)\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) < n_\varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \qquad n_\varepsilon\,(1 - 2\,\varepsilon) + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) < n_\varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \qquad \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) < 2\,\varepsilon\, n_\varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{2\,\varepsilon}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) < n_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi trovato che, fissato $\varepsilon > 0$, scegliendo $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{1}{2\,\varepsilon}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) < n_\varepsilon,$$

avremo la proprietà desiderata, ovvero che

$$\frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{n_\varepsilon}{2\,n_\varepsilon + 1}.$$

Questo dimostra che $\sup E = 1/2$. L'insieme E non ha massimo, perché come abbiamo dimostrato il suo estremo superiore non fa parte dell'insieme. □

Osservazione 1.8.31. Nell'esercizio precedente, l'intuizione che l'estremo superiore dovesse essere $1/2$ poteva essere agevolata dall'osservare che

$$\frac{n}{2\,n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2\,n}{2\,n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2\,n+1-1}{2\,n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\,n+1}\right).$$

Ora, si vede facilmente che al crescere di n, la quantità

$$1 - \frac{1}{2\,n+1},$$

cresce anch'essa (perché il termine $1/(2\,n+1)$ diventa sempre più piccolo). Inoltre, più n diventa grande, più questa quantità diventa vicina ad 1, in modo arbitrario.

Usando questa osservazione, possiamo dire che i numeri

$$\frac{n}{2\,n+1},$$

crescono al crescere di n e che si avvicinano sempre di più a $1/2$. Quest'ultimo numero corrisponderebbe a prendere formalmente $n = +\infty$ (cosa che non possiamo fare, perché $+\infty$ **non è un numero naturale**).

Questo dovrebbe chiarire come mai dovevamo aspettarci che $\sup E = 1/2$.

Esercizio 1.8.32. *Siano $a, b, c, d \in [0, +\infty)$ tali che $a > 0$ e $c > 0$. Si calcolino l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme*

$$E = \left\{\frac{a\,n+b}{c\,n+d}\ :\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Suggerimento. Proviamo ad usare l'idea dell'Osservazione precedente. Si noti che

$$\frac{a\,n+b}{c\,n+d}=\frac{a}{c}\,\frac{c\,n+\dfrac{b\,c}{a}}{c\,n+d}=\frac{a}{c}\,\frac{c\,n+d+\dfrac{b\,c}{a}-d}{c\,n+d}=\frac{a}{c}\left(1+\frac{b\,c-a\,d}{a}\,\frac{1}{c\,n+d}\right).$$

Dobbiamo adesso discutere vari casi, a seconda del segno di $b\,c-a\,d$.

Caso $b\,c-a\,d>0$. In tal caso, la quantità

$$\frac{a}{c}\left(1+\frac{b\,c-a\,d}{a}\,\frac{1}{c\,n+d}\right),$$

è decrescente rispetto ad n. Inoltre, per n che diventa sempre più grande, il valore di questa quantità si avvicina in modo arbitrario a

$$\frac{a}{c}.$$

Otteniamo quindi che in questo caso

$$\inf E=\frac{a}{c}\qquad \text{e}\qquad \sup E=\max E=\frac{a\cdot 0+b}{c\cdot 0+d}=\frac{b}{d}.$$

Osserviamo che a/c non è il minimo di E: infatti, se esistesse $n\in\mathbb{N}$ tale che

$$\frac{a\,n+b}{c\,n+d}=\frac{a}{c},$$

con semplici operazioni algebriche, avremmo che questo è equivalente a

$$a\,c\,n+b\,c=a\,c\,n+d\,c\qquad\Longleftrightarrow\qquad b\,c=a\,c,$$

che è una contraddizione.

Caso $b\,c-a\,d<0$. In tal caso, la quantità

$$\frac{a}{c}\left(1+\frac{b\,c-a\,d}{a}\,\frac{1}{c\,n+d}\right),$$

è crescente rispetto ad n. Inoltre, per n che diventa sempre più grande, il valore di questa quantità si avvicina in modo arbitrario a

$$\frac{a}{c}.$$

Otteniamo quindi che in questo caso

$$\sup E=\frac{a}{c}\qquad \text{e}\qquad \inf E=\min E=\frac{a\cdot 0+b}{c\cdot 0+d}=\frac{b}{d}.$$

Per lo stesso motivo precedente, a/c non è il massimo di E.

Caso $b\,c-a\,d=0$. Questo è il caso più semplice, la discussione precedente implica che in questo caso

$$\frac{a\,n+b}{c\,n+d}=\frac{a}{c},$$

ovvero E contiene un unico numero, dato a/c. Abbiamo quindi

$$\inf E=\min E=\max E=\sup E=\frac{a}{c}.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Capitolo 2

Funzioni tra insiemi

1. Definizioni

Siano $X \neq \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$ due insiemi, una *funzione* $f : X \to Y$ è una legge che associa ad ogni elemento $x \in X$ uno ed un solo elemento $f(x) \in Y$. L'insieme X si chiama *dominio* della funzione f, mentre Y si chiama *codominio*. Useremo la notazione

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

o talvolta semplicemente $x \mapsto f(x)$ quando saranno chiari dal contesto il dominio ed il codominio.

Definizione 2.1.1. Sia $f : X \to Y$ una funzione e sia $A \subset X$ un sottoinsieme non vuoto. Chiamiamo *immagine di A tramite f* il sottoinsieme di Y formato da tutti i valori che sono assunti da f in corrispondenza degli elementi di A. In altre parole

$$f(A) = \{y \in Y \,:\, \exists x \in A \text{ tale che } y = f(x)\}.$$

Nel caso in cui $A = X$, chiameremo l'insieme $f(X)$ semplicemente *immagine di f*.

Definizione 2.1.2. Sia $f : X \to Y$ una funzione e sia $B \subset Y$ un sottoinsieme non vuoto. Chiamiamo *controimmagine di B tramite f* il sottoinsieme di X formato da tutti gli elementi la cui immagine tramite f appartiene a B. In altre parole

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \,:\, f(x) \in B\}.$$

Esempio 2.1.3. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ è pari,} \\ -1, & \text{se } x \text{ è dispari.} \end{cases}$$

In base alla definizione, abbiamo che

$$f(\{0, 2, -4, -6\}) = \{1\},$$

dal momento che $0, 2, -4$ e -6 sono tutti numeri pari e quindi

$$f(0) = f(2) = f(-4) = f(-6) = 1.$$

L'immagine di f è data da

$$f(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}.$$

Troviamo anche qualche controimmagine. Per esempio

$$f^{-1}(\{-1\}) = \{x \in \mathbb{Z} \,:\, f(x) = -1\} = \{x \in \mathbb{Z} \,:\, x \text{ è dispari}\},$$

e

$$f^{-1}([2,3]) = \{x \in \mathbb{Z} \,:\, f(x) \in [2,3]\} = \{x \in \mathbb{Z} \,:\, 2 \leq f(x) \leq 3\} = \emptyset.$$

Definizione 2.1.4. Sia $f : X \to Y$ una funzione, si chiama *grafico di* f il seguente sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times Y$

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x,y) \in X \times Y \,:\, y = f(x)\}.$$

Osservazione 2.1.5. Nel caso particolare in cui X, Y siano entrambi sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, allora $\mathrm{Graph}(f)$ può essere rappresentato graficamente nel piano cartesiano. Ad esempio, nel caso dell'Esempio 2.1.3, il grafico di f è formato da tutte le coppie di punti nel piano cartesiano della forma

$$(x, 1) \quad \text{se } x \in \mathbb{Z} \text{ è pari}, \qquad (x, -1) \quad \text{se } x \in \mathbb{Z} \text{ è dispari}.$$

2. Iniettività e suriettività

I due concetti che introdurremo in questa sezione sono di fondamentale importanza.

Definizione 2.2.1. Una funzione $f : X \to Y$ si dice *iniettiva* se vale la proprietà seguente

$$\text{“}\forall y \in Y, \text{ l'equazione } y = f(x) \text{ ammette } \textbf{al più} \text{ una soluzione } x \in X''$$

Osservazione 2.2.2. Un modo equivalente di descrivere l'iniettività di f è dire che “elementi diversi hanno immagine diverse”, ovvero che

$$\forall x_1 \neq x_0, \text{ si ha } f(x_0) \neq f(x_1).$$

Definizione 2.2.3. Una funzione $f : X \to Y$ si dice *suriettiva* se vale la proprietà seguente

$$\text{“}\forall y \in Y, \text{ l'equazione } y = f(x) \text{ ammette } \textbf{almeno} \text{ una soluzione } x \in X''$$

Osservazione 2.2.4 (Rendere suriettiva una funzione)**.** Si osservi che nel caso in cui $f : X \to Y$ non sia suriettiva, la si può sempre rendere tale rimpiazzando il codominio Y con l'immagine della funzione $f(X)$. In altre parole, $f : X \to f(X)$ è sempre suriettiva.

Definizione 2.2.5. Una funzione $f : X \to Y$ si dice *biettiva* se è allo stesso tempo iniettiva e suriettiva. In altre parole, $f : X \to Y$ è biettiva se vale la proprietà seguente

$$\text{“}\forall y \in Y, \text{ l'equazione } y = f(x) \text{ ammette } \textbf{una ed una sola} \text{ soluzione } x \in X''$$

Esempio 2.2.6. Riprendiamo l'esempio della funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ è pari}, \\ -1, & \text{se } x \text{ è dispari}, \end{cases}$$

e già vista in precedenza. Si vede facilmente che questa funzione non è iniettiva e nemmeno suriettiva. Per esempio, prendendo $1 \in \mathbb{R}$, l'equazione

$$f(x) = 1$$

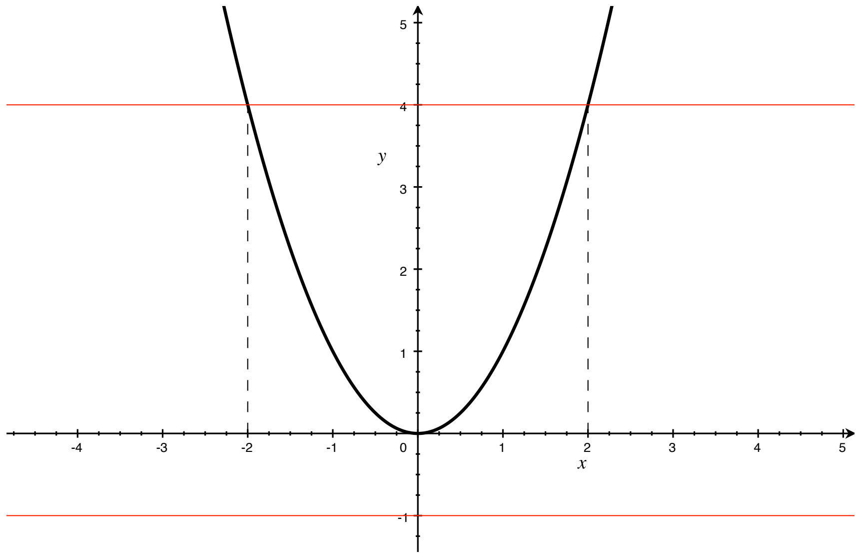

Figura 1. Il grafico della funzione f dell'Esempio 2.2.7. Si osservi che ogni valore y positivo è assunto da esattamente due numeri reali distinti (quindi f **non** è iniettiva). Al contrario, i valori y strettamente negativi, non sono mai assunti (quindi f **non** è suriettiva, se prendiamo come codominio $\mathbb{R}$).

ha infinite soluzioni $x \in \mathbb{Z}$, corrispondenti ad ogni numero pari di $\mathbb{Z}$. Questo dimostra che f non è iniettiva. D'altra parte, prendendo $2 \in \mathbb{R}$ si vede che

$$f(x) = 2,$$

non ammette soluzioni $x \in \mathbb{Z}$, dal momento che f ammette solo i valori 1 e -1. Quindi f non è suriettiva. Si noti però che considerando f come una funzione $f : \mathbb{Z} \to \{-1, 1\}$, adesso sarebbe suriettiva.

Esempio 2.2.7 (Elevamento al quadrato)**.** Consideriamo la funzione

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Anche questa funzione non è ne' iniettiva ne' suriettiva. Infatti, l'equazione

$$f(x) = 1 \qquad \text{ovvero} \qquad x^2 = 1,$$

ammette due soluzioni in $\mathbb{R}$, ovvero $x = 1$ e $x = -1$. Questo dimostra che f non è iniettiva. D'altra parte, preso $y < 0$ l'equazione

$$x^2 = y,$$

non ammette soluzioni in $\mathbb{R}$, quindi f non è nemmeno suriettiva.

Esempio 2.2.8 (Elevamento al quadrato...di nuovo!)**.** Consideriamo adesso la funzione

$$\begin{array}{rccc} f: & [0, +\infty) & \to & [0, +\infty) \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Apparentemente niente è cambiato rispetto all'esempio precedente...ma non è così! Infatti, la funzione f è diventata biettiva! Se prendiamo $y \in [0, +\infty)$ adesso l'equazione

$$f(x) = y,$$

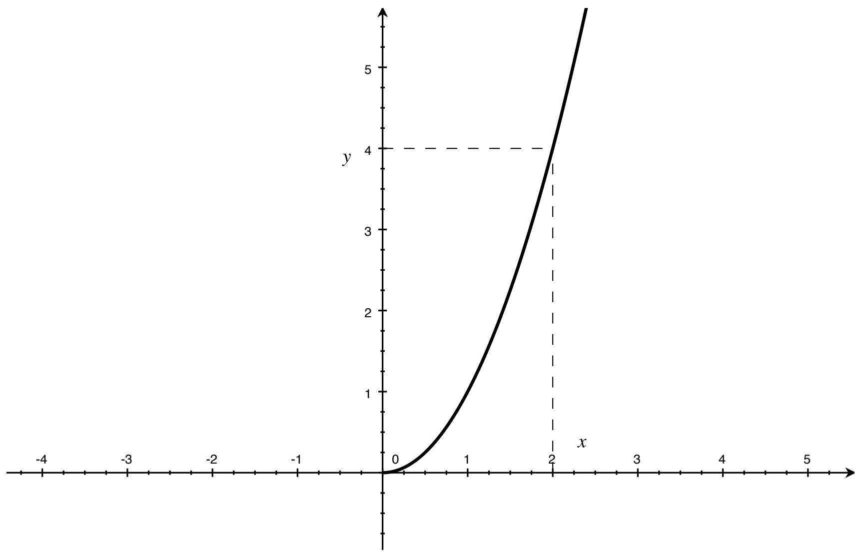

Figura 2. Il grafico della funzione f dell'Esempio 2.2.8. Si osservi che stavolta abbiamo una corrispondenza biunivoca tra i punti del semiasse $x \geq 0$ e quelli del semiasse $y \geq 0$.

ha **al più una soluzione** $x \geq 0$, ovvero f è iniettiva. D'altra parte, ogni numero $y \geq 0$ è il quadrato di un numero reale positivo[1], ovvero per ogni $y \in [0, +\infty)$ l'equazione

$$f(x) = y,$$

ammette **almeno una** soluzione $x \geq 0$. Questo mostra che la funzione f è anche suriettiva e quindi, in conclusione, biettiva. Si osservi in particolare che per quanto detto

"$\forall y \geq 0$, l'equazione $y = x^2$ ammette **una ed una sola** soluzione $x \geq 0$".

Ha quindi perfettamente senso definire la funzione

$$\begin{array}{rccl} g: & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & y & \mapsto & \text{" l'unica soluzione } x \geq 0 \text{ di } x^2 = y \text{"} \end{array}$$

Tale funzione è detta *radice quadrata*, indicata col simbolo $y \mapsto \sqrt{y}$. Per come è stata costruita, è facile verificare che

$$f(g(y)) = y, \qquad \text{per } y \in [0, +\infty),$$

e

$$g(f(x)) = x, \qquad \text{per } x \in [0, +\infty).$$

3. Composizione di funzioni

In certi casi, quando si hanno a disposizione più funzioni, possiamo "comporle". Più precisamente:

Definizione 2.3.1. Siano X, Y e Z, W quattro insiemi non vuoti tali che $Y \subset Z$. Siano $f : X \to Y$ e $g : Z \to W$ due funzioni. Si chiama *composizione di f con g* la nuova funzione $g \circ f : X \to W$ definita da

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \qquad \text{per ogni } x \in X.$$

[1] La giustificazione rigorosa di questo fatto intuitivo richiede gli strumenti del Capitolo 4, in particolare l'utilizzo del *Teorema dei valori intermedi*.

Si osservi che affinché l'espressione $g(f(x))$ abbia senso, è necessario che $f(x)$ appartenga al dominio di g, ovvero che il codominio Y di f sia contenuto dentro il dominio Z di g. Questo spiega la richiesta $Y \subset Z$.

Esempio 2.3.2. Si prendano le funzioni

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x+1 \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$$

In tal caso sono ben definite entrambe le composizioni

$$g \circ f : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad \text{e} \qquad f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Nel secondo caso, basta osservare che $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Si ha allora

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{1}{1+f(x)^2} = \frac{1}{1+(1+x)^2}, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

e

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = \frac{1}{1+x^2} + 1, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Questo esempio dovrebbe anche chiarire che, in generale, l'operazione di composizione *non è commutativa.*

Definizione 2.3.3. Siano X, Y due insiemi non vuoti e sia $f : X \to Y$ una funzione biettiva. La sua *funzione inversa* $f^{-1} : Y \to X$ è definita come

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & Y & \to & X \\ & y & \mapsto & \text{“l'unica soluzione } x \in X \text{ dell'equazione } f(x) = y\text{''} \end{array} \tag{2.3.1}$$

Si osservi che grazie alla proprietà di biettività, questa definizione è ben posta. Infatti, questa proprietà garantisce che per ogni $y \in Y$ esiste una (per *suriettività*) ed una sola (per *iniettività*) $x \in X$ tale che $f(x) = y$. Inoltre, si ha direttamente dalla costruzione

$$f^{-1} \circ f(x) = x, \quad \text{per ogni } x \in X, \qquad f \circ f^{-1}(y) = y, \quad \text{per ogni } y \in Y.$$

4. Funzioni trigonometriche

4.1. Identità fondamentale.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.4.1}$$

Dimostrazione. Questa formula è una conseguenza diretta della definizione di $\cos x$ e $\sin x$, oltre che del Teorema di Pitagora. □

4.2. Periodicità.

$$\cos(x + 2\,k\,\pi) = \cos x, \qquad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z} \tag{2.4.2}$$

$$\sin(x + 2\,k\,\pi) = \sin x, \qquad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z} \tag{2.4.3}$$

$$\tan(x + k\,\pi) = \tan x, \qquad x \neq \frac{(2\,m+1)\,\pi}{2},\ m, k \in \mathbb{Z}, \tag{2.4.4}$$

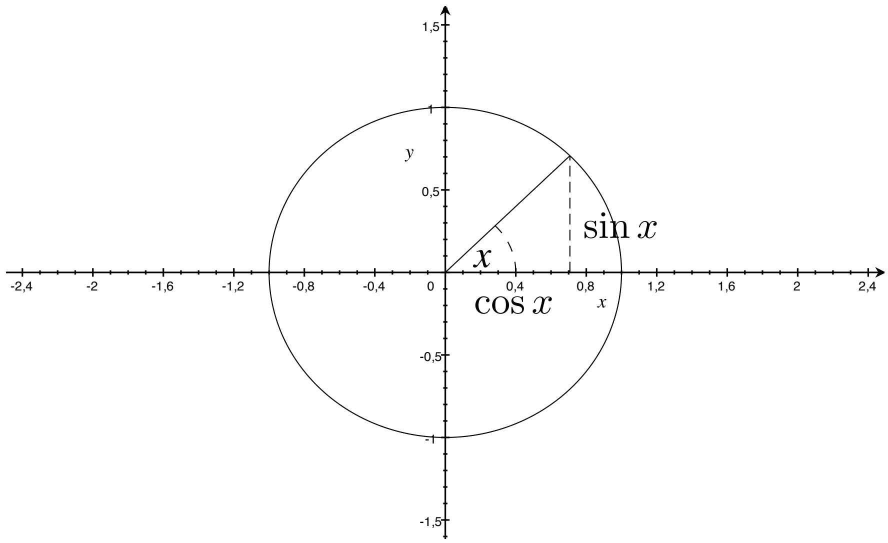

Figura 3. Il coseno ed il seno di un arco x

4.3. Alcune formule notevoli.

$$\cos(-x) = \cos x, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.4.5}$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.4.6}$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos x \qquad \sin(x+\pi) = -\sin x, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.4.7}$$

$$\tan(-x) = -\tan x, \qquad x \neq \frac{(2\,m+1)\,\pi}{2},\ m \in \mathbb{Z} \tag{2.4.8}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \text{e} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.4.9}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}, \qquad x \neq 2\,m\,\pi,\ m \in \mathbb{Z} \tag{2.4.10}$$

4.4. Alcuni valori notevoli.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—

Dimostrazione. Tutti questi valori possono essere determinati utilizzando la definizione di coseno, seno, tangente ed il Teorema di Pitagora. Per esempio, per construzione si ha

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}, \tag{2.4.11}$$

et questa quantità corrisponde alla lunghezza del cateto di un triangolo rettangolo isoscele, la cui ipotenusa misura 1. Dal Teorema di Pitagora troviamo quindi

$$\cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4} = 1.$$

Tenendo conto di (2.4.11), l'ultima identità implica

$$2\cos^2\frac{\pi}{4} = 1,$$

e quindi, tenendo conto che sempre per costruzione $\cos(\pi/4)$ è positivo, si ha come desiderato

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Troviamo adesso il valore di $\cos(\pi/6)$ e $\sin(\pi/6)$: a tal fine, si consideri il triangolo $A\,B\,C$ in Figura 4. Il triangolo è costruito in modo che l'ipotenusa $A\,C$ abbia lunghezza 1. "Raddoppiando" il triangolo rettangolo riflettendolo lungo il segmento $A\,B$, si ottiene un nuovo triangolo $A\,C\,C'$. Si vede facilmente che il triangolo così ottenuto è equilatero: in particolare, vale

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \overline{B\,C} = \frac{1}{2}\,\overline{A\,C} = \frac{1}{2}.$$

Per trovare il valore del coseno, basta adesso usare il Teorema di Pitagora: si ha

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

come volevamo. Infine, consideriamo l'angolo $\pi/3$: per determinarne coseno e seno, basterà usare le formule (2.4.9). Otteniamo quindi

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

ed anche

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

I valori della tangente si calcolano facilmente, usando che per definizione è il rapporto tra seno e coseno. □

4.5. Formule di addizione.

$$\cos(x-y) = \cos x\,\cos y + \sin x\,\sin y \tag{2.4.12}$$

$$\cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y \tag{2.4.13}$$

$$\sin(x-y) = \sin x\,\cos y - \cos x\,\sin y \tag{2.4.14}$$

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \tag{2.4.15}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x\,\tan y} \tag{2.4.16}$$

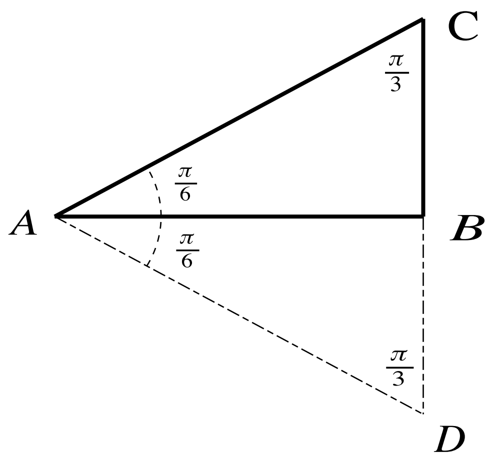

Figura 4. La costruzione geometrica per il calcolo di $\cos(\pi/6)$ e $\sin(\pi/6)$.

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\, \tan y} \tag{2.4.17}$$

Dimostrazione. La formula per $\cos(x-y)$ è dimostrata nell'Esercizio 2.8.7. **A partire da questa formula, si possono dimostrare tutte le altre**. Per esempio, utilizzando che il coseno è una funzione pari ed il seno è una funzione dispari, si ha

$$\begin{aligned}\cos(x+y) = \cos(x-(-y)) &= \cos x\, \cos(-y) + \sin x\, \sin(-y)\\ &= \cos x\, \cos y - \sin x\, \sin y,\end{aligned}$$

ed abbiamo quindi dimostrato la (2.4.13). Per dimostrare la terza formula (2.4.14), si utlizza la relazione (2.4.9) tra coseno e seno

$$\begin{aligned}\sin(x-y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x-y)\right) &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + y\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\, \cos y - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\, \sin y\\ &= \sin x\, \cos y - \cos x\, \sin y.\end{aligned}$$

Infine, dimostriamo come ottenere la quinta formula (2.4.16). Si ha

$$\begin{aligned}\tan(x-y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)} = \frac{\sin x\,\cos y - \sin y\,\cos x}{\cos x\,\cos y + \sin x\,\sin y} &= \frac{\cos y\,(\sin x - \tan y\,\cos x)}{\cos y\,(\cos x + \sin x\,\tan y)} \\ &= \frac{\sin x - \tan y\,\cos x}{\cos x + \sin x\,\tan y} \\ &= \frac{\cos x(\tan x - \tan y)}{\cos x(1+\tan x\,\tan y)} \\ &= \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x\,\tan y},\end{aligned}$$

che dimostra quello che volevamo.

Lo studente provi come (utile!) esercizio a dimostrare le altre formule. □

4.6. Formule di duplicazione.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\,\cos^2 x - 1 = 1 - 2\,\sin^2 x \tag{2.4.18}$$

$$\sin 2x = 2\,\sin x\,\cos x \tag{2.4.19}$$

$$\tan 2x = \frac{2\,\tan x}{1-\tan^2 x} \tag{2.4.20}$$

Dimostrazione. Queste formule non sono nient'altro che un caso particolare delle formule di addizione viste sopra, basta scegliere $x = y$ in (2.4.13), (2.4.15) e (2.4.17), rispettivamente. A titolo d'esempio, dimostriamo la (2.4.18): si ha

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x\,\cos x - \sin x\,\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Utilizzando l'identità fondamentale (2.4.1), possiamo riscrivere anche

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\,\cos^2 x - 1$$

e

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = (1-\sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\,\sin^2 x.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

4.7. Formule di bisezione.

$$\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \tag{2.4.21}$$

$$\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \tag{2.4.22}$$

$$\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \tag{2.4.23}$$

Dimostrazione. A titolo d'esempio, dimostriamo la (2.4.21). Come sempre, lo studente provi a dimostrare le altre. Dalla formula di duplicazione (2.4.18), sappiamo che

$$\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2\,\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1,$$

ovvero abbiamo

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos x + 1}{2}.$$

Prendendo la radice quadrata[2], si ottiene la conclusione desiderata. □

4.8. Formule di prostaferesi.

$$\cos p + \cos q = 2\,\cos\frac{p+q}{2}\,\cos\frac{p-q}{2} \tag{2.4.24}$$

$$\cos p - \cos q = -2\,\sin\frac{p+q}{2}\,\sin\frac{p-q}{2} \tag{2.4.25}$$

$$\sin p + \sin q = 2\,\sin\frac{p+q}{2}\,\cos\frac{p-q}{2} \tag{2.4.26}$$

$$\sin p - \sin q = 2\,\sin\frac{p-q}{2}\,\cos\frac{p+q}{2} \tag{2.4.27}$$

Dimostrazione. Di nuovo, queste formule non sono altro che una diretta conseguenza delle formule di addizione. Dimostriamo la (2.4.24) a titolo di esempio, lo studente provi a dimostrare le altre come esercizio.

Osserviamo innanzitutto che possiamo scrivere

$$p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} \qquad \text{e} \qquad q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2},$$

quindi dalla formula di addizione del coseno (2.4.13), si ottiene

$$\begin{aligned}\cos p + \cos q &= \cos\frac{p+q}{2}\,\cos\frac{p-q}{2} - \sin\frac{p+q}{2}\,\sin\frac{p-q}{2}\\ &\quad + \cos\frac{p+q}{2}\,\cos\frac{p-q}{2} + \sin\frac{p+q}{2}\,\sin\frac{p-q}{2}\\ &= 2\,\cos\frac{p+q}{2}\,\cos\frac{p-q}{2}.\end{aligned}$$

Per le altre formule si procede in modo analogo. □

[2]Si ricordi che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, vale

$$\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|.$$

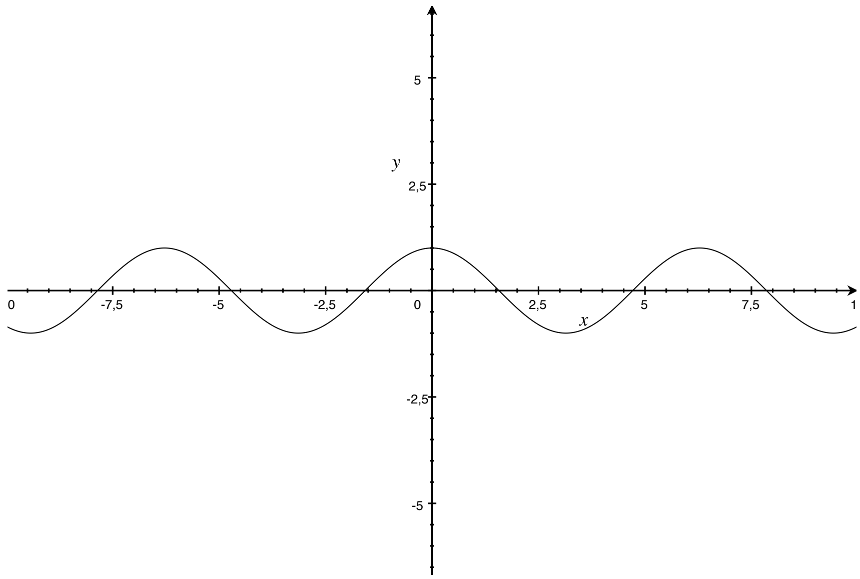

Figura 5. Il grafico della funzione coseno

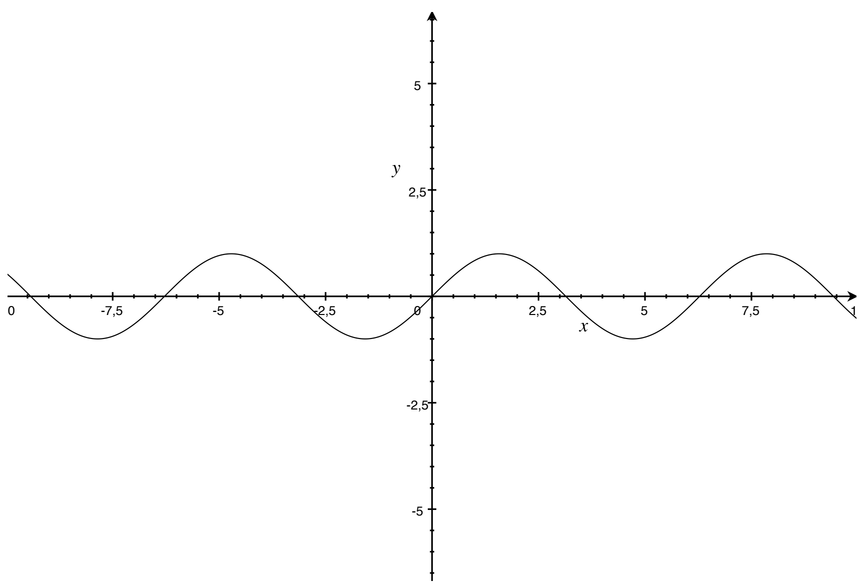

Figura 6. Il grafico della funzione seno

5. Funzioni trigonometriche inverse

5.1. Arco coseno. La funzione

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

è suriettiva, ma non iniettiva, essendo periodica. Se però restringiamo la funzione coseno all'intervallo $[0, \pi]$, questa nuova funzione resta suriettiva ed inoltre è anche iniettiva. Possiamo quindi definire la sua funzione inversa: essa si chiama *arco coseno*. Dalla Definizione 2.3.3, essa è definita

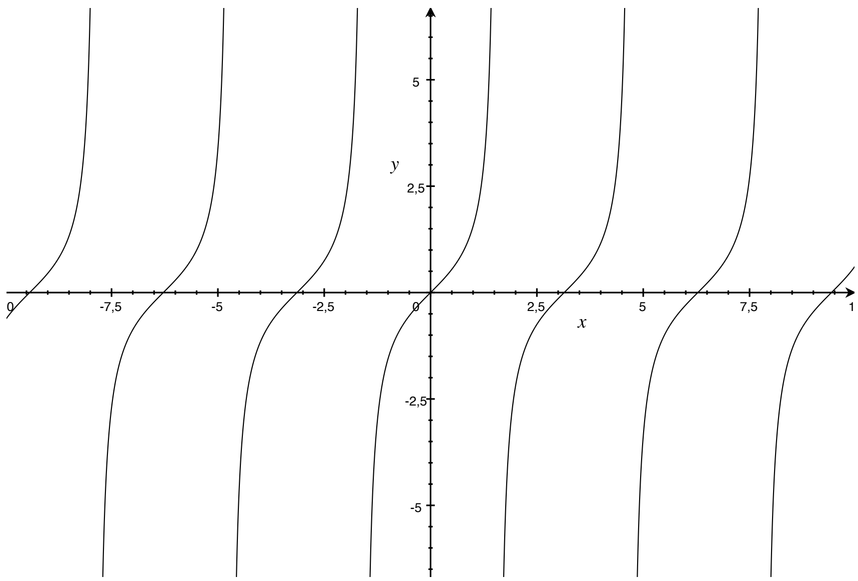

Figura 7. Il grafico della funzione tangente

tramite

$$\begin{array}{rcccl} \arccos & : & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ & & y & \mapsto & \text{“l'unica soluzione } x \in [0,\pi] \\ & & & & \text{dell'equazione } \cos x = y\text{”} \end{array}$$

Si ha quindi

$$\arccos y = \text{“}\textit{l'unico angolo compreso tra } 0 \textit{ e } \pi \textit{ il cui coseno vale } y\text{”}.$$

Dalla sua costruzione, vale

$$\arccos(\cos x) = x, \ \text{ per ogni } x \in [0,\pi] \qquad \text{e} \qquad x = \cos(\arccos y), \ \text{ per ogni } y \in [-1,1].$$

Esempio 2.5.1. Si ha

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

perché $\pi/3$ è l'unico angolo compreso tra 0 e π il cui coseno vale $1/2$.

Fate attenzione all'esempio seguente.

Esempio 2.5.2 (Esempio trappola!)**.** Quanto vale

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)\right) = ?$$

Si avrebbe voglia di rispondere $7/6\,\pi$...sbagliato! Infatti, dal momento che

$$\frac{7}{6}\pi \notin [0,\pi],$$

sappiamo che **questa non è la risposta corretta**. Dalla definizione di arccos, sappiamo che la risposta deve essere “*l'unico angolo compreso tra* 0 *e* π *il cui coseno vale* $\cos(7/6\,\pi)$”. Quindi, dal momento che

$$\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{7}{6}\pi\right),$$

e $5/6\,\pi$ è l'unico angolo tra 0 et π con questa proprietà, si ha che **la risposta corretta è**

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{7}{6}\,\pi\right)\right) = \frac{5}{6}\,\pi.$$

5.2. Arco seno. La funzione

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

è suriettiva, ma non iniettiva. Se si considera la restrizione del seno all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, questa funzione diventa biettiva. La sua funzione inversa si chiama *arco seno*, che dalla Definizione 2.3.3 è definita tramite

$$\begin{array}{rcccc} \arcsin & : & [-1,1] & \to & \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ & & y & \mapsto & \text{“l'unica soluzione } -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ & & & & \text{dell'equazione } \sin x = y\text{''} \end{array}$$

Dalla sua definizione, possiamo anche dire

$$\arcsin y = \text{“}\textit{l'unico angolo compreso tra } -\pi/2 \textit{ e } \pi/2 \textit{ il cui seno vale } y\text{''}.$$

Ovviamente, si avrà come d'abitudine

$$\arcsin(\sin x) = x, \text{ per ogni } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \text{e} \qquad x = \sin(\arcsin y), \text{ per ogni } x \in [-1, 1].$$

Esempio 2.5.3. Abbiamo per esempio

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} \qquad \text{e} \qquad \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

5.3. Arco tangente. Per quanto riguarda la funzione tangente, anch'essa è periodica, quindi non può essere iniettiva. D'altra parte, su ogni intervallo della forma $(-\pi/2 + k\,\pi, \pi/2 + k\,\pi)$ essa è strettamente crescente e quindi inieittiva. In particolare, la sua restrizione

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},$$

è biettiva, possiamo quindi definirne la funzione inversa. Si tratta della funzione *arco tangente*, definita come nella Definizione 2.3.3

$$\begin{array}{rcccc} \arctan & : & \mathbb{R} & \to & \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ & & y & \mapsto & \text{“l'unica soluzione } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ & & & & \text{dell'equazione } \tan x = y\text{''} \end{array}$$

Dalla sua definizione, segue che

$$\arctan y = \text{“}\textit{l'unico angolo compreso (strettamente) tra } -\frac{\pi}{2} \textit{ e } \frac{\pi}{2} \textit{ la cui tangente vale } y\text{''}.$$

Essa ha dunque le proprietà

$$\arctan(\tan x) = x, \text{ per ogni } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad y = \tan(\arctan y), \text{ per ogni } y \in \mathbb{R}.$$

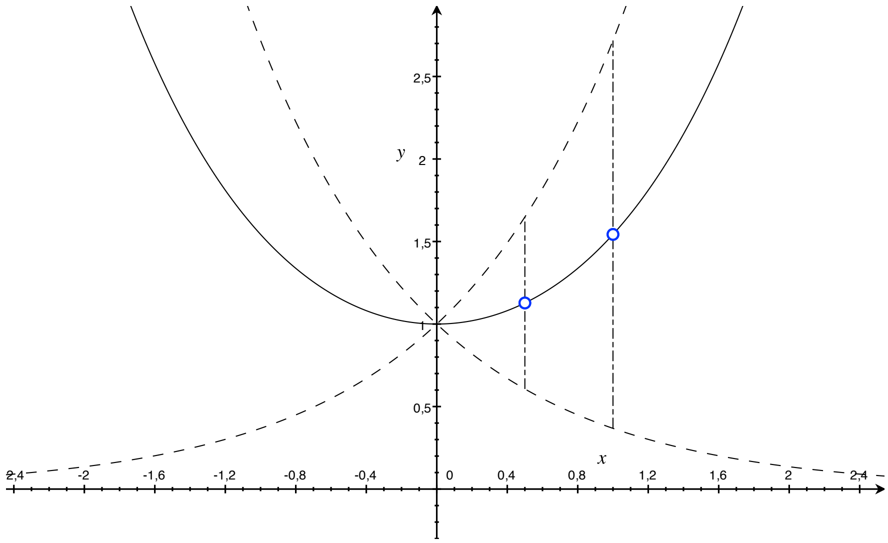

Figura 8. Construction du graph de $x \mapsto \cosh_a x$

6. Funzioni iperboliche

6.1. Coseno e seno iperbolici. Sia $a > 1$ un numero reale fissato. Si tratta delle funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ tramite

$$\cosh_a x = \frac{a^x + a^{-x}}{2}, \qquad \sinh_a x = \frac{a^x - a^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

L'appellativo di "iperboliche" è legato alla **identità fondamentale per le funzioni iperboliche**, data da

$$\cosh_a^2 x - \sinh_a^2 x = 1, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.6.1}$$

Tale identità si dimostra usando la definizione, ovvero

$$\begin{aligned}\cosh_a^2 x - \sinh_a^2 x &= \left(\frac{a^x + a^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^x - a^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{a^{2x} + 2 + a^{-2x} - (a^{2x} - 2 + a^{-2x})}{4} = 1.\end{aligned}$$

Osservazione 2.6.1. La formula (2.6.1) implica che

$$\begin{aligned}I &= \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \exists x \in \mathbb{R} \text{ tale che } X = \cosh_a x,\, Y = \sinh_a x\} \\ &= \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, X^2 - Y^2 = 1 \text{ et } X \geq 0\}.\end{aligned}$$

In altre parole, utilizzando il coseno ed il seno iperbolici possiamo parametrizzare il ramo destro dell'iperbole avente equazione cartesiana $X^2 - Y^2 = 1$.

6.2. Proprietà. Osserviamo innanzitutto che

$$\cosh_a(-x) = \frac{a^{-x} + a^x}{2} = \cosh_a x, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

e

$$\sinh_a(-x) = \frac{a^{-x} - a^x}{2} = -\sinh_a x, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

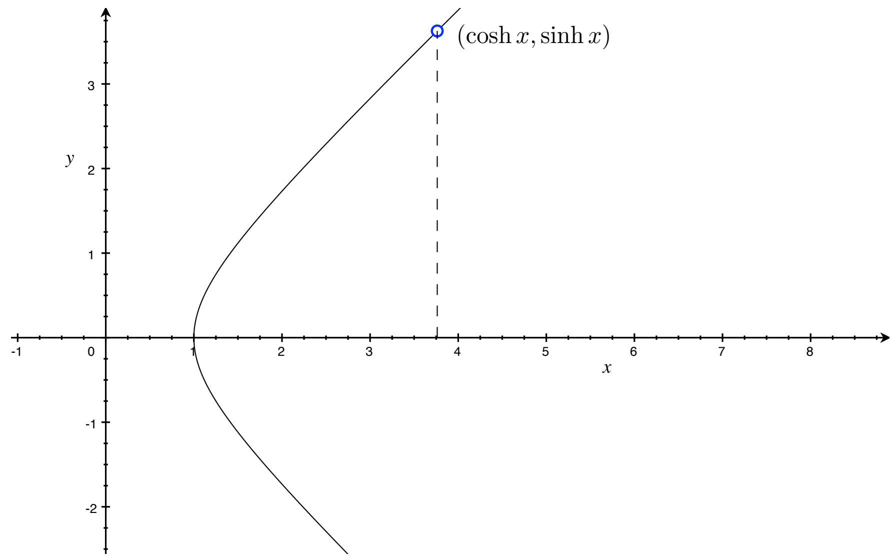

Figura 9. Parametrizzazione di un ramo dell'iperbole $X^2 - Y^2 = 1$

quindi il coseno iperbolico è una funzione pari, mentre il seno iperbolico è una funzione dispari.

Lemma 2.6.2 (Monotonia)**.** *La funzione coseno iperbolico è strettamente crescente su* $[0 + \infty)$*, mentre la funzione seno iperbolico è strettamente crescente su* $\mathbb{R}$*.*

Dimostrazione. Sappiamo già che la funzione esponenziale $x \mapsto a^x$ è strettamente crescente, quando la base $a > 1$. Osserviamo allora che se $x_1 > x_2 \geq 0$, si ha

$$a^{x_1} - a^{x_2} > 0.$$

Sempre dal fatto che $x_1 > x_2 \geq 0$, si ha anche $a^{x_1}\, a^{x_2} > 1$ e dunque

$$a^{x_1} - a^{x_2} > \frac{a^{x_1} - a^{x_2}}{a^{x_1}\, a^{x_2}}.$$

Osserviamo adesso che

$$\begin{aligned} a^{x_1} - a^{x_2} > \frac{a^{x_1} - a^{x_2}}{a^{x_1}\, a^{x_2}} \qquad &\iff \qquad a^{x_1} - a^{x_2} > \frac{1}{a^{x_2}} - \frac{1}{a^{x_1}} \\ &\iff \qquad a^{x_1} + \frac{1}{a^{x_1}} > a^{x_2} + \frac{1}{a^{x_2}} \\ &\iff \qquad \frac{a^{x_1} + a^{-x_1}}{2} > \frac{a^{x_2} + a^{-x_2}}{2}. \end{aligned}$$

Questo dimostra che $x \mapsto \cosh_a x$ è strettamente crescente su $[0, +\infty)$.

Per dimostrare la monotonia di $x \mapsto \sinh_a x$, basta osservare che

$$x \mapsto a^x \qquad \text{e} \qquad x \mapsto -a^{-x},$$

sono due funzioni strettamente crescenti (ricorda che $a > 1$). Quindi il seno iperbolico è strettamente crescente in quanto somma di due funzioni con la stessa proprietà. $\square$

Dal momento che $x \mapsto \cosh_a x$ è una funzione pari strettamente crescente per $x \geq 0$, allora essa è strettamente decrescente per $x < 0$. Questo implica che

$$\cosh_a x \geq \cosh_a 0 = 1, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

ovvero $x \mapsto \cosh_a x$ ha minimo assoluto uguale a 1 e $x = 0$ è l'unico punto di minimo.

Per quanto riguarda il seno iperbolico invece, esso è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, quindi esso è iniettivo.

6.3. La tangente iperbolica. Si può definire anche la *tangente iperbolica di* $x \in \mathbb{R}$, tramite

$$\tanh_a x = \frac{\sinh_a x}{\cosh_a x} = \frac{a^{2\,x} - 1}{a^{2\,x} + 1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

È immediato verificare che

$$\tanh_a(-x) = \frac{\sinh_a(-x)}{\cosh_a(-x)} = -\frac{\sinh_a x}{\cosh_a x} = -\tanh_a x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Lemma 2.6.3. *Sia $a > 1$, allora la funzione tangente iperbolica è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. Inoltre, vale*

$$-1 < \tanh_a(x) < 1, \qquad \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}. \tag{2.6.2}$$

Dimostrazione. Per dimostrare la monotonia, osserviamo innanzitutto che si può scrivere la tangente iperbolica come

$$\tanh_a x = \frac{a^{2\,x} - 1}{a^{2\,x} + 1} = \frac{a^{2\,x} + 1 - 2}{a^{2\,x} + 1} = 1 - \frac{2}{a^{2\,x} + 1}. \tag{2.6.3}$$

Comme la fonction $x \mapsto a^{2\,x} + 1$ est strictement croissante, on a que

$$x \mapsto \frac{1}{a^{2\,x} + 1},$$

è strettamente decrescente, da cui

$$x \mapsto -\frac{1}{a^{2\,x} + 1},$$

è strettamente crescente. Utilizzando questa informazione in (2.6.3), si trova che $x \mapsto \tanh_a x$ è strettamente crescente.

Per quanto riguarda (2.6.2), osserviamo che dal momento che $a^{2\,x} - 1 < a^{2\,x} + 1$, allora

$$\tanh_a x = \frac{a^{2\,x} - 1}{a^{2\,x} + 1} < \frac{a^{2\,x} + 1}{a^{2\,x} + 1} = 1.$$

D'altra parte, dal momento che si ha anche $a^{2\,x} - 1 > -a^{2\,x} - 1$, otteniamo

$$\tanh_a x = \frac{a^{2\,x} - 1}{a^{2\,x} + 1} > \frac{-a^{2\,x} - 1}{a^{2\,x} + 1} = -1.$$

Questo termina la dimostrazione. □

In particolare si ha che $x \mapsto \tanh_a x$ è una funzione iniettiva, la cui immagine è contenuta nell'intervallo $(-1, 1)$. Vedremo nella prossima sezione che in realtà si tratta di una *biezione tra* $\mathbb{R}$ *e* $(-1, 1)$.

6.4. Formule di addizione. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, valgono le identità seguenti

$$\cosh_a(x+y) = \cosh_a x\, \cosh_a y + \sinh_a x\, \sinh_a y$$

$$\cosh_a(x-y) = \cosh_a x\, \cosh_a y - \sinh_a x\, \sinh_a y$$

$$\sinh_a(x+y) = \sinh_a x\, \cosh_a y + \cosh_a x\, \sinh_a y$$

$$\sinh_a(x-y) = \sinh_a x\, \cosh_a y - \cosh_a x\, \sinh_a y$$

$$\tanh_a(x-y) = \frac{\tanh_a x - \tanh_a y}{1 - \tanh_a x\, \tanh_a y}$$

$$\tanh_a(x+y) = \frac{\tanh_a x + \tanh_a y}{1 + \tanh_a x\, \tanh_a y}$$

Dimostrazione. La dimostrazione della prima identità è tramite calcolo diretto. Si ha infatti

$$\begin{aligned}\cosh_a x\, \cosh_a y + \sinh_a x\, \sinh_a y &= \frac{a^x + a^{-x}}{2}\,\frac{a^y + a^{-y}}{2} + \frac{a^x - a^{-x}}{2}\,\frac{a^y - a^{-y}}{2} \\ &= \frac{a^{x+y} + a^{x-y} + a^{y-x} + a^{-x-y}}{4} \\ &+ \frac{a^{x+y} - a^{x-y} - a^{y-x} + a^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{a^{x+y} + a^{-x-y}}{2} = \cosh_a(x+y).\end{aligned}$$

Per quanto riguarda $\cosh_a(x-y)$, è sufficiente osservare che

$$\cosh_a(x-y) = \cosh_a(x + (-y)),$$

ed utilizzare la formula precedente, insieme al fatto che il coseno iperbolico è pari, mentre il seno iperbolico è dispari.

Per quanto riguarda la terza formula, svolgendo i calcoli si ha

$$\begin{aligned}\sinh_a x\, \cosh_a y + \cosh_a x\, \sinh_a y &= \frac{a^x - a^{-x}}{2}\,\frac{a^y + a^{-y}}{2} + \frac{a^x + a^{-x}}{2}\,\frac{a^y - a^{-y}}{2} \\ &= \frac{a^{x+y} + a^{x-y} - a^{y-x} - a^{-x-y}}{4} \\ &+ \frac{a^{x+y} - a^{x-y} + a^{y-x} - a^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{a^{x+y} - a^{-x-y}}{2} = \sinh_a(x+y),\end{aligned}$$

che termina la dimostrazione.

Infine, dimostriamo la prima formula per la tangente iperbolica. Usiamo la definizione di tangente iperbolica e le formule di addizione precedenti, si ha dunque

$$\begin{aligned}\tanh_a(x-y) = \frac{\sinh_a(x-y)}{\cosh_a(x-y)} &= \frac{\sinh_a x\, \cosh_a y - \cosh_a x\, \sinh_a y}{\cosh_a x\, \cosh_a y - \sinh_a x\, \sinh_a y} \\ &= \frac{\cosh_a y\,(\sinh_a x - \cosh_a x\, \tanh_a y)}{\cosh_a y\,(\cosh_a x - \sinh_a x\, \tanh_a y)} \\ &= \frac{\sinh_a x - \cosh_a x\, \tanh_a y}{\cosh_a x - \sinh_a x\, \tanh_a y} \\ &= \frac{\cosh_a x\,(\tanh_a x - \tanh_a y)}{\cosh_a x\,(1 - \tanh_a x\, \tanh_a y)} \\ &= \frac{\tanh_a x - \tanh_a y}{1 - \tanh_a x\, \tanh_a y}.\end{aligned}$$

Si dimostrino per esercizio le formule restanti. □

6.5. Formule di duplicazione. Scegliendo $x = y$ nelle formule di addizione, si ottengono le identità seguenti

$$\cosh_a(2\,x) = \cosh_a^2 x + \sinh_a^2 x,$$

$$\sinh_a(2\,x) = 2\, \cosh_a x\, \sinh_a x,$$

$$\tanh_a(2\,x) = \frac{2\, \tanh_a x}{1 - \tanh_a^2 x}.$$

6.6. Formule di bisezione. Dalle formule di duplicazione, si ottengono con facili manipolazioni le seguenti

$$\cosh_a\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh_a x + 1}{2},$$

$$\sinh_a\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh_a x - 1}{2}.$$

$$\tanh_a\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh_a x - 1}{\cosh_a x + 1}.$$

7. Funzioni iperboliche inverse

7.1. Argomento coseno iperbolico. Fissiamo come prima $a > 1$ ed occupiamoci di determinare se il coseno iperbolico è iniettivo e/o suriettivo. Abbiamo già visto che il coseno iperbolico è una funzione pari, quindi non può essere iniettivo su tutto $\mathbb{R}$: consideriamone quindi la restrizione a $[0, +\infty)$. Dal Lemma 2.6.2, sappiamo che la funzione è strettamente crescente su questo intervallo. Quindi $x \mapsto \cosh_a x$ è iniettiva su $[0, +\infty)$.

Per quanto riguarda la suriettività, abbiamo anche osservato che 1 è il minimo assoluto della funzione, consideriamo allora

$$\cosh_a : [0, +\infty) \to [1, +\infty),$$

ed, usando la definizione, verifichiamo la suriettività. In altre parole, dobbiamo dimostrare che

$$\forall y \geq 1, \text{ l'equazione } \cosh_a x = y \text{ ammette almeno una soluzione } x \geq 0.$$

Per quanto detto sopra, tale soluzione sarà unica (ovvero, sappiamo già che la funzione è iniettiva su $[0, +\infty)$). Utilizzando la definizione di $\cosh_a x$, questo è equivalente a cercare $x \geq 0$ tale che

$$\frac{a^x + a^{-x}}{2} = y.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}\frac{a^x + a^{-x}}{2} = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{a^{2x} + 1}{2\,a^x} = y \qquad &\Longleftrightarrow \qquad a^{2x} + 1 = 2\,y\,a^x \\ &\Longleftrightarrow \qquad a^{2x} - 2\,y\,a^x + 1 = 0.\end{aligned}$$

Al fine di risolvere l'ultima equazione, poniamo $A = a^x$ e riscriviamola come

$$A^2 - 2\,y\,A + 1 = 0.$$

Le soluzioni di quest'ultima equazione sono

$$A_2 = y + \sqrt{y^2 - 1} \qquad \text{e} \qquad A_1 = y - \sqrt{y^2 - 1}.$$

Adesso dobbiamo ricordarci che abbiamo posto $A = a^x$ e che abbiamo la condizione $x \geq 0$. Quindi delle due soluzioni trovate sopra, solo quella con $A \geq e^0 = 1$ è accettabile. Quindi dobbiamo prendere A_2, ovvero

$$a^x = y + \sqrt{y^2 - 1},$$

da cui, passando al logaritmo in base a, si ha

$$x = \log_a \left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right). \tag{2.7.4}$$

Abbiamo dunque dimostrato che

$$\cosh_a : [0, +\infty) \to [1, +\infty),$$

è biettiva. Possiamo dunque definire la funzione inversa, che si chiama *argomento coseno iperbolico*. In base alla definizione (2.3.1), si tratta della funzione

$$\begin{array}{rccc}\operatorname{arg\,cosh}_a & : & [1, +\infty) & \to & [0, +\infty) \\ & & y & \mapsto & \text{“l'unica soluzione } x \in [0, +\infty) \\ & & & & \text{dell'equazione } \cosh_a x = y\text{''}\end{array}$$

Dalla (2.7.4), otteniamo allora

$$\operatorname{arg\,cosh}_a y = \log_a \left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right), \qquad y \geq 1.$$

Per definizione di funzione inversa, vale come sempre

$$\operatorname{arg\,cosh}_a(\cosh_a x) = x, \qquad \text{per ogni } x \geq 0,$$

e

$$\cosh_a(\operatorname{arg\,cosh}_a y) = y, \qquad \text{per ogni } y \geq 1.$$

7.2. Argomento seno iperbolico. Abbiamo già visto che la funzione

$$\sinh_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

è iniettiva. Dimostriamo che è anche suriettiva, risolvendo l'equazione

$$\sinh_a x = y,$$

con $y \in \mathbb{R}$. Come per il caso del coseno iperbolico, utilizzando la definizione, dobbiamo risolvere

$$\frac{a^x - a^{-x}}{2} = y.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{a^x - a^{-x}}{2} = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{a^{2\,x} - 1}{2\,a^x} = y \qquad &\Longleftrightarrow \qquad a^{2\,x} - 1 = 2\,y\,a^x \\ &\Longleftrightarrow \qquad a^{2\,x} - 2\,y\,a^x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Come prima, poniamo $A = e^x$ e riscriviamo l'ultima equazione come

$$A^2 - 2\,y\,A - 1 = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$A_2 = y + \sqrt{y^2+1} \qquad \text{e} \qquad A_1 = y - \sqrt{y^2+1}.$$

Adesso osserviamo che $A = e^x$ e quest'ultima è sempre una quantità positiva. Quindi la sola soluzione ammissibile è A_2 che è positiva. Si ha dunque

$$a^x = y + \sqrt{y^2+1},$$

da cui, passando al logaritmo, si ottiene

$$x = \log_a \left(y + \sqrt{y^2+1} \right).$$

Questo dimostra che il seno iperbolico è dunque biettivo. Possiamo definire la sua funzione inversa, chiamata *argomento seno iperbolico*. Si tratta della funzione

$$\begin{array}{rcccc} \arg\sinh_a & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & \text{“l'unica soluzione } x \in \mathbb{R} \\ & & & & \text{dell'equazione } \sinh_a x = y'' \end{array}$$

ovvero, in base alla risoluzione precedente, si ha

$$\arg\sinh_a y = \log_a \left(y + \sqrt{y^2+1} \right).$$

Come sempre, abbiamo le relazioni

$$\arg\sinh_a(\sinh_a x) = x, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

e

$$\sinh_a(\arg\sinh_a y) = y, \qquad \text{per ogni} x \in \mathbb{R}.$$

7.3. Argomento tangente iperbolica. Dimostriamo adesso che

$$\begin{array}{rcl} \tanh_a & : & \mathbb{R} \to (-1,1) \\ & & x \mapsto \dfrac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1} \end{array}$$

è una funzione biettiva. Sappiamo già che è iniettiva, dal momento che è strettamente crescente.

Per mostrare che è biettiva, ci basta mostrare che

$$\forall y \in (-1,1), \text{ esiste } x \in \mathbb{R} \text{ tale che } \frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1} = y.$$

Fissato $-1 < y < 1$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1} = y \qquad &\Longleftrightarrow \qquad a^{2x} - 1 = y\,(a^{2x}+1) \\ &\Longleftrightarrow \qquad a^{2x}\,(1-y) = (1+y) \\ &\Longleftrightarrow \qquad a^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \\ &\Longleftrightarrow \qquad x = \log_a\left(\frac{1+y}{1-y}\right), \end{aligned}$$

e l'ultima è la soluzione che cercavamo. Quindi la tangente iperbolica è biettiva come funzione da $\mathbb{R}$ in $(-1,1)$ e la sua funzione inversa è data da

$$\arg\tanh_a : (-1,1) \to \mathbb{R},$$

definita tramite

$$\arg\tanh_a y = \log_a \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}, \qquad -1 < y < 1.$$

Osservazione 2.7.1. Si osservi che si ha effettivamente

$$\frac{1+y}{1-y} > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 < y < 1.$$

8. Esercizi

8.1. Funzioni tra insiemi.

Esercizio 2.8.1. *Dire se la funzione seguente*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

è iniettiva e/o suriettiva. Nel caso sia biettiva, trovare l'espressione della funzione inversa.

Soluzione. La funzione è iniettiva, infatti per ogni $y \in \mathbb{N}$ l'equazione

$$f(n) = y \qquad \text{ovvero} \qquad n+1 = y,$$

ammette al più una soluzione $n \in \mathbb{N}$, data da $n = y-1$ (tale soluzione sarà ammissibile solo $y \geq 1$). Si osservi invece che f non è suriettiva, dal momento che l'equazione

$$f(n) = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad n+1 = 0,$$

non ammette soluzioni $n \in \mathbb{N}$. □

Esercizio 2.8.2. *Dire se la funzione seguente*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

è iniettiva e/o suriettiva. Nel caso sia biettiva, trovare l'espressione della funzione inversa.

Soluzione. La funzione sembra la stessa dell'esercizio precedente, ma si faccia attenzione che adesso sono cambiati dominio e codominio. Si ha adesso che per ogni $y \in \mathbb{N}$, l'equazione

$$g(n) = y \qquad \text{ovvero} \qquad n + 1 = y,$$

ammette una ed una sola soluzione $n \in \mathbb{Z}$, data da $n = y - 1$. La funzione è quindi biettiva stavolta e possiamo definire la sua inversa, tramite la formula generale (2.3.1)

$$\begin{array}{rccc} g^{-1}: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & y & \mapsto & \text{“l'unica soluzione } n \in \mathbb{Z} \text{ dell'equazione } g(n) = y''. \end{array}$$

In base alla discussione precedente, abbiamo dunque $g^{-1}(y) = y - 1$. □

Esercizio 2.8.3. *Dire se la funzione seguente*

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$$

è iniettiva e/o suriettiva. Nel caso sia biettiva, trovare l'espressione della funzione inversa.

Soluzione. Sia $y \in \mathbb{R}$, cerchiamo tutte le soluzioni $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ dell'equazione

$$\frac{x+1}{x-1} = h(x) = y.$$

Si trova che (si ricordi che $x \neq 1$)

$$\frac{x+1}{x-1} = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x + 1 = y\,(x-1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (y-1)\,x = y + 1.$$

Osserviamo adesso che:

- se $y = 1$, l'equazione precedente si riduce a
$$0 = 2,$$
ovvero per $y = 1$ **non ci sono soluzioni**;
- se invece $y \neq 1$, allora dall'equazione precedente otteniamo
$$x = \frac{y+1}{y-1},$$
ovvero per $y \neq 1$, l'equazione precedente ammette sempre soluzione $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e tale soluzione **è unica**.

La discussione precedente dimostra che

$$\forall y \in \mathbb{R}, \text{ l'equazione } h(x) = y \text{ ammette al più una soluzione } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

e quindi h è iniettiva. Tuttavia h non è suriettiva visto che per $y = 1$ l'equazione $1 = h(x)$ non ammette soluzioni. □

Osservazione 2.8.4. Riprendendo la discussione precedente, si vede facilmente che la funzione (fate attenzione al codominio! è cambiato)

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$$

è biettiva. La sua funzione inversa è data da

$$\begin{array}{rccc} h^{-1}: & \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ & y & \mapsto & \dfrac{y+1}{y-1} \end{array}$$

Sapreste dire perché?

Esercizio 2.8.5. *Dire se la funzione seguente*

$$\begin{array}{rccc} k: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1,x_2) & \mapsto & (x_1+x_2, x_1-x_2) \end{array}$$

è iniettiva e/o suriettiva. Nel caso sia biettiva, trovare l'espressione della funzione inversa.

Soluzione. Come sempre, prendiamo un elemento qualsiasi del codominio $(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$ e vediamo quante soluzioni $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ ha l'equazione

$$k(x_1,x_2) = (y_1,y_2).$$

Ricordando la definizione di k, questa equazione è equivalente al seguente sistema lineare di 2 equazioni e 2 incognite

$$\begin{cases} (E_1) & x_1+x_2 = y_1 \\ (E_2) & x_1-x_2 = y_2 \end{cases} \overset{(E_2)\mapsto(E_1)-(E_2)}{\iff} \begin{cases} (E_1) & x_1+x_2 = y_1 \\ (E_2) & 2\,x_2 = y_1-y_2. \end{cases}$$

Il sistema in questione ha quindi soluzione unica data da

$$x_1 = \frac{y_1+y_2}{2}, \qquad x_2 = \frac{y_1-y_2}{2}.$$

Questo dimostra che k è biettiva. Esiste quindi la funzione inversa, che sarà definita da

$$\begin{array}{rccc} k^{-1}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (y_1,y_2) & \mapsto & \left(\dfrac{y_1+y_2}{2}, \dfrac{y_1-y_2}{2}\right) \end{array}$$

in base alla definizione (2.3.1). □

Esercizio 2.8.6. *Dire se la funzione seguente*

$$\begin{array}{rccc} \ell: & \mathbb{R}^2 & \to & [0,+\infty) \\ & (x_1,x_2) & \mapsto & \sqrt{x_1^2+x_2^2} \end{array}$$

è iniettiva e/o suriettiva. Nel caso sia biettiva, trovare l'espressione della funzione inversa.

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che da un punto di vista geometrico, la quantità

$$\ell(x_1,x_2),$$

rappresenta la distanza dall'origine del punto (x_1,x_2), grazie al *Teorema di Pitagora*.

Questo già ci dice che la funzione ℓ non può essere iniettiva: in effetti, per ogni $y > 0$ tutti i punti che appartengono alla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio y hanno come immagine tramite ℓ proprio y.

La funzione ℓ è però suriettiva, infatti per ogni $y \geq 0$ l'equazione

$$y = \ell(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^{+}x_2^2},$$

ammette almeno una soluzione, per esempio $(\sqrt{y}, 0)$ è una di queste. $\square$

8.2. Funzioni trigonometriche.

Esercizio 2.8.7. *Giustificare geometricamente la formula*

$$\cos(x-y) = \cos x\, \cos y + \sin x\, \sin y, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Soluzione. Innanzitutto, osserviamo che si può supporre senza perdità di generalità $x \geq y$, dato che la funzione coseno è pari e quindi

$$\cos(x-y) = \cos(y-x).$$

Inoltre, possiamo supporre $x > y$, visto che se $x = y$ la formula è ovviamente vera. Per semplicità, facciamo l'ipotesi ulteriore che $x, y \in [0, \pi/2]$. Facendo riferimento alla Figura 10, si vede che

$$\cos(x-y) = \overline{OC},$$

dobbiamo quindi dimostrare che

$$\overline{OC} = \cos x\, \cos y + \sin x\, \sin y.$$

Osserviamo che

$$\overline{OM} = \frac{\cos x}{\cos y},$$

e che

$$\overline{MC} = (\sin x - \overline{OM}\, \sin y)\, \sin y = \sin x\, \sin y - \frac{\cos x}{\cos y}\, \sin^2 y.$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \cos(x-y) = \overline{OC} = \overline{OM} + \overline{MC} &= \frac{\cos x}{\cos y} + \sin x\, \sin y - \frac{\cos x}{\cos y}\, \sin^2 y \\ &= \frac{\cos x}{\cos y}\,(1 - \sin^2 y) + \sin x\, \sin y \\ &= \cos x\, \cos y + \sin x\, \sin y, \end{aligned}$$

che termina la dimostrazione, sotto l'ipotesi $0 \leq y \leq x \leq \pi/2$. $\square$

Esercizio 2.8.8. *Dimostrare che, ponendo $t = \tan(x/2)$ per dei valori di x da precisare, si ha*

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2\,t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2\,t}{1-t^2}.$$

Soluzione. Si osservi che se $t = \tan x/2$, allora per ogni $x \in (-\pi, \pi)$ si ha

$$x = 2\, \arctan t,$$

e dunque

$$\begin{aligned} \cos x = \cos(2\, \arctan t) = 2\, \cos^2(\arctan t) - 1 &= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan t)} - 1 \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \end{aligned}$$

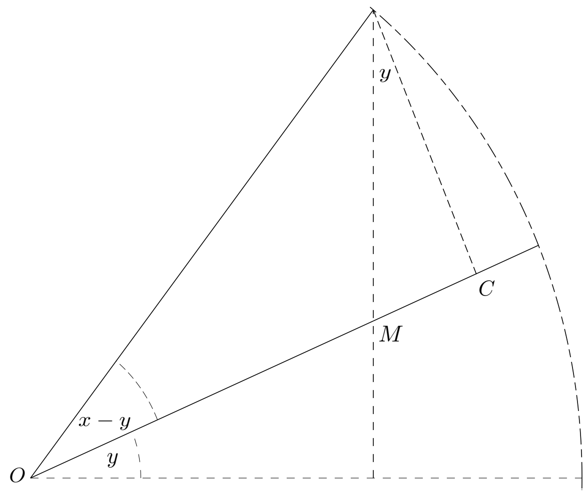

Figura 10. La formula di addizione del coseno.

dove si è utilizzato la formula di duplicazione per il coseno (2.4.18) e la relazione[3]

$$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{2.8.1}$$

Per dimostrare la formula per $\sin x$, si procede in modo simile: si ha[4]

$$\begin{aligned}\sin(x) = \sin(2\ \arctan t) &= 2\ \sin(\arctan t)\ \cos(\arctan t)\\ &= 2\ \tan(\arctan t)\ \cos^2(\arctan t)\\ &= \frac{2\,t}{1+t^2},\end{aligned}$$

dove si è utilizzato di nuovo la formula (2.8.1). Infine, per quanto riguarda la terza formula, si ha

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2\,t}{1+t^2}\frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{2\,t}{1-t^2},$$

e ovviamente bisogna avere $x \neq \pm\pi/2$. □

Esercizio 2.8.9. *Dimostrare che*

$$\sin 3x = 3\ \sin x - 4\ \sin^3 x.$$

Soluzione. Si ha $3x = 2x + x$, quindi

$$\sin 3x = \sin 2x \cos x + \cos 2x\ \sin x = 2\ \sin x\ \cos^2 x + \sin x\ - 2\ \sin^3 x,$$

grazie alle formule di duplicazione (2.4.18) e (2.4.19). Per concludere, è sufficiente usare l'identità fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, dunque

$$\sin 3x = 3\ \sin x - 4\ \sin^3 x,$$

e questo termina la dimostrazione. □

[3]Si osservi che dalla definizione di tangente e dall'identità fondamentale (2.4.1), si ha

$$1+\tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

[4]Attenzione! Possiamo dividere per $\cos(\arctan t)$ perché questa quantità è diversa da 0...sapreste dire perché?

Esercizio 2.8.10. *Dimostrare che*

$$\cos 3x = 4\,\cos^3 x - 3\,\cos x.$$

Esercizio 2.8.11. *Risolvere l'equazione*

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$$

Soluzione. Useremo due metodi diversi.

Primo metodo. Usando l'esercizio precedente e la formula di duplicazione (2.4.18), si ha

$$\begin{aligned}\cos x + \cos 2x + \cos 3x &= \cos x + 2\,\cos^2 x - 1 + 4\,\cos^3 x - 3\,\cos x\\ &= 4\,\cos^3 x + 2\,\cos^2 x - 2\,\cos x - 1\\ &= 2\,\cos^2 x(2\,\cos x + 1) - (2\,\cos x + 1)\\ &= (2\,\cos x + 1)\,(2\,\cos^2 x - 1),\end{aligned}$$

quindi l'equazione iniziale è equivalente a

$$(2\,\cos x + 1)\,(2\,\cos^2 x - 1) = 0.$$

Le soluzioni di questa equazione sono date dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$\cos x = -\frac{1}{2} \qquad \text{o} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}.$$

Quindi l'insieme di tutte le soluzioni è dato da

$$\left\{\frac{2}{3}\,\pi + 2\,k\,\pi,\ \frac{4}{3}\,\pi + 2\,k\,\pi,\ \frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}\ :\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Secondo metodo (suggerito dallo studente Guillaume Guion). Usando la formula di prostaferesi (2.4.24), si ha

$$\cos(x) + \cos(3x) = 2\,\cos\left(\frac{3x + x}{2}\right)\,\cos\left(\frac{3x - x}{2}\right) = 2\,\cos(2x)\,\cos x,$$

quindi l'equazione iniziale è equivalente a

$$2\,\cos(2x)\,\cos x + \cos(2x) = 0,$$

ovvero

$$\cos(2x)\,(2\,\cos x + 1) = 0.$$

Possiamo adesso risolvere l'equazione come prima. □

Esercizio 2.8.12. *Risolvere l'equazione*

$$\cos\left(2x - \frac{5}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

Soluzione. Dalla definizione della funzione coseno, si ha

$$\cos\alpha = \cos\beta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = \beta + 2\,k\,\pi \ \text{ o } \ \alpha = -\beta + 2\,k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Utilizzando questo con le scelte

$$\alpha = 2x - \frac{5}{4}\pi \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\pi}{4} - x,$$

si ottiene

$$2x - \frac{5}{4}\pi = \frac{\pi}{4} - x + 2\,k\,\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

e anche

$$2x - \frac{5}{4}\pi = x - \frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Le soluzioni dell'equazione sono quindi date da

$$\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{2\,k\,\pi}{3},\ (2k+1)\,\pi\ :\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Questo termina l'esercizio. □

Esercizio 2.8.13. *Risolvere l'equazione*

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right).$$

Soluzione. Innanzitutto, usando la formula (2.4.9)

$$\sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{3}{4}\pi\right)\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4} - x\right),$$

abbiamo che l'equazione iniziale diventa

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4} - x\right).$$

Come nell'esercizio precedente, questo vuol dire che

$$2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} - x + 2\,k\,\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

e

$$2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + x + 2\,k\,\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Troviamo quindi le soluzioni

$$\left\{-\frac{7}{36}\,\pi + \frac{2\,k\,\pi}{3},\ -\frac{1}{12}\,\pi + 2\,k\,\pi\ :\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 2.8.14. *Risolvere l'equazione*

$$\cos(2x) + \sqrt{3}\,\sin(2x) = -1.$$

Soluzione. Possiamo utilizzare un'astuzia: osserviamo che se moltiplichiamo l'equazione per 1/2

$$\frac{1}{2}\,\cos(2x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin(2x) = -\frac{1}{2},$$

questa nuova equazione è equivalente a quella iniziale, ovvero esse ha le stesse soluzioni. Qual è il vantaggio di aver moltiplicato per 1/2? Ricordiamoci che

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

quindi utilizzando la formula di addizione (2.4.12) la nostra equazione diventa

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Questo vuol dire che

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi + 2\,k\,\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

oppure

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi + 2\,k\,\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

e dunque l'insieme delle soluzioni è dato da

$$\left\{\frac{\pi}{2} + k\,\pi,\ \frac{5}{6}\pi + k\,\pi\,:\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Questo termina l'esercizio. $\square$

Esercizio 2.8.15. *Risolvere l'equazione*

$$\tan 3x = \tan x.$$

Soluzione. Innanzitutto, dovremo avere

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi = (2k+1)\,\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\,\pi}{3} = (2k+1)\,\frac{\pi}{6}, \tag{2.8.2}$$

altrimenti le quantità $\tan 3x$ e $\tan x$ sono prive di senso. In seguito, si osservi che

$$\tan\alpha = \tan\beta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = \beta + k\,\pi.$$

Quindi

$$\tan 3x = \tan x \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3x = x + k\,\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Tenendo conto della restrizione (2.8.2), si trova dunque

$$\left\{\frac{k\,\pi}{2}\ :\ k \in \mathbb{Z} \text{ con } k \text{ pari}\right\}.$$

come insieme delle soluzioni. $\square$

Esercizio 2.8.16. *Risolvere l'equazione*

$$\cos^4 x + \sin^4 x = 1.$$

Soluzione. Poniamo per semplicità

$$X = \cos^2 x \qquad \text{e} \qquad Y = \sin^2 x,$$

allora l'equazione da risolvere diventa

$$X^2 + Y^2 = 1 \qquad \text{sotto il vincolo} \qquad X + Y = 1.$$

Questo corrisponde a trovare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 & = & 1 \\ X + Y & = & 1 \end{cases}$$

Non è difficile vedere (procedendo per esempio per sostituzione) che tutte e sole le soluzioni di questo sistema sono date da

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = 1 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} X = 1 \\ Y = 0 \end{cases}$$

Tornando alla variabile iniziale x, troviamo che deve quindi valere

$$\begin{cases} \cos^2 x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} \cos^2 x = 1 \\ \sin^2 x = 0 \end{cases}$$

quindi le soluzioni sono tutte le x che annullano il seno od il coseno, ovvero

$$x = k\,\frac{\pi}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Questo termina l'esercizio. $\square$

Esercizio 2.8.17. *Siano $A, B \in \mathbb{R}$, dimostrare che esiste $r \geq 0$ e $\varphi \in \mathbb{R}$ tali che*

$$A\,\cos x + B\,\sin x = r\,\cos(x - \varphi), \qquad \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}. \tag{2.8.3}$$

Soluzione. Osserviamo che per la formula di addizione (2.4.12) vale

$$r\,\cos(x-\varphi) = r\,\cos\varphi\,\cos x + r\,\sin\varphi\,\sin x,$$

quindi per dimostrare (2.8.3), ci basterà provare che esistono r, φ tali che

$$A = r\,\cos\varphi, \qquad B = r\,\sin\varphi.$$

Cominciamo osservando che se $A = B = 0$, allora (2.8.3) è vera con $r = 0$ e φ qualunque.

Supponiamo adesso che A e B non siano contemporaneamente nulli, ovvero che si abbia $A^2+B^2 \neq 0$. Utilizzando l'identità fondamentale (2.4.1), possiamo intanto trovare r. Infatti, dovrà aversi

$$A^2 + B^2 = r^2,$$

Ovvero $r = \sqrt{A^2+B^2}$. Dunque, per terminare ci manca di dimostrare che esiste $\varphi \in \mathbb{R}$ tale che

$$\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Notiamo che se $A = 0$ e $B \neq 0$, allora bisogna che φ soddisfi[5]

$$\cos\varphi = 0 \qquad \text{et} \qquad \sin\varphi = \frac{B}{|B|},$$

e dunque se $A = 0$ e $B \neq 0$, una possibile soluzione è data da

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{se } B > 0, \\[2ex] -\dfrac{\pi}{2}, & \text{se } B < 0. \end{cases}$$

Se $A \neq 0$, allora possiamo dire che φ deve soddisfare

$$\tan\varphi = \frac{B}{A}.$$

Troviamo allora come possibile soluzione

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{A}{B}\right), & \text{se } A > 0, \\[3ex] \pi + \arctan\left(\dfrac{A}{B}\right), & \text{se } A < 0. \end{cases}$$

Per capire il secondo caso, bisogna osservare che $\arctan x$ è sempre compresa tra $-\pi/2$ e $\pi/2$, quindi il suo coseno è sempre positivo. Ma dato che il segno di A ci da anche il segno di $\cos\varphi$, quando $A < 0$ bisogna aggiungere a $\arctan(B/A)$ mezzo giro, i.e. π: in questo modo, la tangente

[5] Ricorda: se $x \in \mathbb{R}$, si ha $\sqrt{x^2} = |x|$.

di $\pi + \arctan(B/A)$ resta la stessa (grazie alla periodicità della tangente), ma il suo coseno cambia di segno. $\square$

Esercizio 2.8.18. *Applicare l'esercizio precedente all'espressione*

$$\cos x + \sin x.$$

Soluzione. Ci basta usare l'esercizio precedente, con la scelta $A = B = 1$. Allora si ottiene la formula (2.8.3) con

$$r = \sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad \varphi = \arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$

ovvero

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\, \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

terminando così l'esercizio. $\square$

8.3. Funzioni trigonometriche inverse.

Esercizio 2.8.19. *Dimostrare che per ogni* $x \in [-1, 1]$, *si ha* $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che per $x = 1$ e $x = -1$ la formula è vera.

Adesso si consideri il caso $0 \leq x < 1$: si vede che in questo l'identità viene direttamente dalla costruzione geometrica di seno e coseno. Infatti si costruisca un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa di lunghezza 1 ed un cateto di lunghezza x. Chiamiamo α l'angolo adiacente al cateto di lunghezza x e β l'angolo ad esso opposto. Dalla definizione di coseno e seno, si avrà quindi

$$x = \cos\alpha \qquad \text{e} \qquad x = \sin\beta,$$

ovvero

$$\alpha = \arccos x \qquad \text{e} \qquad \beta = \arcsin x.$$

Ricordando che $\alpha + \beta = \pi/2$, si ottiene allora la conclusione desiderata.

Per il caso $-1 < x < 0$, basterà osservare che

$$\arcsin(x) = -\arcsin(-x),$$

visto che l'arco seno è dispari, e anche che

$$\arccos(x) = \pi - \arccos(-x).$$

Quindi si ha

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi - (\arcsin(-x) + \arccos(-x)),$$

e se $-1 < x < 0$, allora $0 < -x < 1$ e quindi si può utilizzare la prima parte dell'esercizio e concludere. $\square$

Esercizio 2.8.20. *Calcolare*

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{14}{3}\pi\right)\right) \qquad \arccos\left(\sin\left(\frac{18}{5}\pi\right)\right)$$

$$\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right) \qquad \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right)$$

Soluzione. Si osservi che

$$\sin\left(\frac{14}{3}\,\pi\right) = \sin\left(\frac{14}{3}\,\pi - 4\,\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

e $\pi/3 \in [-\pi/2, \pi/2]$, quindi si ottiene

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{14}{3}\,\pi\right)\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Il secondo è un po' più complicato, ma grazie all'Esercizio 2.8.19, sappiamo che

$$\arccos\left(\sin\left(\frac{18}{5}\,\pi\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sin\left(\frac{18}{5}\,\pi\right)\right).$$

Osserviamo adesso che

$$\sin\left(\frac{18}{5}\,\pi\right) = \sin\left(\frac{8}{5}\,\pi\right) = \sin\left(\frac{3}{5}\,\pi - \pi\right) = \sin\left(-\frac{2}{5}\,\pi\right),$$

e che $-2/5\,\pi \in [-\pi/2, \pi/2]$, quindi alla fine

$$\arccos\left(\sin\left(\frac{18}{5}\,\pi\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sin\left(-\frac{2}{5}\,\pi\right)\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{5}\,\pi = \frac{9}{10}\,\pi.$$

Per il terzo, non c'è molto da fare: dalla definizione di funzione inversa, si ha

$$\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{1}{5},$$

dato che $1/5 \in [-1, 1]$. Infine, per l'ultimo, osserviamo innanzitutto che per costruzione della funzione arco seno si ha

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin\left(\frac{1}{5}\right) \leq \frac{\pi}{2}$$

quindi

$$0 \leq \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right) \leq 1.$$

Utilizzando questa informazione e l'identità fondamentale (2.4.1), si ha

$$\begin{aligned}\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \sqrt{\cos^2\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right)} &= \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right)} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\,\sqrt{6}}{5}.\end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 2.8.21. *Calcolare*

$$\cos(\arcsin(x)) \qquad \textit{et} \qquad \sin(\arccos(x)).$$

Soluzione. Cominciamo osservando che

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2}, \qquad x \in [-1, 1],$$

quindi $\cos(\arcsin(x))$ è sempre una quantità positiva. Allora

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{\cos^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}.$$

In modo simile, si ha

$$0 \leq \arccos(x) \leq \pi,$$

quindi $\sin(\arccos(x))$ è di nuovo sempre positivo. Si avrà quindi

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{\sin^2(\arccos(x))} = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1 - x^2},$$

concludendo. $\square$

Esercizio 2.8.22. *Calcolare*

$$\cos(\arctan(x)) \qquad e \qquad \sin(\arctan(x)).$$

Soluzione. Come prima, grazie al fatto che

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2},$$

si ha che $\cos(\arctan(x))$ è sempre positivo e quindi

$$\cos(\arctan(x)) = \sqrt{\cos^2(\arctan(x))} = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))}} = \sqrt{\frac{1}{1 + x^2}},$$

dove si è utilizzato che

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Per il seno, bisogna fare un po' più di attenzione: si vede che

$$\sin(\arctan(x)) \geq 0, \qquad \text{se } x \geq 0,$$

e

$$\sin(\arctan(x)) < 0, \qquad \text{se } x < 0.$$

Quindi si avrà

$$\begin{aligned} \sin(\arctan(x)) = \sqrt{\sin^2(\arctan(x))} &= \sqrt{1 - \cos^2(\arctan(x))} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{1 + x^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{1 + x^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \qquad \text{se } x \geq 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -\sin(\arctan(x)) = \sqrt{\sin^2(\arctan(x))} &= \sqrt{1 - \cos^2(\arctan(x))} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{1 + x^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{1 + x^2}} \\ &= -\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \qquad \text{se } x < 0, \end{aligned}$$

ovvero

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Fine! $\square$

Esercizio 2.8.23. *Calcolare*

$$\tan(\arccos(x)), \qquad \textit{per ogni } x \in [-1,0) \cup (0,1],$$

e

$$\tan(\arcsin(x)), \qquad \textit{per ogni } x \in (-1,1).$$

Soluzione. Ci basterà usare l'Esercizio 2.8.21 precedente e la definizione di tangente. Si ha dunque

$$\tan(\arccos(x)) = \frac{\sin(\arccos(x))}{\cos(\arccos x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \qquad x \neq 0$$

e anche

$$\tan(\arcsin(x)) = \frac{\sin(\arcsin(x))}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 1.$$

□

Esercizio 2.8.24. *Verificate che valgono le identità seguenti*

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}, \qquad x > 0 \tag{2.8.4}$$

e

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}, \qquad x < 0.$$

Soluzione. Ci basterà dimostrare la (2.8.4): poi basta utilizzare che la funzione arco tangente è dispari per dedurre da questa la seconda identità.

Sia dunque $x > 0$, consideriamo un triangolo rettangolo aventi cateti di lunghezza x e 1. Sia α

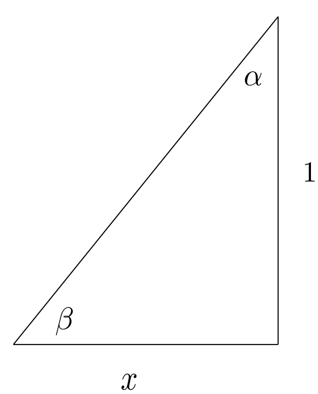

Figura 11. La costruzione per dimostrare la formula (2.8.4)

l'angolo opposto al cateto di lunghezza x (si veda Figura 11), per definizione di tangente si ha

$$x = \tan\alpha, \qquad \text{ovvero} \qquad \alpha = \arctan(x).$$

Allo stesso modo, si avrà

$$1 = x\ \tan\beta, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \beta = \arctan\left(\frac{1}{x}\right),$$

dove si indica con β l'angolo opposto al cateto di lunghezza 1. Dato che α e β sono complementati, si ottiene

$$\frac{\pi}{2} = \alpha + \beta = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

concludendo così l'esercizio. □

8.4. Funzioni iperboliche.

Esercizio 2.8.25. *Si dimostri che*

$$1 - \tanh_a^2 x = \frac{1}{\cosh_a^2 x}, \qquad \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}. \tag{2.8.5}$$

Soluzione. Basta utilizzare la definizione di tangente iperbolica e l'identità fondamentale per le funzioni iperboliche. Allora si ottiene

$$1 - \tanh_a^2 x = 1 - \frac{\sinh_a^2 x}{\cosh_a^2 x} = \frac{\cosh_a^2 x - \sinh_a^2 x}{\cosh_a^2 x} = \frac{1}{\cosh_a^2 x}.$$

Questo termina l'esercizio. □

Esercizio 2.8.26. *Mostrare che per ogni $x \geq 1$ si ha*

$$\sinh\left(\arg\cosh x\right) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Soluzione. Cominciamo osservando che

$$\arg\cosh_a x \geq 0 \qquad \text{per ogni } x \geq 1,$$

e che

$$\sinh_a(y) \geq 0, \qquad \text{per ogni } y \geq 0.$$

Sfruttando la relazione fondamentale delle funzioni iperboliche, si ha quindi

$$\begin{aligned}\sinh_a\left(\arg\cosh_a x\right) = \sqrt{\sinh_a^2\left(\arg\cosh_a x\right)} &= \sqrt{\cosh_a^2\left(\arg\cosh_a x\right) - 1} \\ &= \sqrt{x^2 - 1},\end{aligned}$$

che termina la dimostrazione. □

Esercizio 2.8.27. *Si dimostri che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\cosh_a\left(\arg\sinh_a x\right) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Soluzione. È sufficiente osservare che il coseno iperbolico è sempre positivo, quindi

$$\begin{aligned}\cosh_a\left(\arg\sinh_a x\right) = \sqrt{\cosh_a^2\left(\arg\sinh_a x\right)} &= \sqrt{1 + \sinh_a^2\left(\arg\sinh_a x\right)} \\ &= \sqrt{1 + x^2},\end{aligned}$$

come volevamo. □

Capitolo 3

Successioni e serie

1. Limite di una successione numerica

Definizione 3.1.1. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione, si dice che essa è:

- *convergente*, se esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } |a_n - \ell| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$
In tal caso, scriveremo
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell.$$
Il numero ℓ si chiama *limite della successione* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *per* n *che tende a infinito*;
- *divergente a* $+\infty$, se
$$\forall M > 0,\ \exists n_M \in \mathbb{N} \text{ tale che } a_n > M, \quad \forall n \geq n_M.$$
In tal caso, scriveremo
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty;$$
- *divergente a* $-\infty$, se
$$\forall M < 0,\ \exists n_M \in \mathbb{N} \text{ tale che } a_n < M, \quad \forall n \geq n_M.$$
In tal caso, scriveremo
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$
- *irregolare*, se non è né convergente né divergente.

Esempio 3.1.2. Vediamo alcuni esempi di successioni soddisfacenti la definizione precedente:

- la successione
$$a_n = \frac{n-1}{n+1}, \qquad \text{per } n \in \mathbb{N},$$
è convergente, più precisamente si ha
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1.$$

Verifichiamolo usando la definizione di limite. Fissiamo un arbitrario $\varepsilon > 0$, vogliamo dimostrare che esiste un indice $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| < \varepsilon, \qquad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon,$$

ovvero, in modo equivalente, tale che

$$1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n+1} < 1 + \varepsilon, \qquad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

Osserviamo innanzitutto che il numero $(n-1)/(n+1)$ è sempre più piccolo di 1, quindi la disuguaglianza di destra è sempre soddisfatta. Dobbiamo quindi trovare un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n+1}, \qquad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

Risolviamo quest'ultima disuguaglianza e vediamo per quali n è vera. Abbiamo

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n+1} \qquad &\iff \qquad (1-\varepsilon)(n+1) < n - 1 \\ &\iff \qquad 1 + (1-\varepsilon) < n\,(1 - 1 + \varepsilon) \\ &\iff \qquad 2 - \varepsilon < \varepsilon\, n \\ &\iff \qquad \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} < n. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che se definiamo

$$n_\varepsilon = \text{“ il più piccolo numero naturale strettamente maggiore di } \frac{2-\varepsilon''}{\varepsilon},$$

in base dalla discussione precedente avremo

$$1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n+1}, \qquad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon,$$

proprio come volevamo.

- la successione definita da

$$a_n = \log_2(n+2), \qquad \text{per } n \in \mathbb{N},$$

diverge a $+\infty$. Verifichiamolo usando la definizione: preso un arbitrario numero $M > 0$, vogliamo trovare un indice $n_M \in \mathbb{N}$ tale che

$$\log_2(n+2) > M, \qquad \text{per ogni } n \geq n_M.$$

Come prima, risolviamo questa disuguaglianza: osservando che la funzione $x \mapsto \log_2 x$ è monotona crescente (strettamente) e scrivendo M come

$$M = \log_2(2^M),$$

si ha

$$\log_2(n+2) > M \qquad \iff \qquad n + 2 > 2^M \qquad \iff \qquad n > 2^M - 2.$$

Se scegliamo quindi

$$n_M = \text{“ il più piccolo numero naturale strettamente maggiore di } 2^M - 2'',$$

otteniamo che per ogni $n \geq n_M$, in base alla discussione precedente vale

$$\log_2(n+2) > M, \qquad \text{per ogni } n \geq n_M,$$

come volevamo.

Proposizione 3.1.3 (Sottosuccessioni elementari)**.** *Sia* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione e* $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$*. Supponiamo che* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sia convergente o divergente. Allora le nuove successioni* $\{a_{k\,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{a_{n+k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sono tali che*

$$\lim_{n\to\infty} a_{k\,n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+k} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Dimostrazione. Proviamo solo il risultato relativo alla successione $\{a_{k\,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, l'altro è lasciato come esercizio per lo studente. Supponiamo per semplicità che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia convergente e chiamiamo ℓ il suo limite. Allora, per definizione si avrà

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } |a_n - \ell| < \varepsilon, \quad \forall n \ge n_\varepsilon.$$

Adesso basta osservare che $k \ge 1$, quindi $k\,n \ge n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare, se prendiamo $n \ge n_\varepsilon$, avremo anche $k\,n \ge k\,n_\varepsilon \ge n_\varepsilon$. Dalla proprietà precedente, otteniamo quindi che

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists(k\,n_\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tale che } |a_{k\,n} - \ell| < \varepsilon, \quad \forall k\,n \ge k\,n_\varepsilon.$$

Questo dimostra che vale anche

$$\lim_{n\to\infty} a_{k\,n} = \ell.$$

Nel caso in qui $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia divergente, la dimostrazione è simile e viene lasciata allo studente. □

Esempio 3.1.4 (Una successione irregolare)**.** Usando il risultato precedente, è facile provare che la successione

$$a_n = (-1)^n, \qquad \text{per } n \in \mathbb{N},$$

è irregolare. Infatti, osserviamo innanzitutto che la successione è limitata, dato che

$$-1 \le (-1)^n \le 1, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Quindi non può essere divergente. Supponiamo per assurdo che valga

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \ell,$$

allora per la Proposizione precedente abbiamo anche

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{2\,n} = \ell.$$

D'altronde si ha $(-1)^{2\,n} = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi in definitiva $\ell = 1$. Avremmo quindi che

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } |(-1)^n - 1| < \varepsilon, \quad \forall n > n_\varepsilon.$$

Prendiamo adesso n un indice *dispari* tale che $n > n_\varepsilon$, dalla proprietà precedente abbiamo

$$\varepsilon > |(-1)^n - 1| = |-1-1| = 2.$$

Dal momento che $\varepsilon > 0$ è arbitrario, la proprietà precedente $2 < \varepsilon$ non può essere vera.

Definizione 3.1.5. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione, si dice che essa è

- *monotona crescente* se vale

$$a_n \le a_{n+1}, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N};$$

- *monotona decrescente* se vale

$$a_{n+1} \le a_n, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Esempio 3.1.6. La successione definita da

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}, \qquad \text{per } n \in \mathbb{N},$$

è monotone crescente. Per vederlo, basta riscriverla come

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{n+1-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1},$$

ed osservare che

$$n \mapsto \frac{2}{n+1},$$

è monotona decrescente, quindi

$$n \mapsto -\frac{2}{n+1}$$

è monotona crescente. Si ha quindi

$$a_n = 1 - \frac{2}{n+1} \leq 1 - \frac{2}{n+2} = a_{n+1},$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 3.1.7. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione, si dice che essa è

- *limitata superiormente* se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

  $$a_n \leq M, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

  Si definisce inoltre

  $$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup\{a_n \,:\, n \in \mathbb{N}\},$$

  con la usuale convenzione che

  $$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty,$$

  se la successione non è limitata superiormente;
- *limitata inferiormente* se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che

  $$m \leq a_n, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

  Si definisce inoltre

  $$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \inf\{a_n \,:\, n \in \mathbb{N}\},$$

  con la usuale convenzione che

  $$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = -\infty,$$

  se la successione non è limitata inferiormente;
- *limitata* se è sia limitata superiormente che limitata inferiormente.

2. Proprietà dei limiti

Proposizione 3.2.1 (Unicità del limite)**.** *Sia* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *tale che*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell_1 \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \ell_2.$$

Allora $\ell_1 = \ell_2$*.*

Dimostrazione. Usando la definizione di limite, si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - \ell_1| < \varepsilon, \qquad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

D'altra parte, sappiamo che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge anche ad ℓ_2, quindi fissato lo stesso $\varepsilon > 0$, esisterà $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - \ell_2| < \varepsilon, \qquad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

Usando quindi la disuguaglianza triangolare e prendendo $n \geq \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$, si ottiene

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1 - a_n| + |a_n - \ell_2| < 2\,\varepsilon.$$

Dal momento che $\varepsilon > 0$ è arbitrariamente piccolo, si ottiene $\ell_1 = \ell_2$, come volevamo. $\square$

Proposizione 3.2.2. *Sia* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *una successione convergente. Allora tale successione è limitata.*

Dimostrazione. Chiamiamo ℓ il limite della successione. Prendiamo $\varepsilon = 1$, allora esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - \ell| < 1, \qquad \text{per ogni } n \geq n_1.$$

In altre parole, abbiamo che

$$\ell - 1 < a_n < \ell + 1, \qquad \text{per ogni } n \geq n_1.$$

D'altra parte, prendendo

$$c = \min\{a_0, \dots, a_{n_1-1}\} \qquad \text{e} \qquad C = \max\{a_0, \dots, a_{n_1-1}\},$$

Si avrà

$$m \leq a_n \leq M, \qquad \text{per ogni } 0 \leq n \leq n_1 - 1.$$

Scegliendo

$$m = \min\{m, \ell - 1\} \qquad \text{e} \qquad M = \max\{M, \ell + 1\},$$

si ottiene la conclusione. $\square$

Proposizione 3.2.3 (Permanenza del segno - "soft")**.** *Sia* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *una successione tale che*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } a_n \geq 0, \qquad \text{per ogni } n \geq n_0.$$

Allora, se la successione è convergente, si ha

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che risulti $\ell < 0$. Si scelga $\varepsilon = -\ell/2$, allora dalla definizione di limite esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon, \qquad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

In particolare, ricordando la scelta di ε, si ha

$$a_n < \frac{\ell}{2} < 0, \qquad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

Questo contraddice l'ipotesi sul segno di a_n. Pertanto si deve avere $\ell \geq 0$. □

Corollario 3.2.4. *Siano* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *due successioni tali che*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } a_n \geq b_n, \qquad \text{per ogni } n \geq n_0.$$

Allora se le successioni sono convergenti, si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Dimostrazione. Basta applicare la Proposizione 3.2.3 alla successione $a_n - b_n$, che soddisfa le ipotesi necessarie. □

Proposizione 3.2.5 (Permanenza del segno – "strong")**.** *Sia* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *una successione tale che*

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_n > 0.$$

Allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$a_n > 0, \qquad \text{per ogni } n \geq n_0.$$

Dimostrazione. Dalla definizione di limite, si ha che fissato $\varepsilon = \ell/2 > 0$, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon, \qquad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

In particolare, la prima disuguaglianza implica che

$$a_n > \ell - \varepsilon = \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}, \qquad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

3. Equivalenze asintotiche ed $o-$piccoli

Le seguenti due definizioni **sono tra le più importanti di tutto il corso**.

Definizione 3.3.1 (Equivalenza asintotica)**.** Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni. Si dice che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è *asintoticamente equivalente a* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

In tal caso, si userà la notazione

$$a_n \sim b_n \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Esempio 3.3.2. Le due successioni

$$a_n = n^2 + 7 \qquad \text{e} \qquad b_n = n^2 - n,$$

sono asintoticamente equivalenti. Infatti, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+7}{n^2-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{7}{n^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)} = 1.$$

Definizione 3.3.3 (o-piccolo)**.** Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni. Si dice che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è *o-piccolo di* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

In tal caso, si userà la notazione

$$a_n = o(b_n) \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Esempio 3.3.4. Le due successioni

$$a_n = n^2 + 7 \qquad \text{e} \qquad b_n = n^3 - n,$$

sono tali che

$$a_n = o(b_n), \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Infatti, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+7}{n^3-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\dfrac{7}{n^2}\right)}{n^3\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\frac{\left(1+\dfrac{7}{n^2}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}$$

Osservazione 3.3.5 (Algebra degli asintotici e degli o-piccoli)**.** Osserviamo un paio di regole di calcolo per gli $o-$piccoli, che seguono direttamente dalla definizione:

- se
$$a_n \sim c_n \qquad \text{e} \qquad b_n = o(c_n), \qquad \text{per } n\to\infty$$
allora
$$a_n + b_n \sim c_n, \qquad \text{per } n \to \infty.$$
Infatti, usando la definizione di equivalenza asintotica e di o-piccolo, si ha
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a_n}{c_n} + \frac{b_n}{c_n}\right] = 1 + 0 = 1;$$
- se
$$a_n \sim c_n \qquad \text{e} \qquad b_n \sim d_n, \qquad \text{per } n\to\infty,$$
allora
$$a_n\, b_n \sim c_n\, d_n, \qquad \text{per } n \to \infty.$$
Infatti, usando la definizione di o-piccolo, si avrà
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n\, b_n}{c_n\, d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n}\,\frac{b_n}{d_n} = 1\cdot 1 = 1.$$
- se
$$a_n \sim c_n \qquad \text{e} \qquad b_n \sim c_n, \qquad \text{per } n\to\infty,$$
allora
$$a_n + b_n \sim 2\, c_n, \qquad \text{per } n \to \infty.$$
Lo si dimostri per esercizio, usando la definizione di $o-$piccolo e le proprietà dei limiti.

Osservazione 3.3.6 (Equivalenze asintotiche, somme e differenze)**.** ATTENZIONE! Nel caso in cui

$$a_n \sim c_n \qquad \text{e} \qquad b_n \sim d_n, \qquad \text{per } n \to \infty,$$

in generale **NON si può concludere che**

$$a_n + b_n \sim c_n + d_n$$

A titolo di esempio: si prendano le due successioni

$$a_n = \sqrt{n^2 + n^\alpha} \qquad \text{e} \qquad b_n = -n,$$

dove $0 < \alpha < 2$. Si ha che

$$a_n \sim n, \qquad \text{per } n \to \infty,$$

dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2 + n^\alpha}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + n^{\alpha-2}} = 1.$$

D'altra parte, NON possiamo concludere che

$$a_n + b_n \sim 0, \qquad \text{per } n \to \infty,$$

(cosa che non avrebbe senso, tra l'altro) dal momento che dall'Esercizio 3.9.8 si ha

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + n^\alpha} - n\right) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < \alpha < 1, \\ 1/2, & \text{se } \alpha = 1, \\ +\infty, & \text{se } 1 < \alpha < 2. \end{cases}$$

4. Criteri di convergenza per successioni

Teorema 3.4.1 (Criterio del confronto)**.** *Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tre successioni. Supponiamo che:*

(i) *esista $k \in \mathbb{N}$ tale che*

$$a_n \le b_n \le c_n, \qquad \textit{per ogni } n \ge k:$$

(ii) *$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non siano irregolari e valga*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Allora si ha anche

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Dimostrazione. Dall'ipotesi sui limiti di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due indici $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon, \qquad \text{per ogni } n_0 \in \mathbb{N},$$

ed ogni

$$\ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon, \qquad \text{per ogni } n_1 \in \mathbb{N}.$$

In particolare, se si sceglie $n_2 = \max\{n_0, n_1, k\}$, si ha che per ogni $n \ge n_2$ valgono contemporaneamente le due stime precedenti, nonché l'ipotesi $a_n \le b_n \le c_n$. Abbiamo quindi

$$\ell - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < \ell + \varepsilon, \qquad \text{per ogni } n \ge n_2,$$

ovvero

$$\ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon, \qquad \text{per ogni } n \ge n_2.$$

Dalla definizione di limite, abbiamo quindi dimostrato che

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \ell,$$

come volevamo. $\square$

Proposizione 3.4.2. *Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione limitata e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione convergente a 0. Allora anche $\{a_n\, b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

Dimostrazione. Per ipotesi di limitatezza, si ha che esiste $M > 0$ tale che

$$|a_n| \le M, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a zero, si ha che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$|b_n| < \varepsilon, \qquad \text{per ogni } n \ge n_\varepsilon.$$

Abbiamo dunque che

$$|a_n\, b_n| = |a_n|\, |b_n| \le M\, \varepsilon, \qquad \text{per ogni } n \ge n_\varepsilon.$$

Visto che $\varepsilon > 0$ era arbitrario, dalla definizione di limite abbiamo quindi che $a_n\, b_n \to 0$ per $n \to \infty$. $\square$

Esempio 3.4.3. La successione definita da

$$c_n = \frac{\sin n}{n}, \qquad \text{per } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

converge a 0. Infatti, possiamo scriverla come

$$c_n = a_n\, b_n, \qquad \text{dove } a_n = \sin n \ \text{ e } \ b_n = \frac{1}{n}.$$

Osservando che $|a_n| \le 1$ e b_n converge a 0, otteniamo la conclusione dalla Proposizione 3.4.2.

Teorema 3.4.4 (Successioni monotone)**.** *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione monotona. Allora la successione non è irregolare, ovvero essa è convergente oppure divergente. Inoltre, vale*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n, & \text{se } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ è crescente,} \\ \\ \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n, & \text{se } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione nel caso in cui a_n sia crescente e $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n < +\infty$. Tutti gli altri casi, **vengono lasciati come esercizi per lo studente**. Sia dunque

$$M = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Per definizione di estremo superiore (si veda Definizione 1.7.5), per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che $M - \varepsilon$ non è un maggiorante. Quindi esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$M - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \le M.$$

La seconda disuguaglianza è conseguenza del fatto che M è un maggiorante. D'altra parte, la successione è crescente, quindi si ha

$$a_n \ge a_{n_\varepsilon}, \qquad \text{per ogni } n \ge n_\varepsilon.$$

Unendo le due informazioni precedenti, si ha dunque

$$M - \varepsilon < a_n < M + \varepsilon, \qquad \text{per ogni } n \ge n_\varepsilon.$$

Ma questa è esattamente la definizione di $\lim_{n\to\infty} a_n = M$. $\square$

Teorema 3.4.5 (Criterio della radice $n-$esima)**.** *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali, tali che:*

(i) $a_n \geq 0$, *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.

Allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un infinitesimo, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dimostrazione. Sia $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, poichè per ipotesi $\ell < 1$, si avrà che

$$0 < \frac{1-\ell}{2}.$$

Dalla definizione di limite, prendendo $\varepsilon = (1-\ell)/2$, sappiamo che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$, risulta

$$|\sqrt[n]{a_n} - \ell| < \varepsilon,$$

e quindi, in particolare, per ogni $n \geq n_0$ si ha

$$\sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon = \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{\ell+1}{2}.$$

Abbiamo quindi provato che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$

$$0 \leq a_n < \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n,$$

e quindi la tesi segue dal Criterio del confronto (Teorema 3.4.1), osservando che il termine a destra, nella precedente disuguaglianza, tende a 0, per n che tende a ∞. Infatti grazie al fatto che $0 \leq \ell < 1$, si ha

$$0 \leq \frac{\ell+1}{2} < 1.$$

Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Osservazione 3.4.6. Nel caso che la successione dell'Esercizio precedente verifichi invece

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1,$$

se ne può concludere che deve aversi $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. È infatti sufficiente considerare la successione definita da $b_n = a_n^{-1}$, la quale verifica le ipotesi del Teorema 3.4.5, per cui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

ovvero $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deve tendere a $+\infty$. Niente si può invece concludere sulla successione, nel caso che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

Teorema 3.4.7 (Criterio del rapporto)**.** *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali, tali che:*

(i) $a_n > 0$, *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) < 1$.

Allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un infinitesimo, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Osservazione 3.4.8. Valgono le stesse osservazioni fatte per il criterio della radice $n-$esima. Se la successione è tale che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

allora a_n è divergente a $+\infty$. Di nuovo, non si può dire niente se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Esempio 3.4.9. Sia $b > 1$ una base e $\alpha > 0$ un esponente reale positivo. Usando il Teorema 3.4.7, si vede facilmente che

$$n^\alpha = o(b^n) \qquad \text{ovvero che} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{b^n} = 0.$$

Infatti, se chiamiamo $a_n = n^\alpha / b^n$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{b^{n+1}} \frac{b^n}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{b} = \frac{1}{b} < 1.$$

Il seguente criterio di convergenza permette di calcolare limiti piuttosto raffinati.

Teorema 3.4.10 (Stolz-Cesàro)**.** *Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni numeriche, con $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ avente le seguenti proprietà:*

- *strettamente positiva, i.e. $b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;*
- *strettamente crescente, i.e. $b_{n+1} > b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;*
- *divergente a $+\infty$.*

Se esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n},$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n},$$

e i valori dei due limiti coincidono.

Dimostrazione. Indichiamo con ℓ il valore del limite di $(a_{n+1} - a_n)/(b_{n+1} - b_n)$, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell.$$

Usando la definizione di limite otteniamo che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un indice $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < \ell + \varepsilon, \qquad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

Sfruttando il fatto che $b_{n+1} > b_n$, possiamo moltiplicare la disuguaglianza precedente per il fattore $(b_{n+1} - b_n)$, ottenendo quindi

$$(\ell - \varepsilon)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < (\ell + \varepsilon)(b_{n+1} - b_n), \qquad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

Se adesso sommiamo questi termini, per n che va da n_ε ad un certo indice $k \geq n_\varepsilon + 1$, otteniamo

$$(\ell - \varepsilon) \sum_{n=n_\varepsilon}^{k-1} (b_{n+1} - b_n) < \sum_{n=n_\varepsilon}^{k-1} (a_{n+1} - a_n) < (\ell + \varepsilon) \sum_{n=n_\varepsilon}^{k-1} (b_{n+1} - b_n),$$

ovvero, osservando che le somme che abbiamo fatto comparire sono *telescopiche*[1], questa può essere riscritta anche come

$$(\ell-\varepsilon)(b_k-b_{n_\varepsilon})<a_k-a_{n_\varepsilon}<(\ell+\varepsilon)(b_k-b_{n_\varepsilon}), \tag{3.4.1}$$

che è valida per ogni $k\ge n_\varepsilon+1$. A questo punto dividiamo la (3.4.1) per b_k, ottenendo quindi

$$(\ell-\varepsilon)\left(1-\frac{b_{n_\varepsilon}}{b_k}\right)<\frac{a_k}{b_k}-\frac{a_{n_\varepsilon}}{b_k}<(\ell+\varepsilon)\left(1-\frac{b_{n_\varepsilon}}{b_k}\right),$$

che possiamo riscrivere nella forma seguente

$$(\ell-\varepsilon)\left(1-\frac{b_{n_\varepsilon}}{b_k}\right)+\frac{a_{n_\varepsilon}}{b_k}<\frac{a_k}{b_k}<(\ell+\varepsilon)\left(1-\frac{b_{n_\varepsilon}}{b_k}\right)+\frac{a_{n_\varepsilon}}{b_k},\quad \text{per ogni } k\ge n_\varepsilon+1. \tag{3.4.2}$$

Osserviamo adesso che per ipotesi

$$\lim_{k\to\infty} b_k=+\infty,$$

quindi abbiamo

$$\lim_{k\to\infty}\left[(\ell-\varepsilon)\left(1-\frac{b_{n_\varepsilon}}{b_k}\right)+\frac{a_{n_\varepsilon}}{b_k}\right]=\ell-\varepsilon,$$

ed anche

$$\lim_{k\to\infty}\left[(\ell+\varepsilon)\left(1-\frac{b_{n_\varepsilon}}{b_k}\right)+\frac{a_{n_\varepsilon}}{b_k}\right]=\ell+\varepsilon.$$

In particolare, esisterà un indice $k_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tale che

$$(\ell-\varepsilon)\left(1-\frac{b_{n_\varepsilon}}{b_k}\right)+\frac{a_{n_\varepsilon}}{b_k}\ge \ell-2\,\varepsilon,\qquad \text{per ogni } k\ge k_\varepsilon. \tag{3.4.3}$$

e

$$(\ell-\varepsilon)\left(1-\frac{b_{n_\varepsilon}}{b_k}\right)+\frac{a_{n_\varepsilon}}{b_k}\le \ell+2\,\varepsilon,\qquad \text{per ogni } k\ge k_\varepsilon. \tag{3.4.4}$$

Definiamo adesso

$$m_\varepsilon=\max\{n_\varepsilon+1,k_\varepsilon\},$$

abbiamo che se $k\ge m_\varepsilon$ allora valgono (3.4.2), (3.4.3) e (3.4.4) in contemporanea. Abbiamo dunque, unendo queste stime

$$\ell-2\,\varepsilon<\frac{a_k}{b_k}<\ell+2\,\varepsilon,\qquad \text{per ogni } k\ge m_\varepsilon.$$

Dalla definizione di limite, abbiamo ottenuto

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=\ell,$$

proprio come volevamo. □

Osservazione 3.4.11. È facile vedere che la dimostrazione precedente si adatta anche al caso in cui si abbia

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=+\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=-\infty.$$

Lo studente provi a scrivere tale dimostrazione come esercizio.

---

[1] In altre parole, tutti i termini intermedi si cancellano, infatti

$$\sum_{n=n_\varepsilon}^{k-1}(b_{n+1}-b_n)=(b_{n_\varepsilon+1}-b_{n_\varepsilon})+(b_{n_\varepsilon+2}-b_{n_\varepsilon+1})+(b_{n_\varepsilon+3}-b_{n_\varepsilon+2})+\cdots+(b_k-b_{k-1}).$$

5. La costante di Nepero e

Proposizione 3.5.1. *La successione* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ *definita da*

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad \textit{per ogni } n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},$$

ammette limite. Inoltre tale limite è un numero reale strettamente compreso tra 2 *e* 4.

Dimostrazione. Dimostriamo che la successione in esame è *crescente*. Infatti, per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} &= \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \left(\frac{n^2+2\,n}{(n+1)^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Se usiamo adesso la *disuguaglianza di Bernoulli*[2], otteniamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right).$$

Non ci resta adesso che calcolare l'ultimo termine: si ottiene con facili calcoli

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right) &= 1-\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{n}{(n+1)^3} \\
&= 1+\frac{-n^2-n+(n+1)^2-n}{(n+1)^3} \\
&= 1+\frac{-n^2-n+n^2+2\,n+1-n}{(n+1)^3} \\
&= 1+\frac{1}{(n+1)^3} \geq 1.
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che

$$a_{n+1} \geq a_n, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

---

[2]Ovvero, se $x \geq -1$, per ogni $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ vale

$$(1+x)^n \geq 1+n\,x.$$

Si veda l'Esercizio 1.8.20 per la dimostrazione. Stiamo usando questo risultato con la scelta

$$x = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Usando il Teorema 3.4.4, abbiamo che esiste il limite di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e vale

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Dobbiamo escludere che l'estremo superiore è $+\infty$, ovvero che la successione diverge. Introduciamo allora la nuova successione

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Osserviamo che

$$a_n \le b_n.$$

Inoltre b_n è *decrescente*, infatti:

$$\begin{aligned}
\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}} &= \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{\left(\dfrac{(n+1)^2}{n^2+2\,n}\right)^{n+1}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n^2+2\,n}\right)^{n+1}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Usando di nuovo la disuguaglianza di Bernoulli, si ottiene che

$$\left(1+\frac{1}{n^2+2\,n}\right)^{n+1} \ge 1+\frac{n+1}{n^2+2\,n},$$

ovvero

$$\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n^2+2\,n}\right)^{n+1}} \le \frac{1}{1+\dfrac{n+1}{n^2+2\,n}} = \frac{n^2+2\,n}{n^2+3\,n+1} = 1-\frac{n+1}{n^2+3\,n+1}.$$

Abbiamo quindi ottenuto

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \le \left(1-\frac{n+1}{n^2+3\,n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right).$$

Calcoliamo adesso l'ultima espressione: si ha

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{n+1}{n^2+3\,n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right) &= 1-\frac{n+1}{n^2+3\,n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n^2+3\,n+1}\\
&= 1-\frac{n^2+3\,n+1-(n+1)^2-n-1}{(n+1)\,(n^2+3\,n+1)}\\
&= 1-\frac{\cancel{n^2}+\cancel{3\,n}+1-\cancel{n^2}-\cancel{3\,n}}{(n^2+3\,n+1)} < 1.
\end{aligned}$$

Abbiamo allora dimostrato che

$$b_{n+1} < b_n, \qquad \text{per ogni } n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Dal momento che, come abbiamo osservato, vale $a_n \leq b_n$, si avrà allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} a_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} b_n = b_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1} = 4.$$

Questo dimostra che a_n è convergente e che vale

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq 4.$$

D'altra parte, usando che a_n è crescente, si avrà

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq a_1 = 2.$$

Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Definizione 3.5.2 (Costante di Nepero)**.** Si chiama *costante di Nepero* il numero, indicato con la lettera e, definito da

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Osservazione 3.5.3. Scegliamo il numero e come base e consideriamo il logaritmo in questa base, che indicheremo semplicemente con log. Si ha allora

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}, \qquad \text{per } n\to\infty. \tag{3.5.5}$$

Infatti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \log e = 1.$$

Più in generale, se $b \in (0,+\infty)\setminus\{1\}$ è una base, si ha

$$\log_b\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}\log_b e, \qquad \text{per } n\to\infty.$$

Basterà infatti ricordare che

$$\log_b\left(1+\frac{1}{n}\right) = (\log_b e)\log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

6. Serie numeriche

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione reale, consideriamo *formalmente* la sommatoria infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{3.6.6}$$

Essa è detta *serie dei termini* a_n. Per dare un senso a questa somma infinita, definiamo la nuova successione $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tramite

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} a_k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ogni s_k è detta *somma parziale* $k-$*esima della serie* (3.6.6).

Definizione 3.6.1. Diremo che la serie (3.6.6) è:

- *convergente* se la successione delle sue somme parziali $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è convergente. In tal caso, porremo
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n;$$
- *divergente* se la successione delle sue somme parziali $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è divergente. In tal caso, porremo di nuovo
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} s_k,$$
e tale limite sarà uguale a $+\infty$ oppure a $-\infty$, a seconda che $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ diverga a $+\infty$ o a $-\infty$;
- *irregolare* se $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è irregolare, ovvero non è né convergente né divergente.

Osservazione 3.6.2 (Serie a termini positivi)**.** Se la serie è a termini positivi, ovvero se $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora abbiamo solo due possibilità: essa converge oppure diverge a $+\infty$. Infatti, si osservi che la successione delle sue somme parziali è *monotona crescente*, i.e.
$$s_{k+1} = \sum_{n=0}^{k+1} a_n = \sum_{n=0}^{k} a_n + a_{k+1} \geq \sum_{n=0}^{k} a_n = s_k.$$
Quindi dal Teorema 3.4.4 si ottiene che $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ammette limite, eventualmente uguale a $+\infty$.

Le stesse conclusioni si hanno nel caso in cui la serie sia a termini negativi (in tal caso, la successione delle somme parziali sarà *monotona decrescente*).

Teorema 3.6.3 (Condizione necessaria di convergenza)**.** *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali. Supponiamo che la serie corrispondente*
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$
sia convergente. Allora si ha
$$a_n = o(1) \qquad \textit{ovvero} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dimostrazione. Consideriamo la successione delle somme parziali
$$s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n.$$
Per ipotesi, sappiamo che esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che
$$\lim_{k\to\infty} s_k = \ell.$$
D'altra parte, per la Proposizione 3.1.3, si ha anche
$$\lim_{k\to\infty} s_{k-1} = \ell.$$
Otteniamo quindi che
$$\lim_{k\to\infty} (s_k - s_{k-1}) = \ell - \ell = 0.$$

D'altra arte, per definizione di somma parziale, si ha

$$s_k - s_{k-1} = \sum_{n=0}^{k} a_n - \sum_{n=0}^{k-1} a_n = a_k.$$

Abbiamo quindi provato che questa successione deve essere infinitesima, come volevamo. □

7. Criteri di convergenza per serie numeriche a termini positivi

Teorema 3.7.1 (Criterio del confronto)**.** *Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali a termini positivi. Supponiamo che*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ e } C > 0 \qquad \text{tale che } a_n \leq C\, b_n, \qquad \text{per ogni } n \geq n_0.$$

Allora si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty, \tag{3.7.7}$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty. \tag{3.7.8}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la (3.7.7), lasciando la dimostrazione di (3.7.8) come utile esercizio per il lettore.

Supponiamo che la serie dei b_n sia convergente. Consideriamo le successioni delle some parziali

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n \qquad \text{e} \qquad t_k = \sum_{n=0}^{k} b_n.$$

Sappiamo già che s_k ammette limite, in quanto successione monotona (si veda Osservazione 3.6.2). Ci basta quindi dimostrare che essa è superiormente limitata. Per ipotesi, abbiamo per ogni $k > n_0$

$$\begin{aligned} s_k = \sum_{n=0}^{n_0} a_n + \sum_{n=n_0+1}^{k} a_n &\leq \sum_{n=0}^{n_0} a_n + C \sum_{n=n_0+1}^{k} b_n \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0} a_n + C\, t_k \leq \sum_{n=0}^{n_0} a_n + C \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty. \end{aligned}$$

Questo dimostra che la successione delle somme parziali degli a_n, oltre ad essere monotona crescente, è anche limitata. La serie degli a_n è quindi anch'essa convergente. □

Teorema 3.7.2 (Criterio del confronto asintotico)**.** *Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali a termini positivi. Supponiamo che*

$$b_n > 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty.$$

Allora si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty,$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty.$$

Dimostrazione. Per ipotesi, abbiamo

$$0 \le \ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty.$$

Usando la definizione di limite, otteniamo quindi che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\ell - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \ell + \varepsilon, \qquad \text{per ogni } n \ge n_\varepsilon.$$

In particolare, considerando solo la seconda disuguaglianza e moltiplicando ambo i membri per b_n (si ricordi che $b_n > 0$), otteniamo

$$a_n < (\ell + \varepsilon)\, b_n, \qquad \text{per ogni } n \ge n_\varepsilon.$$

Abbiamo quindi che le due successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfano le ipotesi del Teorema 3.7.1. Possiamo quindi concludere la dimostrazione usando il *Criterio del confronto per le serie* (ovvero il Teorema 3.7.1). □

Il criterio precedente ha il seguente importante

Corollario 3.7.3. *Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali a termini positivi. Supponiamo che*

$$a_n \sim b_n, \qquad \textit{per } n \to \infty.$$

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty.$$

Dimostrazione. Per ipotesi, abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

quindi in particolare il limite del rapporto è finito. Abbiamo quindi, in base al risultato precedente, che

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty.$$

D'altra parte, passando al reciproco si ha anche

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1,$$

quindi possiamo usare il risultato precedente, scambiando il ruolo di a_n e b_n. Otteniamo allora anche

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Teorema 3.7.4 (Criterio della radice $n-$esima)**.** *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali positivi, tali che*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1.$$

Allora la serie $\sum_n a_n$ converge. Se invece si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1,$$

allora la serie diverge.

Dimostrazione. Abbiamo già visto nella dimostrazione del Teorema 3.4.5, che l'ipotesi

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1,$$

implica che

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad 0 \le a_n < \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Osserviamo che, dal momento che $\ell < 1$, si ha anche

$$\frac{\ell+1}{2} < 1.$$

Quindi, se chiamiamo

$$b_n = \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n,$$

abbiamo che la serie corrispondente è convergente, in quanto serie geometrica con ragione positiva e minore di 1. Possiamo allora applicare il *Criterio del confronto per le serie* (Teorema 3.7.1) ed ottenere la convergenza della serie $\sum_n a_n$.

Il caso in cui

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1,$$

è lasciato come esercizio per il lettore. □

Teorema 3.7.5 (Criterio del rapporto)**.** *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali positivi, tali che*

$$a_n > 0, \qquad \textit{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Se vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

allora la serie $\sum_n a_n$ converge. Se invece si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

allora la serie diverge.

Dimostrazione. Indichiamo con

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

e dimostriamo che vale anche

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

A quel punto si conclude usando il precedente *Criterio della radice $n-$esima per le serie* (Teorema 3.7.4).

Per dimostrare che la successione $\sqrt[n]{a_n}$ ammette lo stesso limite, è sufficiente usare il Teorema di Stolz-Cesàro. Infatti, riscriviamo

$$\sqrt[n]{a_n} = 2^{\log_2 \sqrt[n]{a_n}} = 2^{\frac{1}{n}\log_2 a_n}.$$

Calcoliamo adesso il limite dell'esponente, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_2 a_n.$$

Introduciamo le due successioni $\alpha_n = \log_2 a_n$ e $\beta_n = n$ e calcoliamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\beta_{n+1} - \beta_n} = \lim_{n\to\infty} \Big[\log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n \Big] = \lim_{n\to\infty} \log_2 \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Applicando il *Teorema di Stolz-Cesàro* abbiamo allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_2 a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\beta_{n+1} - \beta_n} = \lim_{n\to\infty} \log_2 \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Se chiamiamo ℓ il valore del limite di a_{n+1}/a_n, abbiamo allora

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n} \log_2 a_n} = 2^{\log_2 \ell} = \ell.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Teorema 3.7.6 (Criterio di condensazione di Cauchy)**.** *Sia* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *una successione di numeri reali positivi, tali che*

$$a_{n+1} \le a_n, \qquad \textit{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Allora si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, a_{2^n} \quad \textit{converge.}$$

La seconda serie si chiama serie condensata degli a_n*.*

Dimostrazione. Diamo una traccia della dimostrazione. Supponiamo che la serie condensata converga e dimostriamo che allora converge anche la serie degli a_n. Usando l'ipotesi di monotonia, si ha

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + \underbrace{a_2 + a_3}_{\le 2\, a_1} + \underbrace{a_4 + a_5 + a_6 + a_7}_{\le 4\, a_4} + \dots \\ &\le a_1 + 2\, a_2 + 4\, a_4 + \dots = \sum_{n=0} 2^n\, a_{2^n} < +\infty.\end{aligned}$$

Questo dimostra la convergenza della serie originale.

Dimostriamo adesso che vale anche l'implicazione inversa: supponiamo che la serie degli a_n converga, si ha allora

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, a_{2^n} &= a_1 + 2\, a_2 + 4\, a_4 + 8\, a_8 + \dots \\ &= \underbrace{a_1 + a_2}_{\le 2\, a_1} + \underbrace{a_2 + a_4}_{\le 2\, a_2} + \underbrace{a_4 + a_4}_{\le 2\, a_3} \\ &\quad + \underbrace{a_4 + a_8}_{\le 2\, a_4} + \underbrace{a_8 + a_8}_{\le 2\, a_5} + \underbrace{a_8 + a_8}_{\le 2\, a_6} + \underbrace{a_8 + a_8}_{\le 2\, a_7} + \dots \\ &\le 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.\end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione. □

8. Criteri di convergenza per serie a termini di segno variabile

Definizione 3.8.1. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali, si dice che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

converge assolutamente se risulta convergente la serie dei suoi moduli, ovvero se

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty.$$

Teorema 3.8.2 (Criterio dell'assoluta convergenza)**.** *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali. Se la sua serie associata converge assolutamente, allora essa è convergente. Inoltre vale*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Dimostrazione. Definiamo le due nuove successioni a termini positivi

$$b_n = \begin{cases} a_n, & \text{se } a_n \geq 0, \\ 0, & \text{se } a_n < 0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad c_n = \begin{cases} -a_n, & \text{se } a_n < 0, \\ 0, & \text{se } a_n \geq 0. \end{cases}$$

Si osservi che $b_n \leq |a_n|$ e $c_n \leq |a_n|$, quindi usando il Teorema 3.7.1 abbiamo che entrambe le serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

sono convergenti. Osservando che

$$a_n = b_n - c_n,$$

abbiamo quindi che la successione delle somme parziali

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n = \sum_{n=0}^{k} b_n - \sum_{n=0}^{k} c_n,$$

converge, in quanto differenza di due successioni che convergono. Questo mostra la convergenza della serie degli a_n. □

Teorema 3.8.3 (Criterio di Leibniz)**.** *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali. Supponiamo che*

- $a_n > 0$, *per ogni* $n \in \mathbb{N}$;
- $a_n \geq a_{n+1}$, *per ogni* $n \in \mathbb{N}$;
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Allora la serie a termini di segno alterno

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, a_n,$$

converge.

Dimostrazione. Consideriamo la successione delle somme parziali

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \, a_n.$$

Sarà sufficiente mostrare che le due successioni "complementari" $s_{2\,k}$ e $s_{2\,k+1}$ hanno lo stesso limite, i.e.

$$\lim_{k\to\infty} s_{2\,k} = \lim_{k\to\infty} s_{2\,k+1} = \ell, \qquad \text{con } \ell \neq \pm\infty.$$

Osserviamo intanto che $s_{2\,k}$ è monotona decrescente, mentre $s_{2\,k+1}$ è monotona crescente. Infatti, si ha

$$s_{2\,k+2} = \sum_{n=0}^{2\,k+2} (-1)^n \, a_n = \sum_{n=0}^{2\,k} (-1)^n \, a_n \underbrace{-a_{2\,k+1} + a_{2\,k+2}}_{\leq 0} \leq s_{2\,k},$$

grazie alla monotonia di a_n. Similmente, si ha

$$s_{2\,k+3} = \sum_{n=0}^{2\,k+3} (-1)^n \, a_n = \sum_{n=0}^{2\,k+1} (-1)^n \, a_n + \underbrace{a_{2\,k+2} - a_{2\,k+3}}_{\geq 0} \geq s_{2\,k+1}.$$

Possiamo quindi usare il Teorema sulle successioni monotone (Teorema 3.4.4) ed ottenere che

$$\lim_{k\to\infty} s_{2\,k} = \ell_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{k\to\infty} s_{2\,k+1} = \ell_2.$$

Si osservi che entrambi i limiti sono finiti, dal momento che

$$s_{2\,k} \leq s_0 = a_0 \qquad \text{e} \qquad s_{2\,k+1} \geq s_1 = a_0 - a_1,$$

e che

$$s_{2\,k+1} = \sum_{n=0}^{2\,k+1} (-1)^n \, a_n = \sum_{n=0}^{2\,k} (-1)^n \, a_n - a_{2\,k+1} \leq s_{2\,k}. \tag{3.8.9}$$

In definitiva, questo implica che

$$a_0 - a_1 \leq s_{2\,k+1} \leq s_{2\,k} \leq a_0,$$

quindi entrambe le successioni sono limitate. Inoltre, da (3.8.9) e dal Corollario 3.2.4, si ottiene

$$\ell_1 \geq \ell_2.$$

Supponiamo per assurdo che si abbia $\ell_1 > \ell_2$ e fissiamo

$$\varepsilon = \frac{\ell_1 - \ell_2}{4} > 0.$$

Dalla definizione di limite applicata alle due successioni $s_{2\,k}$ e $s_{2\,k+1}$ con $\varepsilon > 0$ appena scelto, otteniamo che esiste $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$s_{2\,k} > \ell_1 - \frac{\ell_1 - \ell_2}{4} \qquad \text{e} \qquad s_{2\,k+1} < \ell_2 + \frac{\ell_1 - \ell_2}{4}, \qquad \text{per ogni } k \geq k_\varepsilon.$$

Unendo queste due informazioni, troviamo allora

$$s_{2\,k} - s_{2\,k+1} > \ell_1 - \ell_2 - \frac{\ell_1 - \ell_2}{2} = \frac{\ell_1 - \ell_2}{2}, \qquad \text{per ogni } k \geq k_\varepsilon.$$

D'altra parte, per costruzione si ha

$$s_{2\,k} - s_{2\,k+1} = a_{2\,k+1},$$

da cui si ottiene

$$a_{2k+1} > \frac{\ell_1 - \ell_2}{2}, \qquad \text{per ogni } k \geq k_\varepsilon.$$

Questo contraddice il fatto che la successione a_n è infinitesima per ipotesi. Dobbiamo quindi avere $\ell_1 = \ell_2$. □

Osservazione 3.8.4. Si osservi che la serie a termini di segno alterno

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

converge grazie al Criterio di Leibniz. Tuttavia, **non** converge assolutamente, dal momento che la serie dei suoi valori assoluti coincide con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

che diverge (si veda Esercizio 3.9.32).

9. Esercizi

9.1. Successioni.

Esercizio 3.9.1. *Dimostrare che*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + n} = 2.$$

Soluzione. Si tratta di una forma indeterminata del tipo ∞^0. Osserviamo che

$$2^n + n \geq 2^n, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

ed anche

$$2^n + n \leq 2^n + 2^n, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

grazie al fatto che $n \leq 2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (si veda l'Esercizio 1.8.8). Dalle due disuguaglianze precedenti, otteniamo quindi

$$2 \leq \sqrt[n]{2^n + 2} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 2^n} = 2\,\sqrt[n]{2}.$$

Osservando che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 2^0 = 1,$$

si ottiene la conclusione usando il Teorema 3.4.1. □

Esercizio 3.9.2. *Sia $\alpha \neq 0$, si dimostri che per ogni $x \in \mathbb{R}$*

$$(n + x)^\alpha \sim n^\alpha, \qquad \textit{per } n \to \infty.$$

Soluzione. In base alla definizione, dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n + x)^\alpha}{n^\alpha} = 1.$$

Usando le proprietà delle potenze, si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n + x)^\alpha}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n + x}{n}\right)^\alpha = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^\alpha = 1,$$

come volevamo. □

Esercizio 3.9.3. *Sia $\alpha \neq 0$ e sia $b \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ una base, si dimostri*

$$\log_b(n + \alpha) \sim \log_b n, \qquad \textit{per } n \to \infty.$$

Soluzione. Usando le proprietà dei logaritmi, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\log_b(n+\alpha)}{\log_b n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_b(n(1+\alpha/n))}{\log_b n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log_b n + \log_b(1+\alpha/n)}{\log_b n} \\ &= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{\log_b(1+\alpha/n)}{\log_b n}.\end{aligned}$$

Si osservi adesso che

$$\lim_{n\to\infty} \log_b\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) = 0 \qquad \text{mentre} \qquad \lim_{n\to\infty} \log_n n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } b > 1, \\ -\infty, & \text{se } 0 < b < 1, \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_b(1+\alpha/n)}{\log_b n} = 0.$$

Otteniamo quindi il risultato desiderato. □

Esercizio 3.9.4. *Si calcoli il limite seguente*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2(2\,n^2+7)}{\log_2(n+1)}.$$

Soluzione. Si tratta di una forma indeterminata del tipo ∞/∞. Usiamo le proprietà dei logaritmi per ottenere

$$\begin{aligned}\log_2(2\,n^2+7) = \log_2\left(2\,n^2\left(1 + \frac{7}{2\,n^2}\right)\right) &= \log_2(2\,n^2) + \log_2\left(1 + \frac{7}{2\,n^2}\right) \\ &\sim \log_2(2\,n^2) \\ &= \log_2 2 + \log_2 n^2 \\ &\sim \log_2 n^2 = 2\,\log_2 n.\end{aligned}$$

Trattiamo in modo simile il denominatore

$$\log_2(n+1) = \log_2\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \log_2 n + \log_2\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \log_2 n.$$

Abbiamo quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2(2\,n^2+7)}{\log_2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\,\log_2 n}{\log_2 n} = 2,$$

concludendo. □

Esercizio 3.9.5 (Logaritmi VS. potenze)**.** *Sia $b \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ una base, dimostrare che*

$$\log_b n = o(n).$$

Soluzione. Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_b n}{n} = 0.$$

Si chiami $a_n = \log_b n$ e $b_n = n$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} [\log_b(n+1) - \log_b n] = \lim_{n\to\infty} \log_b \frac{n+1}{n} = 0,$$

grazie alle proprietà dei logaritmi ed al fatto che $(n+1)/n \to 1$. Applicando il Teorema 3.4.10 abbiamo dunque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_b n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0,$$

come volevamo. □

Esercizio 3.9.6. *Dimostrare che*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Soluzione. Si tratta di una forma indeterminata del tipo ∞^0. Usiamo la scrittura esponenziale, ottenendo quindi

$$\sqrt[n]{n} = 2^{\frac{1}{n}\log_2 n}, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Usando che

$$\log_2 n = o(n),$$

si ottiene allora

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}\log_2 n} = 2^0 = 1,$$

come desiderato. □

Esercizio 3.9.7. *Dimostrare che*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0.$$

Si dimostri inoltre che

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}, \qquad \textit{per } n \to \infty.$$

Soluzione. Si tratta di una forma indeterminata della forma $+\infty - \infty$. Ricordiamo la nota formula

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2,$$

che non è nient'altro che un caso particolare del *falso binomio di Newton* (Esercizio 1.8.18). Possiamo quindi riscrivere la successione di cui dobbiamo calcolare il limite come

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Osservando che (vedi Esercizio 3.9.2)

$$\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n},$$

si ottiene che

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0.$$

Per dimostrare la seconda affermazione, dobbiamo provare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\dfrac{1}{2\sqrt{n}}} = 1,$$

ovvero che

$$\lim_{n\to\infty} 2\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 1.$$

Usando il trucco che abbiamo usato prima, otteniamo

$$2\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Prendendo il limite per $n\to\infty$, si ottiene facilmente quello che volevamo. □

Esercizio 3.9.8. *Sia* $0<\alpha<2$, *si dimostri che*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n^\alpha}-n\right)=\begin{cases}0, & \textit{se } 0<\alpha<1,\\ 1/2, & \textit{se } \alpha=1,\\ +\infty, & \textit{se } 1<\alpha<2.\end{cases}$$

Soluzione. Come prima, si tratta di una forma indeterminata del tipo $+\infty-\infty$. Usiamo la stessa idea: moltiplichiamo e dividiamo per

$$\sqrt{n^2+n^\alpha}+n,$$

in modo da ottenere

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n^\alpha}-n\right)&=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n^\alpha}-n\right)\frac{\sqrt{n^2+n^\alpha}+n}{\sqrt{n^2+n^\alpha}+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n^\alpha-n^2}{\sqrt{n^2+n^\alpha}+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{2\,n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-1}}{2}.\end{aligned}$$

La conclusione adesso segue facilmente. □

Esercizio 3.9.9. *Sia* $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, *dimostrare che*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[k]{n+1}-\sqrt[k]{n}\right)=0.$$

Si dimostri inoltre che

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\sim\frac{1}{k\,n^{\frac{k-1}{k}}}\qquad \textit{per } n\to\infty.$$

Soluzione. L'argomento è esattamente analogo a quello usato per il caso $k=2$ nell'esercizio precedente. Al posto della formula

$$(a-b)\,(a+b)=a^2-b^2,$$

dovremo usare la formula del *falso binomio di Newton* (si veda Esercizio 1.8.18), ovvero il fatto che

$$(a-b)\sum_{i=0}^{k-1}a^i\,b^{k-i}=a^k-b^k.$$

Usando questa formula con le scelte

$$a=(n+1)^{\frac{1}{k}}\qquad \text{e}\qquad b=n^{\frac{1}{k}},$$

si ha

$$\left((n+1)^{\frac{1}{k}}-n^{\frac{1}{k}}\right)=\left((n+1)^{\frac{1}{k}}-n^{\frac{1}{k}}\right)\frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1}(n+1)^{\frac{i}{k}}\,n^{\frac{k-1-i}{k}}}{\sum\limits_{i=0}^{k-1}(n+1)^{\frac{i}{k}}\,n^{\frac{k-1-i}{k}}}=\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{k-1}(n+1)^{\frac{i}{k}}\,n^{\frac{k-1-i}{k}}}.$$

Si osservi adesso che (vedi Esercizio 3.9.2)

$$(n+1)^{\frac{i}{k}} \sim n^{\frac{i}{k}}, \qquad \text{per } n \to \infty,$$

da cui

$$(n+1)^{\frac{i}{k}}\, n^{\frac{k-1-i}{k}} \sim n^{\frac{i}{k}}\, n^{\frac{k-1-i}{k}} = n^{\frac{k-1}{k}}, \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Si ottiene quindi

$$\left((n+1)^{\frac{1}{k}} - n^{\frac{1}{k}}\right) = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} (n+1)^{\frac{i}{k}}\, n^{\frac{k-1-i}{k}}} \sim \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} n^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{1}{k\, n^{\frac{k-1}{k}}}.$$

Questo dimostra allo stesso tempo entrambe le cose che volevamo provare. □

Esercizio 3.9.10. *Sia $b \in (0,+\infty) \setminus \{1\}$ una base e $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dimostrare che*

$$\log_b n = o(n^{1/k}).$$

Soluzione. Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_b n}{n^{1/k}} = 0.$$

Procediamo in modo simile all'Esercizio 3.9.5, usando stavolta il Teorema di Stoltz-Cesàro, con le scelte

$$a_n = \log_b n \qquad \text{e} \qquad b_n = n^{1/k}.$$

Abbiamo dunque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_b \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}{(n+1)^{\frac{1}{k}} - n^{\frac{1}{k}}}.$$

Usando che

$$\log_b \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{\log_b e}{n} \qquad \text{e} \qquad (n+1)^{\frac{1}{k}} - n^{\frac{1}{k}} \sim \frac{1}{k\, n^{\frac{k-1}{k}}},$$

abbiamo dunque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_b e}{n} \frac{1}{\dfrac{1}{k\, n^{\frac{k-1}{k}}}} = k \log_b e \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{k-1}{k}}}{n} = 0.$$

Applicando il *Teorema di Stoltz-Cesàro*, otteniamo quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_b n}{n^{1/k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_b}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = 0,$$

come volevamo. □

Esercizio 3.9.11. *Sia $b \in (0,+\infty) \setminus \{1\}$ una base e $\alpha > 0$, dimostrare che*

$$\log_b n = o(n^{\alpha}).$$

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che abbiamo già dimostrato questo risultato per $\alpha = 1$, vedi Esercizio 3.9.5. Se prendiamo $\alpha > 1$, allora

$$n = o(n^{\alpha}),$$

e quindi a maggior ragione

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_b n}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_b n}{n}\, n^{1-\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_b n}{n}\, \lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha} = 0\cdot 0 = 0.$$

Se $0<\alpha<1$, prendiamo $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ tale che

$$\alpha > \frac{1}{k},$$

allora si avrà che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{n^{\frac{1}{k}}} = 0.$$

Quindi ne possiamo dedurre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_b n}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_b n}{n^{\frac{1}{k}}}\, n^{\frac{1}{k}-\alpha} = 0,$$

grazie all'esercizio precedente. □

Esercizio 3.9.12. *Sia $b\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$ una base, dimostrare che*

$$n = o(\log_b(n!)) \qquad \textit{per } n\to\infty.$$

Soluzione. Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log_b(n!)} = 0.$$

Osserviamo che si tratta di una forma indeterminata del tipo ∞/∞. Osserviamo anche che

$$\log_b(n!) = \log_b e\, \log(n!),$$

quindi ci basta dimostrare quello che vogliamo per $b=e$. Consideriamo le successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definite da

$$a_n = n,$$

e

$$b_n = \log(n!),\ \ n\ge 1,$$

Osserviamo che b_n diverge a $+\infty$ e grazie alle proprietà dei logaritmi, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \big(b_{n+1}-b_n\big) = \lim_{n\to\infty} \log\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \log(n+1) = +\infty.$$

Se adesso usiamo il *Teorema di Stolz-Cesàro*, otteniamo quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log(n!)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = 0,$$

come volevamo. □

Osservazione 3.9.13 (Attenzione alla base)**.** Sia $b\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$ una base, dal limite precedente deduciamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_b(n!)}{n} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } b>1,\\ -\infty, & \text{se } 0<b<1.\end{cases}$$

Infatti, abbiamo visto che

$$\frac{\log_b(n!)}{n} = \log_b e\, \frac{\log(n!)}{n},$$

e dobbiamo prestare attenzione al termine $\log_b e$, che cambia si segno, a seconda che la base b sia maggiore o minore di 1. Precisamente, si ha

$$\log_b e > 0, \qquad \text{se } b>1,$$

e

$$\log_b e < 0, \qquad \text{se } 0 < b < 1.$$

Dal momento che la quantità

$$\frac{n}{\log(n!)},$$

è infinitesima e positiva, abbiamo quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n} = +\infty.$$

Esercizio 3.9.14. *Dimostrare che*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Soluzione. Osserviamo che si tratta di una forma indeterminata del tipo ∞^0. Usiamo la scrittura esponenziale (in base 2, per semplicità)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}\,\log_2 n!}.$$

Per l'esercizio precedente, l'esponente nell'ultima espressione diverge a $+\infty$ e quindi si ottiene la tesi. □

Esercizio 3.9.15. *Sia* $b \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ *una base, dimostrare che*

$$\log_b(n!) = o(n^2) \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Soluzione. Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_b(n!)}{n^2} = 0.$$

Come prima, ci basta provare il risultato per la base canonica $b = e$. Vogliamo usare il *Teorema di Stolz-Cesàro*. Poniamo

$$a_n = \log(n!) \qquad \text{e} \qquad b_n = n^2, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log((n+1)!) - \log(n!)}{(n+1)^2 - n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log \dfrac{(n+1)!}{n!}}{n^2 + 2\,n + 1 - n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{2\,n+1} = 0.\end{aligned}$$

Nell'ultimo limite abbiamo usato che

$$2\,n + 1 \sim 2\,n \qquad \text{e} \qquad \log n = o(n) \;\; \text{per } n \to \infty.$$

Usando il *Teorema di Stolz-Cesàro*, si ottiene quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = 0,$$

come volevamo. □

Esercizio 3.9.16. *Sia* $\alpha > 1$*, dimostrare che si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0.$$

Soluzione. La successione di cui dobbiamo calcolare il limite sembra prestarsi perfettamente per poter applicare il *Criterio del rapporto*, ovvero il Teorema 3.4.7. Ponendo $a_n = \alpha^n/n!$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\alpha^n} = \alpha \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \alpha \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

e quindi, appunto grazie al Criterio del rapporto, la nostra successione deve essere infinitesima, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0,$$

come volevamo. □

Esercizio 3.9.17. *Calcolare il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} k}.$$

Soluzione. Ricordiamo che vale

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

si veda l'Esercizio 1.8.9. Si tratta quindi di una forma indeterminata ∞^0. Usando questa espressione, abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}\ \sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n]{2}}.$$

Osserviamo adesso che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1,$$

mentre dall'Esercizio 3.9.6

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Infine, procedendo come nell'Esercizio 3.9.6 si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n} \log_2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n} \log_2 n} = 2^0 = 1.$$

Il limite che dobbiamo calcolare vale quindi 1. □

Esercizio 3.9.18. *Calcolare il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^k,$$

dove $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soluzione. Sfruttiamo di nuovo il *Teorema di Stolz-Cesàro* (Teorema 3.4.10), usando le successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definite da

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} i^k \quad \text{e } b_n = n^{k+1}, \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

Con questa notazione infatti, l'esercizio ci richiede di calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Osserviamo quindi che $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente positiva, strettamente crescente e illimitata; inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}},$$

quindi se questo limite esiste e lo sappiamo calcolare, possiamo concludere grazie al Teorema di Stolz-Cesaro, infatti in tal caso avremo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}.$$

D'altronde, dalla formula del *binomio di Newton* (Esercizio 1.8.15), otteniamo

$$\begin{aligned}(n+1)^{k+1}-n^{k+1} &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} n^i - n^{k+1} \\ &= n^{k+1} + (k+1)\,n^k + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k+1}{i} n^i - n^{k+1} \\ &= (k+1)\,n^k + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k+1}{i} n^i - n^{k+1} \sim (k+1)\,n^k, \qquad \text{per } n\to\infty,\end{aligned}$$

da cui quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(k+1)\,n^k} = \frac{1}{k+1},$$

concludendo così l'Esercizio. □

Esercizio 3.9.19. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{k\,n}}{(k\,n)!},$$

dove $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Soluzione. Chiamiamo per semplicità a_n la successione di cui vogliamo calcolare il limite ed osserviamo che

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{k\,n+k}(k\,n)!}{n^{k\,n}(k\,n+k)!} \\ &= \frac{(n+1)^k}{(k\,n+k)\cdot\,\ldots\,\cdot(k\,n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k\,n} \sim \frac{n^k}{(k\,n)^k}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^k.\end{aligned}$$

Possiamo quindi ricavare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(k\,n)^k}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^k = \frac{e^k}{k^k} = \left(\frac{e}{k}\right)^k.$$

Osserviamo infine che $2 < e < 3$, quindi si ha

$$\left(\frac{e}{k}\right)^k > 1 \text{ per } k = 1, 2,$$

mentre

$$\left(\frac{e}{k}\right)^k < 1 \text{ per } k \geq 3.$$

Quindi utilizzando il *Criterio del rapporto* per le successioni (Teorema 3.4.7), abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty, & \text{per } k = 1, 2, \\ 0, & \text{per } k \geq 3. \end{cases}$$

Questo conclude l'Esercizio. □

Osservazione 3.9.20. Dall'esercizio precedente, otteniamo che

$$(k\,n)! = o(n^{k\,n}), \qquad \text{se } k = 1 \text{ oppure } k = 2,$$

mentre

$$n^{k\,n} = o((k\,n)!), \qquad \text{se } k \geq 3.$$

Esercizio 3.9.21. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}.$$

Soluzione. Usando il trucco usuale che esponenziale e logaritmo sono una la funzione inversa dell'altra, possiamo riscrivere

$$\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e^{\frac{1}{n}\log\frac{n^n}{n!}},$$

e concentriamoci sul calcolare il limite dell'esponente, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{n^n}{n!}.$$

A tale scopo, utilizziamo il *Teorema di Stolz-Cesaro* con le scelte

$$a_n = \log \frac{n^n}{n!} \qquad \text{e} \qquad b_n = n.$$

Si ha infatti

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} &= \lim_{n\to\infty} \left[\log \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} - \log \frac{n^n}{n!}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \log \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \log \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \log \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \log e = 1.\end{aligned}$$

Dal *Teorema di Stolz-Cesaro*, si ottiene allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = 1.$$

Questo permette di calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log\frac{n^n}{n!}} = e.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Osservazione 3.9.22 (Un asintotico importante)**.** L'esercizio precedente implica in particolare che

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}, \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Esercizio 3.9.23. *Dimostrare che la successione* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definita da*

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{2\,n} \frac{1}{k}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

è convergente e si ha

$$\frac{1}{2} \le \lim_{n\to\infty} a_n \le 1.$$

Soluzione. Verifichiamo che la successione in questione è monotona crescente: si ha infatti

$$a_{n+1} = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \ge \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = a_n,$$

dove abbiamo usato il fatto che (**verificare per esercizio**)

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \ge 0, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Una volta ottenuta la monotonia della successione, grazie al Teorema 3.4.4 possiamo affermare che essa ammette sicuramente limite (eventualmente uguale a $+\infty$) e vale

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Cerchiamo di mostrare la stima richiesta sul numero ℓ: osserviamo innanzitutto che deve sicuramente essere $\ell \le 1$, dal momento che

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \le \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

ed ovviamente $n/(n+1)$ tende ad 1 per n che tende a ∞. D'altra parte, essendo a_n crescente, si ha

$$a_1 \le \sup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} a_n = \ell.$$

Calcolando a_1, si ottiene la minorazione richiesta su ℓ. □

Osservazione 3.9.24. La stima precedente

$$\frac{1}{2} \le \ell \le 1,$$

è piuttosto rozza e può essere raffinata. Per esempio, consideriamo la sottosuccessione $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ fatta prendendo solo gli elementi aventi indice pari: sappiamo che anch'essa tende a ℓ (grazie alla Proposizione 3.1.3), inoltre

$$\begin{aligned} a_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{4n} \frac{1}{k} &= \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{3n}\right) + \left(\frac{1}{3n+1} + \dots + \frac{1}{4n}\right) \\ &\le n\frac{1}{2n+1} + n\frac{1}{3n+1}, \end{aligned}$$

da cui si ha

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_{2n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} + n\frac{n}{3n+1} = \frac{5}{6}.$$

Per ottenere la stima dal basso su ℓ, si procede usando la monotonia: si avrà dunque

$$a_2 \le \sup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} a_n = \ell.$$

Calcolando $a_2 = 7/12$, abbiamo quindi che ℓ deve essere compreso tra $7/12$ e $5/6$.

Esercizio 3.9.25 (Una successione irregolare)**.** *Dimostrare che la successione* $\{\sin n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è irregolare.*

Soluzione. Procediamo per assurdo. Assumiamo quindi che la successione non sia irregolare. Dal momento che

$$|\sin n| \le 1, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

allora la successione non può essere divergente, quindi deve essere convergente. Chiamiamo

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sin n,$$

ed applicando la Proposizione 3.1.3 alle due sottosuccessioni $\{\sin(3\,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\sin(2\,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, si avrà anche

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sin(3\,n) \qquad \text{e} \qquad \ell = \lim_{n\to\infty} \sin(2\,n).$$

Quindi grazie alle *formule di prostaferesi* e *di duplicazione*, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 = \ell - \ell = \lim_{n\to\infty} \Big[\sin(3\,n) - \sin n\Big] &= \lim_{n\to\infty} 2\,\sin(n)\,\cos(2\,n) \\ &= \lim_{n\to\infty} 2\,\sin(n)\,(1 - 2\,\sin^2 n) \\ &= 2\,\ell\,(1 - 2\,\ell^2). \end{aligned}$$

Dall'identità precedente, abbiamo quindi ottenuto che il valore del limite ℓ deve essere

$$\ell = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \ell = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3.9.10}$$

D'altra parte, sempre dal calcolo precedente abbiamo ottenuto

$$\lim_{n\to\infty} 2\,\sin(n)\,\cos(2\,n) = 0, \tag{3.9.11}$$

e quindi passando al valore assoluto anche

$$\lim_{n\to\infty} 2\,|\sin(n)|\,|\cos(2\,n)| = 0.$$

Osserviamo adesso che dalla relazione fondamentale della trigonometria, si avrà

$$\lim_{n\to\infty} |\cos n| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 - \sin^2 n} = \sqrt{1 - \ell^2}.$$

Applicando di nuovo la Proposizione 3.1.3, stavolta alla sottosuccessione $\{|\cos(2\,n)|\}_{n\in\mathbb{N}}$, abbiamo anche

$$\lim_{n\to\infty} |\cos(2\,n)| = \sqrt{1 - \ell^2}.$$

Dalla relazione (3.9.11), otteniamo quindi

$$2\,|\ell|\,\sqrt{1 - \ell^2} = 0.$$

Questo ci dice che il limite ℓ vale

$$\ell = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \ell = \pm 1. \tag{3.9.12}$$

Confrontando (3.9.10) e (3.9.12), otteniamo infine che $\ell = 0$. Si ha quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sin(n) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} |\cos(n)| = 1.$$

Si osservi adesso che dalla formula di addizione, vale

$$\sin(n) = \sin(n - 1)\,\cos 1 + \cos(n - 1)\,\sin 1,$$

ovvero, osservando che $\sin 1 \neq 0$, vale

$$|\cos(n-1)| = \left| \frac{\sin n - \sin(n-1)\,\cos 1}{\sin 1} \right|.$$

Passando al limite, si ottiene l'assurdo

$$1 = \lim_{n\to\infty} |\cos(n-1)| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sin n - \sin(n-1)\,\cos 1}{\sin 1} \right| = 0.$$

Quindi la successione di partenza era irregolare. $\square$

Esercizio 3.9.26. *Calcolare i due limiti seguenti*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Soluzione. Per calcolare ambo i limiti, useremo che

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

Partial dal primo limite ed osserviamo che

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\right]^2 = \left[\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}\right]^2 = \left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\right]^2.$$

Abbiamo quindi

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\right]^2 = \left[\frac{1}{e}\right]^2 = e^{-2}.$$

Per il secondo limite, useremo delle manipolazioni algebriche simili. Si ha

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}} = \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n}} &= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}} \\ &= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}.\end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\,\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}}\,\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e}\cdot 1 = e^{-1}.\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio, abbiamo fatto il cambio di variabile $m = n - 1$. Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 3.9.27. *Confrontare i due infiniti*

$$a_n = n^{\log n} \qquad e \qquad b_n = 2^n.$$

9.2. Serie numeriche.

Esercizio 3.9.28 (Serie di Mengoli)**.** *Dimostrare che la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)},$$

è convergente. Calcolare il suo valore.

Soluzione. Osserviamo che

$$\frac{1}{n\,(n+1)} = \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right].$$

La serie in questione è un caso particolare di *serie telescopica.* Infatti, si consideri la successione delle sue somme parziali

$$\begin{aligned} s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n\,(n+1)} &= \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] \\ &= \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right] \\ &= \left[1 - \frac{1}{k}\right]. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \left[1 - \frac{1}{k}\right] = 1.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 3.9.29. *Dimostrare che la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

è convergente.

Soluzione. Possiamo utilizzare un confronto asintotico con la serie di Mengoli, vista nell'esercizio precedente. Si chiamino

$$a_n = \frac{1}{n^2} \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{1}{n\,(n+1)}.$$

È facile vedere che

$$a_n \sim b_n, \qquad \text{per } n \to \infty,$$

infatti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,(n+1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Possiamo allora usare il Corollario 3.7.3 e concludere che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Dal momento che quest'ultima era convergente per l'esercizio precedente, si ottiene quello che volevamo. □

Esercizio 3.9.30 (Serie geometrica)**.** *Si dimostri che la serie geometrica di ragione α converge* **se e soltanto se** $|\alpha| < 1$. *Provare che in tal caso si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Soluzione. Abbiamo visto nel Capitolo 1 che vale formula seguente per la successione delle somme parziali

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} \alpha^n = \frac{\alpha^{k+1}-1}{\alpha-1}. \tag{3.9.13}$$

Se si ricorda adesso che

$$\lim_{k\to\infty} \alpha^{k+1} = 0, \qquad \text{per } |\alpha| < 1,$$

si ottiene che la serie geometrica converge per $|\alpha| < 1$.

Dimostriamo adesso che per $|\alpha| \ge 1$ la serie non converge. Osserviamo che

$$\lim_{k\to\infty} \alpha^{k+1} = +\infty, \qquad \text{per } \alpha > 1,$$

quindi in tal caso, dalla formula (3.9.13), otteniamo che la serie geometrica risulta divergente. Se prendiamo $\alpha = 1$, si ha

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} 1 = k,$$

e quindi la serie è ancora divergente. Infine, per $\alpha \le -1$, sappiamo che la successione α^{k+1} è irregolare. Di conseguenza, anche la serie geometrica lo sarà. □

Esercizio 3.9.31. *Dimostrare che la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

è convergente. Dare una maggiorazione per il valore di questa serie.

Soluzione. Osserviamo che

$$n! \ge n\,(n-1), \qquad \text{per ogni } n \ge 1.$$

Infatti, questa disuguaglianza è equivalente a

$$n\cdot(n-1)! \ge n\,(n-1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (n-1)! \ge n-1,$$

e quest'ultima è banalmente vera, in base alla definizione di fattoriale. Abbiamo quindi, passando ai reciproci (e facendo attenzione a non dividere per 0)

$$\frac{1}{n!} \le \frac{1}{n\,(n-1)}, \qquad \text{per ogni } n \ge 2.$$

Si osservi adesso che il termine a destra è il termine $n-$esimo di una serie convergente, i.e.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(n-1)}.$$

In effetti, quest'ultima è ancora la serie di Mengoli, già studiata in precedenza: infatti, facendo un cambio di indice $k = n-1$, si ha

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(n-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+1)} = 1.$$

Possiamo quindi usare il *Criterio del confronto per le serie* (Teorema 3.7.1) e concludere che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < +\infty.$$

Inoltre, possiamo anche dare una stima per il valore di questa serie: si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} + \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(n-1)} + 1 + 1 = 1 + 2 = 3.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 3.9.32 (Serie armonica)**.** *Dimostrare che la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

è divergente.

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che si tratta di una serie a termini positivi, quindi essa è convergente o divergente. Supponiamo per assurdo che non sia divergente, allora essa è convergente. In base alla definizione di serie convergente, questo vuol dire che se considero la successione delle sue somme parziali

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n},$$

si ha

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \ell < +\infty.$$

Utilizzando la Proposizione 3.1.3, abbiamo allora anche

$$\lim_{k\to\infty} s_{2\,k} = \ell,$$

e quindi in definitiva

$$\lim_{k\to\infty} (s_{2\,k} - s_k) = \ell - \ell = 0. \tag{3.9.14}$$

D'altra parte, per definizione la successione $\{s_{2\,k} - s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è tale che

$$s_{2\,k} - s_k = \sum_{n=k+1}^{2\,k} \frac{1}{n},$$

ovvero essa coincide con la successione studiata nell'Esercizio 3.9.23. Ricordando che tale successione è sempre maggiore o uguale a $1/2$, otteniamo da (3.9.14)

$$\frac{1}{2} \leq s_{2\,k} - s_k \to 0,$$

ovvero un assurdo. La serie armonica è dunque divergente. □

Esercizio 3.9.33 (Serie armonica generalizzata)**.** *Dimostrare che la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

è divergente per $0 < \alpha \leq 1$ *e convergente per* $\alpha > 1$*.*

Soluzione. Osserviamo che si tratta sempre di una serie a termini positivi. Diviamo la discussione in vari casi.

Caso $\alpha = 1$**.** Questo lo abbiamo già trattato nell'esercizio precedente.

Caso $0 < \alpha < 1$**.** In tal caso, abbiamo che

$$n^\alpha \leq n, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

da qui, passando ai reciproci, si ha

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}, \qquad \text{per ogni } n \geq 1.$$

Dal momento che abbiamo dimostrato che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

usando il *Criterio del confronto* per le serie (i.e. Teorema 3.7.1), si ottiene anche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty.$$

Caso $\alpha \geq 2$**.** Osserviamo intanto che per $\alpha = 2$ lo abbiamo già dimostrato, vedi Esercizio 3.9.29. Questo implica che la serie è ancora convergente per $\alpha > 2$, infatti basta osservare che in tal caso

$$n^2 \leq n^\alpha, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

e quindi

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}, \qquad \text{per ogni } n \geq 1.$$

La conclusione per $\alpha > 2$ segue quindi dal *Criterio del confronto per le serie.*

Caso $1 < \alpha < 2$**.** In tal caso, il Criterio del confronto non ci è più utile. Ugualmente, i Criteri del rapporto e della radice $n-$esima non danno indicazioni. Proviamo ad usare il Criterio di condensazione di Cauchy: si osservi infatti che

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha},$$

soddisfa le ipotesi di questo criterio. Passiamo quindi alla serie condensata, i.e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, a_{2^n} = \sum_{n=0} 2^n\, \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=0} 2^{n\,(1-\alpha)} = \sum_{n=0} \left(2^{(1-\alpha)}\right)^n,$$

ovvero la serie condensata è una *serie geometrica di ragione* $2^{1-\alpha}$. Dal momento che $1 < \alpha < 2$, l'esponente $1-\alpha$ è negativo, ovvero

$$0 < 2^{1-\alpha} < 1,$$

quindi la serie geometrica è convergente (si veda Esercizio 3.9.30). Per il Criterio di condensazione di Cauchy, otteniamo quindi che per $1 < \alpha < 2$ anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

è convergente. □

Esercizio 3.9.34 (Serie log −armonica generalizzata)**.** *Sia $\alpha > 0$, si dimostri che la serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\log n)^\alpha},$$

converge per $\alpha > 1$ e diverge per $\alpha \leq 1$.

Soluzione. Si osservi che

$$\frac{1}{n\,(\log n)^\alpha} = o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \text{per } n \to \infty,$$

dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n\,(\log n)^\alpha}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\log n)^\alpha} = 0.$$

Purtroppo però questo non ci permette di concludere niente, se usiamo il *Criterio del confronto asintotico per le serie* (Teorema 3.7.2). Proviamo ad usare nuovamente il *Criterio di condensazione di Cauchy* (Teorema 3.7.6): infatti, il termine $n-$esimo

$$a_n = \frac{1}{n\,(\log n)^\alpha},$$

soddisfa le ipotesi di tale criterio. La serie condensata corrispondente è data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\, a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\, \frac{1}{2^n\,(\log 2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\,\log 2)^\alpha} = \frac{1}{(\log_2)^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

In altre parole, la serie condensata coincide con una serie armonica generalizzata, che abbiamo già studiato! Sappiamo infatti che quest'ultima converge se e solo se $\alpha > 1$ e diverge altrimenti. Dal Criterio di condensazione di Cauchy, otteniamo la stessa conclusione per la serie di partenza. □

Esercizio 3.9.35. *Sia $\alpha > 0$, si dimostri che la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{\alpha\, n}}{n!},$$

è convergente per $0 < \alpha < 1$ e divergente per $\alpha \geq 1$.

Soluzione. Si tratta di una serie a termini positivi, usiamo il *Criterio della radice $n-$esima per le serie* (Teorema 3.7.4). Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{\alpha\, n}}{n!}} = \lim_{n\to\infty} e\, \frac{n^\alpha}{n},$$

dove si è sfruttata l'informazione asintotica

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}.$$

Si vede facilmente che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{\alpha\, n}}{n!}} = \lim_{n\to\infty} e\,\frac{n^\alpha}{n} = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < \alpha < 1, \\ e, & \text{se } \alpha = 1, \\ +\infty, & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Questo permette di ottenere la conclusione desiderata (si ricordi che $e > 1$). □

Esercizio 3.9.36. *Dimostrare che la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log_2\left(\frac{n+1}{n}\right),$$

è divergente.

Soluzione. Si osservi che la serie è a termini positivi. Ricordando che

$$\log_2\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim (\log_2 e)\,\frac{1}{n}, \qquad \text{per } n \to \infty,$$

possiamo usare il *Criterio del confronto asintotico* (Teorema 3.7.2) con la serie armonica (che è divergente) ed ottenere la conclusione. □

Esercizio 3.9.37. *Tra le serie seguenti, evidenziare quelle convergenti*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\frac{999}{1000}\right)^n \qquad \sum_{n=6}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log\log n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}.$$

Soluzione. Per quando riguarda la prima serie, osserviamo innanzitutto che la serie è termini positivi, dal momento che

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n^3}, \qquad \text{per ogni } n \geq 1.$$

Per determinare il carattere della serie, basta osservare che

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{n}, \qquad \text{per } n \to \infty,$$

e quest'ultimo è il termine $n-$esimo della serie armonica, che diverge. In base al criterio del confronto asintotico (Teorema 3.7.2), si ottiene quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}\right) = +\infty.$$

Consideriamo la seconda serie: osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2\left(\frac{999}{1000}\right)^n} = \frac{999}{1000}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2} = \frac{999}{1000} < 1.$$

In base al criterio della radice $n-$esima (Teorema 3.7.4), la serie è quindi convergente.

Per la terza serie, basta applicare direttamente il *Criterio di Leibniz* (Teorema 3.8.3), per ottenere che anch'essa converge.

Per la quarta serie, possiamo usare il *Criterio del rapporto per le serie* (Teorema 3.7.5). Si ha infatti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n+1}{e^{n+1}}}{\dfrac{n}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\,\frac{e^n}{e^{n+1}} = \frac{1}{e} < 1.$$

La serie è quindi convergente. □

Esercizio 3.9.38. *Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie a termini positivi è convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\alpha^{2\,n}.$$

Soluzione. Osserviamo che la serie è a termini positivi, dal momento che l'esponente $2\,n$ è pari. Osserviamo che per $\alpha = 0$ la serie è ovviamente convergente. Prendiamo $\alpha \neq 0$ ed usiamo il *Criterio del rapporto per le serie*: si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,\alpha^{2\,n+2}}{n\,\alpha^{2\,n}} = \alpha^2.$$

Quindi se $\alpha^2 < 1$, la serie converge, mentre se $\alpha^2 > 1$ diverge. In altre parole, abbiamo scoperto che

$$\text{se } |\alpha| < 1 \text{ la serie converge,}$$

mentre

$$\text{se } |\alpha| > 1 \text{ la serie diverge.}$$

Resta da decidere cosa succede se $|\alpha| = 1$. In tal caso, la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\alpha^{2\,n} = \sum_{n=1}^{\infty} n,$$

che è ovviamente divergente. In conclusione, la serie converge se e solo se $|\alpha| < 1$. □

Esercizio 3.9.39. *Studiare il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+2}{n+4}\right).$$

Soluzione. Osserviamo che

$$\frac{n+2}{n+4} < 1, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

quindi

$$\log\left(\frac{n+2}{n+4}\right) < 0, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

ovvero la serie è a termini di segno costante. Dal limite notevole del logaritmo (ovvero (3.5.5)), si ha

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{n+2}{n+4}\right) = \log\left(\frac{n+4-2}{n+4}\right) &= \log\left(1 - \frac{2}{n+4}\right) \\ &\sim -\frac{2}{n+4} \sim -\frac{2}{n}, \qquad \text{per } n \to \infty.\end{aligned}$$

Dal momento che la serie il cui $n-$esimo termine è $-2/n$ è divergente (trattasi di serie armonica), usando il *Criterio del confronto asintotico* (Teorema 3.7.2) con

$$a_n = \log\left(\frac{n+2}{n+4}\right) \qquad \text{e} \qquad b_n = -\frac{2}{n},$$

otteniamo che anche la serie iniziale è divergente. □

Esercizio 3.9.40. *Studiare il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{n+2}{n^2+4}\right).$$

Soluzione. Si tratta di una serie a termini positivi. Dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{n+2}{n^2+4}\right) = \cos(0) = 1 > 0,$$

la serie diverge. Si ricordi infatti che una condizione necessaria per la convergenza di una serie è che il termine $n-$esimo converga a 0, vedi Teorema 3.6.3. □

Esercizio 3.9.41. *Studiare il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+2}{n^2-2}\right).$$

Soluzione. Si tratta di una serie a termini positivi, il cui termine $n-$esimo è asintotico a quello di una serie armonica generalizzata, con esponente $\alpha = 2$. Infatti, dal limite notevole (3.5.5) per il logaritmo, si ha

$$\log\left(\frac{n^2+2}{n^2-2}\right) = \log\left(\frac{n^2-2+4}{n^2-2}\right) = \log\left(1+\frac{4}{n^2-2}\right)$$
$$\sim \frac{4}{n^2-2} \sim \frac{4}{n^2}, \qquad \text{per } n\to\infty.$$

Dal *Criterio del confronto asintotico* (Teorema 3.7.2), applicato con

$$a_n = \log\left(\frac{n^2+2}{n^2-2}\right) \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{4}{n^2},$$

si ottiene che la serie iniziale converge. □

Esercizio 3.9.42. *Studiare il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=0} \sin\left(\frac{n+2}{n^3+4}\right).$$

Soluzione. Si tratta di una serie a termini di segno positivo. Usando il limite notevole per il seno, si ha

$$\sin\left(\frac{n+2}{n^3+4}\right) \sim \frac{n+2}{n^3+4} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}, \qquad \text{per } n\to\infty.$$

Dal *Criterio del confronto asintotico* (Teorema 3.7.2), applicato con

$$a_n = \sin\left(\frac{n+2}{n^3+4}\right) \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{1}{n^2},$$

si ottiene che la serie converge. □

Esercizio 3.9.43. *Studiare il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=0} \frac{n^n\, n!}{(2\,n)!}.$$

Soluzione. Si tratta di una serie a termini positivi. Usiamo il criterio del rapporto: ponendo

$$a_n = \frac{n^n\, n!}{(2\,n)!},$$

si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\,(n+1)!}{(2\,n+2)!}\,\frac{(2\,n)!}{n^n\, n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2\,n+2)\,(2\,n+1)}\,\frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{4\,n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{4}.\end{aligned}$$

Dal momento che $e < 4$, si ha quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

e per il *Criterio del rapporto*, la serie è convergente. □

Esercizio 3.9.44. *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^4\, \frac{e^n}{n!}.$$

Soluzione. Si tratta di una serie a termini positivi, usiamo il *Criterio della radice $n-$esima.* Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4\,\frac{e^n}{n!}} = e\,\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^4}}{\sqrt[n]{n!}} = e^2\,\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{4}{n}}}{n},$$

dove abbiamo usato che

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e},$$

grazie all'Osservazione 3.9.22. Ricordiamo adesso che $\sqrt[n]{n}$ tende ad 1, quindi si ha

$$n^{\frac{4}{n}} = (\sqrt[n]{n})^4 \to 1 \qquad \text{per } n \to \infty,$$

ed in definitiva si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4\,\frac{e^n}{n!}} = e^2\,\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{4}{n}}}{n} = 0.$$

Dal Criterio della radice $n-$esima per le serie otteniamo che la serie iniziale converge. □

Esercizio 3.9.45. *Studiare il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\log n}}{2^n}.$$

Dimostrazione. Si tratta di una serie a termini positivi, quando possiamo subito escludere il carattere irregolare. Calcoliamo il limite della radice $n-$esima: usando il trucco usuale si ha

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{\log n}}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{\log n\,\log n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}e^{\frac{(\log n)^2}{n}}.$$

Ricordando che per ogni $\alpha>0$

$$\log n=o(n^\alpha),\qquad \text{per } n\to\infty,$$

si ha in particolare

$$\log n=o(\sqrt{n}),\qquad \text{per } n\to\infty,$$

da cui, elevando al quadrato, si ha anche

$$(\log n)=o(n),\qquad \text{per } n\to\infty.$$

Abbiamo quindi

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{\log n}}{2^n}}=\frac{1}{2}<1.$$

Dal *Criterio della radice $n-$esima* per le serie, otteniamo che la serie è convergente. □

10. Classificazione di infiniti

In questa breve sezione, si raccolgono alcuni paragoni tra infiniti che abbiamo dimostrato negli esercizi precedenti. A partire da questi, si ottiene anche la classificazione per i rispettivi infinitesimi (es. $1/n^\alpha$, $1/\log_b n$ e così via).

$$\begin{aligned}
\log_b n &= o(n^\alpha), && \text{per ogni } b\in(0,+\infty)\setminus\{1\},\alpha>0,\\
n &= o(\log_b n!), && \text{per ogni } b\in(0,+\infty)\setminus\{1\},\\
\log_b n! &= o(n^2), && \text{per ogni } b\in(0,+\infty)\setminus\{1\},\\
n^\alpha &= o(n^\beta), && \text{per ogni } 0<\alpha<\beta,\\
n^\beta &= o(b^n), && \text{per ogni } b>1,\beta>0,\\
b^n &= o(n!), && \text{per ogni } b>1,\\
n! &= o(n^n), &&\\
(2\,n)! &= o(n^{2n}), &&\\
n^{k\,n} &= o((k\,n)!), && \text{per ogni } k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1,2\},\\
\sqrt[n]{n!} &\sim \frac{n}{e}, &&\\
(n+a)^{\frac{1}{k}}-n^{\frac{1}{k}} &\sim \frac{a}{k\,n^{\frac{k-1}{k}}}, && \text{per ogni } k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ a\neq 0.
\end{aligned}$$

11. Alcune serie importanti

11.1. Serie armonica generalizzata. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

converge se e solo se $\alpha > 1$ e diverge altrimenti, si veda Esercizio 3.9.33.

11.2. Serie geometrica. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n,$$

converge se e solo se $|\alpha| < 1$, in tal caso si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Per $\alpha \geq 1$, la serie diverge a $+\infty$, mentre per $\alpha \leq -1$ è irregolare, si veda Esercizio 3.9.30.

11.3. Serie $\log$ −armonica generalizzata. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie numerica a termini positivi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\log n)^{\alpha}},$$

converge se e solo se $\alpha > 1$ e diverge altrimenti, si veda Esercizio 3.9.34.

12. Successioni definite per induzione

Il seguente Esercizio fornisce un criterio molto utile per stabilire la convergenza per una classe particolare di successioni definite per induzione.

Esercizio 3.12.1. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente, ovvero tale che*

$$x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Consideriamo la seguente successione definita per induzione

$$\begin{cases} a_0 & = & \alpha \\ a_{n+1} & = & f(a_n). \end{cases}$$

Provare che:

- *se $f(\alpha) \geq \alpha$, allora la successione è monotona crescente;*
- *se $f(\alpha) \leq \alpha$, allora la successione è monotona decrescente.*

In particolare quindi, in base al Teorema 3.4.4, la successione ammette limite.

Soluzione. Ovviamente dovremo usare il principio di induzione. Proviamo soltanto la prima affermazione: la seconda si prova esattamente nello stesso modo ed è lasciata alla buona volontà dello studente. Supponiamo quindi di essere nel caso $a_1 \geq \alpha$, vogliamo provare che

$$a_{n+1} \geq a_n, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \tag{3.12.15}$$

La (3.12.15) è ovviamente vera per $n = 0$, visto che corrisponde a $a_1 \geq a_0 = \alpha$.

Supponiamo adesso che la (3.12.15) sia vera per un certo naturale n_0, ovvero che risulti $a_{n_0+1} \geq a_{n_0}$, vogliamo provare che questo implica necessariamente $a_{n_0+2} \geq a_{n_0+1}$. Infatti dalla definizione della successione e sfruttando la monotonia di f si ottiene

$$a_{n_0+2} = f(a_{n_0+1}) \geq f(a_{n_0}) = a_{n_0+1},$$

che rappresenta la (3.12.15) per $n_0 + 1$ e possiamo quindi concludere la dimostrazione. □

Nel caso in cui la funzione f che compariva nell'Esercizio precedente sia monotona decrescente, possiamo ancora dire qualcosa, ma le cose si fanno decisamente più intricate: in particolare, quello che diremo è legato all'analisi dei primi 4 termini.

Esercizio 3.12.2. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona decrescente, ovvero tale che*

$$x_1 \geq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Consideriamo la seguente successione definita per induzione

$$\begin{cases} a_0 & = & \alpha \\ a_{n+1} & = & f(a_n). \end{cases}$$

Provare che:

- *se $f(f(\alpha)) \geq \alpha$ e $f(f(f(\alpha))) \leq f(\alpha)$, allora la sottosuccessione $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente e la sottosuccessione $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente;*
- *se $f(f(\alpha)) \leq \alpha$ e $f(f(f(\alpha))) \geq f(\alpha)$, la sottosuccessione $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente e la sottosuccessione $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente.*

In particolare, sotto queste ipotesi la sottosuccessione indicizzata dai numeri pari e quella indicizzata dai numeri dispari convergono entrambe[3].

Soluzione. Nuovamente, utilizziamo il principio di induzione: stavolta sarà necessaria un po' di cautela. Supponiamo infatti di voler dimostrare la prima affermazione, dobbiamo provare che se $a_2 \geq \alpha$ e $a_3 \leq a_1$, allora la seguente affermazione è vera

$$a_{2n} \leq a_{2n+2} \;\text{ e }\; a_{2n+1} \geq a_{2n+3}, \;\text{ per ogni } n \in \mathbb{N}. \tag{3.12.16}$$

Ovviamente la (3.12.16) è verificata per $n = 0$, infatti stiamo assumendo che

$$a_2 = f(a_1) = f(f(\alpha)) \geq \alpha = a_0 \qquad \text{e} \qquad a_3 = f(a_2) = f(f(a_1)) = f(f(f(\alpha))) \leq f(\alpha) = a_1.$$

Supponiamo quindi di sapere che la (3.12.16) sia verificata per un certo numero naturale n_0, quindi la nostra ipotesi induttiva adesso sarà la seguente

$$a_{2n_0} \leq a_{2n_0+2} \;\text{ e }\; a_{2n_0+1} \geq a_{2n_0+3}.$$

Vogliamo dimostrare che questa ipotesi implica la validità di (3.12.16) anche per $n_0 + 1$: infatti, tenendo presente la monotonia di f si ha

$$a_{2n_0+4} = f(a_{2n_0+3}) \geq f(a_{2n_0+1}) = a_{2n_0+2},$$

ed anche, sfruttando quanto appena ottenuto,

$$a_{2n_0+5} = f(a_{2n_0+4}) \leq f(a_{2n_0+2}) = a_{2n_0+3},$$

ovvero abbiamo provato che la (3.12.16) è vera anche per n_0+1 e quindi per il principio di induzione essa è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

[3] Non necessariamente allo stesso limite!

Osservazione 3.12.3. Nell' Esercizio precedente, i casi evidenziati sono gli unici per cui è possibile trarre delle conclusioni sulla successione.

Esercizio 3.12.4. *Sia data la successione definita per induzione da*

$$\begin{cases} a_1 & = & 0 \\ a_{n+1} & = & \sqrt{2+a_n} \end{cases}$$

Dire se esiste il limite per n che tende a ∞ e calcolarlo.

Soluzione. Si vede subito che la successione è tutta positiva (dimostrarlo per induzione). Proviamo che è crescente, procedendo per induzione: il primo passo è mostrare che la proposizione

$$a_{n+1} \geq a_n, \tag{3.12.17}$$

è vera per $n = 1$. Questo è immediato, dal momento che

$$a_2 = \sqrt{2+a_1} = \sqrt{2} \geq= a_1.$$

Supponiamo adesso che la proposizione (3.12.17) sia vera per un certo $n_0 \in \mathbb{N}$, ovvero supponiamo di sapere che

$$a_{n_0+1} \geq a_{n_0},$$

allora otteniamo

$$a_{n_0+2} = \sqrt{2+a_{n_0+1}} \geq \sqrt{2+a_{n_0}} = a_{n_0+1},$$

ovvero la (3.12.17) è vera anche per il naturale successivo $n_0 + 1$ e quindi (3.12.17) è vera per ogni $n \geq 1$. Abbiamo quindi dal Teorema 3.4.4 che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette sicuramente limite ℓ e deve risultare

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\to\infty} a_n.$$

Calcoliamo ℓ: per la Proposizione 3.1.3, la sottosuccessione $\{a_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergerà allo stesso limite ed inoltre dalla definizione di a_{n+1} si ottiene che ℓ deve verificare

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n} = \sqrt{2+\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2+\ell},$$

ovvero deve risultare $\ell^2 = 2 + \ell$. Quindi abbiamo tre possibilità per ℓ, ovvero

$$\ell = +\infty \quad \text{oppure} \quad \ell = 2 \quad \text{oppure} \quad \ell = -1.$$

Possiamo subito escludere la terza perchè abbiamo detto che $a_n \geq 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi dovrà essere anche $\ell \geq 0$ per la Proposizione 3.2.3. Se sapessimo che la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, potremmo escludere anche la prima possibilità e concluderne quindi che deve essere $\ell = 2$. D'altra parte, si vede facilmente che deve risultare

$$a_n \leq 2, \tag{3.12.18}$$

per ogni $n \geq 1$. La dimostrazione si fa di nuovo per induzione, dal momento che (3.12.18) è sicuramente verificata per $n = 1$; inoltre, assumendo che (3.12.18) valga per un certo $n_0 \in \mathbb{N}$, si ottiene

$$a_{n_0+1} = \sqrt{2+a_{n_0}} \leq \sqrt{4} = 2,$$

ovvero (3.12.18) è valida anche per il naturale successivo $n_0 + 1$ e quindi è vera per ogni $n \geq 1$. In definitiva

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2,$$

concludendo così l'esercizio. □

Esercizio 3.12.5. *Studiare il comportamento della successione definita per induzione*

$$\begin{cases} a_0 & = & 1 \\ a_{n+1} & = & \dfrac{a_n+2}{3\,a_n+2} \end{cases}$$

Soluzione. È immediato osservare che la successione deve essere tutta positiva e minore di 1. Inoltre l'$(n+1)-$esimo termine è della forma $a_{n+1} = f(a_n)$, con la funzione f definita da

$$f(x) = \frac{x+2}{3\,x+2}, \qquad x \geq 0.$$

Non è difficile convincersi che f è monotona decrescente[4], quindi potremmo tentare di utilizzare l'Esercizio 3.12.2 per concluderne qualcosa sulla nostra successione: in effetti, calcolando i primi 4 termini della successione otteniamo

$$1 \geq \frac{13}{19} = f(f(1)),$$

mentre

$$f(1) = \frac{3}{5} \leq \frac{51}{77} = f(f(f(1))).$$

Per quanto visto nell'Esercizio 3.12.2, otteniamo che $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente, mentre $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente, in particolare esistono ℓ_1 ed ℓ_2 tali che

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \ell_1 \ \text{ e } \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \ell_2.$$

Cerchiamo di calcolare i limiti ℓ_1 ed ℓ_2: dalla definizione, abbiamo

$$a_{2n+2} = f(a_{2n+1}) = \frac{a_{2n+1}+2}{3\,a_{2n+1}+2} = \frac{f(a_{2n})+2}{3\,f(a_{2n})+2} = \frac{7\,a_{2n}+6}{9\,a_{2n}+10},$$

e dal momento che dalla Proposizione 3.1.3 si avrà anche $a_{2n+2} \to \ell_1$, ovvero

$$\ell_1 = \lim_{n\to\infty} a_{2n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{7\,a_{2n}+6}{9\,a_{2n}+10} = \frac{7\,\ell_1+6}{9\,\ell_1+10},$$

abbiamo quindi trovato che il candidato limite ℓ_1 deve soddisfare la precedente relazione, ovvero

$$\ell_1 = \frac{7\,\ell_1+6}{9\,\ell_1+10}.$$

D'altra parte, tale relazione è soddisfatta solamente per $\ell_1 = -1$ oppure $\ell_1 = 2/3$: dal momento che la successione è tutta a termini positivi, dovremo scartare il primo valore e concluderne quindi che

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \frac{2}{3}.$$

Con calcoli completamente analoghi si prova che deve valere anche

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \frac{2}{3},$$

da cui se ne conclude[5] che la successione di partenza ammette limite e questo è dato da $2/3$. $\square$

[4]Non è necessario usare il calcolo differenziale per vederlo. Si può procedere come nell'Esercizio 8.31 del capitolo "*Strumenti di base*".

[5]Attenzione! Si ricordi che in generale, se una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possiede due sotto-successioni convergenti allo stesso limite ℓ, questo **non implica** che anche $a_n \to \ell$. Quello che stiamo usando in questo caso, è che le due sotto-successioni in esame sono *complementari*, nel senso che $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, per cui dal comportamento delle due sotto-successioni, possiamo ricavarne il comportamento di tutta la successione.

Capitolo 4

Limiti di funzioni di una variabile reale

1. Intorni e punti di accumulazione

Cominciamo introducendo due notazioni per gli intorni di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Se $\delta > 0$, si porrà

$$I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\},$$

e lo chiameremo *intorno di* x_0 *di raggio* δ. Porremo anche

$$\mathring{I}_\delta(x_0) = I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\},$$

che chiameremo *intorno bucato di* x_0 *di raggio* δ.

Definizione 4.1.1. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme tale che $A \neq \emptyset$. Si dice che $x_0 \in \mathbb{R}$ è un *punto di accumulazione di* A se vale la proprietà seguente

$$\mathring{I}_\delta(x_0) \cap A \neq \emptyset \text{ per ogni } \delta > 0.$$

Indichiamo con $\mathrm{Acc}(A)$ l'insieme di tutti i punti di accumulazione di A.

Si noti che un punto di accumulazione di A non appartiene necessariamente all'insieme A. Inoltre, possono esistere punti di A che non sono di accumulazione per A stesso. Vediamo un esempio.

Esempio 4.1.2. Consideriamo l'insieme $A = (0, 1) \cup (1, 2) \cup \{3, 4\}$. Si vede che

$$3 \in A \qquad \text{ma} \qquad 3 \text{ non è punto di accumulazione di } A.$$

Infatti, se si sceglie $\delta = 1/2$ si ottiene

$$\mathring{I}_{1/2}(3) \cap A = \emptyset.$$

Similmente, il punto 4 appartiene ad A, ma non è di accumulazione.

Al contrario, è facile rendersi conto che

$$1 \notin A \qquad \text{ma} \qquad 1 \text{ è punto di accumulazione di } A$$

Lo stesso dicasi per i punti "estremi" 0 e 2. In definitiva, l'insieme dei punti di accumulazione di $\mathrm{Acc}(A)$ coincide con l'intervallo chiuso $[0,2]$.

Esempio 4.1.3. Consideriamo l'insieme

$$A = \left\{ \frac{1}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che

$$\frac{1}{n+1} \quad \text{non è punto di accumulazione di } A.$$

In altre parole, nessun elemento di A è di accumulazione per A. Per vederlo, è sufficiente osservare che prendendo

$$\delta = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

si ha

$$\left(\frac{1}{n+1} - \delta, \frac{1}{n+1} + \delta \right) \cap A = \left\{ \frac{1}{n+1} \right\},$$

e quindi in definitiva

$$\mathring{I}_\delta \left(\frac{1}{n+1} \right) \cap A = \emptyset.$$

D'altra parte si può dimostrare che 0 è punto di accumulazione di A, pur non appartenendo ad A. Infatti, per ogni $\delta > 0$ si ha

$$\mathring{I}_\delta(0) \cap A = (0,\delta) \cap A = \left\{ \frac{1}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \text{ e } n > \frac{1}{\delta} - 1 \right\} \neq \emptyset.$$

Quindi A in questo caso ha un unico punto di accumulazione, ovvero

$$\mathrm{Acc}(A) = \{0\}.$$

Osservazione 4.1.4 (Punti di accumulazione di un intervallo)**.** Non è difficile convincersi che se $A \subset \mathbb{R}$ è un intervallo di estremi $a < b$, allora l'insieme dei suoi punti di accumulazione coincide con l'intervallo chiuso $[a,b]$, ovvero

$$\mathrm{Acc}(A) = [a,b].$$

2. Limiti di funzioni

Definizione 4.2.1. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme tale che $A \neq \emptyset$. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e x_0 un punto di accumulazione di A. Sia $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, si dice che "*$f(x)$ tende ad ℓ per x che tende ad x_0*" se vale la proprietà seguente:

$$\text{per ogni successione } \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\} \text{ tale che } \lim_{n\to\infty} y_n = x_0 \text{ si ha } \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \ell.$$

In tal caso utilizzeremo il simbolo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell.$$

Definizione 4.2.2. Sia $f : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, si dice che "*$f(x)$ tende ad ℓ per x che tende ad $+\infty$*" se vale la proprietà seguente:

$$\text{per ogni successione } \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,+\infty) \text{ tale che } \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \text{ si ha } \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \ell.$$

In tal caso, scriveremo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

se e solo se per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tale che $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, si ha

Osservazione 4.2.3. Da un punto di vista pratico, la definizione di limite di funzione che abbiamo dato ci permette di ridurre questo concetto a quello di successione, si veda la Definizione 3.1.1. In particolare, tutti i risultati che abbiamo visto per i limiti di successioni, continuano a valere nel caso dei limiti di funzioni. Per esempio l'*algebra dei limiti* e le *forme indeterminate* saranno le stesse.

Proposizione 4.2.4 (Permanenza del segno – soft)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme tale che $A \neq \emptyset$. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e x_0 un punto di accumulazione di A. Se esiste $\delta > 0$ tale che*

$$f(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathring{I}_\delta(x_0) \cap A,$$

ed f ammette limite per x che tende a x_0, allora vale

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \geq 0.$$

Proposizione 4.2.5 (Permanenza del segno – strong)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme tale che $A \neq \emptyset$. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e x_0 un punto di accumulazione di A. Se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) > 0,$$

allora esiste un $\delta > 0$ tale che

$$f(x) > 0 \qquad \forall x \in \mathring{I}_\delta(x_0) \cap A.$$

Teorema 4.2.6 (Confronto)**.** *Siano f, g e h tre funzioni definite sull'insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$. Sia x_0 un punto di accumulazione di A, se esiste $\delta > 0$ tale che*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \forall x \in \mathring{I}_\delta(x_0) \cap A,$$

e $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x)$, allora vale anche

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x).$$

3. Alcuni limiti notevoli

Useremo le notazioni seguenti:

$$\text{“}f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to x_0\text{''} \qquad \text{per dire che} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

e

$$\text{“}f(x) \sim g(x) \text{ per } x \to x_0\text{''} \qquad \text{per dire che} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Nel primo caso diremo che *f è o-piccolo di g per x che tende a x_0*, mentre nel secondo caso diremo che *f è asintotica a g per x che tende a x_0*. Valgono le seguenti equivalenze asintotiche

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \sim e \qquad \text{per } x \to +\infty \tag{4.3.1}$$

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^x \sim \frac{1}{e} \qquad \text{per } x \to +\infty \tag{4.3.2}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} \sim e \qquad \text{per } x \to 0 \tag{4.3.3}$$

$$\log(1+x) \sim x \qquad \text{per } x \to 0 \tag{4.3.4}$$

$$e^x - 1 \sim x \qquad \text{per } x \to 0 \tag{4.3.5}$$

$$\sin x \sim x \qquad \text{per } x \to 0 \tag{4.3.6}$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \qquad \text{per } x \to 0 \tag{4.3.7}$$

$$\tan x \sim x \qquad \text{per } x \to 0 \tag{4.3.8}$$

$$\arctan x \sim x \qquad \text{per } x \to 0 \tag{4.3.9}$$

$$\arcsin x \sim x \qquad \text{per } x \to 0 \tag{4.3.10}$$

$$\frac{\pi}{2} - \arccos x \sim x \qquad \text{per } x \to 0 \tag{4.3.11}$$

$$\text{per ogni } \alpha \neq 0 \qquad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha\, x \qquad \text{per } x \to 0 \tag{4.3.12}$$

Dimostrazione. Partiamo dimostrando (4.3.1), ovvero che

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Questo non è nient'altro che una conseguenza dell'analogo limite per le successioni, si veda la Sezione 5 del Capitolo 3. Basta osservare che per ogni $x \geq 1$ vale

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

dove $[x]$ indica la *parte intera di* x. Usando il Criterio del Confronto per le successioni (Teorema 3.7.1) ed il limite notevole

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

si ottiene (4.3.1).

Per dimostrare (4.3.2), basta osservare che

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x-1}{x}\right)^x = \frac{1}{\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^x} = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{x-1}\right)^{x-1}} \, \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{x-1}\right)}.$$

Usando che (grazie a (4.3.1))

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1} = e,$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) = 1,$$

si ottiene (4.3.2).

Osserviamo che usando un semplice cambio di variabili $t = 1/x$, da (4.3.1) si ottiene anche

$$\lim_{t \to 0^+} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

mentre da (4.3.2) col cambio $t = -1/x$ si ottiene

$$\lim_{t\to 0^-} (1+t)^{-\frac{1}{t}} = \frac{1}{e} \qquad \text{ovvero} \qquad \lim_{t\to 0^-} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

Mettendo insieme i due limiti unilateri precedenti, si ottiene quindi (4.3.3).

Passando al logaritmo in base e, il limite (4.3.3) implica

$$\lim_{x\to 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

D'altra parte, per le proprietà dei logaritmi, si ha

$$\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\,\log(1+x) = \frac{\log(1+x)}{x}.$$

Il limite precedente implica quindi (4.3.4).

Per dimostrare (4.3.5), basta usare il cambio di variabili $t = \log(1+x)$ in (4.3.4). Questo da

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t - 1}.$$

Prendiamo adesso per buono (*lo dimostreremo a lezione*) il limite (4.3.6) e mostriamo come tutti i restanti limiti siano conseguenza di questo. Partiamo da (4.3.7): dalle formule di bisezione, sappiamo che

$$1 - \cos x = 2\,\sin^2 \frac{x}{2} = 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 \sim 2\,\frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}, \qquad \text{per } x \to 0.$$

Abbiamo anche usato (4.3.6) per dire che

$$\sin\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2} \qquad \text{per } x \to 0.$$

Per dimostrare (4.3.8), è sufficiente usare la definizione di tangente e (4.3.6).

Usando il cambio di variabile $t = \tan x$, si ottiene anche

$$\lim_{t\to 0} \frac{\arctan t}{t} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1.$$

Similmente si dimostra il limite (4.3.10), partendo da (4.3.6) ed usando il cambio di variabile $t = \arcsin x$.

Per dimostrare (4.3.11) basta ricordare la formula trigonometrica

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2},$$

che implica

$$\frac{\pi}{2} - \arccos x = \arcsin x \sim x \qquad \text{per } x \to 0.$$

Questo conclude la dimostrazione.

Infine, per dimostrare (4.3.12), basta osservare che usando la scrittura

$$A = e^{\log A}, \qquad \text{per ogni } A > 0,$$

si ha

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha - 1 &= e^{\alpha\,\log(1+x)} - 1\\ &\sim \alpha\,\log(1+x) \sim \alpha\,x, \qquad \text{per } x \to 0,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato i limiti notevoli (4.3.5) e (4.3.4). □

4. Funzioni continue

Definizione 4.4.1. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme tale che $A \neq \emptyset$. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e x_0 un punto di accumulazione di A, tale che $x_0 \in A$. Si dice che f è *continua in* x_0 se vale

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

In altre parole, f è continua in x_0 se

$$\text{per ogni successione } \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\} \text{ tale che } \lim_{n\to\infty} y_n = x_0 \text{ si ha } \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(x_0).$$

Definizione 4.4.2. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme tale che $A \neq \emptyset$. Si dice che $f : A \to \mathbb{R}$ *è continua su* A (o semplicemente che è continua), se f è continua in ogni $x_0 \in A$ punto di accumulazione di A.

Teorema 4.4.3 (degli zeri)**.** *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua, tale che*

$$f(a) < 0 < f(b).$$

Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ *tale che* $f(x_0) = 0$.

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è di bisezionare l'intervallo $[a, b]$ successivamente ed usare l'Assioma di Continuità dei numeri reali. Infatti, partiamo definedo

$$a_0 = a \qquad \text{e} \qquad b_0 = b.$$

Dividiamo questo intervallo a metà tramite il suo punto medio

$$\frac{a_0 + b_0}{2},$$

abbiamo le seguenti possibilità:

(i) si ha
$$f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) = 0,$$
in tal caso abbiamo trovato il punto che cercavamo;

(ii) si ha
$$f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) \neq 0,$$
quindi in tal caso, abbiamo a sua volta due possibilità
$$f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) > 0 \qquad \text{oppure} \qquad f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) < 0.$$

Supponiamo per esempio che si verifichi la prima eventualità: in tal caso, si definisce allora il nuovo intervallo $[a_1, b_1]$ tramite

$$a_1 = a_0 \qquad \text{e} \qquad b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Si procede adesso esattamente come prima: si divide a metà $[a_1, b_1]$ tramite il suo punto medio e dopo si guarda quanto vale

$$f\left(\frac{a_1 + b_2}{2}\right).$$

Se questo si annulla, abbiamo trovato il punto cercato. Se non si annulla, si va avanti scegliendo la metà dell'intervallo $[a_1, b_1]$ in cui f ha valori di segno opposto agli estremi.

Procedendo in questo modo, si ottiene una successione di intervalli chiusi $[a_n, b_n]$, ognuno contenuto nella metà del precedente e tali che

(i) o esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$f(a_k) = 0 \qquad \text{oppure} \qquad f(b_k) = 0,$$

in tal caso abbiamo trovato il punto che volevamo;

(ii) oppure

$$f(a_n) < 0 < f(b_n), \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \tag{4.4.13}$$

In questa seconda eventualità, abbiamo dall'Assioma di Continuità dei numeri reali che esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x_0\}.$$

Per costruzioni, questo implica che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = x_0.$$

Usando la continuià della funzione, abbiamo dunque

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x_0). \tag{4.4.14}$$

D'altra parte, per il Teorema della parmanenza del segno per le successioni, da (4.4.13) otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0 \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Usando questa informazione insieme a (4.4.14), si ottiene

$$0 = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x_0),$$

ovvero x_0 è il punto cercato. □

Osservazione 4.4.4 (Versione più generale)**.** Il Teorema degli zeri continua a valere nella seguente forma leggermente più generale:

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, tale che

$$\lim_{x\to a^+} f(x) < 0 < \lim_{x\to b^-} f.$$

Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

In questa forma del teorema, si può anche avere $a = -\infty$ o $b = +\infty$.

Teorema 4.4.5 (dei valori intermedi)**.** *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora f assume su I tutti i valori compresi tra $\inf_I f$ e $\sup_I f$.*

Dimostrazione. Chiamiamo

$$\alpha = \inf_I f \qquad \text{e} \qquad \beta = \sup_I f.$$

Prendiamo $\alpha < c < \beta$, vogliamo mostrare che esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$f(x_0) = c.$$

Cominciamo osservando che se $\alpha = \beta$, allora f è costante su I e non c'è niente da dimostrare.

Assumiamo quindi $\alpha < \beta$ ed osserviamo che, dal momento che $\alpha < c < \beta$, il valore c non è un minorante di $f(I)$, ovvero esiste $x_1 \in I$ tale che

$$\alpha < f(x_1) < c.$$

D'altra parte, il valore c non è nemmeno un maggiorante di $f(I)$, quindi esiste $x_2 \in (a, b)$ tale che

$$c < f(x_2) < \beta.$$

Si consideri adesso la nuova funzione continua definita su I tramite

$$g(x) = f(x) - c.$$

Si noti che

$$g(x_1) = f(x_1) - c < 0,$$

mentre

$$g(x_2) = f(x_2) - c > 0.$$

La funzione g soddisfa quindi le ipotesi del Teorema degli zeri sull'intervallo $[x_1, x_2]$, quindi esiste $x_0 \in (x_1, x_2)$ tale che

$$g(x_0) = 0 \qquad \text{ovvero tale che} \qquad f(x_0) = c,$$

come volevamo. $\square$

Teorema 4.4.6 (di Weierstrass)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora f ammette massimo e minimo su $[a, b]$.*

Inoltre, la sua immagine è data da dall'intervallo

$$f([a, b]) = \left[\min_{[a,b]} f,\ \max_{[a,b]} f\right].$$

Osservazione 4.4.7 (Attenzione!)**.** Il risultato precedente non è più vero se l'intervallo su cui si considera la funzione f non è chiuso e limitato, oppure se f non è continua.

Ad esempio, la funzione $f(x) = x$ è continua sull'intervallo aperto $(0, 1)$, ma non ammette massimo e minimo su $(0, 1)$, si ha soltanto che

$$\sup_{(0,1)} f = 1 \qquad \text{e} \qquad \inf_{(0,1)} f = 0.$$

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ \\ 0, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

non è continua sull'intervallo $[0, 1]$ e ivi non ammette massimo, dato che

$$\sup_{[0,2]} f = +\infty.$$

Definizione 4.4.8 (Uniforme continuità)**.** Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f è *uniformemente continua* se vale la proprietà seguente

$$\forall \varepsilon,\ \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad |f(x_0) - f(x_1)| < \varepsilon,\ \forall x_0, x_1 \in I \text{ che verificano } |x_0 - x_1| < \delta.$$

Teorema 4.4.9 (Heine-Cantor)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è uniformemente continua.*

Osservazione 4.4.10 (Attenzione!)**.** Il risultato precedente non è più vero se l'intervallo su cui si considera la funzione f non è chiuso e limitato. A titolo d'esempio, basta considerare la funzione $f(x) = 1/x$ su $(0, 1]$. Questa funzione è continua su $(0, 1]$, ma non uniformemente continua.

5. Esercizi

Esercizio 4.5.1. *Dire se esiste*
$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$
In caso affermativo, calcolarlo.

Soluzione. Prendiamo le due successioni convergenti a 0, date da
$$y_n = \frac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2\,\pi\,n} \qquad \text{e} \qquad z_n = \frac{1}{\dfrac{3\,\pi}{2} + 2\,\pi\,n}, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$
Osservando che
$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\,\pi\,n\right) = 1,$$
e
$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{z_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{3\,\pi}{2} + 2\,\pi\,n\right) = -1,$$
otteniamo che il limite in esame non esiste. □

Esercizio 4.5.2. *Dire se esiste*
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}.$$
In caso affermativo, calcolarlo.

Soluzione. Prendiamo le due successioni convergenti a 0, date da
$$y_n = \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad z_n = -\frac{1}{n}, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$
Osservando che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty,$$
e
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = \lim_{n\to\infty} -n = -\infty,$$
otteniamo che il limite in esame non esiste. □

Osservazione 4.5.3 (Limite destro e limite sinistro)**.** Osserviamo che nel caso precedente abbiamo che
$$\text{per ogni successione } \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, +\infty) \text{ tale che } \lim_{n\to\infty} y_n = 0 \text{ si ha } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = +\infty.$$
In tal caso, diciamo che "$1/x$ *tende a* $+\infty$ *per* x *che tende a* 0 *da destra*" e scriviamo
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$
Similmente, abbiamo che
$$\text{per ogni successione } \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (-\infty, 0) \text{ tale che } \lim_{n\to\infty} y_n = 0 \text{ si ha } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = -\infty.$$

In tal caso, diciamo che "$1/x$ *tende a* $-\infty$ *per* x *che tende a* 0 *da sinistra*" e scriviamo

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Esercizio 4.5.4. *Dire se esiste*

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

In caso affermativo, calcolarlo.

Soluzione. Osserviamo che

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x| \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |x|,$$

quindi

$$-x \le x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x, \qquad \text{per ogni } x \neq 0.$$

Usando il Teorema 4.2.6, otteniamo che il limite dato esiste e vale 0. □

Esercizio 4.5.5. *Calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\log(1+2\,x^2)}.$$

Soluzione. Il limite si presenta come una forma indeterminata del tipo $0/0$. Usando i limiti notevoli (4.3.5) e (4.3.4), si ha

$$e^{x^2}-1 \sim x^2 \qquad \text{per } x \to 0,$$
$$\log(1+2\,x^2) \sim 2\,x^2 \qquad \text{per } x \to 0.$$

Possiamo quindi ottenere

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\log(1+2\,x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2\,x^2} = \frac{1}{2},$$

concludendo così l'esercizio. □

Esercizio 4.5.6. *Calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to +\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} - 1\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^4} - \sqrt[3]{x^4}\right).$$

Soluzione. Il limite presenta una forma di indeterminazione del tipo $+\infty - \infty$. Osserviamo che raccogliendo il termine $x^{4/3}$ si ha

$$\left(\sqrt[3]{(x+1)^4} - \sqrt[3]{x^4}\right) = x^{\frac{4}{3}} \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}} - 1\right).$$

Per $x \to +\infty$, il termine $1/x$ è infinitesimo. Dal limite notevole (4.3.12), abbiamo quindi

$$\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}} - 1\right) \sim \frac{4}{3}\,\frac{1}{x}, \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Usando questa informazione nella identità precedente, otteniamo quindi

$$\left(\sqrt[3]{(x+1)^4} - \sqrt[3]{x^4}\right) \sim \frac{4}{3}\,x^{\frac{4}{3}}\,\frac{1}{x} = \frac{4}{3}\,x^{\frac{1}{3}}, \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Tornando al limite iniziale, abbiamo quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}-1\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^4}-\sqrt[3]{x^4}\right)=\frac{4}{3}\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}-1\right)x^{\frac{1}{3}}.$$

Quest'ultimo limite presenta ancora una forma indeterminata, stavolta del tipo $0\cdot\infty$. Al fine di concludere, ci basta osserva che dal limite notevole (4.3.5), si ha

$$e^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}-1\sim\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=x^{-\frac{1}{3}},\qquad \text{per } x\to+\infty.$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}-1\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^4}-\sqrt[3]{x^4}\right)&=\frac{4}{3}\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}-1\right)x^{\frac{1}{3}}\\&=\frac{4}{3}\lim_{x\to+\infty}x^{-\frac{1}{3}}\,x^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Fine! □

Esercizio 4.5.7. *Calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to+\infty}x\,\log\left(\frac{x+5}{x-1}\right).$$

Soluzione. Si osservi innanzitutto che il limite presenta una forma indeterminata del tipo $\infty\cdot 0$. Usando semplici manipolazioni algebriche abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}x\,\log\left(\frac{x+5}{x-1}\right)&=\lim_{x\to+\infty}x\,\log\left(\frac{x-1+6}{x-1}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}x\,\log\left(1+\frac{6}{x-1}\right).\end{aligned}$$

Osserviamo adesso che dal limite notevole (4.3.4) abbiamo

$$\log\left(1+\frac{6}{x-1}\right)\sim\frac{6}{x-1},\qquad \text{per } x\to+\infty.$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}x\,\log\left(\frac{x+5}{x-1}\right)&=\lim_{x\to+\infty}x\,\log\left(\frac{x-1+6}{x-1}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}x\,\log\left(1+\frac{6}{x-1}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{6\,x}{x-1}=6.\end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 4.5.8. *Calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to+\infty}x\,e^{\sin x}.$$

Soluzione. Usiamo il Teorema del confronto, Teorema 3.7.1. Si osservi che

$$-1\le\sin x\le 1,\qquad \text{per ogni } x\in\mathbb{R}.$$

Dalla monotonia dell'esponenziale, si ottiene

$$\frac{1}{e} \leq e^{\sin x} \leq e, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

In definitiva, si ottiene

$$\frac{x}{e} \leq x\, e^{\sin x} \leq x\, e \qquad \text{per ogni } x > 0.$$

Dal momento che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e} = \lim_{x\to+\infty} x\, e = +\infty,$$

otteniamo anche

$$\lim_{x\to+\infty} x\, e^{\sin x} = +\infty,$$

dal Teorema 3.7.1. □

Esercizio 4.5.9. *Calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to+\infty} x \sin\frac{1}{x}.$$

Soluzione. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\infty \cdot 0$. Ci basta usare il limite notevole (4.3.6) per dire che

$$\sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}, \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Abbiamo quindi

$$\lim_{x\to+\infty} x \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} x\,\frac{1}{x} = 1,$$

concludendo così. □

Esercizio 4.5.10. *Dimostrare che per $\alpha > 0$ si ha*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \qquad e \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0.$$

Dimostrazione. Il primo limite si ottiene usando la classificazione di infiniti del Capitolo 3. Nel secondo limite, si ponga $y = 1/x$, allora utilizzando che

$$\log y = o(y^\alpha), \qquad \text{per } x \to +\infty,$$

si ha

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln\frac{1}{y}}{y^\alpha} = -\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y^\alpha} = 0.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 4.5.11. *Calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin^2 2x}{\sin(x^3)}.$$

Soluzione. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $0/0$. Possiamo usare il limite notevole (4.3.6) per dire che

$$\sin^2 2x = (\sin 2x)^2 \sim (2\,x)^2 = 4\,x^2, \qquad \text{per } x \to 0,$$

$$\sin(x^3) \sim x^3, \qquad \text{per } x \to 0.$$

Si ottiene quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,\sin^2 2x}{\sin(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot 4\,x^2}{x^3} = 4.$$

Abbiamo concluso. □

Esercizio 4.5.12. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{e^{\sin^4 x}-1}.$$

Soluzione. Ricordiamo che si ha

$$1-\cos(t) \sim \frac{t^2}{2}, \qquad \text{per } t \to 0,$$

da cui, usando questo limite con $t = x^2$, si ottiene

$$1-\cos(x^2) \sim \frac{x^4}{2}, \qquad \text{per } x \to 0.$$

Per quanto riguarda il denominatore, si ha

$$e^t - 1 \sim t, \qquad \text{per } t \to 0,$$

da cui, prendendo $t = \sin^4 x$, si ha

$$e^{\sin^4 x} - 1 \sim \sin^4 x \sim x^4, \qquad \text{per } x \to 0.$$

Otteniamo dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{e^{\sin^4 x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{2}}{x^4} = \frac{1}{2},$$

concludendo così l'esercizio. □

Esercizio 4.5.13. *Calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\log(1+x)) - e^{x^2}}{\arctan(\log(1+x^2))}.$$

Soluzione. Il limite si presenta come una forma indeterminata del tipo 0/0. Osserviamo che per $x \to 0$ si ha

$$\begin{aligned} \cos(\log(1+x)) - e^{x^2} &= \Big[\cos(\log(1+x)) - 1\Big] + \Big[1 - e^{x^2}\Big] \\ &\sim -\frac{1}{2}\big(\log(1+x)\big)^2 - x^2 \\ &\sim -\frac{x^2}{2} - x^2 = -\frac{3}{2}\,x^2, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il limite notevole (4.3.7) per il coseno, quello per l'esponenziale (4.3.5) e quello per il logaritmo (4.3.4). Per quanto riguarda la funzione al denominatore, usando i limiti notevoli (4.3.9) e (4.3.4) si ha

$$\arctan(\log(1+x^2)) \sim \log(1+x^2) \sim x^2, \qquad \text{per } x \to 0.$$

In definitiva, otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\log(1+x)) - e^{x^2}}{\arctan(\log(1+x^2))} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{3}{2}\,x^2}{x^2} = -\frac{3}{2}.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 4.5.14. *Dire per quali $\alpha > 0$ il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^{\cos(x^2)-1}-1)-1}{\log(1+(1-\cos x)^\alpha)},$$

esiste ed è finito.

Soluzione. Il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Osserviamo che

$$\cos(e^{\cos(x^2)-1}-1)-1 \sim -\frac{1}{2}\left(e^{\cos(x^2)-1}-1\right)^2, \qquad \text{per } x\to 0,$$

grazie al limite notevole (4.3.7). Inoltre usando (4.3.5) si ha

$$e^{\cos(x^2)-1}-1 \sim \cos(x^2)-1, \qquad \text{per } x\to 0.$$

Di nuovo da (4.3.7), si ottiene

$$\cos(x^2)-1 \sim -\frac{1}{2}\,x^4, \qquad \text{per } x\to 0.$$

In conclusione, mettendo insieme tutte le informazioni precedenti, abbiamo ottenuto

$$\cos(e^{\cos(x^2)-1}-1)-1 \sim -\frac{1}{8}\,x^8, \qquad \text{per } x\to 0.$$

Per quanto riguarda il denominatore, usando i limiti notevoli per il logaritmo e per il coseno, si ha

$$\log(1+(1-\cos x)^\alpha) \sim (1-\cos x)^\alpha \sim \left(\frac{x^2}{2}\right)^\alpha \qquad \text{per } x\to 0.$$

Abbiamo quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^{\cos(x^2)-1}-1)-1}{\log(1+(1-\cos x)^\alpha)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{1}{8}\,x^8}{\dfrac{x^{2\,\alpha}}{2^\alpha}}.$$

Quindi affinché il limite esista e sia finito deve aversi

$$8-2\,\alpha \geq 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \alpha \leq 4.$$

Precisamente, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^{\cos(x^2)-1}-1)-1}{\log(1+(1-\cos x)^\alpha)} = \begin{cases} 0, & \text{se } 0<\alpha<4, \\ -2, & \text{se } \alpha = 4. \end{cases}$$

Questo conclude l'esercizio. □

Calcolo differenziale per funzioni di una variabile

1. Retta tangente al grafico

Ricordiamo innanzitutto che l'equazione di una retta nel piano cartesiano, che **non** sia parallela all'asse delle ordinate, è data da

$$y = \beta + \alpha\, x, \qquad \text{per } x \in \mathbb{R}. \tag{5.1.1}$$

I due coefficienti α e β rappresentano il *coefficiente angolare* della retta e l'*ordinata di intersezione*, rispettivamente. Ricordiamo anche che, indicando con ϑ l'angolo formato dal grafico di tale retta con l'asse delle ascisse (misurato in senso anti-orario), vale la relazione

$$\alpha = \tan\vartheta.$$

Nel caso in cui volessimo l'equazione di una generica retta che passa da un punto assegnato (x_0, y_0) e che forma un angolo ϑ con l'asse delle ascisse (misurato ancora in senso anti-orario), usando un po' di trigonometria non è difficile convincersi che essa ha la forma

$$y = y_0 + \alpha\,(x - x_0), \qquad \text{per } x \in \mathbb{R},$$

con $\alpha = \tan\vartheta$. Confrontando l'equazione precedente con (5.1.1), abbiamo ancora che il coefficiente α rappresenta il coefficiente angolare.

Infine, ricordiamo che l'equazione della retta (unica!) che passa da due punti assegnati (x_0, y_0) e (x_1, y_1), è data da

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\,(x - x_0) \tag{5.1.2}$$

Basta ricordare che tale retta è l'insieme dei punti del piano (x, y) tali che

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

che coincide esattamente con l'equazione (5.1.2). Vogliamo adesso dare la definizione di *retta tangente al grafico di una funzione*.

Definizione 5.1.1. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$. Si dice che

$$y = f(x_0) + \alpha\,(x - x_0),$$

è l'*equazione della retta tangente al grafico di f nel punto* $(x_0, f(x_0))$ se vale la seguente identità asintotica

$$f(x) = f(x_0) + \alpha\,(x - x_0) + o((x - x_0)), \qquad \text{per } x \to x_0.$$

La retta tangente è quindi la retta che approssima i valori di f vicino a x_0, a meno di un errore che è trascurabile rispetto alla distanza $x - x_0$ dal punto scelto x_0.

Osservazione 5.1.2. Si osservi che la definizione precedente è ben posta, nel senso che la retta tangente **quando esiste** è effettivamente unica. Infatti, supponiamo di avere due rette tangenti

$$y = f(x_0) + \alpha_1\,(x - x_0) \qquad \text{e} \qquad y = f(x_0) + \alpha_2\,(x - x_0).$$

In base alla definizione, abbiamo quindi

$$f(x) = f(x_0) + \alpha_1\,(x - x_0) + o((x - x_0)), \qquad \text{per } x \to x_0,$$

ed anche

$$f(x) = f(x_0) + \alpha_2\,(x - x_0) + o((x - x_0)), \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Sottraendo le due equazioni termine a termine, si ottiene

$$o = (\alpha_1 - \alpha_2)\,(x - x_0) + o((x - x_0)), \qquad \text{per } x \to x_0.$$

In particolare, dividendo tutto per $(x - x_0)$ e passando al limite per x che tende a x_0, si ha

$$0 = (\alpha_1 - \alpha_2) + \lim_{x \to x_0} \frac{o((x - x_0))}{x - x_0} = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Questo implica che $\alpha_1 = \alpha_2$.

2. Il concetto di derivata

Definizione 5.2.1. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione, si dice che f è *derivabile in* $x_0 \in (a, b)$ se **esiste ed è finito** il limite seguente

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

In tal caso, chiamiamo tale limite la *derivata di f in x_0* e si userà la notazione

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{o anche} \qquad \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Il rapporto

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \qquad h \neq 0,$$

si chiama *rapporto incrementale di f in x_0*.

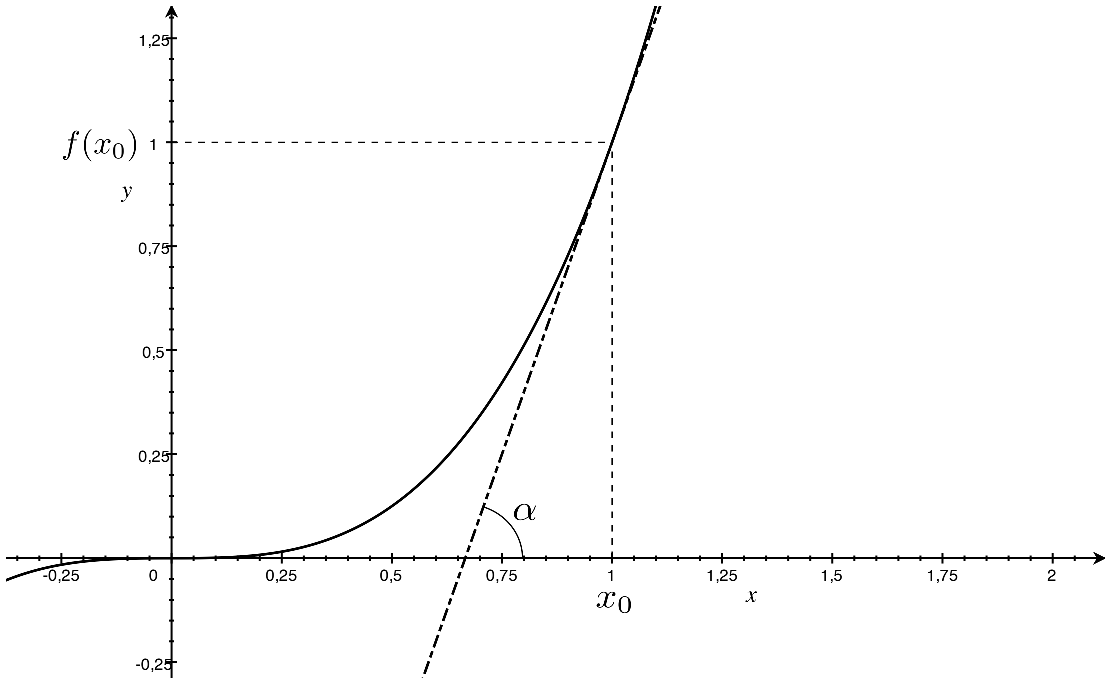

Figura 1. La retta tangente al grafico della funzione f nel punto $(x_0, f(x_0))$ e l'angolo α. Si ha $\tan\alpha = f'(x_0)$.

Osservazione 5.2.2 (Interpretazione geometrica)**.** Non è difficile vedere che per ogni $h \neq 0$, il rapporto incrementale di f nel punto x_0 rappresenta il coefficiente angolare della retta che passa per i punti del grafico di f

$$(x_0, f(x_0)) \qquad \text{e} \qquad (x_0 + h, f(x_0 + h)).$$

Infatti, si ricordi che da (5.1.2) l'equazione cartesiana di tale retta è data da

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,(x - x_0).$$

Ricordando la discussione della sezione precedente, si vede appunto che la quantità

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

coincide con il coefficiente angolare di tale retta. Se f è derivabile in x_0, al limite per h che tende a 0, in base al disegno si intuisce che tale retta dovrebbe "tendere" a diventare tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ e che, di conseguenza,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

dovrebbe rappresentare il coefficiente angolare di tale retta....

L'intuizione data dall'osservazione precedente è corretta. Infatti si ha il seguente

Teorema 5.2.3 ("Derivata VS. tangente")**.** *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$. Allora f ammette retta tangente al suo grafico in $(x_0, f(x_0))$ se e solo se f è derivabile in x_0. In tal caso, si ha*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + o((x - x_0)), \qquad \textit{per } x \to x_0,$$

e la retta

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0),$$

rappresenta la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Dimostrazione. Supponiamo che f ammetta retta tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$. In base alla definizione, questo vuol dire che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + \alpha\,(x - x_0) + o((x - x_0)), \qquad \text{per } x \to x_0.$$

In particolare, dall'identità precedente si ottiene

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha + \frac{o((x - x_0))}{x - x_0}, \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Passando al limite per x che tende a x_0 ed usando la definizione di $o-$piccolo, si trova

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha,$$

ovvero f è derivabile in x_0. Inoltre, dalla formula precedente abbiamo

$$f'(x_0) = \alpha,$$

e quindi

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0),$$

è la retta tangente.

Supponiamo adesso che f sia derivabile in x_0. Sappiamo quindi che esista finito il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

In base alla definizione di limite, questo vuol dire che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o(1), \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Moltiplicando ambo i membri per $x - x_0$, troviamo allora

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,o(1), \qquad \text{per } x \to x_0. \tag{5.2.3}$$

Osserviamo adesso che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)\,o(1)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} o(1) = 0,$$

quindi in base alla definizione di $o-$piccolo, abbiamo che

$$(x - x_0)\,o(1) = o((x - x_0)), \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Usando questa identità in (5.2.3), abbiamo allora

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) + o((x - x_0)), \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Ricordando la Definizione 5.1.1, questo mostra che

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0), \qquad \text{per } x \to x_0,$$

è la retta tangente al grafico di f, nel punto $(x_0, f(x_0))$. □

Proposizione 5.2.4. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$. Si ha*

$$f \text{ derivabile in } x_0 \qquad \Longrightarrow \qquad f \text{ continua in } x_0.$$

Dimostrazione. Se f è derivabile in x_0, dal Teorema 5.2.3 si ha che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + o((x - x_0)), \qquad \text{per } x \to x_0.$$

In particolare, passando al limite per x che tende a x_0 si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} \Big[f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + o((x - x_0))\Big]\\ &= \lim_{x\to x_0} f(x_0) + \lim_{x\to 0} f'(x_0)\,(x - x_0) + \lim_{x\to x_0} o((x - x_0)) = f(x_0).\end{aligned}$$

Ricordando la Definizione 4.4.1, abbiamo appena dimostrato che f è continua in x_0. □

Il risultato precedente non può essere invertito, come dimostra l'esempio seguente.

Esempio 5.2.5 (Una funzione continua ma non derivabile)**.** La funzione *valore assoluto* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0,\\ -x, & \text{se } x < 0,\end{cases}$$

non è derivabile in 0, dal momento che

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & \text{se } h \geq 0,\\ -1, & \text{se } h < 0,\end{cases}$$

quindi il limite del rapporto incrementale in 0 non esiste.

Esempio 5.2.6 (Funzioni costanti)**.** Una funzione costante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in ogni punto e la sua derivata vale identicamente 0. Basta utilizzare la definizione di derivata ed il fatto che $f(x + h) = f(x)$, per ogni x ed ogni h.

Esempio 5.2.7 (Potenze naturali)**.** La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2\,x\,h + h^2 - x^2}{h} = 2\,x,$$

quindi $f'(x) = 2\,x$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Più in generale, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N}$, è derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Infatti, utilizzando la formula del binomio di Netwon , si ha

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}\, b^i = a^n + n\, a^{n-1}\, b + \frac{n(n-1)}{2}\, a^{n-2}\, b^2 + \dots,$$

da cui

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + n\, x^{n-1}\, h + \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i}\, h^i - x^n}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{n\, x^{n-1}\, h + o(h)}{h}\\ &= n\, x^{n-1} + \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = n\, x^{n-1}.\end{aligned}$$

Il limite esiste dunque per ogni $x \in \mathbb{R}$ e si ha

$$\frac{d}{dx} x^n = n\, x^{n-1}.$$

Esempio 5.2.8. La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0,$$

è derivabile su tutto il suo dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Utilizzando la definizione di derivata, per ogni $x \neq 0$ si ha

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x - x - h}{h\,(x+h)\,x} = -\lim_{h \to 0} \frac{1}{(x+h)\,x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Otteniamo dunque

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}, \qquad x \neq 0.$$

3. Regole di derivazione

In quanto seguirà, useremo i simboli I, J per denotare degli intervalli aperti di $\mathbb{R}$.

(D1) Derivata della somma. *Siano $f, g : I \to J$ due funzioni derivabili in $x_0 \in I$. La loro somma è derivabile in x_0 e si ha*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0). \tag{5.3.4}$$

Dimostrazione. Infatti, si ha

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = f'(x_0) + g'(x_0),
\end{aligned}$$

che dimostra (5.3.4). □

(D2) Derivata del prodotto. *Siano $f, g : I \to J$ due funzioni derivabili in $x_0 \in I$. Il loro prodotto è derivabile in x_0 e si ha*

$$(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0); \tag{5.3.5}$$

Dimostrazione. Utilizzando l'ipotesi su f e g, insieme alla definizione di derivata, si ha

$$\begin{aligned}
(f\,g)'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h) - f(x_0)\,g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\, g(x_0+h) + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}\, f(x_0) \right] \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\, g(x_0+h) + \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}\, f(x_0) \\
&= g(x_0)\,f'(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0).
\end{aligned}$$

Osserviamo che abbiamo utilizzato che una funzione derivabile è continua, per dire che

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x).$$

Questo conclude la dimostrazione. □

(D3) Derivata della composizione. *Siano $f : I \to J$ e $g : K \to I$ due funzioni. Supponiamo che g sia derivabile in $x_0 \in K$ e che f sia derivabile in $g(x_0) \in I$. La loro composizione $f \circ g : K \to J$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0). \tag{5.3.6}$$

Dimostrazione. Introduciamo la nuova funzione

$$\mathcal{E}(t) = \begin{cases} \dfrac{f(g(x_0)+t) - f(g(x_0))}{t}, & \text{si } t \neq 0, \\ \\ f'(g(x_0)), & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

che è continua in $t = 0$, dal momento che $\lim_{t\to 0} \mathcal{E}(t) = f'(g(x_0))$, grazie all'ipotesi su f. Utilizzando la funzione $\mathcal{E}$, possiamo scrivere

$$\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{\Big[g(x_0+h) - g(x_0)\Big]\, \mathcal{E}(g(x_0+h) - g(x_0))}{h},$$

e osserviamo che la continuità di g implica che

$$\lim_{h\to 0} [g(x_0+h) - g(x_0)] = 0 \qquad \text{e dunque} \qquad \lim_{h\to 0} \mathcal{E}(g(x_0+h) - g(x_0)) = f'(g(x_0)).$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\Big[g(x_0+h) - g(x_0)\Big]\, \Big[\mathcal{E}(g(x_0+h) - g(x_0))\Big]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}\, \lim_{h\to 0} \mathcal{E}(g(x_0+h) - g(x_0)) \\ &= g'(x_0)\, f'(g(x_0)), \end{aligned}$$

che termina la dimostrazione. □

(D4) Derivata della funzione inversa. *Sia $f : I \to J$ una funzione biettiva. Supponiamo che f sia derivabile nel punto $f^{-1}(y_0) \in I$ e che si abbia*

$$f'(f^{-1}(y_0)) \neq 0.$$

Allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile in y_0 e si ha

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \tag{5.3.7}$$

Dimostrazione. Verifichiamo la formula (5.3.7). È sufficiente prendere l'identità

$$f \circ f^{-1}(y) = y,$$

che è vera per definizione di funzione inversa e calcolare la derivata in y_0. Si ottiene

$$(f \circ f^{-1})'(y_0) = 1, \tag{5.3.8}$$

Grazie alla regola di derivazione (5.3.6), si ottiene

$$(f \circ f^{-1})'(y_0) = f'(f^{-1}(y_0))\,(f^{-1})'(y_0).$$

Utilizzando questa in (5.3.8), si ottiene dunque

$$f'(f^{-1}(y_0))\,(f^{-1})'(y_0) = 1.$$

Se adesso dividiamo per $f^{'}(f^{-1}(y_0))$, che è diverso da 0 per ipotesi, si ottiene (5.3.7). □

4. Derivate delle funzioni elementari

Potenze intere Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\frac{d}{dx}x^n = n\,x^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R} \qquad\qquad \frac{d}{dx}x^{-n} = -n\,x^{-n-1}, \quad x \neq 0.$$

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato la prima formula. Per quanto riguarda la seconda, si osservi che $x \mapsto x^{-n}$ è la composizione di due funzioni derivabili in $x \neq 0$, di cui già conosciamo la derivata. Più precisamente, si ha

$$x^{-n} = f \circ g(x), \qquad \text{dove} \quad f(t) = t^n \quad \text{e} \quad g(t) = \frac{1}{t}.$$

Dalla formula (D3) per la derivata della funzione composta, si ha

$$\frac{d}{dx}x^{-n} = f'(g(x))\,g'(x) = n\,g(x)^{n-1}\,g'(x) = -n\,\frac{1}{x^{n-1}}\,\frac{1}{x^2} = -\frac{n}{x^{n+1}},$$

come volevamo. □

Potenze intere Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la funzione $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ è definita per $x \geq 0$ se n è pari e per $x \in \mathbb{R}$ se n è dispari. In entrambi i casi, essa è derivabile nel suo dominio di definizione, tranne in $x = 0$ (*perché? Provate a rispondere*). Dalla formula (5.3.7) si ha

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}, \qquad x \neq 0.$$

Più in generale, siano $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ due numeri primi tra loro. Se n è dispari, la funzione definita da $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Essa è la composizione delle due funzioni

$$g_1(x) = x^m \qquad \text{e} \qquad g_2(x) = x^{\frac{1}{n}},$$

ovvero

$$f(x) = g_2 \circ g_1(x).$$

Allora dalla regola (D3) anche f è derivabile per $x \neq 0$ e si ha

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{m}{n}} = g_2'(g_1(x))\,g_1'(x) = \frac{1}{n}\,(x^m)^{\frac{1}{n}-1} \cdot m\,x^{m-1} = \frac{m}{n}\,x^{\frac{m}{n}-1}.$$

Nel caso in cui n sia pari, la funzione f è definita solo per $x \geq 0$ e derivabile per $x > 0$.

Funzioni trigonometriche

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, \qquad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x.$$

Dimostrazione. Cominciamo con la formula per il seno. Utilizzando le *formule di prostaferesi* (si veda la Sezione 4.8 del Capitolo 2) si ha

$$\sin(x+h) - \sin x = 2\,\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\,\sin\left(\frac{h}{2}\right),$$

e quindi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{2\,\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\,\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}\\ &= \cos x\,\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \cos x,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il limite notevole (4.3.6), ovvero

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

e la continuità della funzione coseno.

Per quanto riguarda la funzione coseno, è sufficiente utilizzare la relazione tra seno e coseno e la formula di derivazione (D3). Si ha in particolare

$$\frac{d}{dx}\cos x = \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\,\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Dimostriamo adesso la formula per la tangente, che è derivabile ovunque sul suo dominio di definizione, ovvero per ogni $x \neq \pi/2 + k\,\pi$. Usando la regola di derivazione del prodotto **(D2)**, quella per la composizione **(D3)** e la formula per la derivata di $x \mapsto 1/x$, si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{d}{dx}\left(\sin x\cdot(\cos x)^{-1}\right) &= \cos x\,(\cos x)^{-1} - \sin x\,(-\sin x)\,(\cos x)^{-2}\\ &= 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,\end{aligned}$$

che dimostra la formula. □

Funzioni trigonometriche inverse

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\arccos x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, &\qquad &\text{per } x \in (-1,1),\\ \frac{d}{dx}\arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, &\qquad &\text{per } x \in (-1,1),\\ \frac{d}{dx}\arctan x &= \frac{1}{1+x^2}, &\qquad &\text{per } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Dimostrazione. Si osservi che grazie alla regola di derivazione per la funzione inversa (D4), la funzione $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ è derivabile in $(-1,1)$, dal momento che il coseno è derivabile su $[0,\pi]$ e la sua derivata è diversa da 0, tranne che in $x = \arccos(-1) = \pi$ e $x = \arccos(1) = 0$. Grazie a (5.3.7) si ottiene

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sin(\arccos x)}.$$

Possiamo semplificare questa espressione, osservando che (si veda il capitolo "*Funzioni trigonometriche*")

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad x \in [-1,1],$$

da cui

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1,1).$$

Per la funzione $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, si procede in modo simile, osservando che è derivabile in $(-1,1)$, dal momento che la derivata del seno è sempre non nulla in $[\pi/2, \pi/2]$, tranne che in $x = \arcsin(-1) = -\pi/2$ et $x = \arcsin(1) = \pi/2$.

Per la funzione $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ si osserva che la sua funzione inversa (i.e. la tangente) ha derivata sempre non nulle, quindi l'arcotangente è derivabile ovunque. Di nuovo da (5.3.7), si ha

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Logaritmi ed esponenziali

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad x \in \mathbb{R} \qquad\qquad \frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$$\frac{d}{dx}a^x = (\log a)\, a^x \qquad \frac{d}{dx}\log_a x = \frac{\log_a e}{x} \qquad (a > 0 \text{ e } a \neq 1).$$

Dimostrazione. Dal limite notevole (4.3.5), ovvero

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

usando le proprietà dell'esponenziale, si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x\, e^h - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = e^x,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dal momento che $x \mapsto \log x$ è la funzione inversa dell'esponenziale con base e e che, come visto, la derivata dell'esponenziale non si annulla mai, si può usare (5.3.7) per calcolare la derivata del logaritmo. Si avrà

$$\frac{d}{dx}\log^x = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}.$$

Se poi vogliamo cambiare di base, basterà osservare che

$$\log_a x = \log_a\left(e^{\log x}\right) = \log x\, \log_a e,$$

e quindi

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}(\log x\, \log_a e) = \log_a e\, \frac{d}{dx}\log x = \frac{\log_a e}{x}, \qquad x > 0.$$

Otteniamo anche, come prima,

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}\left(e^{\log a^x}\right) = \frac{d}{dx}e^{x\,\log a} = (\log a)\, e^{x\,\log a},$$

che termina la dimostrazione. □

Potenze ad esponente reale Utilizzando la formula per la derivata dell'esponenziale, possiamo ottenere la derivata della funzione $x \mapsto x^\alpha$, dove adesso $\alpha \in \mathbb{R}$. In effetti, abbiamo

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}, \qquad \text{pour tout } x > 0,$$

e quindi dalla regola (D3), abbiamo

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \frac{d}{dx}\left(e^{\alpha \ln x}\right) = e^{\alpha \ln x}\,\frac{\alpha}{x} = x^\alpha\,\frac{\alpha}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}, \qquad \text{per ogni } x > 0.$$

Funzioni iperboliche Abbiamo visto nella Sezione 6 del Capitolo 2 la definizione di coseno, seno e tangente iperboliche, rispetto ad una base qualunque $a > 1$. Scegliamo adesso la base canonica $a = e$ ed indichiamo con

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{\sinh}{\cosh x} = \frac{e^{2\,x} - 1}{e^{2\,x} + 1}.$$

Si ha allora

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x \qquad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}\tanh x = 1 - \tanh^2 x.$$

La dimostrazione è immediata, si utilizzi la definizione e la derivata dell'esponenziale di base e.

Funzioni iperboliche inverse

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arg}\cosh x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad x > 1,$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arg}\sinh x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arg}\tanh x = \frac{1}{1 - x^2}, \qquad x \in (-1, 1).$$

Dimostrazione. Basta utilizzare la formula **(D4)** per la derivata della funzione inversa. Si faccia la dimostrazione come esercizio. $\square$

Funzione f	Derivata f'	Dominio di derivabilità
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$n\,x^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}$
$x^{-n} \quad (n \in \mathbb{N})$	$-n\,x^{-n-1}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x^{\frac{p}{q}} \quad (p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\})$ *p e q primi tra loro*	$\frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1}$	• $x \in (0,+\infty)$ se q pari • $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se q dispari
$x^{\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$	$\alpha\,x^{\alpha-1}$	$x \in (0,+\infty)$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$1+\tan^2 x$	$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2\,k+1)\,\frac{\pi}{2} \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$a^x \quad (a \in (0,+\infty) \setminus \{1\})$	$a^x\,\log a$	$x \in \mathbb{R}$
$\log_a x \quad (a \in (0,+\infty) \setminus \{1\})$	$\frac{\log_a e}{x}$	$x \in (0,+\infty)$
$\cosh x$	$\sinh x$	$x \in \mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tanh x$	$1-\tanh^2 x$	$x \in \mathbb{R}$

5. Teoremi sulle derivate

Teorema 5.5.1 (Fermat)**.** *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile su* (a, b) *e che ammetta un punto di minimo* $x_0 \in (a, b)$*, ovvero*

$$f(x) \geq f(x_0), \qquad \text{per ogni } x \in (a, b). \tag{5.5.9}$$

Allora

$$f'(x_0) = 0.$$

Dimostrazione. Sia $h > 0$ sufficientemente piccolo, in modo che $x_0 + h \in (a, b)$. Basterà quindi prendere

$$|h| < \min\{b - x_0, x_0 - a\},$$

quest'ultimo essendo una quantità positiva, dato che $x_0 \in (a, b)$. Allora usando (5.5.9) si ottiene

$$f(x_0 + h) \geq f(x_0),$$

ovvero

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0, \qquad h > 0.$$

Ugualmente se $h < 0$ e sufficientemente piccolo, di nuovo da (5.5.9) otteniamo

$$f(x_0 + h) \geq f(x_0),$$

e quindi (attenzione! adesso $h < 0$)

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0, \qquad h > 0.$$

Abbiamo quindi, in base al *Teorema della permanenza del segno*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

D'altra parte, la funzione f è derivabile in x_0, quindi si ha

$$0 \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

ed anche

$$0 \geq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Questo implica dunque che $f'(x_0) = 0$. □

Osservazione 5.5.2. Il Teorema di Fermat resta vero anche se $x_0 \in (a, b)$ è un punto di massimo di f, ovvero anche in tal caso si avrà $f'(x_0) = 0$.

Osservazione 5.5.3 (Attenzione!)**.** Il Teorema di Fermat *non vale* se il punto di massimo o minimo x_0 non casca *all'interno* dell'intervallo $[a, b]$. Per esempio, la funzione

$$f(x) = x,$$

ammette massimo e minimo su $[0, 1]$, con punto di massimo $x = 1$ e punto di minimo $x = 0$. D'altra parte si ha

$$f'(0) = 1 \neq 0 \qquad \text{e} \qquad f'(1) = 1 \neq 0.$$

Teorema 5.5.4 (Rolle)**.** *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua su* $[a, b]$ *e derivabile su* (a, b)*. Se vale* $f(a) = f(b)$*, allora esiste* $x_0 \in (a, b)$ *tale che*

$$f'(x_0) = 0.$$

Dimostrazione. Dal momento che f è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, grazie al *Teorema di Weierstrass* (Teorema 4.4.6) esiste (almeno) un punto di massimo x_0 per f ed (almeno) un punto di minimo x_1 per f. Se $x_0 \in (a, b)$ oppure $x_1 \in (a, b)$, allora possiamo concludere la dimostrazione applicando il Teorema 5.5.1.

Al contrario, potrebbe succedere che $x_0 = a$ e $x_1 = b$ oppure viceversa. In tal caso, si avrà

$$f(b) \leq f(x) \leq f(a), \qquad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

D'altronde per ipotesi $f(a) = f(b)$, quindi otteniamo che

$$f(x) = f(a) = f(b), \qquad \text{per ogni } x \in [a, b],$$

ovvero f *è costante* su $[a, b]$. Abbiamo quindi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$, che dimostra l'enunciato anche in questo caso. □

Osservazione 5.5.5. Se si rimuove l'ipotesi $f(a) = f(b)$ il risultato precedente non è più vero. Per esempio, la funzione $f(x) = x$ è continua e derivabile su $[0, 1]$, ma $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in [0, 1]$.

Analogamente, se si omette l'ipotesi che f sia derivabile su tutto (a, b), il Teorema di Rolle non vale più. Per esempio, la funzione $f(x) = |x|$ è continua su $[-1, 1]$ e derivabile su $[-1, 1] \setminus \{0\}$. Inoltre, vale

$$f(-1) = f(1),$$

ma d'altra parte non ci sono punti nell'intervallo in cui la derivata si annulla.

Teorema 5.5.6 (Cauchy)**.** *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue su $[a, b]$ e derivabili su (a, b). Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che*

$$g'(x_0)\,\Big(f(b) - f(a)\Big) = f'(x_0)\,\Big(g(b) - g(a)\Big).$$

Dimostrazione. Definiamo la nuova funzione

$$h(t) = f(t)\,\Big(g(b) - g(a)\Big) - g(t)\,\Big(f(b) - f(a)\Big), \qquad \text{per } t \in [a, b],$$

che soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle, dal momento che si ha

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a)\,\Big(g(b) - g(a)\Big) - g(a)\,\Big(f(b) - f(a)\Big) \\ &= f(a)\,g(b) - g(a)\,f(b) \\ &= f(b)\,\Big(g(b) - g(a)\Big) - g(b)\,\Big(f(b) - f(a)\Big) = h(b). \end{aligned}$$

Per il Teorema di Rolle, esiste dunque $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$h'(x_0) = 0.$$

Ricordando la definizione di h, abbiamo trovato $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$f'(x_0)\,\Big(g(b) - g(a)\Big) - g'(x_0)\,\Big(f(b) - f(a)\Big) = 0,$$

che è esattamente quello che volevamo. □

Corollario 5.5.7 (Lagrange)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b). Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che*

$$f(b) = f(a) + f'(x_0)\,(b - a).$$

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 5.5.6 con la scelta $g(t) = t$. □

Una conseguenza interessante del risultato precedente è

Corollario 5.5.8 (Test di monotonia)**.** *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile su I. Allora*

$$f \text{ crescente su } I \qquad \Longleftrightarrow \qquad f'(x) \geq 0, \quad \text{per ogni } x \in I.$$

Dimostrazione. Grazie al Corollario 5.5.7, per ogni $x < y \in I$ si ottiene che esiste $\xi \in (x, y)$ tale che

$$f(y) = f(x) + f'(\xi)\,(y - x) \geq f(x),$$

dove abbiamo usato che f' è positiva su I e che $y - x > 0$. □

Corollario 5.5.9 (Principio di confronto)**.** *Siano f e g due funzioni derivabili sull'intervallo $I = (a, b)$. Supponiamo che esista $x_0 \in I$ tale che:*

(1) $f(x_0) \geq g(x_0)$;
(2) $f'(x) \geq g'(x)$ *per ogni* $x \geq x_0$.

Allora

$$f(x) \geq g(x), \qquad \text{per ogni } x \geq x_0.$$

Dimostrazione. Si introduca la funzione $h = f - g$, che è derivabile su I, in quanto differenza di due funzioni derivabili. Per ipotesi, si ha

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0, \qquad x \in I,$$

quindi h è crescente, in base al *test di monotonia*. Questo implica che

$$h(x) \geq h(x_0), \qquad x \geq x_0,$$

e quindi

$$f(x) - g(x) \geq f(x_0) - g(x_0) \geq 0, \qquad x \geq x_0,$$

proprio come volevamo. □

6. La formula di Taylor

Teorema 5.6.1. *Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $x_0 \in I$. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione, derivabile n volte in I. Allora vale la seguente identità*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k + o\Big((x - x_0)^n\Big), \qquad \text{per } x \to x_0. \tag{5.6.10}$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione. Per $n = 1$ la formula (5.6.10) diventa

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + o((x - x_0)), \qquad \text{per } x \to x_0.$$

D'altronde se f è derivabile in x_0, tale formula è vera grazie al Teorema 5.2.3 ("*Derivata VS. Tangente*").

Supponiamo adesso che l'enunciato sia vero per $n - 1$, dimostriamo come questo implichi che vale anche n. Introduciamo le due funzioni

$$F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k,$$

e

$$G(x) = (x - x_0)^n.$$

Utilizzando il *Teorema di Cauchy* (vedi Teorema 5.5.6), abbiamo che esiste $\xi \in (x_0, x)$ tale che

$$G'(\xi)\Big[F(x) - F(x_0)\Big] = F'(\xi)\Big[G(x) - G(x_0)\Big]. \tag{5.6.11}$$

Se osserviamo che $F(x_0) = G(x_0) = 0$ e che

$$\begin{aligned}
F'(x) &= f'(x) - \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k\right)\\
&= f'(x) - \frac{d}{dx}\left(f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\,(x - x_0)^{n-1}\right)\\
&= f'(x) - \left(f'(x_0) + f''(x_0)\,(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}\,(x - x_0)^{n-2}\right)\\
&= f'(x) - \sum_{m=0}^{n-2} \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{m!}\,(x - x_0)^m,
\end{aligned}$$

da (5.6.11) otteniamo

$$n\,(\xi - x_0)^{n-1}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k\right] = \left[f'(\xi) - \sum_{m=0}^{n-2} \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{m!}\,(\xi - x_0)^m\right]\,(x - x_0)^n. \tag{5.6.12}$$

Usiamo adesso l'ipotesi induttiva sulla funzione f', ovvero il fatto che la formula (5.6.10) vale per $n-1$, quando si ha una funzione derivabile $n-1$ volte. Per ipotesi induttiva abbiamo allora che

$$f'(\xi) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{d^m f'(x_0)}{dx^m}\,\frac{(\xi - x_0)^m}{m!} + o((\xi - x_0)^{n-1}), \qquad \text{per } \xi \to x_0. \tag{5.6.13}$$

Tenendo conto che

$$f^{(m+1)}(x_0) = \frac{d^m}{dx^m} f'(x_0),$$

la (5.6.13) può anche essere riscritta come

$$f'(\xi) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{m!}\,(\xi - x_0)^m + o((\xi - x_0)^{n-1}), \qquad \text{per } \xi \to x_0,$$

ovvero

$$f'(\xi) - \sum_{m=0}^{n-2} \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{m!}\,(\xi - x_0)^m = \frac{f^n(x_0)}{(n-1)!}\,(\xi - x_0)^{n-1} + o((\xi - x_0)^{n-1}), \qquad \text{per } \xi \to x_0.$$

Utilizziamo questa informazione nel membro di destra della (5.6.12), otteniamo così

$$n\,(\xi - x_0)^{n-1}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k\right] = \left[\frac{f^n(x_0)}{(n-1)!}\,(\xi - x_0)^{n-1} + o((\xi - x_0)^{n-1})\right]\,(x - x_0)^n,$$

valida per $\xi \to x_0$. Si ricordi che $\xi \in (x_0, x)$ quindi in particolare la formula precedente resta vera anche per $x \to x_0$. Dividiamo adesso ambo i membri per $n\,(\xi - x_0)^{n-1}$, si ha per $x \to x_0$

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k &= \left[\frac{\dfrac{f^n(x_0)}{(n-1)!}\,(\xi - x_0)^{n-1} + o((\xi - x_0)^{n-1})}{n\,(\xi - x_0)^{n-1}} \right] (x-x_0)^n \\ &= \frac{f^n(x_0)}{n\,(n-1)!}\,(x-x_0)^n + o(1)\,(x-x_0)^n. \end{aligned}$$

Ricordando che

$$n\,(n-1)! = n! \qquad \text{e che} \qquad o(1)\,(x-x_0)^n = o((x-x_0)^n), \qquad \text{per } x \to x_0,$$

abbiamo infine dimostrato che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + o\Big((x-x_0)^n\Big), \qquad \text{per } x \to x_0$$

ovvero la validità di (5.6.10) per n. Dal *Principio di Induzione*, otteniamo allora che la formula (5.6.10) vale in generale. □

Definizione 5.6.2. L'identità (5.6.10) si chiama *formula di Taylor di f all'ordine n, centrata nel punto x_0, con resto di Peano.*

Il polinomio

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k,$$

si chiama *polinomio di Taylor di f di ordine n, centrato in x_0.*

Lemma 5.6.3. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su $\mathbb{R}$. Allora:*

- *se f è pari, la sua derivata f' è una funzione dispari;*
- *se f è dispari, la sua derivata f' è una funzione pari.*

Dimostrazione. Dimostriamo il primo fatto e lasciamo per esercizio allo studente la dimostrazione del secondo. Dal momento che f è pari, si ha

$$f(x) = f(-x), \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Derivando ambo i membri dell'identià precedente, si ottiene in base alla regola di derivazione di una funzione composta

$$f'(x) = -f'(-x), \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

In altre parole, abbiamo dimostrato che

$$f'(-x) = -f'(-x), \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

ovvero che f' è dispari. □

Osservazione 5.6.4. Si osservi che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione dispari, allora si ha necessariamente

$$f(0) = 0.$$

Infatti, dalla proprietà

$$f(-x) = -f(x), \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

prendendo $x = 0$ si ottiene

$$f(0) = -f(0),$$

che implica $f(0) = 0$.

Per le funzioni pari o dispari, la formula di Taylor ha la seguente notevole proprietà

Proposizione 5.6.5 (Formula di Taylor per funzioni pari/dispari)**.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile infinite volte. Si ha:*

- *se f è pari, allora*
$$f^{(2\,k+1)}(0) = 0 \qquad \textit{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$
In particolare, la formula di Taylor per f centrata in 0 contiene solo potenze di ordine pari;
- *se f è dispari, allora*
$$f^{(2\,k)}(0) = 0 \qquad \textit{per ogni } k \in \mathbb{N};$$
In particolare, la formula di Taylor per f centrata in 0 contiene solo potenze di ordine dispari.

Dimostrazione. Dimostriamo il risultato nel caso di una funzione pari, lasciando il caso di una funzione dispari come esercizio.

In tal caso, è sufficiente osservare che f' è una funzione dispari, grazie al Lemma 5.6.3. Iterando questa proprietà, otteniamo che tutte le derivate di f di ordine dispari sono funzioni dispari. Dall'Osservazione 5.6.4, otteniamo quindi che tutte queste derivate si annullano in 0, come volevamo. □

Osservazione 5.6.6. Si osservi in particolare che per una funzione dispari vale

$$f(x) = f'(0)\,x + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \frac{f^{(5)}}{5!}\,x^5 \cdots + \frac{f^{(2\,n+1)}(0)}{(2\,n+1)!} + o(x^{2\,n+2}), \qquad \text{per } x \to 0,$$

dal momento che per una funzione dispari il polinomio di Taylor di ordine $2\,n+1$ è uguale a quello di ordine $2\,n+2$, grazie al risultato precedente.

Analogamente, per una funzione pari vale

$$f(x) = f(0) + \frac{f''(0)}{2!}\,x^4 + \frac{f^{(4)}}{4!}\,x^4 \cdots + \frac{f^{(2\,n)}(0)}{(2\,n)!} + o(x^{2\,n+1}), \qquad \text{per } x \to 0.$$

7. Sviluppi notevoli

Diamo adesso l'espressione della formula (5.6.10) nel caso di alcune funzioni elementari, che ricorreranno spesso.

7.1. Esponenziale. La formula di Taylor per l'esponenziale all'ordine n, centrata in $x_0 = 0$ è data da

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \qquad \text{per } x \to 0. \tag{5.7.14}$$

Infatti, è sufficiente osservare che se poniamo $f(x) = e^x$, si ha

$$f^{(k)}(x) = e^x, \qquad \text{per ogni } k \in \mathbb{N},$$

da cui

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}.$$

Inserendo questa informazione in (5.6.10) e prendendo $x_0 = 0$, si ottiene la formula (4.3.5).

7.2. Seno. Osserviamo innanzitutto che il seno è una funzione dispari, quindi dalla Proposizione 5.6.5 sappiamo che il suo sviluppo di Taylor contiene solo termini con potenze dispari. Osserviamo inoltre che

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad \text{e} \qquad \frac{d^3}{dx^3}\sin x = -\cos x,$$

e più in generale

$$\frac{d^{2\,k+1}}{dx^{2\,k+1}}\sin x = (-1)^k\,\cos x, \qquad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

Quindi, la formula di Taylor per il seno all'ordine $2\,n+1$, centrata in $x_0 = 0$ è data da

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\,x^{2\,k+1} + o(x^{2\,n+1})\\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!}\,x^{2\,n+1} + o(x^{2\,n+1}).\end{aligned} \tag{5.7.15}$$

Si noti che usando anche l'Osservazione 5.6.6, otteniamo che in realtà vale più precisamente

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\,x^{2\,k+1} + o(x^{2\,n+2})\\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!}\,x^{2\,n+1} + o(x^{2\,n+2}).\end{aligned} \tag{5.7.16}$$

7.3. Coseno. Stavolta il coseno è una funzione pari, quindi dalla Proposizione 5.6.5 sappiamo che il suo sviluppo di Taylor contiene solo termini con potenze pari. Inoltre non è difficile vedere che

$$\frac{d^{2\,k}}{dx^{2\,k}}\cos x = (-1)^k\,\cos x, \qquad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2\,k)!}\,x^{2\,k} + o(x^{2\,n})\\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\,x^{2\,n} + o(x^{2\,n}).\end{aligned} \tag{5.7.17}$$

Si noti che usando anche l'Osservazione 5.6.6, abbiamo il seguente sviluppo più preciso

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2\,k)!}\,x^{2\,k} + o(x^{2\,n+1})\\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\,x^{2\,n} + o(x^{2\,n+1}).\end{aligned} \tag{5.7.18}$$

7.4. Una funzione razionale. Abbiamo il seguente sviluppo

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n). \tag{5.7.19}$$

Basta osservare che se poniamo

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1},$$

si ha (lo studente lo provi per induzione)

$$f^{(k)}(x) = k!\,(1-x)^{-1-k}, \qquad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

Si ottiene quindi

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 1, \qquad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

Usando questa identità in (5.6.10), si ottiene (5.7.19).

Dallo sviluppo precedente, otteniamo anche

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^k + o(x^n). \tag{5.7.20}$$

Basta osservare che

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)},$$

ed usare la formula (5.7.19) con $-x$ al posto di x.

Osservazione 5.7.1 (Una curiosità)**.** Si ricordi che per ogni $|x| < 1$ vale

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x},$$

ovvero si può calcolare la somma di una serie geometrica di ragione x (si ricordi l'Esercizio 3.9.30). D'altra parte, da (5.7.19) sappiamo che

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

Cancellando i termini comuni alle due sommatorie, troviamo quindi che

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = o(x^n), \qquad \text{per } x \to 0,$$

ovvero che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{n+1} + x^{n+2} + \dots}{x^n} = 0.$$

7.5. Logaritmo. Vale il seguente sviluppo di Taylor

$$\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\, x^k + o(x^n). \tag{5.7.21}$$

Infatti, osserviamo che si ha

$$\frac{d}{dx}\log(1-x) = -\frac{1}{1-x},$$

quindi otteniamo per ogni $k \geq 1$

$$\frac{d^k}{dx^k}\log(1-x) = -\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\frac{1}{1-x} = -(k-1)!\,(1-x)^{-k}.$$

In particolare, si ottiene

$$\frac{1}{k!}\,\frac{d^k}{dx^k}\log(1-x)_{|x=0} = -\frac{1}{k}.$$

Dalla formula (5.6.10), si ottiene dunque la (4.3.4).

Usando la formula (4.3.4) con $-x$ al posto di x, si ottiene anche

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, x^k + o(x^n). \tag{5.7.22}$$

8. Esercizi

8.1. Esercizi di base.

Esercizio 5.8.1. *Dimostrare che*

$$\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1, \qquad \textit{per ogni } x>0.$$

Dimostrazione. Cominciamo definendo

$$h(x) = \ln x - \frac{x-1}{x}, \qquad x>0,$$

che è derivabile su $(0,\infty)$. Inoltre, si ha

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, \qquad x>0.$$

È facile vedere che

$$h'(x) \leq 0 \qquad \text{se } 0<x\leq 1, \qquad h'(x)\geq 0 \qquad \text{se } x\geq 1,$$

quindi h ha un punto di minimo (assoluto) per $x=1$. Altrimenti detto, si ha

$$h(x) \geq h(1) = 0, \qquad \text{per ogni } x \geq 0,$$

che dimostra la prima disuguaglianza. Per provare la seconda, si può procedere in modo simile. $\square$

Esercizio 5.8.2. *Dimostrare che per ogni $x \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, si ha*

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Dimostrazione. Utilizziamo il principio di induzione (si veda il Capitolo 1). Cominciamo osservando che per $n = 0$ la disuguaglianza è vera, dal momento che l'esponenziale di base e è crescente, quindi

$$e^x \geq e^0 = 1.$$

Supponiamo adesso che l'affermazione sia vera per une certo n, ovvero che si abbia

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n_0}}{n_0!},$$

il nostro scopo è dimostrare che questo implica la validità anche di

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n_0+1}}{(n_0+1)!}.$$

Si definiscano

$$f(x) = e^x \qquad \text{e} \qquad g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n_0+1}}{(n_0+1)!}.$$

Osserviamo che

$$f(0) = 1 = g(0) \qquad \text{et} \qquad f'(x) = e^x \geq g'(x), \quad \text{si } x \geq 0,$$

grazie all'ipotesi che stiamo facendo. Utilizzando il principio di confronto (Corollario 5.5.9), si arriva a concludere che

$$f(x) \geq g(x) \qquad \text{ovvero} \qquad e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

che è ciò che volevamo. □

Esercizio 5.8.3. *Dimostrare che per ogni $x, y \geq 0$, si ha*

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}. \tag{5.8.23}$$

Dimostrazione. Osserviamo che se $x = 0$ oppure $y = 0$, allora la disuguaglianza è banalmente vera. Possiamo quindi supporre che $x, y > 0$. Inoltre, possiamo sempre assumere, senza perdità di generalità, che $x \leq y$. Adesso, notiamo che (5.8.23) è equivalente a dimostrare che

$$\sqrt{1 + \frac{y}{x}} \leq 1 + \sqrt{\frac{y}{x}}, \qquad 0 < x \leq y,$$

ovvero, se si pone $t = y/x \geq 1$, questo è equivalente a dimostrare che

$$\sqrt{1+t} \leq 1 + \sqrt{t}, \qquad \text{per ogni } t \geq 1.$$

Introducendo la nuova funzione

$$h(t) = \frac{\sqrt{1+t}}{1+\sqrt{t}},$$

ci basta quindi dimostrare che

$$h(t) \leq 1, \qquad \text{per ogni } t \geq 1. \tag{5.8.24}$$

Proviamo a studiare la monotonia della funzione h, usando il *test di monotonia* (Corollario 5.5.8). Calcolando la derivata, si ha

$$h'(t) = \frac{1}{(1+\sqrt{t})^2}\left[\frac{1+\sqrt{t}}{2\sqrt{1+t}} - \frac{\sqrt{1+t}}{2\sqrt{t}}\right] = \frac{\sqrt{t}-1}{2\sqrt{t}(1+\sqrt{t})^2\sqrt{1+t}},$$

quindi la funzione h è crescente per $t \geq 1$ e decrescente per $t \geq 1$. Questo implica che

$$h(t) \leq \lim_{s\to\infty} h(s), \qquad \text{pour tout } t \geq 1.$$

D'altra parte, l'ultimo limite si può facilmente calcolare

$$\lim_{s\to\infty} h(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{\sqrt{1+s}}{1+\sqrt{s}} = 1,$$

dal momento che

$$\sqrt{1+s} \sim \sqrt{s} \quad \text{e} \quad 1+\sqrt{s} \sim \sqrt{s}, \qquad \text{per } s \to +\infty.$$

Abbiamo quindi ottenuto (5.8.24). □

Osservazione 5.8.4. Dopo tutto, potremmo pensare di aver trovato una dimostrazione decisamente complicata, per una cosa in fondo molto semplice. In effetti, si ha

$$\begin{aligned}\sqrt{x+y} \le \sqrt{x} + \sqrt{y} \iff & \ x+y \le (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{x}\,\sqrt{y} + y \\ \iff & \ 0 \le 2\sqrt{x}\,\sqrt{y},\end{aligned}$$

e questa disuguaglianza è ovviamente vera. Se avete pensato questo, provate adesso a dimostrare la disuguaglianza seguente

$$\sqrt[n]{x+y} \le \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}, \qquad x, y \ge 0, n \in \mathbb{N},$$

e più in generale

$$(x+y)^\alpha \le x^\alpha + y^\alpha, \qquad x, y \ge 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Esercizio 5.8.5. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione pari. Allora se f è derivabile in 0, deve aversi*

$$f'(0) = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo che f sia derivabile in 0, allora in particolare la funzione composta

$$g(x) = f(-x)$$

è anch'essa derivabile in 0. Per la regola (D3), si ha

$$\frac{d}{dx} g(0) = -f'(0).$$

D'altra parte, usando che f è pari, abbiamo ovviamente

$$g(x) = f(x),$$

e quindi anche

$$\frac{d}{dx} g(0) = f'(0).$$

Comparando le due epressioni trovate per $g'(0)$, si ottiene $f'(0) = -f'(0)$ e quindi la conclusione. □

Esercizio 5.8.6. *Utilizzando le derivate, dimostrare l'identità seguente*

$$2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \arctan\left(\frac{2x-1}{2\sqrt{x(1-x)}}\right) = \frac{\pi}{2}, \qquad x \in (0,1).$$

Soluzione. Dimostriamo che la funzione in esame ha una derivata sempre nulla. Per quanto riguarda la funzione

$$f(x) = 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right), \qquad (0,1),$$

osserviamo innanzitutto che questa espressione è ben definita, dal momento che

$$\frac{1-x}{x} \ge 0, \qquad \text{per ogni } x \in (0,1).$$

Inoltre, la funzione

$$x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{x}},$$

è la composizione di due funzioni

$$x \mapsto \sqrt{x} \qquad \text{e} \qquad x \mapsto \frac{1-x}{x},$$

entrambe derivabili su $(0,1)$. Quindi f è derivabile su questo intervallo, in quanto composizione di funzioni derivabili. Si ottiene dunque

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{2}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)^2} \frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1-x}{x}} &= \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)^2} \left(\frac{1-x}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}\frac{1-x}{x} \\ &= -\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \frac{1}{x^2} \\ &= -\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{\sqrt{x\,(1-x)}}. \end{aligned}$$

Adesso guardiamo la funzione

$$g(x) = \arctan\left(\frac{2x-1}{2\sqrt{x(1-x)}}\right), \qquad x \in (0,1),$$

che è ben definita su $(0,1)$, dal momento che

$$x\,(1-x) > 0, \qquad \text{pour tout } x \in (0,1).$$

Di nuovo, la funzione g è derivabile, in quanto composizione di funzioni derivabili su $(0,1)$. Si avrà

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{2\sqrt{x(1-x)}}\right)^2} \frac{d}{dx}\frac{2x-1}{2\sqrt{x(1-x)}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{2\sqrt{x(1-x)}}\right)^2} \frac{2\sqrt{x\,(1-x)} - (2x-1)\frac{1-2x}{2\sqrt{x\,(1-x)}}}{x\,(1-x)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{4\,x\,(1-x)}{4x\,(1-x)+(2x-1)^2} \frac{4\,x\,(1-x)+(2x-1)^2}{2\,x\,(1-x)\sqrt{x\,(1-x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x\,(1-x)}}, \qquad x \in (0,1). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\frac{d}{dx}(f+g)(x) = 0, \qquad x \in (0,1),$$

ovvero $f+g$ è costante su $(0,1)$. Ci manca da dimostrare che il valore di tale costante è esattamente $\pi/2$. A tal fine, osserviamo che

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x-1}{2\sqrt{x\,(1-x)}} = +\infty,$$

quindi abbiamo

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)+g(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Questo conclude l'esercizio. $\square$

8.2. Studi di funzione.

Esercizio 5.8.7. *Sia* $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1\}$ *il disco di raggio* 1*, centrato nell'origine. Sia* B_t *il disco di raggio* 1*, centrato in* $(t,0)$*. Si scriva in forma esplicita la funzione*

$$f(t) = \text{“area dell'insieme } B\cap B_t''\text{,}$$

e la si studi.

Soluzione. Possiamo sicuramente dire che f è pari, con massimo (uguale a π) nel punto $t=0$ (i.e. quando i due dischi sono completamenti sovrapposti). Inoltre, si ha che $f(t)=0$ se $t\ge 2$ (e quindi anche se $t\le -2$). Utilizzando un po' di trigonometria, riusciamo ad ottenere

$$f(t) = 2 \arccos\left(\frac{t}{2}\right) - t\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}, \qquad \text{per } 0 \le t \le 2,$$

e quindi

$$f(t) = \begin{cases} 2\arccos\left(\frac{|t|}{2}\right) - |t|\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}, & \text{se } |t|\le 2, \\ \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si vede che la funzione è continua su $\mathbb{R}$: basta verificare che

$$\lim_{t\to 2^-} f(t) = \lim_{t\to -2^+} f(t) = 0.$$

Inoltre, la funzione è derivabile su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$: sull'intervallo $(0,2)$ è evidente, dal momento che f è composizione di funzioni derivabili. Inoltre, si ha

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}} - \sqrt{1-\frac{t^2}{4}} + \frac{t^2}{4\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}} \\ &= -4\,\frac{4-t^2}{\sqrt{4-t^2}} = -4\sqrt{4-t^2}, \qquad 0<t<2. \end{aligned}$$

Al contrario, in $t=2$ bisogna fare un po' di attenzione. Si osservi che

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{t\to 2^-} f'(t) = 0,$$

ed ovviamente, dal momento che $f(0)$ per $t>2$, si ha anche

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 0.$$

Questo mostra che f è derivabile in $t=2$ (e quindi anche in $t=-2$). Per quanto riguarda $t=0$, è facile vedere che in questo punto f *non è derivabile*. Infatti, si vede che

$$\lim_{t\to 0^+} f'(t) = -8 \qquad \text{mentre} \qquad \lim_{t\to 0^+} f'(t) = 8,$$

ovvero il grafico di f ha uno spigolo in $t=0$.

Infine, studiamo la monotonia di f, con l'aiuto del *test di monotonia* (Corollario 5.5.8). Si osservi che

$$f'(t) = -4\sqrt{4-t^2} < 0, \qquad 0 < t < 2,$$

quindi f è strettamente decrescente su $(0,2)$ e strettamente crescente su $(-2,0)$ (dalla parità di f). Ritroviamo quindi che $t = 0$ è un punto di massimo globale per la funzione in esame (si ricordi comunque che f non è derivabile in $t = 0$). □

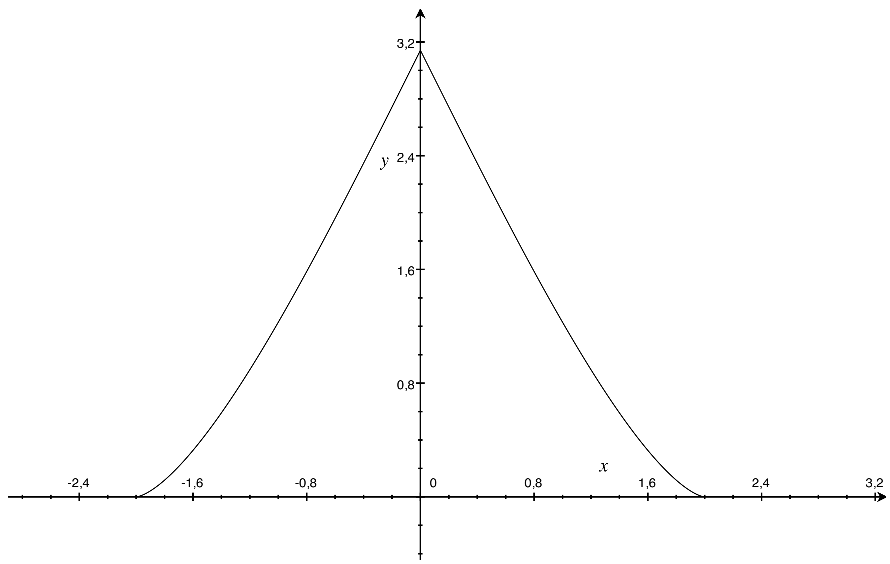

Figura 2. Il grafico della funzione $f(t) =$ "*area di* $B \cap B_t$"

Esercizio 5.8.8. *Studiare la funzione* $f(x) = x^x$ *e tracciarne un grafico approssimativo.*

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che possiamo scrivere

$$x^x = e^{x\,\log x},$$

quindi si tratta di una funzione strettamente positiva e ben definita per $x > 0$. Ovviamente, è interessante vedere cosa succede quando x si avvicina ai punti di accumulazione del dominio, che non appartengono al dominio stesso. Si ha quindi

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\,\log x} = 1,$$

dove abbiamo utilizzato che $x\ln x \to 0$ per $x \to 0^+$, grazie all'Esercizio 4.5.10. Abbiamo anche

$$\lim_{x\to +\infty} x^x = \lim_{x\to +\infty} e^{x\,\log x} = +\infty,$$

dal momento che l'argomento dell'esponenziale è divergente. Inoltre, osserviamo che la nostra funzione è continua su $(0,+\infty)$, in quanto composizione delle funzioni

$$t \mapsto e^t \qquad \text{e} \qquad t \mapsto t\,\log t,$$

che sono continue su $(0,+\infty)$ (la seconda è continua in quanto prodotto di due funzioni continue). Similmente, la funzione è derivabile in $(0,+\infty)$ e vale

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{x\,\log x} = e^{x\,\log x}\,(\log x + 1), \qquad x > 0.$$

Studiamone adesso il segno. Abbiamo

$$f'(x) \geq 0 \iff \log x + 1 \geq 0 \iff \log x \geq -1 \iff x \geq e^{-1},$$

ed inoltre $f'(x) \neq 0$ se $x \neq e^{-1}$. Quindi f è strettamente decrescente su $(0, e^{-1})$ e strettamente crescente su $(e^{-1}, +\infty)$, in base al *test di monotonia* (Corollario 5.5.8). Il punto $x = e^{-1}$ è punto di minimo globale, ovvero

$$f(x) \geq f(e^{-1}) = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}, \qquad \text{per ogni } x > 0.$$

Infine, è interessante studiare anche il comportamento della derivata prima $f'(x)$ per $x \to 0^+$, ovvero calcoliamo il limite

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} (\ln x + 1) = -\infty.$$

Possiamo dedurne che quando ci si avvicina a 0, il grafico di f tende ad avere una retta tangente verticale. $\square$

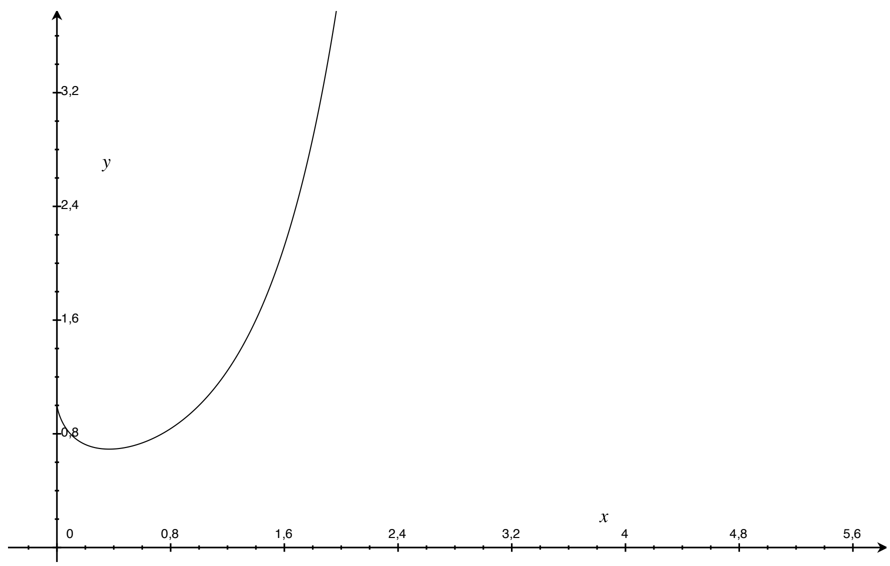

Figura 3. Il grafico della funzione $f(x) = x^x$

Esercizio 5.8.9. *Studiare la funzione*

$$f(x) = e^{-\frac{1}{|x^2-1|}}$$

avendo cura di tracciarne un grafico quanto più preciso possibile.

Soluzione. Il dominio di definizione della funzione è dato da $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Si tratta di una funzione continua e derivabile su D. Notiamo anche che f è funzione pari. Inoltre, si noti che l'argomento dell'esponenziale è sempre negativo e non si annulla mai, quindi sicuramente

$$e^{-\frac{1}{|x^2-1|}} < 1, \qquad \text{per ogni } x \in D. \tag{5.8.25}$$

E d'altra parte, in quanto esponenziale, si ha

$$e^{-\frac{1}{|x^2-1|}} > 0, \qquad \text{per ogni } x \in D.$$

È utile osservare che

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1, & \text{se } x < -1 \text{ oppure } x > 1, \\ 1-x^2, & \text{se } -1 \le x \le 1, \end{cases}$$

quindi la nostra funzione può essere scritta come

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2-1}}, & \text{se } x < -1 \text{ oppure } x > 1, \\ e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{se } -1 < x < 1, \end{cases}$$

Calcoliamo i limiti nei punti di accumulazione di D, che non appartengono a D: si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x^2-1}} = 1$$

e dalla parità di f, anche

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Quindi $y = 1$ è asintoto orizzontale, sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$ (non ci saranno quindi asintoti obliqui). Inoltre, tenendo conto di (5.8.25), abbiamo anche provato che

$$\sup_D f = 1.$$

Abbiamo anche

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} e^{-\frac{1}{|x^2-1|}} = 0.$$

Di nuovo dalla parità di f, si ottiene anche

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to1} f(x) = 0.$$

I due punti di accumulazione $x = 1$ e $x = -1$ sono quindi punti in cui f presenta una discontinuità di tipo eliminabile. In altre parole, se si definisce la nuova funzione

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x^2-1|}}, & \text{se } x \in D, \\ 0, & \text{se } |x| = 1, \end{cases}$$

si ha che essa è continua su tutto $\mathbb{R}$ e coincide con f su D. Osserviamo anche che abbiamo dimostrato che

$$\inf_D f = 0.$$

Veniamo adesso allo studio degli intervalli di monotonia di f: osserviamo innanzitutto che il dominio di derivabilità di f coincide con tutto il dominio iniziale D. Per non doverci complicare la vita col valore assoluto, distinguiamo due casi:

- se $-1 < x < 1$, allora

  $$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{-\frac{1}{1-x^2}} = e^{-\frac{1}{1-x^2}} \, \frac{-2\,x}{(1-x^2)^2} \ge 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \le 0,$$

  quindi sull'intervallo $(-1, 1)$, la funzione crescente per $-1 < x \le 0$ e decrescente per $0 \le x < 1$. In particolare, $x = 0$ è un punto di massimo locale. Il valore del massimo locale corrispondente è

  $$f(0) = e^{-1} < 1.$$

  Per la discussione precedente, abbiamo quindi che non si tratta di un massimo assoluto.

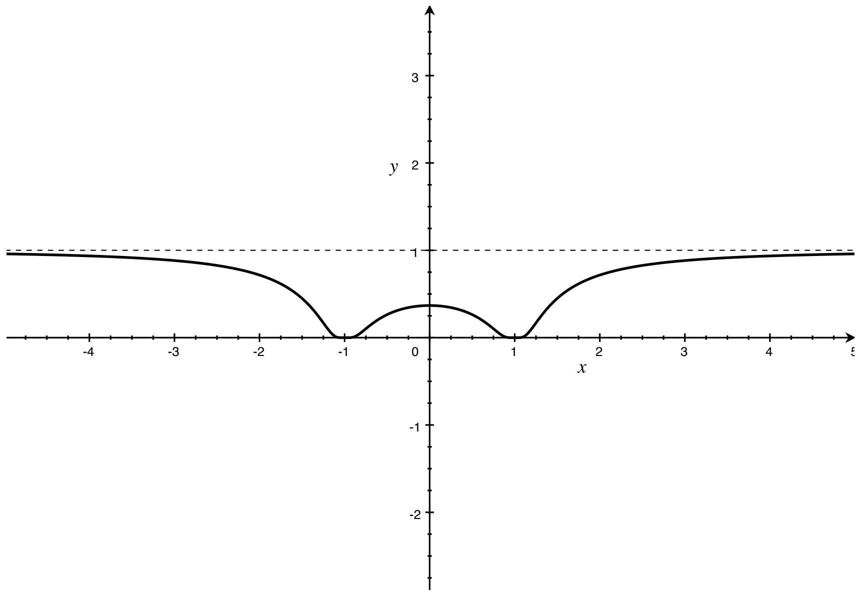

Figura 4. Il grafico della funzione dell'Esercizio 5.8.9

- se $x < -1$ oppure $x > 1$, allora
$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{-\frac{1}{x^2-1}} = e^{-\frac{1}{1-x^2}} \frac{2\,x}{(1-x^2)^2} \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \geq 0,$$
ovvero f è crescente su $(1, +\infty)$ e decrescente su $(-\infty, -1)$.

Infine, vediamo come si comporta la derivata nei punti $x = \pm 1$. Abbiamo
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} e^{-\frac{1}{1-x^2}} \frac{2\,x}{(1-x^2)^2} = 0,$$
dove abbiamo usato la gerarchia di infiniti
$$L^2 = o(e^L), \qquad \text{se } L \to +\infty.$$
Si operi il cambio $1/(1-x^2) = L$ per ricondursi a tale limite notevole. In modo del tutto analogo
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} e^{-\frac{1}{1-x^2}} \frac{-2\,x}{(1-x^2)^2} = 0.$$
Otteniamo quindi che, anche se f' non è definita per $x = 1$, si ha
$$\lim_{x\to 1} f'(x) = 0.$$
Per parità della funzione, si ha anche
$$\lim_{x\to -1} f'(x) = 0.$$
In definitiva, il grafico della funzione si avvicina ai due punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ con tangente orizzontale.
□

Esercizio 5.8.10. *Studiare la funzione*
$$f(x) = \left|\sqrt{x^2 + |x| + 2} - 2\right|,$$

avendo cura di tracciarne un grafico quanto più preciso possibile.

Soluzione. Osserviamo che la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, si tratta di una composizione di funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$, dunque è anch'essa continua. Osserviamo inoltre che

$$f(-x) = f(x), \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

ovvero f è una funzione pari. Possiamo quindi ridurci a studiare f per $x \geq 0$, che diventa quindi

$$f(x) = \left|\sqrt{x^2+x+2}-2\right|, \qquad \text{per } x \geq 0.$$

Osserviamo che

$$\sqrt{x^2+x+2}-2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2+x-2 \geq 0.$$

Tenendo conto della restrizione $x \geq 0$, l'ultima condizione è equivalente a $x \geq 1$. Abbiamo dunque

$$f(x) = \left|\sqrt{x^2+x+2}-2\right| = \begin{cases} \sqrt{x^2+x+2}-2, & \text{se } x \geq 1, \\ \\ 2-\sqrt{x^2+x+2}, & \text{se } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

La funzione f è sempre positiva e si annulla solo per $x = 1$ (per $x \geq 0$). Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}{x} = 1,$$

ed anche

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2+x+2}-2-x] &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-\frac{2}{x}-1\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{2\,x}-\frac{2}{x}-1+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Quindi il grafico di f ha l'asintoto obliquo $y = x - 3/2$ per $x \to +\infty$. Per simmetria, si ha che $y = -x - 3/2$ è asintoto obliquo, per $x \to -\infty$.

Studiamo adesso il dominio di derivabilità della funzione: cominciamo restringendoci a $x \geq 0$. Ricordando che il valore assoluto non è derivabile nei punti in cui il suo argomento si annulla, si ha che f non è derivabile per i punti $x > 0$ tali che

$$\sqrt{x^2+x+2}-2 = 0,$$

ovvero, per la discussione precedente, f non è derivabile per $x = 1$. Per simmetria, f non è derivabile nemmeno per $x = -1$. Infine, il punto $x = 0$ è anch'esso un punto di non derivabilità, dal momento che la funzione f contiene il termine $|x|$, che non è derivabile per $x = 0$. Abbiamo quindi che f è derivabile per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$.

Studiamo adesso gli intervalli di monotonia di f: possiamo restringerci a $x \geq 0$. Per $x \neq 1$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2\,x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}, & \text{se } x > 1, \\ \\ -\dfrac{2\,x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}, & \text{se } 0 < x < 1, \end{cases}$$

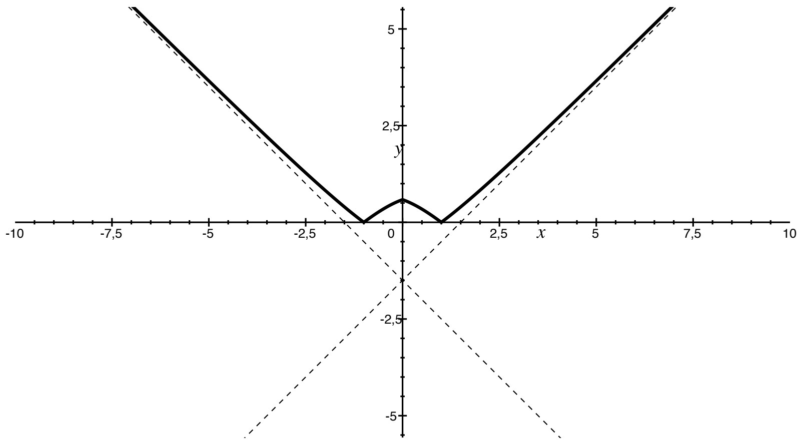

Figura 5. Il grafico della funzione dell'Esercizio 5.8.10, con i due asintoti obliqui.

ovvero abbiamo

$$f'(x) > 0 \quad \text{per } x > 1 \qquad \text{e} \qquad f'(x) < 0 \quad \text{per } 0 < x < 1.$$

Quindi f è crescente per $x \geq 1$ e decrescente per $0 \leq x \leq 1$.

Infine, osserviamo che in corrispondenza dei punti di non derivabilità $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$ il grafico di f presenta dei punti angolosi. Infatti, si ha

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \frac{3}{4} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\frac{3}{4},$$

ed anche

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

□

Esercizio 5.8.11. *Studiare la funzione*

$$x \mapsto \left| \frac{x^2 + 8}{|x| - 1} \right|$$

tracciandone un grafico qualitativo quanto più possibile preciso.

Soluzione. Dividiamo l'analisi della funzione in punti.

Dominio e proprietà di base. La funzione è definita per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$|x| \neq 1 \qquad \text{ovvero per } x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Si osservi che la funzione è sempre positiva (a causa della presenza del valore assoluto) e non si annulla mai (dato che $x^2 + 8 \neq 0$). Inoltre, si vede facilmente che

$$\left| \frac{(-x)^2 + 8}{|-x| - 1} \right| = \left| \frac{x^2 + 8}{|x| - 1} \right|, \qquad \text{per ogni } x \in D,$$

ovvero **la funzione è pari**. Si osservi inoltre che

$$
\begin{aligned}
||x|-1| &= \begin{cases} |x|-1, & \text{se } x<-1 \text{ oppure } x>1 \\ 1-|x|, & \text{se } -1-<x<1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} x-1, & \text{se } x>1 \\ 1-x, & \text{se } 0\le x<1 \\ 1+x, & \text{se } -1-<x<0 \\ -x-1, & \text{se } x<-1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Limiti ed asintoti. Calcoliamo i limiti della funzione nei punti di accumulazione del dominio D che non gli appartengono: abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+8}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = \lim_{x\to1^+}\frac{x^2+8}{x-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to1^-}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = \lim_{x\to1^-}\frac{x^2+8}{1-x} = +\infty.$$

Inoltre, grazie alla parità della funzione abbiamo anche

$$\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+8}{-x-1} = +\infty,$$

e

$$\lim_{x\to-1}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = +\infty.$$

La funzione ha quindi due asintoti verticali, in corrispondenza di $x=1$ e $x=-1$. Verifichiamo la presenza di asintoti obliqui: si ha

$$\alpha = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = \lim_{x+\infty}\frac{1}{x}\,\frac{x^2+8}{x-1} = 1$$

e

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}\left[\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+8}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+8-x^2+x}{x-1} = 1.$$

Abbiamo quindi che

$$y = \alpha\,x + \beta = x+1,$$

è un asintoto obliquo per $x\to+\infty$. Grazie alla parità della funzione, otteniamo che anche

$$y = -x+1,$$

è un asintoto obliquo, stavolta per $x\to-\infty$.

Derivabilità e intervalli di monotonia. Studiamo adesso gli intervalli di monotonia della funzione in esame: osserviamo innanzitutto che la funzione in esame è derivabile in ogni $x\in D$ per cui

$$\frac{x^2+8}{|x|-1}\neq 0 \qquad \text{e} \qquad |x|\neq 0.$$

Questo è dovuto al fatto che la funzione *valore assoluto* non è derivabile nei punti in cui il suo argomento si annulla. Ora, la prima condizione è sempre soddisfatta, per la seconda invece dobbiamo richiedere che $x\neq0$. In altre parole, la funzione di partenza è derivabile sull'insieme

$$E = (-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty) = D\setminus\{0\}.$$

Il punto $x=0$ rappresenta un punto di non derivabilità che andrà studiato a parte. Calcoliamo la derivata della funzione per $x>0$ e $x\neq1$: distinguiamo due casi

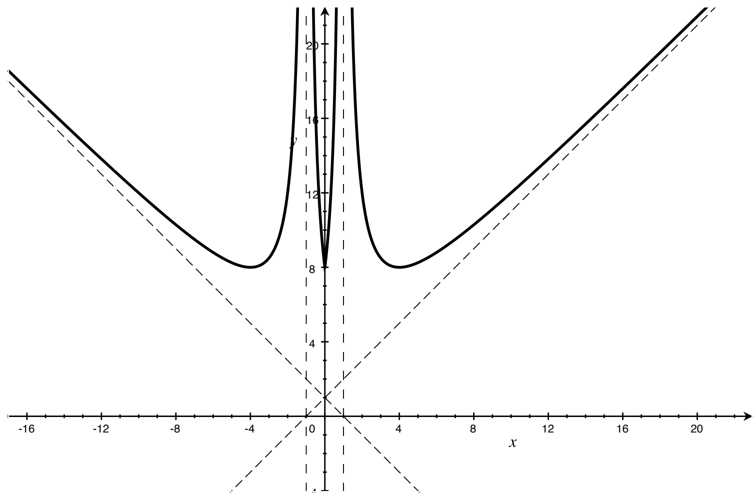

Figura 6. La funzione dell'Esercizio 5.8.11.

Caso $0 < x < 1$: in tal caso

$$\frac{d}{dx}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = \frac{d}{dx}\frac{x^2+8}{1-x} = \frac{-x^2+2\,x+8}{(1-x)^2} \geq 0 \qquad \text{per ogni } 0 < x < 1.$$

Abbiamo quindi che per $0 < x < 1$ la funzione è monotona crescente (strettamente, la derivata non si annulla mai in questo intervallo);

Caso $x > 1$: in tal caso

$$\frac{d}{dx}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = \frac{d}{dx}\frac{x^2+8}{x-1} = \frac{x^2-2\,x-8}{(x-1)^2} \geq 0 \qquad \text{se e solo se } x \geq 4.$$

Abbiamo quindi che per $1 < x < 4$ la funzione è monotona decrescente, mentre per $x \geq 4$ la funzione è monotona crescente. Il punto $x = 4$ è quindi un punto di minimo locale. Vediamo se si tratta anche di un minimo assoluto: si osservi che

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = 8$$

ed inoltre

$$\lim_{x\to 4}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = 8.$$

Abbiamo quindi che $x = 0$ e $x = 4$ sono entrambi punti di minimo assoluto per la funzione e vale

$$\inf_{x\in D}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = \min_{x\in D}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = 8.$$

Si osservi anche che la monotonia della funzione per $x < 0$ si può adesso ricavare dalle considerazioni precedenti, ricordando che la funzione è pari. Infine, prestiamo attenzione al punto di non derivailità $x = 0$: si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{d}{dx}\left|\frac{x^2+8}{|x|-1}\right| = 2,$$

quindi $x = 0$ è un **punto angoloso**. $\square$

Esercizio 5.8.12. *Studiare la funzione*

$$x \mapsto \arccos(|2\,x^3 - 1|),$$

tracciandone un grafico qualitativo quanto più possibile preciso.

Dimostrazione. Ricordiamo innanzitutto che la funzione *arco coseno* è definita su $[-1, 1]$, per trovare il dominio della funzione in esame dobbiamo quindi imporre

$$-1 \leq |2\,x^3 - 1| \leq 1.$$

Dal momento che il valore assoluto non è mai negativo, questo è equivalente a richiedere che

$$|2\,x^3 - 1| \leq 1 \qquad \text{ovvero} \qquad -1 \leq 2\,x^3 - 1 \leq 1.$$

L'ultima catena di disuguaglianza, a sua volta, è equivalente a

$$0 \leq 2\,x^3 \leq 2 \qquad \text{ovvero} \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Abbiamo quindi che $D = [0, 1]$ è il dominio di definizione della nostra funzione. Su D la funzione in esame è continua, in quanto composizione di funzioni continue.

Vogliamo adesso studiare gli intervalli di monotonia, utilizzando il *test di monotonia*. Per questo, dobbiamo prima sapere qual è il dominio di derivabilità della nostra funzione. Si ricordi che l'arco coseno è derivabile su $(-1, 1)$, mentre il valore assoluto è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Quindi il dominio di derivabilità è dato da

$$\{x \in D\,:\, -1 < |2\,x^3 - 1| < 1 \ \text{ e } \ 2\,x^3 - 1 \neq 0\}.$$

Troviamo per quali x queste due condizioni sono soddisfatte. Si ha

$$\begin{aligned} -1 < |2\,x^3 - 1| < 1 \qquad \iff \qquad -1 < 2\,x^3 - 1 < 1 \qquad &\iff \qquad 0 < 2\,x^3 < 2 \\ &\iff \qquad 0 < x < 1, \end{aligned}$$

e

$$2\,x^3 - 1 \neq 0 \qquad \iff \qquad x \neq \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

In definitiva, il dominio di derivabilità è dato dall'insieme

$$D' = \left(0, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) \cup \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, 1\right).$$

Studiamo adesso la derivata della funzione in ognuno di questi due intervalli:

- se $0 < x < \sqrt[3]{1/2}$, allora

  $$2\,x^3 - 1 < 0 \qquad \text{quindi} \qquad |2\,x^3 - 1| = 1 - 2\,x^3.$$

  Dobbiamo allora derivare la funzione $\arccos(1 - 2\,x^3)$. Si ha

  $$\frac{d}{dx} \arccos(1 - 2\,x^3) = -\frac{1}{\sqrt{1 - (1 - 2\,x^3)^2}}\,(-6\,x^2) = \frac{6\,x^2}{\sqrt{1 - (1 - 2\,x^3)^2}}.$$

  Si vede facilmente che questa quantità è positiva per $0 < x < \sqrt[3]{1/2}$, quindi la funzione è crescente su questo intervallo;

- se $\sqrt[3]{1/2} < x < 1$, allora
$$2\,x^3 - 1 > 0 \qquad \text{quindi} \qquad |2\,x^3 - 1| = 2\,x^3 - 1.$$
Dobbiamo allora derivare la funzione $\arccos(2\,x^3 - 1)$. Si ha
$$\frac{d}{dx}\arccos(2\,x^3 - 1) = -\frac{1}{\sqrt{1-(2\,x^3-1)^2}}\,(6\,x^2) = -\frac{6\,x^2}{\sqrt{1-(2\,x^3-1)^2}},$$
che è negativa sull'intervallo che stiamo guardando. Quindi la funzione è ivi decrescente.

Abbiamo dunque ottenuto che
$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}},$$
è (unico) punto di massimo ed il valore massimo è
$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$
Inoltre si vede facilmente che $x = 0$ e $x = 1$ sono (unici) punti di minimo, in corrispondenza dei quali la funzione vale
$$\arccos(1) = 0.$$
Dobbiamo infine studiare il comportamento della derivata quando l'argomento x tende ad un punto di accumulazione di D', che non sta in D'. Ovvero dobbiamo calcolare
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{d}{dx}\arccos(|2\,x^3-1|), \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{d}{dx}\arccos(|2\,x^3-1|),$$
$$\lim_{x\to\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^-}\frac{d}{dx}\arccos(|2\,x^3-1|), \qquad \lim_{x\to\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^+}\frac{d}{dx}\arccos(|2\,x^3-1|).$$
I secondi due limiti sono facili da calcolare, in quanto non presentano forme indeterminate. Si ha
$$\lim_{x\to\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^-}\frac{d}{dx}\arccos(|2\,x^3-1|) = \lim_{x\to\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^-}\frac{6\,x^2}{\sqrt{1-(1-2\,x^3)^2}} = 6\,\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}},$$
e
$$\lim_{x\to\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^+}\frac{d}{dx}\arccos(|2\,x^3-1|) = \lim_{x\to\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^+}\frac{-6\,x^2}{\sqrt{1-(2\,x^3-1)^2}} = -6\,\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$
Ne concludiamo che in $x = \sqrt[3]{1/2}$ c'è un punto angoloso. Anche il limite per $x \to 1^-$ non presenta una forma indeterminata, dal momento che il denominatore si annulla, ma il numeratore no. Abbiamo allora
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{d}{dx}\arccos(|2\,x^3-1|) = \lim_{x\to 1^-}\frac{-6\,x^2}{\sqrt{1-(2\,x^3-1)^2}} = -\infty,$$
ovvero in $x = -1$ abbiamo un punto a tangente verticale. Infine, nello studiare il comportamento vicino, ci troviamo di fronte una forma indeterminata del tipo $0/0$. Si osservi allora che usando il limite notevole (4.3.12), si ha
$$1-(1-2\,x^3)^2 = -\Big((1-2\,x^3)^2 - 1\Big) \sim -2\cdot(-2\,x^3) = 4\,x^3, \qquad \text{per } x \to 0.$$
Abbiamo allora
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{d}{dx}\arccos(|2\,x^3-1|) = \lim_{x\to 0^+}\frac{6\,x^2}{\sqrt{1-(1-2\,x^3)^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{6\,x^2}{\sqrt{4\,x^3}} = 0.$$

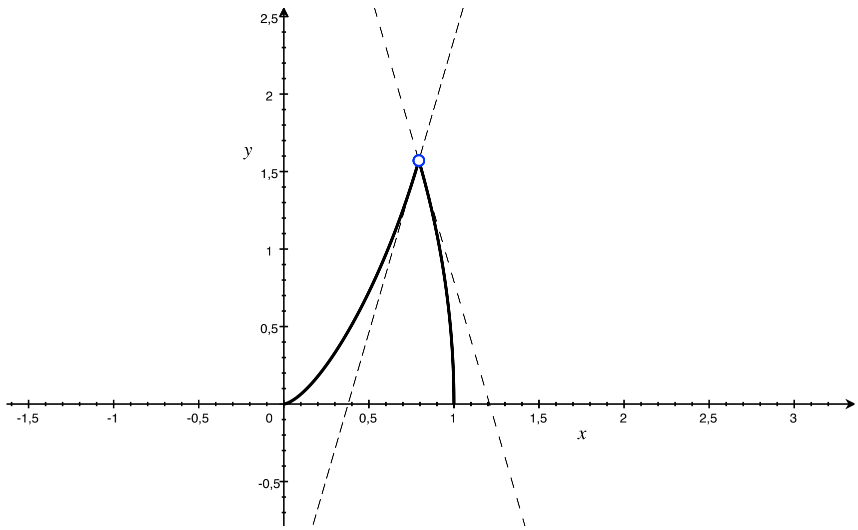

Figura 7. Il grafico della funzione dell'Esercizio 5.8.12. In evidenza, le due rette tangenti "limite", in corrispondenza del punto angoloso.

Il grafico della funzione funzione ha quindi tangente orizzontale in $x = 0$. □

8.3. Sviluppi di Taylor.

Esercizio 5.8.13. *Dare la formula di Taylor all'ordine* 5 *centrata in* $x_0 = 0$ *per la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-(1-\cos x)},$$

e che la quantità $1 - \cos x$ è un infinitesimo per x che tende a 0. Usiamo quindi la formula (5.7.19) con $1 - \cos x$ al posto di x, ottenendo così

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + (1-\cos x) + (1-\cos x)^2 + (1-\cos x)^3 + o\Big((1-\cos x)^3\Big).$$

Sostituiamo adesso al posto di $1 - \cos x$ il suo sviluppo di Taylor in 0, che possiamo facilmente ricavare da (5.7.17): dal momento che dobbiamo arrivare all'ordine 5 e vale

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5),$$

possiamo quindi limitarci a sostituire

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} = 1 &+ \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 \\ &+ \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^3 + o\left(\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^3\right).\end{aligned}$$

Svolgiamo adesso tutti i i conti, ricordandoci ogni volta che ci interessa solo arrivare fino all'ordine 5: ometteremo quindi di scrivere tutto ciò che è *o-piccolo* di x^5. Si ha quindi

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 = \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^5),$$

e

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^3 = o(x^5).$$

Da questo otteniamo allora

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5)\\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5),\end{aligned}$$

concludendo così l'esercizio. □

Esercizio 5.8.14 (Tangente)**.** *Dare la formula di Taylor all'ordine* 5 *centrata in* $x_0 = 0$ *per la funzione*

$$f(x) = \tan x.$$

Soluzione. È sufficiente osservare che

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}$$

ed usare poi lo sviluppo all'ordine 5 per le due funzioni separatemente. Si ha allora

$$\begin{aligned}\tan x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)\right)\\ &= x + \frac{x^3}{2} + \frac{5}{24}x^5 + \left(-\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12}\right) + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 5.8.15 (Arco tangente)**.** *Dare la formula di Taylor all'ordine* 5 *centrata in* $x_0 = 0$ *per la funzione*

$$f(x) = \arctan x.$$

Dimostrazione. Osserviamo che l'arco tangente è una funzione dispari, quindi sappiamo già che il suo sviluppo deve essere della forma

$$\arctan x = a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + o(x^5),$$

i.e. contiene solo i termini di ordine dispari. Osserviamo inoltre che

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Dalla formula (5.7.20) con x^2 al posto di x, si ottiene

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4).$$

Si ottiene quindi, sfruttando la relazione tra arco tangente e $1/(1+x^2)$

$$a + 3\,b\,x^2 + 5\,c\,x^4 + o(x^4) = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4).$$

Identificando i coefficienti dello stesso ordine, si trova

$$a = 1 \qquad b = -\frac{1}{3} \qquad c = \frac{1}{5},$$

ovvero

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5), \tag{5.8.26}$$

concludendo così l'esercizio □

Esercizio 5.8.16. *Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, dare la formula di Taylor all'ordine n centrata in $x_0 = 0$ per la funzione*

$$f(x) = (1+x)^\alpha.$$

Soluzione. Osserviamo che la funzione in esame è derivabile infinite volte, per x vicino a 0. Si ha inoltre

$$f'(x) = \alpha\,(1+x)^{\alpha-1},$$

ed iterando, si ottiene

$$f^{(k)}(x) = \alpha\,(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-(k-1))\,(1+x)^{\alpha-k}.$$

Valutando queste derivate in 0, si ottiene

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-(k-1))}{k!}.$$

Utilizzando la formula generale, abbiamo dunque

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-(k-1))}{k!}\,x^k + o(x^k), \qquad \text{per } x \to 0. \tag{5.8.27}$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 5.8.17. *Dare la formula di Taylor all'ordine 3 centrata in $x_0 = 0$ per la funzione*

$$f(x) = \sqrt{(1+x)^3}.$$

Soluzione. Osserviamo che la funzione può essere scritta come

$$f(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}}.$$

Ci basta quindi usare la formula (5.8.27) dell'esercizio precedente, con le scelte

$$\alpha = \frac{3}{2} \qquad \text{e} \qquad n = 3.$$

Si ottiene allora

$$\sqrt{(1+x)^3} = 1 + \frac{3}{2}\,x + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2!} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\,\frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

ovvero

$$\sqrt{(1+x)^3} = 1 + \frac{3}{2}\,x + \frac{3}{8}\,x^2 - \frac{1}{16}\,x^3 + o(x^3), \qquad \text{se } x \to 0. \tag{5.8.28}$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 5.8.18. *Dare la formula di Taylor all'ordine* 5 *centrata in* $x_0 = 0$ *per la funzione*

$$f(x) = \arcsin x.$$

Dimostrazione. Osserviamo che se poniamo

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

si ha

$$f'(x) = g(x) \qquad \text{e quindi} \qquad f^{(k)}(x) = g^{(k-1)}(x), \qquad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

Osservando che $f(0) = \arcsin(0) = 0$, abbiamo quindi

$$\arcsin x = g(0)\,x + \frac{g'(0)}{2!}\,x^2 + \frac{g''(0)}{3!}\,x^3 + \frac{g'''(0)}{4!}\,x^4 + \frac{g^{(4)}(0)}{5!}\,x^5 + o(x^5), \qquad \text{se } x \to 0. \tag{5.8.29}$$

Al fine di determinare i coefficienti $g^{(k)}(0)$, osserviamo che usando la formula (5.8.27) con $\alpha = -1/2$ e $-x^2$ al posto di x, si ha

$$\begin{aligned} g(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}\cdot(-x^2) + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\frac{(-x^2)^2}{2!} + o((-x^2)^2) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}\,x^4 + o(x^4), \qquad \text{per } x \to 0. \end{aligned}$$

Quest'ultimo rappresenta la formula di Taylor per la funzione g all'ordine 4, centrata in $x_0 = 0$- Ricordando la relazione tra i coefficienti dello sviluppo e le derivate di g calcolate in 0, deve risultare

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = 0, \quad \frac{g''(0)}{2!} = \frac{1}{2}, \quad \frac{g'''(0)}{3!} = 0, \quad \frac{g^{(4)}}{4!} = \frac{3}{8},$$

ovvero

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = 1, \quad g'''(0) = 0, \quad g^{(4)} = \frac{3}{8}\cdot 4! = 9.$$

Inserendo questa informazione in (5.8.29), si ha allora

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{9}{5!}\,x^5 + o(x^5), \qquad \text{se } x \to 0.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 5.8.19. *Dare la formula di Taylor all'ordine* 4 *centrata in* $x_0 = 0$ *per la funzione*

$$f(x) = \arctan(x^2 - x).$$

Soluzione. Dalla formula (5.8.26) con $x^2 - x$ al posto di x, si ottiene

$$\arctan(x^2-x) = (x^2-x) - \frac{(x^2-x)^3}{3} + o\Big((x^2-x)^4\Big).$$

Si osservi che

$$\frac{(x^2-x)^3}{3} = \frac{x^6 - 3\,x^5 + 3\,x^4 - x^3}{3} = -\frac{x^3}{3} + x^4 + o(x^4),$$

e

$$o\Big((x^2-x)^4\Big) = o(x^4).$$

Otteniamo quindi

$$\arctan(x^2-x) = -x + x^2 + \frac{x^3}{3} + x^4 + o(x^4),$$

come volevamo. □

Esercizio 5.8.20. *Calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x^2-x)+e^x-\sqrt{(1+x^2)^3}}{\log(1+x^3)}.$$

Soluzione. Il limite si presenta come una forma indeterminata del tipo $0/0$. Osserviamo innanzitutto che

$$\log(1+x^3) = x^3 + o(x^3),$$

grazie alla formula (5.7.22) con x^3 al posto di x. Quindi il denominatore è un infinitesimo di ordine 3. Procediamo a fare uno sviluppo della funzione al numeratore, arrivando anche qua all'ordine 3: si ricordi che (si veda l'esercizio precedente per lo sviluppo della prima funzione)

$$\arctan(x^2-x) = -x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

e prendendo lo sviluppo (5.8.28) con x^2 al posto di x

$$\sqrt{(1+x^2)^3} = 1 + \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{3}{8}\,x^4 + o(x^4) = 1 + \frac{3}{2}\,x^2 + o(x^3).$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x^2-x)+e^x-\sqrt{(1+x^2)^3}}{\log(1+x^3)} \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{-x+x^2+\dfrac{x^3}{3}+1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}-1-\dfrac{3}{2}\,x^2+o(x^3)}{x^3+o(x^3)} \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{2}\,x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 5.8.21. *Calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\arcsin x - \tan x - x}{x - \dfrac{x^3}{6} - \sin x}.$$

Soluzione. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $0/0$. Utilizziamo degli sviluppi di Taylor, partendo dal denominatore: si ha

$$x - \frac{x^3}{6} - \sin x = x - \frac{x^3}{6} - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) = -\frac{x^5}{5!} + o(x^5), \qquad \text{per } x \to 0.$$

Abbiamo quindi che il denominatore è un infinitesimo di ordine 5. Nello sviluppare il numeratore, ci converrà quindi arrivare al quinto ordine. Usiamo gli Esercizi 5.8.14 e 5.8.18 e scriviamo

$$\begin{aligned}
2\,\arcsin x - \tan x - x &= 2\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{9}{5!}\,x^5 + o(x^5)\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}\,x^5 + o(x^5)\right) - x \\
&= \left(\frac{18}{5!} - \frac{2}{15}\right)\,x^5 + o(x^5) \\
&= \left(\frac{3}{20} - \frac{2}{15}\right)\,x^5 + o(x^5) = \frac{1}{60}\,x^5 + o(x^5), \qquad \text{per } x \to 0.
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\arcsin x - \tan x - x}{x - \dfrac{x^3}{6} - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{60}\,x^5 + o(x^5)}{-\dfrac{x^5}{5!} + o(x^5)} = -2.$$

Questo conclude l'esercizio. $\square$

Capitolo 6

Calcolo integrale per funzioni di una variabile

1. Il problema delle aree

Il problema che vogliamo trattare in questo capitolo è il seguente: calcolare l'area di una figura piana qualsiasi. Più precisamente, data una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ che assumiamo positiva per il momento, vorremo un metodo operativo per calcolare l'area del suo *sottografico*, ovvero della regione di piano

$$\Gamma(f;[a,b]) = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [a,b],\ 0 \le y \le f(x)\Big\},$$

si veda la Figura 1.

L'idea, molto semplice, è quella di usare un procedimento di approssimazione dell'insieme $\Gamma(f;[a,b])$, tramite figure geometriche più semplici. Più precisamente, proviamo ad approssimare *per difetto* l'area del sottografico, prendendo una somma di rettangoli, ognuno "contenuto" nel sottografico. Per il momento, piuttosto che usare formule complicate, possiamo riferirci alla Figura 2 per capire l'idea da utilizzare.

In modo del tutto simile, possiamo approssimare l'area *per eccesso*, prendendo dei rettangoli la cui unione contenga il sottografico. Riferiamoci alla Figura 3.

Si vede facilmente che in generale entrambe le costruzioni danno soltanto un valore approssimato dell'area. Quello che possiamo fare però, è cercare di rendere queste approssimazioni sempre più precise, prendendo dei rettangoli sempre più "stretti". In altre parole, vorremo utilizzare un procedimento di limite, in cui le basi dei rettangoli diventano infinitesime...Questa è esattamente l'idea che sta alla base dell'*integrale di Riemann*.

Esempio 6.1.1. Si consideri la funzione $f(x) = x$ sull'intervallo, proviamo ad usare in modo "artigianale" l'idea precedente, per calcolare l'area del sottografico

$$\Gamma(f;[0,1]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0,1],\ 0 \le y \le x\}.$$

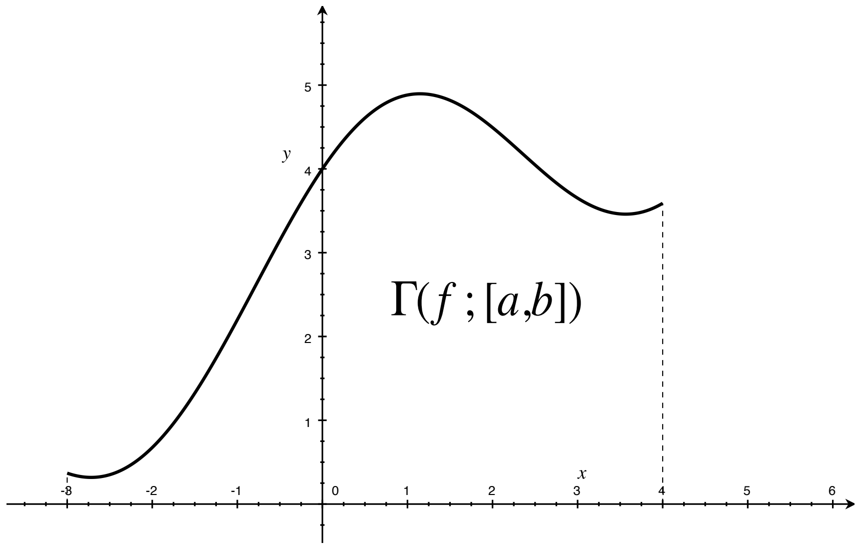

Figura 1. Il sottografico di f.

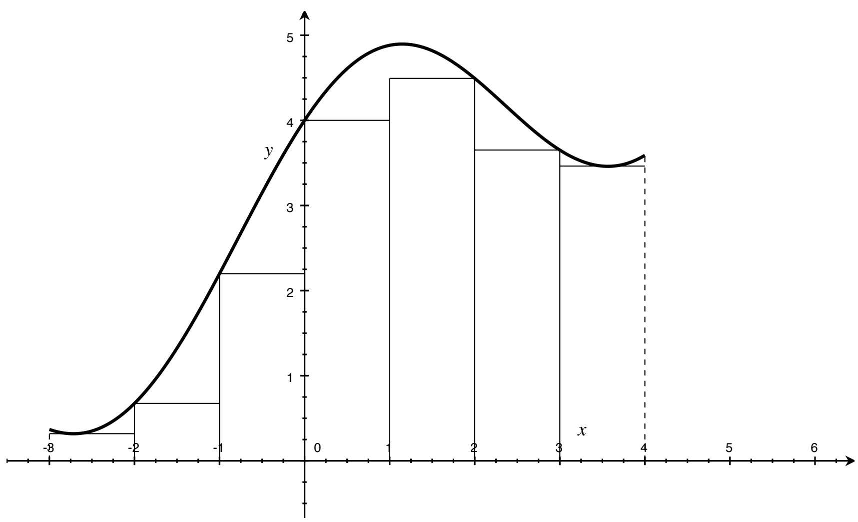

Figura 2. La somma delle aree dei rettangoli evidenziati in figura, approssima per difetto l'area del sottografico di f.

Si osservi che questo insieme non è nient'altro che un triangolo rettangolo isoscele, con cateti aventi lunghezza 1. La sua area dovrà quindi essere uguale a $1/2$. Vediamo se ritroviamo lo stesso risultato con l'idea di approssimazione precedente: per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, prendiamo la suddivisione regolare di $[0, 1]$ definita da

$$t_i = \frac{i}{n}, \qquad \text{per } i = 0, \dots, n.$$

La corrispondente approssimazione per difetto dell'area sarà data da

$$S_-(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\, t_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n^2},$$

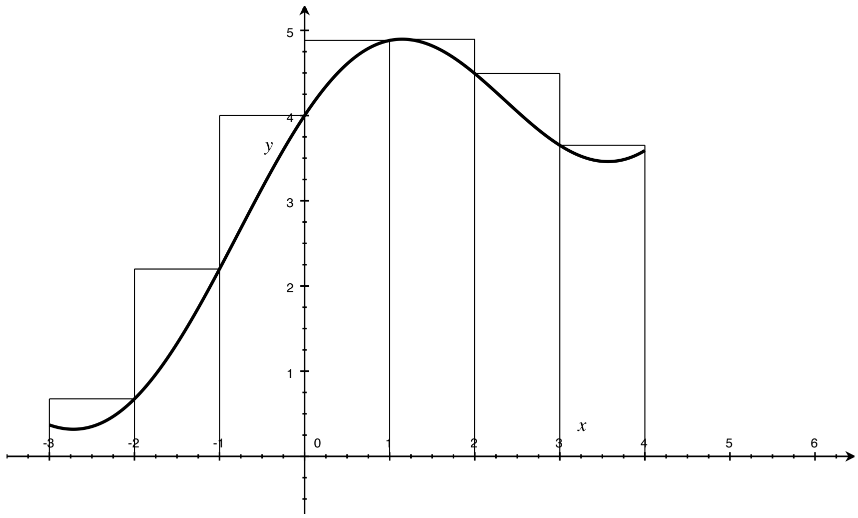

Figura 3. La somma delle aree dei rettangoli evidenziati in figura, approssima per eccesso l'area del sottografico di f.

dal momento che l'$i-$esimo rettangolo ha base lunga $1/n$ ed altezza $t_i = i/n$. Ricordando l'Esercizio 1.8.9, possiamo calcolare esplicitamente la somma precedente ed ottenere che

$$S_-(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n^2} = \frac{1}{n^2}\,\frac{(n-1)\,n}{2}.$$

In modo simile, la corrispondente approssimazione per eccesso dell'area sarà data da

$$S_+(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\,t_{i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\,\frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Osserviamo che effettivamente si ha proprio

$$\lim_{n\to\infty} S_-(n) = \lim_{n\to\infty} S_+(n) = \frac{1}{2}.$$

2. L'integrale di Riemann

Definizione 6.2.1. Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato. L'insieme di punti $\{t_0,\dots,t_n\} \subset [a,b]$ si dice una *partizione di* $[a,b]$ se valgono le due proprietà seguenti:

- $t_i < t_{i+1}$, per ogni $i = 0,\dots,n-1$;
- $t_0 = a$ e $t_n = b$.

Indichiamo con $\mathcal{P}([a,b])$ l'insieme delle partizioni di $[a,b]$.

Cerchiamo adesso di formalizzare rigorosamente la costruzione della sezione precedente.

Definizione 6.2.2. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione, per ogni $\{t_0,\dots,t_n\} \in \mathcal{P}([a,b])$ si definisce

$$S_-(f;\{t_0,\dots,t_n\}) = \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)\cdot \inf_{[t_i,t_{i+1}]} f,$$

la *somma di Riemann inferiore di f subordinata alla partizione* $\{t_0, \ldots, t_n\}$. Analogamente, si definisce

$$S_+(f; \{t_0, \ldots, t_n\}) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \cdot \sup_{[t_i, t_{i+1}]} f,$$

e si chiama *somma di Riemann superiore di f subordinata alla partizione* $\{t_0, \ldots, t_n\}$.

Osservazione 6.2.3. Nel caso in cui $f(x) \geq 0$, non è difficile convincersi che $S_-(f; \{t_0, \ldots, t_n\})$ rappresenta un'approssimazione per difetto dell'area del sottografico, mentre $S_+(f; \{t_0, \ldots, t_n\})$ rappresenta un'approssimazione per eccesso. Osserviamo anche che, per costruzione, si ha

$$S_+(f; \{t_0, \ldots, t_n\}) \geq S_-(f; \{x_0, \ldots, x_k\}),$$

per ogni coppia di partizioni $\{t_0, \ldots, t_n\}, \{x_0, \ldots, x_k\} \in \mathcal{P}([a, b])$.

Definizione 6.2.4. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, definiamo

$$S_- = \sup \Big\{ S_-(f; \{t_0, \ldots, t_n\}) \,:\, \{t_0, \ldots, t_n\} \in \mathcal{P}([a, b]) \Big\},$$

e

$$S_+ = \inf \Big\{ S_+(f; \{t_0, \ldots, t_n\}) \,:\, \{t_0, \ldots, t_n\} \in \mathcal{P}([a, b]) \Big\}.$$

Si dice che f è *Riemann integrabile su* $[a, b]$ se vale

$$S_+ = S_-.$$

In tal caso, indichiamo questo valore comune con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

e lo chiameremo *integrale di Riemann di f su* $[a, b]$.

Proposizione 6.2.5. *Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è Riemann integrabile su $[a, b]$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una partizione $\{t_0, \ldots, t_m\}$ tale che*

$$S_+(f; \{t_0, \ldots, t_m\}) - S_-(f; \{t_0, \ldots, t_m\}) < \varepsilon.$$

Teorema 6.2.6 (Condizioni sufficienti di integrabilità)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione, avente almeno una delle due proprietà seguenti:*

- *f è continua su $[a, b]$;*
- *f è monotona su $[a, b]$.*

Allora f è Riemann integrabile su $[a, b]$.

3. Il Teorema fondamentale del calcolo integrale

Proposizione 6.3.1 (Media integrale)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste $\xi \in [a, b]$ tale che*

$$f(\xi) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dimostrazione. Dal momento che f è continua su un intervallo chiuso e limitato, dal *Teorema di Weierstrass* (vedi Teorema 4.4.6), sappiamo che f ammette massimo e minimo su $[a, b]$. Indichiamoli con

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{e} \qquad M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Per definizione di massimo e minimo, si ha dunque

$$m \leq f(x) \leq M, \qquad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

Integrando ed usando la monotonia dell'integrale, si ottiene allora

$$m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \int_a^b dx,$$

ovvero, ricordando che $\int_a^b dx = (b - a)$, questo è equivalente a

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Abbiamo quindi che la quantità

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx,$$

che si dice *media integrale di f su* $[a, b]$, è una quantità compresa tra il minimo ed il massimo di f. Dal *Teorema dei valori intermedi* (vedi Teorema 4.4.5), abbiamo allora che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \in f([a, b]),$$

ovvero, per definizione di immagine di una funzione, si ha che esiste $\xi \in [a, b]$ tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Grazie al risultato precedente, possiamo ottenere

Teorema 6.3.2 (fondamentale del calcolo integrale)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora la* funzione integrale di f *definita da*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad \textit{per } x \in [a, b],$$

è derivabile su (a, b) e si ha

$$F'(x) = f(x), \qquad \textit{per ogni } x \in (a, b).$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che F è ben definita, dal momento che per il Teorema 6.2.6 f è Riemann integrabile su $[a, x]$ per ogni $x \in [a, b]$.

Per dimostrare che F è derivabile, dimostreremo che F soddisfa la Definizione 5.2.1. Sia dunque $x \in (a, b)$ e prendiamo $h \neq 0$ sufficientemente piccolo, in modo che $x + h \in (a, b)$. Per semplicità, assumiamo che sia $h > 0$. Consideriamo il rapporto incrementale di F nel punto x: in base alle proprietà dell'integrale, abbiamo

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\displaystyle\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Dobbiamo adesso dimostrare che esiste finito il limite per h che tende a 0 dell'ultima quantità. A tale scopo, utilizziamo la Proposizione 6.3.1, con la scelta

$$a = x \qquad \text{e} \qquad b = x + h.$$

Abbiamo allora che esiste $\xi \in [x, x+h]$ tale che

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt = f(\xi).$$

Osserviamo adesso che f è continua e che, al tendere di h a 0, per costruzione abbiamo che ξ tende ad x. Otteniamo dunque

$$F'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} f(\xi) = f(x).$$

Per dimostrare che anche il limite sinistro esiste finito e coincide con $f(x)$, basta ripetere i ragionamenti precedenti con $h < 0$, osservando che stavolta

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = -\frac{1}{h} \int_{x+h}^{x} f(t)\, dt.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Definizione 6.3.3. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione, chiamiamo *primitiva di f su (a, b)* ogni funzione $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che

$$F'(x) = f(x), \qquad \text{per ogni } x \in (a, b).$$

Osservazione 6.3.4. Il Teorema 6.3.2 può essere quindi riformulato dicendo che, quando f è continua su $[a, b]$, la sua funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

è una primitiva di f.

Proposizione 6.3.5. *Sia $H : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Se $H'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che*

$$H(x) = c, \qquad \textit{per ogni } x \in (a, b).$$

In particolare, se abbiamo $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $F, G : (a, b) \to \mathbb{R}$ sono due primitive di f su (a, b), allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$G(x) = F(x) + c, \qquad \textit{per ogni } x \in (a, b).$$

Dimostrazione. Supponiamo che H sia tale che $H'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Allora, dal *test di monotonia* (vedi Corollario 5.5.8), otteniamo che H deve essere sia monotona crescente che monotona decrescente su (a, b). L'unica possibilità è dunque che H sia costante.

Supponiamo adesso che $F, G : (a, b) \to \mathbb{R}$ siano due primitive su (a, b) di f. Allora se definiamo $H(x) = F(x) - G(x)$, risulta

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \qquad \text{per ogni } x \in (a, b).$$

Dalla prima parte della dimostrazione, se ne conclude che $H = F - G$ debba essere costante su (a, b). Questo conclude la dimostrazione. □

Unendo il Teorema 6.3.2 con la Proposizione 6.3.5, otteniamo il metodo per calcolare l'integrale di Riemann di una funzione continua, senza dover ricorrere ogni volta alla sua definizione.

Corollario 6.3.6. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia G una primitiva di f. Allora vale*

$$\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a).$$

Dimostrazione. Dal Teorema 6.3.2, sappiamo che la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

è una primitiva di f. Dalla Proposizione 6.3.5, sappiamo che se G è un'altra primitiva, abbiamo che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$G(x) = F(x) + c.$$

Abbiamo allora

$$G(b) - G(a) = \Big(F(b) + c\Big) - \Big(F(a) + c\Big) = F(b) - F(a).$$

Osservando che, in base alla definizione, si ha

$$F(b) = \int_a^b f(t)\, dt \qquad \text{e} \qquad F(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0,$$

otteniamo la conclusione desiderata. □

Osservazione 6.3.7 (Notazione)**.** Talvolta, useremo il simbolo

$$\Big[G(x)\Big]_a^b,$$

per indicare l'operazione $G(b)-G(a)$. Possiamo dunque riscrivere la formula del risultato precedente come segue

$$\int_a^b f(x)\, dx = \Big[G(x)\Big]_a^b.$$

Esempio 6.3.8. La funzione $F(x) = \arctan x$ è una primitiva di

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

su $\mathbb{R}$. Ne segue quindi che

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \Big[\arctan x\Big]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Esempio 6.3.9. La funzione $F(x) = \log(-x)$ è una primitiva di

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

su $(-\infty, 0)$. Abbiamo quindi che

$$\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x}\, dx = \Big[\log(-x)\Big]_{-3}^{-1} = \log(1) - \log(3) = -\log 3.$$

Definizione 6.3.10. Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che esista una primitiva F di f su (a,b). Allora indicheremo con $\int f(x)\,dx$ l'insieme di tutte le sue primitive, ovvero

$$\int f(x)\,dx=\{G:(a,b)\to\mathbb{R} \text{ derivabile}: G'(x)=f(x),\quad \text{per ogni } x\in(a,b)\},$$

e chiameremo $\int f(x)\,dx$ l'*integrale indefinito* della funzione f.

Esempio 6.3.11. Si ha per esempio

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c,\qquad c\in\mathbb{R},$$

dal momento che

$$\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1}=(n+1)\,\frac{x^{(n+1)-1}}{n+1}=x^n.$$

4. Tecniche di integrazione

Il Corollario 6.3.6 è molto importante da un punto di vista pratico, perché riconduce il calcolo dell'integrale di Riemann alla ricerca di una primitiva. Quindi, **dal punto di vista operativo**, possiamo dire che il calcolo di un integrale è l'operazione inversa del calcolo di una derivata.

Questa ultima affermazione dovrebbe rendere chiaro che ogni regola di derivazione (si veda la Sezione 3 del Capitolo 5), dà luogo ad una corrispondente regola di integrazione. Vediamo adesso le due principali.

4.1. Integrazione per parti.

Proposizione 6.4.1 (Integrazione per parti)**.** *Siano $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Allora si ha*

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx=\Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx. \tag{6.4.1}$$

Dimostrazione. Si osservi che, in base alla regola di derivazione **(D2)** (*derivata del prodotto*), la funzione $f\,g$ è una primitiva di $(f\,g)'=f'\,g+f\,g'$, da cui

$$\int_a^b [f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)]\,dx=f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a).$$

Questo implica in particolare che

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx=\Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx,$$

da cui la tesi. □

Esempio 6.4.2. Calcoliamo l'integrale definito

$$\int_1^2 x\,e^x\,dx.$$

Usiamo la formula di integrazione per parti (6.4.1) con la scelta

$$g(x)=x\qquad \text{e}\qquad f'(x)=e^x.$$

Si ottiene allora

$$\begin{aligned}\int_1^2 \underbrace{x}_{g(x)}\,\underbrace{e^x}_{f'(x)}\,dx &= \Big[x\,e^x\Big]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{1}_{g'(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{f(x)}\,dx\\ &= (2\,e^2 - e) - \int_1^2 e^x\,dx\\ &= 2\,e^2 - e - \Big[e^x\Big]_1^2 = 2\,e^2 - e - (e^2 - e) = e^2.\end{aligned}$$

4.2. Cambio di variabile.

Proposizione 6.4.3 (Cambio di variabile)**.** *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e* $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ *una funzione biettiva derivabile. Allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Dimostrazione. Sia G una primitiva di f, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

D'altra parte, dalla regola di derivazione **(D3)** (*derivata della funzione composta*), si ha che

$$\widetilde{G} = G\circ\varphi,$$

è una primitiva di $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$, dal momento che

$$(G\circ\varphi)'(t) = G'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Quindi, per il Corollario 6.3.6, si ha

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \widetilde{G}(\varphi^{-1}(b)) - \widetilde{G}(\varphi^{-1}(a)) = G(b) - G(a),$$

dove abbiamo usato la definizione di funzione inversa. □

Esempio 6.4.4. Calcoliamo l'integrale definito

$$\int_1^2 \cos(3\,x + 2)\,dx.$$

Effettuiamo il cambio di variabile $3\,x + 2 = t$, ovvero $x = \varphi(t) = (t - 2)/3$. Abbiamo allora

$$\int_1^2 \cos(3\,x+2)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(1)}^{\varphi^{-1}(2)} \cos(t)\,\frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}\int_5^8 \cos t\,dt = \frac{\sin(8) - \sin(5)}{3}.$$

5. Esercizi

5.1. Integrazione per parti.

Esercizio 6.5.1. *Si trovi una primitiva definita su* $(0, +\infty)$ *della funzione* $f(x) = \log x$.

Soluzione. Utilizziamo la formula di integrazione per parti, con le scelte

$$f'(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad g(x) = \log x.$$

Si ha allora

$$\int \log x\, dx = x\, \log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x\, \log x - \int dx = x\, \log x - x.$$

Si osservi che effettivamente si ha

$$\frac{d}{dx}(x\, \log x - x) = \log x + x\, \frac{1}{x} - 1 = \log x,$$

quindi la funzione trovata è una primitiva. □

Esercizio 6.5.2. *Calcolare il seguente integrale*

$$\int_2^3 x^2\, \log x\, dx.$$

Soluzione. Utilizziamo la formula di integrazione per parti, con le scelte

$$f'(x) = x^2 \qquad \text{e} \qquad g(x) = \log x.$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \int x^2\, \log x\, dx &= \left[\frac{x^3}{3}\, \log x\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\, dx \\ &= \frac{27}{3}\, \log 3 - \frac{8}{3}\, \log 2 - \left[\frac{x^3}{9}\right]_2^3 \\ &= \frac{27}{3}\, \log 3 - \frac{8}{3}\, \log 2 - \frac{27}{9} + \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 6.5.3. *Si trovi una primitiva della funzione* $f(x) = \cos^2 x$.

Soluzione. Utilizziamo la formula di bisezione (2.4.21) per scrivere

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

Abbiamo allora

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1 + \cos(2\, x)}{2}\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2\, x)}{4},$$

che è la primitiva desiderata. □

Esercizio 6.5.4. *Si trovi una primitiva della funzione* $f(x) = \cos^3 x$.

Soluzione. Utilizziamo la formula di intregrazione per parti, con le scelte

$$f'(x) = \cos x \qquad \text{e} \qquad g(x) = \cos^2 x,$$

si ottiene allora

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \int \cos x\,\cos^2 x\,dx\\ &= \sin x\,\cos^2 x + 2\int \sin^2 x\,\cos x\,dx\\ &= \sin x\,\cos^2 x + 2\int (1-\cos^2 x)\,\cos x\,dx\\ &= \sin x\,\cos^2 x + 2\int \cos x\,dx - 2\int \cos^3 x\,dx.\end{aligned}$$

Nella terza uguaglianza, abbiamo usato il fatto che $\cos^2 x+\sin^2 x = 1$. L'identità precedente implica che

$$3\int \cos^3 x\,dx = \sin x\,\cos^2 x + 2\int \cos x\,dx,$$

e quindi, dividendo per 3 e prendendo una primitiva del coseno, si ottiene

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{3}\,\sin x\,\cos^2 x + \frac{2}{3}\,\sin x.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 6.5.5. *Si trovi una primitiva della funzione* $f(x) = \cos^4 x$.

Soluzione. Utilizzando di nuovo la formula di bisezione (2.4.21), si ha

$$\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 = \left(\frac{1+\cos(2\,x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \cos(2\,x) + \frac{\cos^2(2\,x)}{4}.$$

Sull'ultimo termine, possiamo ulteriormente usare la formula di bisezione ed ottenere

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \frac{1}{4} + \cos(2\,x) + \frac{1+\cos(4\,x)}{8}\\ &= \frac{3}{8} + \cos(2\,x) + \frac{1}{8}\,\cos(4\,x).\end{aligned}$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned}\int \cos^4\,dx &= \int \left[\frac{3}{8} + \cos(2\,x) + \frac{1}{8}\,\cos(4\,x)\right]\,dx\\ &= \frac{3}{8}\,x + \frac{\sin(2\,x)}{2} + \frac{\sin(4\,x)}{32}\end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 6.5.6. *Si trovi una primitiva della funzione* $f(x) = \cos^5 x$.

Soluzione. Utilizziamo la formula di integrazione per parti con le scelte $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \cos^4 x$. Si ha

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x\,dx = \int \cos x\,\cos^4\,dx &= \sin x\,\cos^4 x + 4\int \sin^2 x\,\cos^3 x\,dx\\ &= \sin x\,\cos^4 x + 4\int \cos^3 x\,dx - 4\int \cos^5\,dx.\end{aligned}$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo usato di nuovo che $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. L'indentità precedente implica che

$$5\int \cos^5 x\,dx = \sin x\,\cos^4 x + 4\int \cos^3 x\,dx,$$

da cui, dividendo per 5 e ricordando la primitiva di $\cos^3 x$ trovata precedentemente, si ottiene

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x\,dx &= \frac{1}{5}\left[\sin x\,\cos^4 x + 4\int \cos^3 x\,dx\right]\\ &= \frac{1}{5}\left[\sin x\,\cos^4 x + \frac{4}{3}\,\sin x\,\cos^2 x + \frac{8}{3}\,\sin x\right].\end{aligned}$$

Questo termina l'esercizio. □

Esercizio 6.5.7. *Siano $\alpha \neq 0$ e $\omega > 0$, trovare una primitiva della funzione*

$$f(x) = e^{\alpha\,x}\,\cos(\omega\,x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione. Utilizziamo la formula di integrazione per parti (6.4.1) con le scelte

$$f'(x) = e^{\alpha\,x} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \cos(\omega\,x).$$

Otteniamo

$$\int e^{\alpha\,x}\,\cos(\omega\,x) = \frac{e^{\alpha\,x}}{\alpha}\,\cos(\omega\,x) + \frac{\omega}{\alpha}\int e^{\alpha\,x}\,\sin(\omega\,x)\,dx,$$

che per il momento non sembra molto utile. Utilizziamo ancora una integrazione per parti, con le scelte

$$f'(x) = e^{\alpha\,x} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sin(\omega\,x).$$

in modo da ottenere

$$\begin{aligned}\int e^{\alpha\,x}\,\cos(\omega\,x)\,dx = \frac{e^{\alpha\,x}}{\alpha}\,\cos(\omega\,x) + \frac{\omega}{\alpha^2}\,e^{\alpha\,x}\,\sin(\omega\,x)\\ - \frac{\omega^2}{\alpha^2}\int e^{\alpha\,x}\,\cos(\omega\,x)\,dx.\end{aligned}$$

L'identittà precedente può essere vista come un'equazione algebrica nell'incognita $\int e^{\alpha\,x}\,\cos(\omega\,x)\,dx$. Abbiamo quindi

$$\left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2}\right)\int e^{\alpha\,x}\,\cos(\omega\,x) = \frac{e^{\alpha\,x}}{\alpha}\,\cos(\omega\,x) + \frac{\omega}{\alpha^2}\,e^{\alpha\,x}\,\sin(\omega\,x).$$

Ne concludiamo quindi che

$$F(x) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}\left[\frac{1}{\alpha}\,\cos(\omega\,x) + \frac{\omega}{\alpha^2}\,\sin(\omega\,x)\right]e^{\alpha\,x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

è una primitiva della funzione iniziale. □

Esercizio 6.5.8. *Si calcoli l'integrale seguente*

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Dimostrazione. Ci sono diversi metodi per calcolare questo integrale. Proviamo di nuovo con un'integrazione per parti, abbiamo allora

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \Big[x\sqrt{1-x^2}\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

dove abbiamo usato la formula (6.4.1) con le scelte

$$f'(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Osserviamo adesso che aggiungendo e togliendo 1, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int_0^1 \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= -\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= -\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \Big[\arcsin x\Big]_0^1.\end{aligned}$$

Tornando al nostro integrale ed osservando che

$$\Big[x\sqrt{1-x^2}\Big]_0^1 = 0,$$

abbiamo allora ottenuto

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= -\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

ovvero

$$2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Dividendo ambo i membri per 2, si ha allora

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4},$$

concludendo. □

Esercizio 6.5.9. *Si trovi una primitiva della funzione* $f(x) = (\arcsin x)^2$.

Soluzione. Utilizzando la formula di integrazione per parti, si ottiene

$$\int \arcsin^2 x\,dx = x\,\arcsin^2 x - 2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\arcsin x\,dx.$$

Osserviamo adesso che se poniamo

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad \text{e} \qquad g(x) = 2\arcsin x,$$

l'integrale che dobbiamo calcolare è della forma

$$-2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\arcsin x\,dx = \int f'(x)\,g(x)\,dx.$$

Possiamo quindi usare di nuovo la formula di integrazione per parti ed ottenere,

$$\begin{aligned}\int \arcsin^2 x\,dx &= x\,\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x - 2\int dx\\ &= x\,\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x - 2\,x.\end{aligned}$$

Abbiamo dunque trovato una primitiva della funzione iniziale. □

5.2. Cambio di variabile.

Esercizio 6.5.10. *Sia $\alpha > 0$, si trovi una primitiva della funzione*

$$f(x) = \frac{1}{\alpha + x^2}.$$

Soluzione. Osserviamo che possiamo scrivere

$$\alpha + x^2 = \alpha\left(1 + \frac{x^2}{\alpha}\right) = \alpha\left(1 + \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^2\right).$$

Abbiamo dunque, utilizzando la formula di cambio variabile

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\alpha + x^2}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^2\right)}\,dx &\overset{(x=\sqrt{\alpha}\,t)}{=} \frac{1}{\alpha}\int \frac{1}{1+t^2}\sqrt{\alpha}\,dt\\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\arctan(t)\\ &\overset{(x=\sqrt{\alpha}\,t)}{=} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right),\end{aligned}$$

concludendo. □

Esercizio 6.5.11. *Si trovi una primitiva della funzione*

$$f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}.$$

Soluzione. Osserviamo che il polinomio $1 + x + x^2$ non si annulla mai. Possiamo riscriverlo come segue

$$1 + x + x^2 = 1 - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x + x^2\right) = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} + x\right)^2.$$

Abbiamo quindi

$$\int \frac{1}{1+x+x^2}\,dx = \int \frac{1}{\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} + x\right)^2}\,dx \overset{(x+\frac{1}{2}=t)}{=} \int \frac{1}{\frac{3}{4} + t^2}\,dt.$$

Per calcolare quest'ultima primitiva, possiamo usare l'Esercizio 6.5.10 con la scelta $\alpha = 3/4$, così da ottenere

$$\int \frac{1}{\frac{3}{4} + t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\,t}{\sqrt{3}}\right).$$

Se adesso ricordiamo che $x + 1/2 = t$, si ottiene dalle identità precedenti

$$\int \frac{1}{1+x+x^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}\right),$$

concludendo così l'esercizio. □

Esercizio 6.5.12. *Si generalizzi l'esercizio precedente come segue: siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che*

$$c > 0 \qquad e \qquad b^2 - 4\,a\,c < 0.$$

Trovare una primitiva di

$$f(x) = \frac{1}{a + b\,x + c\,x^2}.$$

Soluzione. Per ipotesi, il polinomio $a + b\,x + c\,x^2$ non si annulla mai. Usiamo lo stesso trucco dell'esercizio precedente, ovvero scriviamo questo polinomio come il quadrato di un binomio pi un resto positivo. Si ha

$$a + b\,x + c\,x^2 = a - \frac{b^2}{4\,c} + \left(\frac{b}{2\sqrt{c}} + \sqrt{c}\,x\right)^2 = \frac{4\,a\,c - b^2}{4\,c} + \left(\frac{b}{2\sqrt{c}} + \sqrt{c}\,x\right)^2.$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a+b\,x+c\,x^2}\,dx &= \int \frac{1}{\dfrac{4\,a\,c-b^2}{4\,c} + \left(\dfrac{b}{2\sqrt{c}} + \sqrt{c}\,x\right)^2}\,dx \\ &\overset{\left(\frac{b}{2\sqrt{c}}+\sqrt{c}\,x=t\right)}{=} \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{1}{\dfrac{4\,a\,c-b^2}{4\,c} + t^2}\,dt.\end{aligned}$$

L'ultima primitiva può essere calcolata utilizzando di nuovo l'Esercizio 6.5.10, stavolta con la scelta

$$\alpha = \frac{4\,a\,c - b^2}{4\,c},$$

che è positivo per ipotesi. Otteniamo allora

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{1}{\dfrac{4\,a\,c-b^2}{4\,c} + t^2}\,dt &= \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{\frac{4\,c}{4\,a\,c-b^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{4\,c}{4\,a\,c-b^2}}\,t\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{4\,a\,c-b^2}} \arctan\left(\frac{2\sqrt{c}\,t}{\sqrt{4\,a\,c-b^2}}\right).\end{aligned}$$

Se adesso si ricorda che

$$\frac{b}{2\sqrt{c}} + \sqrt{c}\,x = t,$$

sostituendo nell'ultima espressione si trova

$$\int \frac{1}{a+b\,x+c\,x^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{4\,a\,c-b^2}} \arctan\left(\frac{b+2\,c\,x}{\sqrt{4\,a\,c-b^2}}\right).$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 6.5.13. *Si calcoli di nuovo l'integrale seguente*

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx,$$

usando stavolta un cambio di variabile.

Soluzione. Abbiamo già calcolato questo integrale nell'Esercizio 6.5.8, vediamo un altro metodo. Operiamo il cambio di variabile

$$x = \sin t \qquad \text{da cui} \qquad dx = \cos t\,dt,$$

con $t \in [0, \pi/2]$, in modo che l'immagine di $\psi(t) = \sin t$ sia tutto l'intervallo $[0, 1]$. Si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1)} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\,\cos t\,dt.\end{aligned}$$

Osserviamo adesso che se $t \in [0, \pi/2]$, allora $\cos t \geq 0$, quindi

$$|\cos t| = \cos t, \qquad \text{per } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Abbiamo allora

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt.$$

L'ultimo integrale può essere calcolato in vari modi, per esempio usando le formule di bisezione, come abbiamo già visto nell'Esercizio 6.5.3. □

Esercizio 6.5.14. *Si trovi una primitiva della funzione*

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

Dimostrazione. Il cambio di variabile dell'esercizio precedente adesso non darà grosse semplificazioni, anzi. Potremmo però operare il cambio[1]

$$x = \sinh t,$$

ricordando l'identità fondamentale per le funzioni iperboliche

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \qquad \text{da cui} \qquad 1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t, \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, si ha

$$\frac{d}{dt}\sinh t = \cosh t,$$

da cui otteniamo la relazione

$$dx = \cosh t\,dt.$$

[1]Si ricordi che

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R},$$

e

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo allora

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+\sinh^2 t}\,\cosh t\,dt = \int \sqrt{\cosh^2 t}\,\cosh t\,dt = \int \cosh^2 t\,dt.$$

Nell'ultima identità, abbiamo sfruttato che il coseno iperbolico è sempre positivo. Dobbiamo adesso cercare una primitiva di $\cosh^2 t$, per fare questo potremmo procedere come nel caso trigonometrico ed usare le formule di bisezione per le funzioni iperboliche (si veda la Sezione 6.6 del Capitolo 2). Usiamo invece un'integrazione per parti, ovvero

$$\begin{aligned}\int \cosh^2 t\,dt = \int \cosh t\,\cosh t\,dt &= \sinh t\,\cosh t - \int \sinh t\,\sinh t\,dt\\ &= \sinh t\,\cosh t - \int \sinh^2 t\,dt\\ &= \sinh t\,\cosh t - \int (\cosh^2 t - 1)\,dt\\ &= \sinh t\,\cosh t + t - \int \cosh^2 t\,dt.\end{aligned}$$

La relazione precedente ci dice che

$$2\int \cosh^2 t\,dt = \sinh t\,\cosh t + t,$$

ovvero

$$\int \cosh^2 t\,dt = \frac{\sinh t\,\cosh t + t}{2}. \tag{6.5.2}$$

Abbiamo quindi ottenuto

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \cosh^2 t\,dt = \frac{\sinh t\,\cosh t + t}{2}, \qquad \text{dove } x = \sinh t.$$

L'esercizio non è ancora finito, dobbiamo far "sparire" la variabile t. Per fare ciò, dobbiamo invertire la relazione

$$x = \sinh t.$$

Ricordando che il seno iperbolico è invertibile e si ha

$$t = \operatorname{arg\,sinh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}),$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\,dx &= \frac{\sinh(\operatorname{arg\,sinh} x)\,\cosh(\operatorname{arg\,sinh} x) + \operatorname{arg\,sinh} x}{2}\\ &= \frac{x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arg\,sinh} x}{2},\end{aligned}$$

ovvero la primitiva cercata. □

Esercizio 6.5.15. *Si calcoli l'integrale indefinito*

$$\int \sqrt{1+x+x^2}\,dx.$$

Soluzione. Si osservi che il polinomio sotto radice non si annulla mai, questo integrale è quindi simile al precedente, per molti versi. Per rendere più esplicita la somiglianza, usiamo di nuovo il trucco di riscrivere

$$1+x+x^2 = 1-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+x^2\right) = \frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}+x\right)^2,$$

da cui

$$\int \sqrt{1+x+x^2}\,dx = \int \sqrt{\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}+x\right)^2}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \sqrt{1+\left(\frac{\frac{1}{2}+x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}\,dx.$$

Facendo il cambio di variabile

$$\frac{\frac{1}{2}+x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = t \qquad \text{da cui} \qquad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dt,$$

ci si riconduce esattamente alla primitiva dell'esercizio precedente, ovvero

$$\int \sqrt{1+x+x^2}\,dx = \frac{3}{4}\int \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{3}{4}\,\frac{t\sqrt{1+t^2}+\operatorname{arg\,sinh} t}{2}.$$

Se adesso si torna alla variabile x, otteniamo

$$\int \sqrt{1+x+x^2}\,dx = \frac{3}{8}\left(\frac{1+2\,x}{\sqrt{3}}\sqrt{1+\left(\frac{1+2\,x}{\sqrt{3}}\right)^2}+\operatorname{arg\,sinh}\left(\frac{1+2\,x}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

Abbiamo quindi trovato una primitiva della funzione in esame. □

Esercizio 6.5.16. *Si calcoli l'integrale indefinito seguente*

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx.$$

Soluzione. Si osservi innanzitutto che la funzione in esame è definita per $|x| \geq 1$, ovvero per $x \geq 1$ e $x \leq -1$. Consideriamo per il momento il caso $x \geq 1$ e facciamo il cambio di variabile

$$x = \cosh t \qquad \text{da cui} \qquad dx = \sinh t\,dt.$$

Si ricordi che il coseno iperbolico non è biettivo, lo diventa quando viene ristretto per esempio alla semiretta $[0,+\infty)$. Possiamo quindi supporre che sia $t \geq 0$. Si ottiene allora

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sqrt{\cosh^2 t-1}\,\sinh t\,dt = \int \sqrt{\sinh^2 t}\,\sinh t\,dt = \int |\sinh t|\,\sinh t\,dt.$$

Osserviamo adesso che per $t \geq 0$ si ha $\sinh t \geq 0$, quindi possiamo arrivare a

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sinh^2 t\,dt, \qquad \text{per } x = \cosh t,\ \text{con } x \geq 1 \text{ e } t \geq 0.$$

Per calcolare una primitiva di $\sinh^2 t$, possiamo sfruttare la relazione fondamentale delle funzioni iperboliche

$$\int \sinh^2 t\,dt = \int (\cosh^2 t-1)\,dt = \int \cosh^2 t\,dt - t.$$

Inoltre, una primitiva di $\cosh^2 t$ l'abbiamo già calcolata in precedenza, ovvero in (6.5.2). Si ottiene allora

$$\int \sinh^2 t\, dt = \frac{\sinh t\, \cosh t + t}{2} - t = \frac{\sinh t\, \cosh t - t}{2}.$$

In definitiva, per il momento abbiamo ottenuto

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \frac{\sinh t\, \cosh t - t}{2}, \qquad \text{per } x = \cosh t, \text{ con } x \geq 1 \text{ e } t \geq 0.$$

Per concludere, dobbiamo sostituire x al posto di t, in modo opportuno. Basterà scrivere

$$t = \arg\cosh x = \log(x + \sqrt{x^2-1}),$$

per trovare la primitiva

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-1}\, dx &= \frac{\sinh(\arg\cosh x)\, x - \arg\cosh x}{2} \\ &= \frac{x\sqrt{x^2-1} - \arg\cosh x}{2}, \qquad \text{per } x \geq 1.\end{aligned}$$

Si osservi che abbiamo usato l'Esercizio 2.8.26, per dire che

$$\sinh(\arg\cosh x) = \sqrt{x^2-1}, \qquad \text{per ogni } x \geq 1.$$

Il calcolo che abbiamo fatto produce una primitiva definita su $[1, +\infty)$. Per trovarne anche una definita su $(-\infty, -1]$, possiamo provare ad andare per analogia: la funzione

$$\frac{x\sqrt{x^2-1} + \arg\cosh(-x)}{2},$$

è definita su $(-\infty, -1]$ e la sua derivata vale

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\frac{x\sqrt{x^2-1} + \arg\cosh(-x)}{2} &= \frac{\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{x^2-1+x^2-1}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1}.\end{aligned}$$

In definitiva, possiamo dire che

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \begin{cases} x\sqrt{x^2-1} - \arg\cosh(x), & \text{per } x \geq 1, \\ x\sqrt{x^2-1} + \arg\cosh(-x), & \text{per } x \leq -1, \end{cases}$$

è una primitiva. □

5.3. Funzioni razionali.

Esercizio 6.5.17. *Si calcoli l'integrale*

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\, dx$$

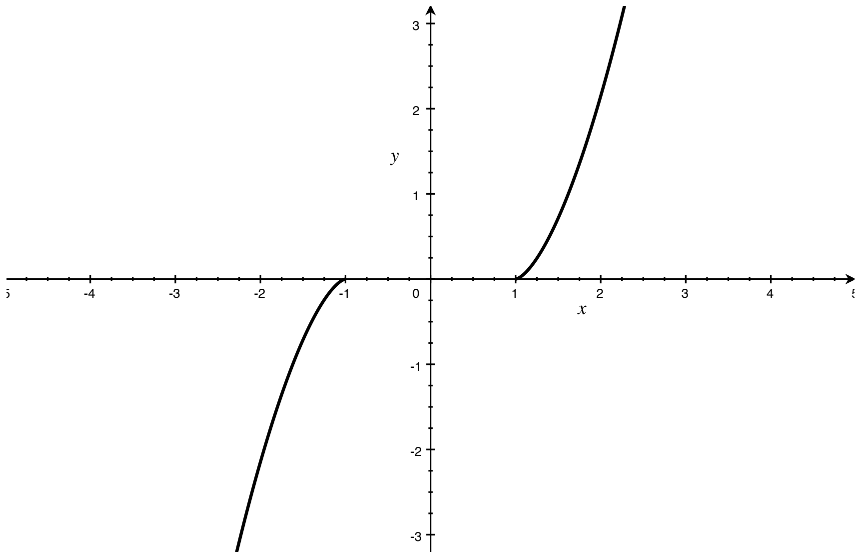

Figura 4. La primitiva di $\sqrt{x^2-1}$ trovata nell'Esercizio 6.5.16.

Soluzione. Osserviamo che il polinomio a denominatore può essere decomposto come

$$x^2 - 1 = (x+1)\,(x-1).$$

Cerchiamo allora di decomporre la funzione razionale come segue

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)\,(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}, \tag{6.5.3}$$

ovvero dobbiamo trovare due coefficienti reali A, B tali che l'identità precedente vale. Moltiplicando ambo i membri di (6.5.3) per $(x-1)$, si ottiene

$$\frac{1}{x+1} = A + \frac{B}{x+1}\,(x-1).$$

Se adesso si prende il limite per $x \to 1$, dall'identità precedente si ottiene

$$\frac{1}{2} = A.$$

Analogamente, moltiplichiamo (6.5.3) per $(x+1)$, ottenendo

$$\frac{1}{x-1} = \frac{A}{x-1}\,(x+1) + B,$$

e prendiamo adesso il limite per $x \to -1$. Si ottiene stavolta

$$-\frac{1}{2} = B.$$

Abbiamo quindi trovato

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}.$$

Ci siamo adesso ridotti a trovare delle primitive elementari, ovvero

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx &= \int_2^3 \left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}\right] dx \\
&= \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\Big[\log|x-1|\Big]_2^3 - \frac{1}{2}\Big[\log|x+1|\Big]_2^3 \\
&= \frac{1}{2}(\log 2 - \log 4 + \log 3) = \log\sqrt{\frac{2\cdot 3}{4}} = \log\sqrt{\frac{3}{2}},
\end{aligned}$$

concludendo. □

Esercizio 6.5.18. *Si trovi una primitiva definita su* $(-1,1)$ *della funzione*

$$f(x) = \frac{3\,x^3+2}{x^2-1}.$$

Dimostrazione. Si osservi che il grado del polinomio al numeratore è più grande di quello al denominatore. Eseguiamo quindi intanto una divisione tra polinomi, ottenendo

$$3\,x^3+2 = 3\,x\,(x^2-1) + 3\,x + 2,$$

da cui

$$\begin{aligned}
\int \frac{3\,x^3+2}{x^2-1}\,dx &= \int \frac{3\,x\,(x^2-1)+3\,x+2}{x^2-1}\,dx \\
&= \int 3\,x\,dx + \int \frac{3\,x+2}{x^2-1}\,dx \\
&= \frac{3}{2}\,x^2 + \int \frac{3\,x}{x^2-1}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2-1}\,dx.
\end{aligned}$$

Osserviamo adesso che

$$\int \frac{3\,x}{x^2-1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2\,x}{x^2-1}\,dx = \frac{3}{2}\,\log|x^2-1|,$$

mentre l'altra primitiva l'abbiamo già calcolata nell'esercizio precedente

$$2\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = 2\,\frac{1}{2}\,\log|x-1| - 2\,\frac{1}{2}\,\log|x+1|.$$

Ricordando che siamo interessati ad una primitiva definita su $(-1,1)$, abbiamo allora che possiamo prendere come primitiva

$$F(x) = \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{3}{2}\,\log(1-x^2) + \log(1-x) - \log(x+1), \qquad \text{per } x \in (-1,1),$$

concludendo. □

Esercizio 6.5.19. *Si trovi una primitiva della funzione*

$$x \mapsto \frac{3\,x+2}{x\,(x^2-1)},$$

precisandone il dominio di definizione.

Soluzione. La funzione di cui stiamo cercando una primitiva è definita su $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$. Osserviamo innanzitutto che il denominatore si decompone come

$$x\,(x^2 - 1) = x\,(x+1)\,(x-1),$$

ovvero il denominatore ha 3 radici reali, ognuna avente molteplicità 1. Cerchiamo allora 3 coefficienti A, B, C tali che

$$\frac{3x+2}{x\,(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Dobbiamo quindi trovare A, B, C tali che

$$\frac{3x+2}{x\,(x^2-1)} = \frac{A\,(x^2-1) + B\,(x^2-x) + C\,(x^2+x)}{x\,(x^2-1)},$$

ovvero

$$3x + 2 = (A+B+C)\,x^2 + (C-B)\,x - A.$$

Dobbiamo quindi risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} A+B+C &= 0 \\ C-B &= 3 \\ A &= -2. \end{cases}$$

Non è difficile vedere che l'unica soluzione è data da

$$A = -2, \qquad B = -\frac{1}{2}, \qquad C = \frac{5}{2}.$$

Possiamo dunque dire che una primitiva è data

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{x\,(x^2-1)}\,dx &= -2\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{5}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= -2\,\log|x| - \frac{1}{2}\,\log|x+1| + \frac{5}{2}\,\log|1-x|,\end{aligned}$$

che è ancora definita su $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$. Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 6.5.20. *Calcolare l'integrale indefinito*

$$\int \frac{x+2}{x^4 - 2\,x^3 + x^2}\,dx.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che il denominatore ha due radici $x = 0$ e $x = 1$ di molteplicità 2, ovvero

$$x^4 - 2\,x^3 + x^2 = x^2\,(x-1)^2.$$

Cerchiamo quindi 4 coefficienti tali che[2]

$$\frac{x+2}{x^4 - 2\,x^3 + x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}. \tag{6.5.4}$$

Moltiplichiamo l'identità precedente per x^2, ottenendo

$$\frac{x+2}{x^2 - 2\,x + 1} = A\,x + B + C\,\frac{x^2}{x-1} + D\,\frac{x^2}{(x-1)^2},$$

[2]Lo studente si convinca, facendo il conto esplicito, che non sarebbe possibile fare la decomposizione

$$\frac{x+2}{x^4 - 2\,x^3 + x^2} = \frac{B}{x^2} + \frac{D}{(x-1)^2}.$$

e prendiamo il limite per $x \to 0$. Questo ci da

$$2 = B.$$

Torniamo adesso a (6.5.4): sostituiamo il valore trovato di B e moltiplichiamo l'identità per $(x-1)^2$. Questo ci da

$$\frac{x+2}{x^2} = A\,\frac{(x-1)^2}{x} + 2\,\frac{(x-1)^2}{x^2} + C\,(x-1) + D,$$

da cui, se prendiamo il limite $x \to 1$, si ottiene

$$D = 3.$$

Ci restano da trovare A, C tali che

$$\frac{x+2}{x^4 - 2\,x^3 + x^2} = \frac{A}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}.$$

Moltiplichiamo di nuovo per x^2 e prendiamo la derivata dell'espressione così ottenuta, ovvero

$$\frac{dx}{dx}\frac{x+2}{x^2 - 2\,x + 1} = \frac{d}{dx}\left(A\,x + 2 + C\,\frac{x^2}{x-1} + 3\,\frac{x^2}{(x-1)^2}\right),$$

che riscriviamo come

$$\frac{(x-1) - 2\,(x+2)}{(x-1)^3} = A + C\,\frac{2\,x\,(x-1) - x^2}{(x-1)^2} + 3\,\frac{2\,x\,(x-1)^2 - 2\,(x-1)\,x^2}{(x-1)^4}.$$

Prendiamo adesso il limite per $x \to 0$, ottenendo in questo modo

$$5 = A.$$

Con un calcolo simile, si trova anche $C = -5$. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^4 - 2\,x^3 + x^2}\,dx &= 5\int \frac{1}{x}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2}\,dx - 5\int \frac{1}{x-1}\,dx + 3\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx \\ &= 5\,\log|x| - \frac{2}{x} - 5\,\log|1-x| - \frac{3}{x-1},\end{aligned}$$

concludendo. □

Esercizio 6.5.21. *Calcolare l'integrale indefinito*

$$\int \frac{x+3}{x + x^2 + x^3}\,dx.$$

Soluzione. Osserviamo che il polinomio al denominatore si può fattorizzare come

$$x + x^2 + x^3 = x\,(1 + x + x^2),$$

ed il polinomio di secondo grado non può essere ulteriormente fattorizzato, dal momento che non ha zeri. Cerchiamo tre coefficienti A, B, C tali che

$$\frac{x+3}{x + x^2 + x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B\,x + C}{1 + x + x^2}.$$

Moltiplichiamo questa identità per x, ottenendo

$$\frac{x+3}{1 + x + x^2} = A + \frac{B\,x^2 + C\,x}{1 + x + x^2}.$$

Prendiamo adesso il limite per $x \to 0$, ottenendo così

$$3 = A.$$

Dobbiamo quindi trovare B, C tali che

$$\frac{x+3}{x+x^2+x^3} = \frac{3}{x} + \frac{B\,x+C}{1+x+x^2},$$

ovvero tali che

$$\frac{x+3}{x+x^2+x^3} - \frac{3}{x} = \frac{B\,x+C}{1+x+x^2}.$$

Questo è equivalente a dire che

$$\frac{x+3-3\,(1+x+x^2)}{x+x^2+x^3} = \frac{B\,x^2+C\,x}{1+x+x^2},$$

deve quindi risultare che

$$-2\,x-3\,x^2 = B\,x^2+C\,x.$$

Si ottiene allora immediatamente

$$B=-3 \qquad \text{e} \qquad C=-2.$$

Abbiamo allora

$$\int \frac{x+3}{x+x^2+x^3}\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{3\,x+2}{1+x+x^2}\,dx.$$

Il primo termine a destra ha una primitiva immediata. Per il secondo, cerchiamo di ricondurci ad una somma di due termini del tipo

$$\frac{2\,x+1}{1+x+x^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{1+x+x^2}.$$

Il primo ci condurrà un logaritmo, mentre il secondo darà luogo ad un'arcotangente, grazie all'Esercizio 6.5.12. Basta osservare che

$$\begin{aligned}\frac{3\,x+2}{1+x+x^2} &= \frac{3\,x}{1+x+x^2} + \frac{2}{1+x+x^2}\\ &= \frac{3}{2}\,\frac{2\,x}{1+x+x^2} + \frac{2}{1+x+x^2}\\ &= \frac{3}{2}\,\frac{2\,x+1-1}{1+x+x^2} + \frac{2}{1+x+x^2}\\ &= \frac{3}{2}\,\frac{2\,x+1}{1+x+x^2} + \left(2-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{1+x+x^2}\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x+x^2+x^3}\,dx &= 2\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{3\,x+2}{1+x+x^2}\,dx\\ &= 2\,\log|x| - \frac{3}{2}\int \frac{2\,x+1}{1+x+x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x+x^2}\,dx\\ &= 2\,\log|x| - \frac{3}{2}\,\log(1+x+x^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\,\arctan\left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}\right),\end{aligned}$$

concludendo così l'esercizio. □

Capitolo 7

Curve nello spazio

1. Preliminari

Indicheremo le componenti di un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ come

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N), \qquad \text{con } x_i \in \mathbb{R}.$$

Il suo *modulo* è definito da

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2}.$$

Si osservi che in base al Teorema di Pitagora, la quantità $|\mathbf{x}|$ rappresenta la distanza dall'origine degli assi $(0, 0, \dots, 0)$ del punto di coordinate $(x_1, x_2, \dots, x_N)$. Equivalentemente, la quantità $|\mathbf{x}|$ rappresenta la lunghezza del vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$. In questo modo, dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ possiamo pensare alla quantità

$$|x - y|,$$

come alla *distanza* tra i due punti $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$.

Lemma 7.1.1 (Stima base)**.** *Per ogni* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$*, si ha*

$$\max\{|x_i| \,:\, i = 1, \dots, N\} \le |\mathbf{x}| \le \sum_{i=1}^{N} |x_i|$$

Dimostrazione. Per dimostrare la prima disuguaglianza, basta osservare che per ogni $j = 1, \dots, N$ si ha

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_j|^2 + \cdots + |x_N|^2 \ge |x_j|^2,$$

e quindi dalla monotonia della funzione radice quadrata, si ottiene

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2} \ge \sqrt{|x_j|^2} = |x_j|.$$

Dal momento che $j = 1, \dots, N$ era arbitrario, si ottiene

$$\max\{|x_i| \,:\, i = 1, \dots, N\} \le |\mathbf{x}|.$$

Per dimostrare l'altra disuguaglianza, cominciamo osservando che vale

$$\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}, \qquad \text{per ogni } a, b \ge 0. \tag{7.1.1}$$

In effetti, la disuguaglianza (7.1.1) è equivalente a (si elevi al quadrato)

$$a + b \le a + 2\sqrt{a\,b} + b, \qquad \text{per ogni } a, b \ge 0,$$

che è banalmente vera. Possiamo usare la (7.1.1) con le scelte

$$a = \sum_{i=1}^{N-1} |x_i|^2 \qquad \text{e} \qquad b = |x_N|^2,$$

ottenendo quindi

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} |x_i|^2 + |x_N|^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} |x_i|^2} + \sqrt{|x_N|^2}$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} |x_i|^2} + |x_N|.$$

Se $N = 2$ abbiamo finito, altrimenti si itera il ragionamento precedente un numero finito di volte. □

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$, il loro *prodotto scalare standard* è definito come

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i.$$

Proposizione 7.1.2 (Disuguaglianza di Schwarz)**.** *Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$, allora vale*

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \le |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|.$$

Dimostrazione. Osserviamo che se almeno uno fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ si annulla, la disuguaglianza è banalmente vera. Assumiamo quindi $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ entrambi non nulli.

Facciamo l'ulteriore ipotesi che $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ siano tali che

$$|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| = 1. \tag{7.1.2}$$

In tal caso usando la disuguaglianza elementare[1]

$$|a\,b| \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \qquad \text{per ogni } a, b \in \mathbb{R},$$

si ottiene

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \left| \sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i \right| \le \sum_{i=1}^{N} |x_i\, y_i| \le \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{|x_i|^2}{2} + \frac{|y_i|^2}{2} \right) = \frac{|\mathbf{x}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{y}|^2}{2} = 1.$$

[1]Detta *disuguaglianza di Young*. Si osservi che la disuguaglianza segue dal fatto banale

$$(a-b)^2 \ge 0 \qquad \text{e} \qquad (a+b)^2 \ge 0,$$

sviluppando il quadrato.

Nell'ultima uguaglianza abbiamo usato (7.1.2). Questo dimostra la disuguaglianza di Schwarz sotto l'ipotesi aggiuntiva (7.1.2).

Dimostriamola adesso in generale: siano $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ entrambi non nulli, allora basta osservare che

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| \left\langle \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \right\rangle,$$

ed usare la disuguaglianza di Schwarz mostrata sopra per i due vettori $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ e $\mathbf{y}/|\mathbf{y}|$ che hanno modulo 1. □

Osservazione 7.1.3 (Il prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$)**.** Nel caso di due vettori di $\mathbb{R}^2$, si ha la formula

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\,\cos\vartheta,$$

dove ϑ è l'angolo compreso tra i due vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. Per dimostrare questa formula, è sufficiente osservare che se si scrivono i due vettori in coordinate polari, i.e.

$$\mathbf{x} = (|\mathbf{x}|\,\cos\vartheta_1, |\mathbf{x}|\,\sin\vartheta_1) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{y} = (|\mathbf{y}|\,\cos\vartheta_2, |\mathbf{y}|\,\sin\vartheta_2),$$

allora in base alla definizione si ottiene

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| \Big(\cos\vartheta_1\,\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\,\sin\vartheta_2\Big) = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\,\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2),$$

dove abbiamo usato le formule di addizione per il coseno. Adesso non è difficile vedere che $\vartheta_1 - \vartheta_2$ è l'angolo formato dai due vettori.

Al fine di dimostrare la prossima disuguaglianza, è utile osservare che

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = |\mathbf{x}|^2, \qquad \text{per ogni } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$$

Proposizione 7.1.4 (Disuguaglianza triangolare)**.** *Per ogni* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$*, si ha*

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|. \tag{7.1.3}$$

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\begin{aligned}|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} = \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle} &= \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle} \\ &= \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2\,\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} \\ &= \sqrt{|\mathbf{x}|^2 - 2\,\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + |\mathbf{y}|^2}.\end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza di Schwarz (Proposizione 7.1.2), abbiamo che

$$-2\,\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \le 2\,|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|,$$

quindi usando la monotonia della funzione $t \mapsto \sqrt{t}$, si ottiene

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{|\mathbf{x}|^2 - 2\,\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + |\mathbf{y}|^2} \le \sqrt{|\mathbf{x}|^2 + 2\,|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2} = \sqrt{(|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2} = |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|,$$

come volevamo dimostrare. □

Osservazione 7.1.5. Come conseguenza della (7.1.3), abbiamo anche che

$$\Big||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|\Big| \le |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \qquad \text{per ogni } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N. \tag{7.1.4}$$

Infatti, scrivendo $\mathbf{x} = \mathbf{x} - -\mathbf{y} + \mathbf{y}$ ed usando la (7.1.3), si ha

$$|\mathbf{x}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y}| \le |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y}|,$$

da cui, sottraendo $|\mathbf{y}|$ ad ambo i membri, si ottiene

$$|\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \tag{7.1.5}$$

Analogamente, si ha anche

$$|\mathbf{y}| = |\mathbf{y} - \mathbf{x} + \mathbf{x}| \leq |\mathbf{y} - \mathbf{x}| + |\mathbf{x}|,$$

da cui, sottraendo $|x|$ ad ambo i membri, si ottiene

$$|\mathbf{y}| - |\mathbf{x}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \tag{7.1.6}$$

Unendo (7.1.5) e (7.1.6), si ottiene la (7.1.4).

2. Curve

Definizione 7.2.1. Siano $a < b$ due numeri reali. Una *curva in* $\mathbb{R}^N$ è una funzione $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$. Osserviamo che per definizione, si ha

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_N(t)), \qquad t \in [a, b],$$

ed ogni *componente* γ_i è una funzione da $[a, b]$ in $\mathbb{R}$.

Esempio 7.2.2 (Interpretazione cinematica)**.** Supponiamo di essere in $\mathbb{R}^3$. Se $[a, b]$ rappresenta un intervallo temporale e la variabile t rappresenta il tempo, la curva γ rappresenta il moto di un punto materiale che si muove nello spazio. Ad ogni istante di tempo $t \in [a, b]$, il punto si troverà alle coordinate

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \in \mathbb{R}^3.$$

Non si deve confondere la curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ con la sua immagine

$$\mathrm{Im}(\gamma) = \gamma([a, b]) = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ \exists t \in [a, b] \text{ tale che } \gamma(t) = x\}.$$

La prima infatti è una funzione, mentre la seconda è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$. L'insieme $\gamma([a, b])$ si chiama *sostegno* della curva.

Diciamo che una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ è *continua in* $t_0 \in [a, b]$ se vale

$$\lim_{t \to t_0} |\gamma(t) - \gamma(t_0)| = 0.$$

Proposizione 7.2.3. *Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ è continua in $t_0 \in [a, b]$ se e solo se tutte le sue componenti $\gamma_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ lo sono.*

Dimostrazione. Supponiamo che γ sia continua in t_0, allora si ha

$$\lim_{t \to t_0} |\gamma(t) - \gamma(t_0)| = 0.$$

Usando il Lemma 7.1.1, si ha

$$|\gamma_i(t) - \gamma_i(t_0)| \leq |\gamma(t) - \gamma(t_0)|, \qquad \text{per ogni } i = 1, \ldots, N.$$

In particolare, ne segue che

$$\lim_{t \to t_0} |\gamma_i(t) - \gamma_i(t_0)| = 0, \qquad \text{per ogni } i = 1, \ldots, N,$$

ovvero ogni componente è continua in t_0. Viceversa, se ogni componente è continua in t_0, allora sempre dal Lemma 7.1.1, si ha

$$\lim_{t \to t_0} |\gamma(t) - \gamma(t_0)| \leq \sum_{i=1}^{N} \lim_{t \to t_0} |\gamma_i(t) - \gamma_i(t_0)| = 0.$$

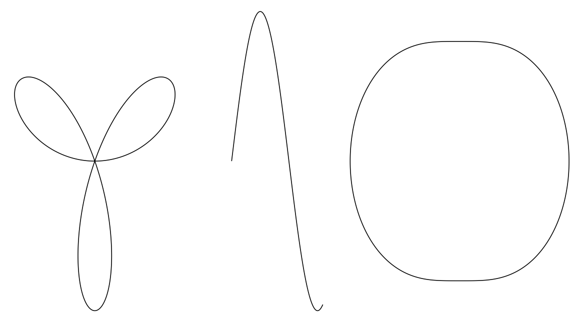

Figura 1. Da sinistra a destra: il sostegno di una curva chiusa che non è semplice; il sostegno di una curva semplice che non è chiusa; il sostegno di un circuito.

Questo conclude la dimostrazione. □

Definizione 7.2.4. Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ una curva continua in ogni punto di $[a, b]$. Si dice che γ è:

- *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$;
- *semplice* se è iniettiva su $[a, b)$;
- un *circuito*, se è semplice e chiusa.

Si veda la Figura 1.

Esempio 7.2.5 (Segmento)**.** Siano $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ due punti. Vogliamo definire una curva il cui sostegno rappresenti il segmento che congiunge $\mathbf{x}$ ad $\mathbf{y}$. Si osservi che tale segmento deve avere la direzione ed il verso del vettore

$$\mathbf{y} - \mathbf{x}.$$

Si può allora prendere $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^N$ definita da

$$\gamma(t) = \mathbf{x} + t\,(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \qquad t \in [0, 1].$$

Si osservi che γ è una curva semplice.

Esempio 7.2.6 (Circonferenza)**.** Si prenda la curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \qquad t \in [0, 1].$$

Il sostegno di tale curva è dato dalla circonferenza di raggio 1 e centro $(0, 0)$. Se poi vogliamo una curva il cui sostegno sia la circonferenza di centro un generico punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e il cui raggio sia $R > 0$, basterà prendere

$$\gamma(t) = (a + R\,\cos t, b + R\,\sin t), \qquad t \in [0, 1].$$

Diciamo che una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ è *derivabile in* $t_0 \in [a, b]$ se esiste il limite

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = \left(\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma_1(t) - \gamma_1(t_0)}{t - t_0}, \dots, \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma_N(t) - \gamma_N(t_0)}{t - t_0} \right),$$

ovvero se ogni componente è derivabile in t_0. Quando ciò avviene, si ha

$$\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \dots, \gamma_N'(t_0)).$$

Osservazione 7.2.7 (Interpretazione cinematica)**.** Se $\gamma(t)$ rappresenta la posizione di un punto materiale all'istante t, possiamo guardare al rapporto incrementale

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0},$$

come al rapporto tra lo spostamento del punto e l'intervallo di tempo in cui questo avviene. Ovvero il rapporto incrementale è della forma

$$\frac{\text{spazio}}{\text{tempo}}.$$

Quando si manda t al limite t_0, quello che si ottiene è il vettore velocità istantanea, al momento t_0. Questa è l'interpretazione da dare al vettore $\gamma'(t)$, che verrà anche detto *vettore velocità della curva* γ.

Analogamente, se la curva è derivabile due volte, il vettore $\gamma''(t)$ si dirà *vettore accelerazione della curva* γ.

Osservazione 7.2.8 (Interpretazione geometrica)**.** Siano $t_0 < t_1$ entrambi appartenenti ad $[a, b]$. La retta passante dai punti $\gamma(t_0)$ e $\gamma(t_1)$ può essere parametrizzata come

$$\gamma(t_0) + (t - t_0)\,\frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Se si passa al limite per $t_1 \to t_0$, si ottiene quindi

$$\gamma(t_0) + (t - t_0)\,\gamma'(t_0),$$

che rappresenta la retta tangente alla curva nel punto $\gamma(t_0)$. Si osservi che la direzione ed il verso di tale retta sono determinati dal vettore $\gamma'(t_0)$. In altre parole, il vettore velocità è tangente alla curva, in ogni punto ove questo è definito.

Definizione 7.2.9. Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ una curva. Si dice che γ è:

- *continua* se è continua in ogni $t_0 \in [a, b]$;
- C^1 se è derivabile in ogni punto $t \in [a, b]$ e la derivata γ' è una funzione continua;
- *regolare* se è C^1 e vale

$$|\gamma'(t)| \neq 0, \qquad \text{per ogni } t \in [a, b].$$

Si osservi che se la curva è regolare, si può definire in ogni suo punto il *versore tangente*. Esso è definito come segue

$$\mathbf{T}_\gamma(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}, \qquad \text{per ogni } t \in [a, b].$$

Ricordiamo la seguente definizione, che abbiamo già visto nel Capitolo 6.

Definizione 7.2.10. Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso a limitato. Siano $t_0, t_1, \ldots, t_n \in [a, b]$, si dice che $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ è una *partizione* di $[a, b]$ se valgono le proprietà seguenti:

- $t_0 = a$ e $t_n = b$;
- $t_i < t_{i+1}$ per ogni $i = 0, \ldots, n - 1$.

Indicheremo con $\mathcal{P}([a, b])$ l'insieme di tutte le partizioni di $[a, b]$.

Definizione 7.2.11. Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ una curva. Si dice che γ è *regolare a tratti* se è continua ed esiste una partizione $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \in \mathcal{P}([a, b])$ tale che γ è regolare su ogni intervallo $[t_i, t_{i+1}]$.

3. Curve rettificabili

Definizione 7.3.1. Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ una curva. Si dice che γ è *rettificabile* se la quantità

$$\ell(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})| \ : \ \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}([a, b]) \right\},$$

è finita. La quantità $\ell(\gamma)$ si chiama *lunghezza* della curva γ.

Più in generale, preso un intervallo $[c, d] \subset [a, b]$, si definisce come *lunghezza di* γ *relativamente all'intervallo* $[c, d]$ la quantità

$$\ell(\gamma; [c, d]) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})| \ : \ \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}([c, d]) \right\}.$$

Osservazione 7.3.2. Prendendo la partizione banale $t_0 = a$ e $t_1 = b$, si ottiene sempre

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| \le \ell(\gamma).$$

Osservazione 7.3.3. Non è difficile vedere che, per una curva rettificabile, vale

$$\ell(\gamma; [a, b]) = \ell(\gamma; [a, c]) + \ell(\gamma; [c, b]), \qquad \text{per ogni } a < c < b.$$

(*lo si provi per esercizio*).

Verificare che una curva è rettificabile usando la definizione precedente può essere molto scomodo. Per questo è utile avere delle condizioni sufficienti, come quella del seguente

Teorema 7.3.4 (di rettificabilità delle curve C^1)**.** *Sia* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ *una curva* C^1 *a tratti. Allora* γ *è rettificabile e vale*

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt. \tag{7.3.7}$$

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che γ è rettificabile. Possiamo supporre senza perdita di generalità che γ sia C^1. Abbiamo quindi che la funzione

$$t \mapsto |\gamma'(t)|,$$

è continua su $[a, b]$ e quindi ivi integrabile secondo Riemann, grazie al Teorema 6.2.6. Analogamente, tutte le componenti

$$t \mapsto \gamma_j'(t), \qquad j = 1, \dots, N,$$

sono continue su $[a, b]$ e quindi ivi integrabili. Prendiamo adesso $[c, d] \subset [a, b]$, scelta una partizione $\{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}([c, d])$ si ha

$$\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) \, dt,$$

e quindi

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) \, dt \right| \le \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)| \, dt.$$

Sommando su i si ottiene

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \le \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)| \, dt = \int_c^d |\gamma'(t)| \, dt.$$

Data l'arbitrarietà della partizione scelta, passando all'estremo superiore si ottiene quindi

$$\sup\left\{\sum_{i=0}^{n-1}|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i+1})|\ :\ \{t_0,t_1,\dots,t_n\}\in\mathcal{P}([c,d])\right\}\le\int_c^d|\gamma'(t)|\,dt.$$

Abbiamo quindi che

$$\ell(\gamma;[c,d])\le\int_c^d|\gamma'(t)|\,dt. \tag{7.3.8}$$

In particolare, prendendo $[c,d]=[a,b]$, questo dimostra che γ è rettificabile ed inoltre che vale

$$\ell(\gamma)\le\int_a^b|\gamma'(t)|\,dt.$$

Dobbiamo adesso dimostrare la disuguaglianza opposta: a tal fine, introduciamo la funzione

$$\psi(t)=\ell(\gamma;[a,t]).$$

Vogliamo dimostrare che tale funzione è derivabile. Cominciamo osservando che (supponiamo per semplicità $h>0$)

$$\frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h}=\frac{\ell(\gamma;[a,t+h])-\ell(\gamma;[a,t])}{h}=\frac{\ell(\gamma;[t,t+h])}{h},$$

grazie all'Osservazione 7.3.3. Usando l'Osservazione 7.3.2, si ha

$$\frac{|\gamma(t+h)-\gamma(t)|}{h}\le\frac{\ell(\gamma;[t,t+h])}{h}=\frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h}.$$

Usando (7.3.8), otteniamo anche

$$\frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h}=\frac{\ell(\gamma;[t,t+h])}{h}\le\frac{1}{h}\int_t^{t+h}|\gamma'(t)|\,dt=|\gamma'(t_h)|,$$

dove abbiamo usato la *Media integrale* nell'ultima identità (si veda Proposizione 6.3.1), avendo preso $t_h\in[t,t+h]$. Abbiamo quindi dimostrato che

$$\frac{|\gamma(t+h)-\gamma(t)|}{h}\le\frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h}\le|\gamma'(t_h)|,\qquad\text{per } h>0. \tag{7.3.9}$$

Non ci resta da osservare che le due quantità agli estremi ammettono limite, infatti: dalla continuità di $t\mapsto|\gamma'(t)|$, si ottiene

$$\lim_{h\to 0}|\gamma'(t_h)|=|\gamma'(t)|.$$

D'altra parte, usando che γ è derivabile ed la (7.1.4), si ha

$$\lim_{h\to 0}\left|\left|\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}\right|-|\gamma'(t)|\right|\le\lim_{h\to 0}\left|\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}-\gamma'(t)\right|=0,$$

passando al limite in (7.3.9) ed usando il *criterio del confronto* (si veda Teorema 4.2.6), si ottiene che ψ è derivabile e vale

$$\psi'(t)=|\gamma'(t)|.$$

Integrando su $[a,b]$ ed usando il Corollario 6.3.6, si ottiene

$$\psi(b)-\psi(a)=\int_a^b|\gamma'(t)|\,dt.$$

Infine, se si ricorda la definizione di ψ, si ottiene il risultato voluto. $\square$

Osservazione 7.3.5 (Interpretazione cinematica)**.** Si osservi che la formula

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt,$$

è assolutamente sensata da un punto di vista fisico. Infatti $|\gamma'(t)|$ è il modulo del vettore velocità al tempo t, mentre dt va pensato come un intervallo infinitesimale di tempo. Quindi il termine

$$|\gamma'(t)|\, dt$$

ha le dimensione fisiche

$$\text{velocità} \times \text{tempo},$$

e rappresenta quindi uno spostamento istantaneo. "Sommando" tutti questi spostamenti (ovvero integrando in t), si ottiene quindi lo spazio percorso dal punto materiale che si muove secondo la legge γ.

4. Riparametrizzazioni

Definizione 7.4.1. Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ una curva. Sia $\phi : [c, d] \to [a, b]$ una funzione continua e invertibile. Allora la nuova curva

$$\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \phi : [c, d] \to \mathbb{R}^N,$$

si dice *riparametrizzazione di* γ. Diciamo anche che tale riparametrizzazione:

- *conserva l'orientazione* se ϕ è monotona crescente;
- *inverte l'orientazione* se ϕ è monotona decrescente.

La funzione ϕ si chiama talvolta *legge oraria del moto.*

In altre parole, una riparametrizzazione di una curva γ è solo un modo diverso di percorrere la traiettoria descritta da γ. Tenendo in mente questa interpretazione, non è difficile convincersi che la lunghezza di una curva non cambia, una volta che la si riparametrizzi. Questo è il contenuto della seguente

Proposizione 7.4.2 (Invarianza della lunghezza per riparametrizzazione)**.** *Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ una curva C^1 a tratti. Sia $\widetilde{\gamma} : [c, d] \to \mathbb{R}^N$ una sua riparametrizzazione. Allora*

$$\ell(\gamma) = \ell(\widetilde{\gamma}).$$

Dimostrazione. Basterà usare la formula (7.3.7) ed il cambio di variabile $t = \phi(s)$. Senza perdità di generalità, possiamo supporre che ϕ sia crescente, così che

$$\phi(c) = a \qquad \text{e} \qquad \phi(d) = b.$$

Procedendo così, si ha infatti dalla Proposizione 6.4.3

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} |\gamma'(\phi(s))|\, \phi'(s)\, ds = \int_c^d |\widetilde{\gamma}'(s)|\, ds = \ell(\widetilde{\gamma}).$$

Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Più precisamente, è facile convincersi che una curva γ ed una sua riparametrizzazione $\widetilde{\gamma}$ *hanno lo stesso sostegno.*

Vediamo adesso un tipo speciale di riparametrizzazione, che talvolta è molto utile.

Proposizione 7.4.3 (Ascissa curvilinea)**.** *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ una curva regolare a tratti. Esiste una riparametrizzazione di γ*

$$\widetilde{\gamma} : [0, \ell(\gamma)] \to \mathbb{R}^N,$$

con la proprietà che

$$|\widetilde{\gamma}'(s)| = 1, \qquad \textit{per ogni } s \in [0, \ell(\gamma)],$$

i.e. $\widetilde{\gamma}$ ha modulo della velocità costantemente uguale a 1.

Dimostrazione. Come sempre, possiamo supporre senza perdita di generalità che γ sia una curva regolare, quindi che sia C^1 su tutto $[a,b]$ e tale che

$$|\gamma'(t)| > 0, \qquad \text{per ogni } t \in [a,b].$$

Per ogni $t \in [a,b]$, possiamo definire la funzione integrale

$$\varphi(t) = \int_a^t |\gamma'(x)|\,dx.$$

Dal *Teorema fondamentale del calcolo integrale* (vedi Teorema 6.3.2), sappiamo che essa è derivabile su $[a,b]$ e la sua derivata è data da

$$\varphi'(t) = |\gamma'(t)|, \qquad \text{per } t \in [a,b],$$

quindi è continua, per ipotesi. Inoltre, osserviamo che dall'ipotesi di regolarità della curva

$$\varphi'(t) = |\gamma'(t)| > 0, \qquad \text{per ogni } t \in [a,b].$$

In altre parole, la funzione φ è C^1 e strettamente crescente su $[a,b]$. La sua immagine è data quindi dall'intervallo $[\varphi(a), \varphi(b)]$, ovvero ricordando che

$$\varphi(a) = 0 \qquad \text{e} \qquad \varphi(b) = \int_a^b |\gamma'(x)|\,dx = \ell(\gamma),$$

si ottiene che φ è una funzione invertibile da $[a,b]$ in $[0, \ell(\gamma)]$. Si osservi che abbiamo usato il Teorema 7.3.4 per dire che

$$\int_a^b |\gamma'(x)|\,dx = \ell(\gamma).$$

Essendo invertibile, possiamo considerare la sua funzione inversa (si ricordi la definizione generale (2.3.1))

$$\begin{array}{cccc} \varphi^{-1} & : & [0,\ell(\gamma)] & \to & [a,b] \\ & & s & \mapsto & \text{“ l'unica soluzione } t \in [a,b] \\ & & & & \text{dell'equazione } \varphi(t) = s\text{''}. \end{array}$$

Osserviamo anche che essa è derivabile in ogni punto di $[0, \ell(\gamma)]$ grazie alla regola di derivazione **(D4)** (*derivata della funzione inversa*), dato che la derivata della funzione che stiamo invertendo non si annulla mai.

Dimostriamo adesso che la riparametrizzazione

$$\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi^{-1},$$

è la curva cercata. In base alla regola di derivazione di una funzione composta, si ha

$$\frac{d}{ds}\widetilde{\gamma}(s) = \gamma'(\varphi^{-1}(s))\,\frac{d}{ds}\varphi^{-1}(s). \tag{7.4.10}$$

Usiamo adesso la regola di derivazione della funzione inversa: si ha

$$\frac{d}{ds}\varphi^{-1}(s) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))} = \frac{1}{|\gamma'(\varphi^{-1}(s)|}.$$

Usando questa informazione in (7.4.10), otteniamo finalmente

$$\frac{d}{ds}\widetilde{\gamma}(s) = \frac{\gamma'(\varphi^{-1}(s))}{|\gamma'(\varphi^{-1}(s))|}, \qquad \text{per ogni } s \in [0, \ell(\gamma)],$$

da cui ovviamente

$$|\widetilde{\gamma}'(s)| = 1, \qquad \text{per ogni } s \in [0, \ell(\gamma)].$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Osservazione 7.4.4 (Ascissa curvilinea)**.** La variabile s della riparametrizzazione $\widetilde{\gamma}$ costruita nella Proposizione 7.4.3 si chiama *ascissa curvilinea*. La curva $\widetilde{\gamma}$ si chiama *riparametrizzazione di* γ *tramite ascissa curvilinea*.

Discutiamo brevemente il significato cinematico dell'ascissa curvilinea: in base alla dimostrazione vista prima, essa è definita in modo implicito come

$$s = \int_a^t |\gamma'(x)|\, dx,$$

ovvero per ogni istante di tempo $t \in [a, b]$, l'ascissa curvilinea rappresenta la lunghezza percorsa dal punto materiale nell'istante di tempo $[a, t]$.

Osservazione 7.4.5 (Ascissa curvilinea ed accelerazione)**.** Sia $\widetilde{\gamma}$ la riparametrizzazione tramite ascissa curvilinea di una curva γ. Per costruzione, si ha

$$|\widetilde{\gamma}'(s)| = 1, \qquad \text{per ogni } s \in [0, \ell(\gamma)].$$

Elevando al quadrato questa identità e ricordando che

$$|\mathbf{x}|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle, \qquad \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N,$$

si ha

$$\langle \widetilde{\gamma}'(s), \widetilde{\gamma}'(s)\rangle = 1, \qquad \text{per ogni } s \in [0, \ell(\gamma)].$$

Possiamo riscrivere questa identità anche come

$$\sum_{i=1}^N (\widetilde{\gamma}_i'(s))^2 = 1, \qquad \text{per ogni } s \in [0, \ell(\gamma)].$$

Supponiamo adesso che la curva $\widetilde{\gamma}$ sia di classe C^2, ovvero che si possa derivare due volte e che il suo vettore accelerazione $\widetilde{\gamma}''$ sia continuo. Deriviamo l'identità precedente rispetto ad s: tenendo conto che

$$\frac{d}{ds}\left(\sum_{i=1}^N (\widetilde{\gamma}_i'(s))^2\right) = \sum_{i=1}^N \frac{d}{ds}(\widetilde{\gamma}_i'(s))^2 = 2\sum_{i=1}^N \widetilde{\gamma}_i'(s)\,\widetilde{\gamma}_i''(s),$$

e che la derivata di una costante è identicamente nulla, si ottiene

$$\sum_{i=1}^N \widetilde{\gamma}_i'(s)\,\widetilde{\gamma}_i''(s) = 0, \qquad \text{per ogni } s \in [0, \ell(\gamma)].$$

Ricordando infine la definizione di prodotto scalare standard, l'ultima identità può anche essere scritta come

$$\langle \widetilde{\gamma}'(s), \widetilde{\gamma}''(s)\rangle = 0, \qquad \text{per ogni } s \in [0, \ell(\gamma)]. \tag{7.4.11}$$

Da un punto di vista cinematico, possiamo riassumere il senso di questa formula dicendo che:

"*Muovendosi a velocità costante, l'accelerazione deve essere ortogonale alla direzione del moto*"

5. Curve nel piano

5.1. Curve in forma cartesiana. Data una funzione di variabile reale $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, possiamo associarle la curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \qquad t \in [a, b].$$

In tal caso, si dice che la curva γ è in *forma cartesiana*. Il sostegno di γ coincide quindi col grafico di f sull'intervallo $[a, b]$. Si osservi che se f è C^1 (a tratti) su $[a, b]$, allora γ è automaticamente regolare (a tratti): infatti, si ha

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + (f'(t))^2} > 0, \qquad t \in [a, b]$$

Si osservi anche che se f è C^1 a tratti, allora γ è rettificabile in base al Teorema 7.3.4 e la formula (7.3.7) per il calcolo della sua lunghezza diventa

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt.$$

5.2. Curve in forma polare. Si tratta di curve nel piano che si presentano nella forma

$$\gamma(\vartheta) = (\varrho(\vartheta)\, \cos\vartheta, \varrho(\vartheta)\, \sin\vartheta), \qquad \vartheta \in [a, b],$$

dove $\varrho : [a, b] \to [0, +\infty)$. Si osservi che in questo caso la variabile ϑ rappresenta l'angolo formato dal vettore $\gamma(\vartheta)$ con l'asse delle ascisse x, mentre la funzione ϱ rappresenta il suo modulo, i.e. la distanza dell'origine di $\gamma(\vartheta)$.

Una curva in forma polare è nota una volta che si assegni la sua funzione *modulo* $\varrho : [a, b] \to \mathbb{R}$. Nel caso in cui ϱ sia una funzione continua e monotona, la curva si dirà una *spirale*.

Esempio 7.5.1 (Spirale archimedea)**.** In tal caso, la funzione modulo è data da

$$\varrho(\vartheta) = \vartheta, \qquad \vartheta \in [0, L].$$

Si osservi che mano a mano che l'angolo ϑ cresce, la distanza dall'origine cresce in modo lineare. Si osservi inoltre che la distanza tra due "filamenti" della spirale resta costante: in altre parole

$$|\gamma(\vartheta + 2\pi) - \gamma(\vartheta)| = |\varrho(\vartheta + 2\pi) - \varrho(\vartheta)| = 2\pi, \qquad \text{per ogni } \vartheta \in [0, L].$$

Esempio 7.5.2 (Spirale logaritmica)**.** In tal caso, la funzione modulo è data da

$$\varrho(\vartheta) = e^{\vartheta}, \qquad \vartheta \in [0, L],$$

ovvero

$$\gamma(\vartheta) = (e^{\vartheta}\, \cos\vartheta, e^{\vartheta}\, \sin\vartheta), \qquad \vartheta \in [0, L].$$

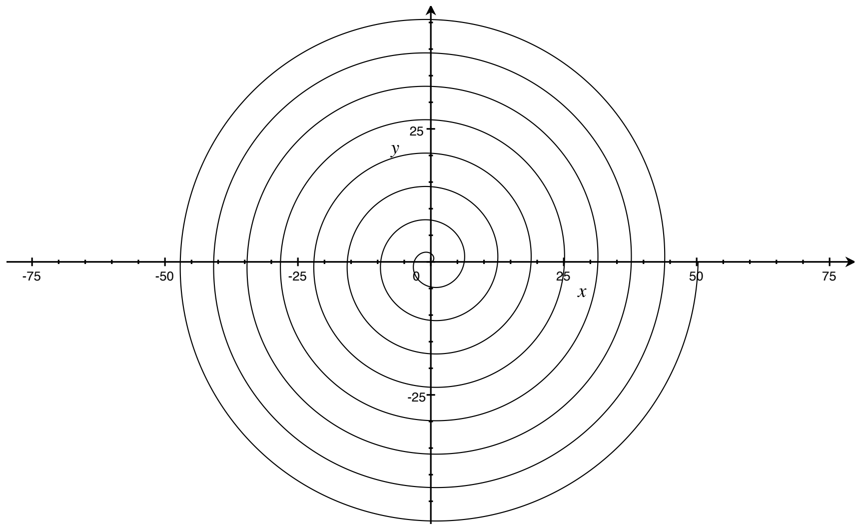

Figura 2. Una spirale archimedea

Si osservi che mano a mano che l'angolo ϑ cresce, la distanza dall'origine cresce in modo esponenziale. Si osservi inoltre che la distanza tra due "filamenti" della spirale diverge, anch'esso in modo esponenziale: in altre parole

$$\begin{aligned}|\gamma(\vartheta+2\,\pi)-\gamma(\vartheta)| &= |\varrho(\vartheta+2\,\pi)-\varrho(\vartheta)|\\ &= e^{\vartheta+2\,\pi}-e^{\vartheta}\\ &= e^{\vartheta}\,(e^{2\,\pi}-1), \qquad \text{per ogni } \vartheta\in[0,L],\end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{\vartheta\to+\infty}|\gamma(\vartheta+2\,\pi)-\gamma(\vartheta)|=+\infty.$$

Si osservi che se la curva è data in forma polare, allora il modulo della velocità è dato da

$$\begin{aligned}|\gamma'(\vartheta)| &= \sqrt{(\varrho'(\vartheta)\,\cos\vartheta-\varrho(\vartheta)\,\sin\vartheta)^2+(\varrho'(\vartheta)\,\sin\vartheta+\varrho(\vartheta)\,\cos\vartheta)^2}\\ &= \sqrt{(\varrho'(\vartheta))^2\,\cos^2\vartheta+\varrho(\vartheta)^2\,\sin^2\vartheta+(\varrho'(\vartheta))^2\,\sin^2\vartheta+\varrho(\vartheta)^2\,\cos^2\vartheta}\\ &= \sqrt{(\varrho'(\vartheta))^2+\varrho(\vartheta)^2}.\end{aligned}$$

La formula (7.3.7) per il calcolo della lunghezza diventa quindi

$$\ell(\gamma)=\int_a^b\sqrt{(\varrho'(\vartheta))^2+\varrho(\vartheta)^2}\,d\vartheta.$$

5.3. Versore normale. Sia $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ una curva regolare. Abbiamo visto, che in tal caso è ben definito il versore tangente

$$\mathbf{T}_\gamma(t)=\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}, \qquad t\in[a,b].$$

In $\mathbb{R}^2$, possiamo anche definire un versore normale: esso si ottiene ruotando di $\pi/2$ in senso orario il versore $\mathbf{T}_\gamma$. Si ricordi che in $\mathbb{R}^2$, l'applicazione lineare "rotazione di angolo ϑ_0 in senso orario" è definita dalla matrice

$$\begin{bmatrix} \cos\vartheta_0 & \sin\vartheta_0 \\ -\sin\vartheta_0 & \cos\vartheta_0 \end{bmatrix}.$$

Scegliendo $\vartheta_0 = \pi/2$, otteniamo quindi l'espressione del versore normale

$$\mathbf{N}_\gamma(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{T}_\gamma(t) = \frac{(\gamma_2'(t)\,,\,-\gamma_1'(t))}{|\gamma'(t)|}, \qquad t \in [a,b].$$

5.4. Curvatura. Supponiamo che $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ rappresenti la traiettoria di un punto materiale. Dalla fisica, sappiamo che

"*un punto materiale in movimento nel piano è soggetto ad un'accelerazione centripeta direttamente proporzionale al quadrato del modulo della sua velocità*"

Detto in altre parole, si ha che per ogni $t \in [a,b]$, esiste una funzione

$$\kappa_\gamma : [a,b] \to \mathbb{R},$$

tale che

$$\langle \gamma''(t), -\mathbf{N}_\gamma(t)\rangle = \kappa_\gamma(t)\,|\gamma'(t)|^2.$$

Infatti, si noti che l'*accelerazione centripeta* coincide con la componente dell'accelerazione che è normale alla direzione del moto, ovvero alla quantità

$$\langle \gamma''(t), -\mathbf{N}_\gamma(t)\rangle.$$

La funzione κ, che ha il ruolo della costante di proporzionalità nella legge fisica sopra enunciata, si chiama *curvatura di* γ. Si osservi che se γ è regolare, possiamo scrivere esplicitamente

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{\langle \gamma''(t), -\mathbf{N}_\gamma(t)\rangle}{|\gamma'(t)|^2}. \tag{7.5.12}$$

Più in generale, la curvatura κ_γ si potrà calcolare in tutti gli istanti t tali che $|\gamma'(t)| \neq 0$.

Osservazione 7.5.3 (Dimensioni fisiche della curvatura)**.** Analizzando le dimensioni fisiche delle quantità che intervengono nella definizione di curvatura, ovvero

$$\gamma''(t) = \frac{\text{lunghezza}}{(\text{tempo})^2} \qquad \text{e} \qquad |\gamma'(t)|^2 = \left(\frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}}\right)^2,$$

si ottiene che

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{\dfrac{\text{lunghezza}}{(\text{tempo})^2}}{\left(\dfrac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}}\right)^2} = \frac{1}{\text{lunghezza}}.$$

Osservazione 7.5.4 (Un'altra espressione per la curvatura)**.** Ricordando l'espressione del versore normale

$$\mathbf{N}_\gamma(t) = \frac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{|\gamma'(t)|},$$

possiamo riscrivere la formula (7.5.12) come

$$
\begin{aligned}
\kappa_\gamma(t) &= \frac{\langle (\gamma_1''(t), \gamma_2''(t)), (-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t)) \rangle}{|\gamma'(t)|^3} \\
&= \frac{-\gamma_1''(t)\,\gamma_2'(t) + \gamma_2''(t)\,\gamma_1'(t)}{|\gamma'(t)|^3} \qquad (7.5.13) \\
&= \frac{1}{|\gamma'(t)|^3}\ \det \begin{bmatrix} \gamma_1'(t) & \gamma_1''(t) \\ \gamma_2'(t) & \gamma_2''(t) \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

dove “det” denota il determinante della matrice corrispondente.

Esempio 7.5.5 (Curvatura di un segmento)**.** Assegnati due punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, prendiamo la curva $\gamma(t) = \mathbf{x} + t\,(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ con $t \in [0, 1]$. Si vede subito che

$$\gamma''(t) = 0,$$

quindi la curvatura del segmento γ è data da $\kappa_\gamma(t) = 0$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Esempio 7.5.6 (Curvatura di un cerchio)**.** Consideriamo la curva nel piano

$$\gamma(t) = (R\,\cos t, R\,\sin t), \qquad t \in [0, 2\,\pi].$$

Si ha

$$\gamma'(t) = (-R\,\sin t, R\,\cos t) \qquad \gamma''(t) = (-R\,\cos t, -R\,\sin t) \qquad \mathbf{N}_\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

da cui

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{R\,\cos^2 t + R\,\sin^2 t}{R^2} = \frac{1}{R}.$$

Esempio 7.5.7 (Curvatura di una spirale archimedea)**.** Prendiamo la curva regolare data in forma polare

$$\gamma(\vartheta) = (\vartheta\,\cos\vartheta, \vartheta\,\sin\vartheta), \qquad \vartheta \in [0, L].$$

Si ha

$$\gamma'(\vartheta) = (\cos\vartheta - \vartheta\,\sin\vartheta, \sin\vartheta + \vartheta\,\cos\vartheta)$$

da cui

$$\mathbf{N}_\gamma(\vartheta) = \frac{(\sin\vartheta + \vartheta\,\cos\vartheta, -\cos\vartheta + \vartheta\,\sin\vartheta)}{\sqrt{1 + \vartheta^2}}.$$

Osservando che

$$\gamma''(\vartheta) = (-2\,\sin\vartheta - \vartheta\,\cos\vartheta, 2\,\cos\vartheta - \vartheta\,\sin\vartheta),$$

si ottiene dunque l'espressione per la sua curvatura

$$
\begin{aligned}
\kappa_\gamma(\vartheta) &= \frac{\langle (-2\,\sin\vartheta - \vartheta\,\cos\vartheta, 2\,\cos\vartheta - \vartheta\,\sin\vartheta), (-\sin\vartheta - \vartheta\,\cos\vartheta, \cos\vartheta - \vartheta\,\sin\vartheta) \rangle}{(1 + \vartheta^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{2 + \vartheta^2}{(1 + \vartheta^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Esempio 7.5.8 (Curvatura di un'ellisse)**.** Consideriamo adesso la curva regolare

$$\gamma(t) = (a\,\cos t, b\,\sin t), \qquad \text{per } t \in [0, 2\,\pi],$$

dove $a, b > 0$ sono due parametri fissati. Osservando che

$$\frac{(a\,\cos t)^2}{a^2} + \frac{(b\,\sin t)^2}{b^2} = 1, \qquad \text{per } t \in [0, 2\,\pi],$$

si ha che il sostegno di γ è dato dall'ellisse centrata in $(0,0)$, con semiassi a e b. Si ha

$$\gamma'(t) = (-a\,\sin t, b\,\cos t),$$

ed è facile convincersi che si tratta di una curva regolare, dal momento che

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{a^2\,\sin^2 t + b^2\,\cos^2 t} > 0,$$

perchè seno e coseno non possono mai essere contemporaneamente nulli. Si ha quindi

$$\mathbf{T}_\gamma(t) = \left(-\frac{a\,\sin t}{\sqrt{a^2\,\sin^2 t + b^2\,\cos^2 t}}, \frac{b\,\cos t}{\sqrt{a^2\,\sin^2 t + b^2\,\cos^2 t}}\right),$$

da cui

$$\mathbf{N}_\gamma(t) = \left(\frac{b\,\cos t}{\sqrt{a^2\,\sin^2 t + b^2\,\cos^2 t}}, \frac{a\,\sin t}{\sqrt{a^2\,\sin^2 t + b^2\,\cos^2 t}}\right).$$

Calcoliamo adesso l'accelerazione

$$\gamma''(t) = (-a\,\cos t, -b\,\sin t).$$

Usando la formula (7.5.12), abbiamo allora

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{\langle \gamma''(t), -\mathbf{N}_\gamma(t)\rangle}{|\gamma'(t)|^2} = \frac{a\,b}{(a^2\,\sin^2 t + b^2\,\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si noti in particolare che la curvatura stavolta non è costante. Si osservi che se l'ellisse degenera su un cerchio di raggio a, ovvero se si prende $b = a$, dalla formula precedente ritroviamo

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a}.$$

Nel prossimo risultato, vediamo che la curvatura non cambia, passando ad una riparametrizzazione. Precisamente, vale il seguente:

Proposizione 7.5.9. *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare di classe C^2 e sia*

$$\phi : [c,d] \to [a,b],$$

una funzione invertibile C^2, con $\phi'(t) > 0$ per ogni $t \in [c,d]$. Allora la per la riparametrizzazione $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ vale

$$\kappa_{\widetilde{\gamma}}(t) = \kappa_\gamma(\phi(t)), \qquad \textit{per ogni } t \in [c,d].$$

Dimostrazione. Dalla definizione (7.5.12) abbiamo

$$\kappa_{\widetilde{\gamma}}(t) = \frac{\langle \widetilde{\gamma}''(t), -\mathbf{N}_\gamma(t)\rangle}{|\widetilde{\gamma}'(t)|^2}.$$

Osserviamo adesso che

$$\widetilde{\gamma}''(t) = \frac{d^2}{dt^2}\gamma \circ \phi(t) = \frac{d}{dt}\gamma'(\phi(t))\,\phi'(t) = \gamma''(\phi(t))\,(\phi'(t))^2 + \gamma'(\phi(t))\,\phi''(t),$$

e ricordando che γ' e $\mathbf{N}_\gamma$ sono ortogonali, si ha

$$\langle \widetilde{\gamma}''(t), -\mathbf{N}_\gamma(t)\rangle = \langle \gamma''(\phi(t)), -\mathbf{N}_\gamma(t)\rangle\,(\phi'(t))^2.$$

Per quanto riguarda il modulo della velocità, si ha

$$|\widetilde{\gamma}'(t)|^2 = |\gamma'(\phi(t))|^2\,(\phi'(t))^2.$$

Mettendo tutto insieme, si ottiene

$$\kappa_{\widetilde{\gamma}}(t) = \frac{\langle \gamma''(\phi(t)), -\mathbf{N}_\gamma(t)\rangle\, (\phi'(t))^2}{|\gamma'(\phi(t))|^2\, (\phi'(t))^2} = \frac{\langle \gamma''(\phi(t)), -\mathbf{N}_\gamma(t)\rangle}{|\gamma'(\phi(t))|^2} = \kappa_\gamma(\phi(t)).$$

Questo conclude la dimostrazione. □

6. Esercizi

Esercizio 7.6.1. *Sia* $\alpha > 0$*, si calcoli la lunghezza dell'elica cilindrica*

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \alpha\, t), \qquad t \in [0, 4\,\pi].$$

Soluzione. Si tratta di una curva di classe C^1, quindi possiamo usare il Teorema 7.3.4 per dire che γ è rettificabile e calcolare la sua lunghezza. Osservando che

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, \alpha), \qquad \text{per } t \in [0, 4\,\pi],$$

si ha

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \alpha^2} = \sqrt{1+\alpha^2}.$$

In base alla formula (7.3.7), si ha allora

$$\ell(\gamma) = \int_0^{4\,\pi} |\gamma'(t)|\, dt = 4\,\pi\,\sqrt{1+\alpha^2}.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 7.6.2. *Sia* $\alpha > 0$*, si calcoli la lunghezza dell'elica cilindrica non uniforme*

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \alpha\, t^2), \qquad t \in [0, 4\,\pi].$$

Soluzione. Possiamo di nuovo usare il Teorema di rettificabilità e la formula (7.3.7). Osserviamo che adesso

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 2\,\alpha\, t), \qquad \text{per } t \in [0, 4\,\pi],$$

da cui quindi

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 4\,\alpha^2\, t^2} = \sqrt{1 + 4\,\alpha^2\, t^2}.$$

Dobbiamo quindi calcolare

$$\ell(\gamma) = \int_0^{4\,\pi} \sqrt{1+4\,\alpha^2\,t^2}\, dt.$$

Facciamo il cambio di variabile

$$2\,\alpha\, t = s,$$

da cui quindi

$$\ell(\gamma) = \frac{1}{2\,\alpha} \int_0^{8\,\pi\,\alpha} \sqrt{1+s^2}\, ds.$$

Facciamo un altro cambio di variabile, ponendo

$$s = \sinh \tau \qquad \text{ovvero } \tau = \arg\sinh s.$$

Abbiamo dunque

$$\ell(\gamma) = \frac{1}{2\,\alpha} \int_0^{\arg\sinh(8\,\pi\,\alpha)} \cosh^2 \tau\, d\tau.$$

Ricordando che una primitiva della funzione $\tau \mapsto \cosh^2 \tau$ l'abbiamo già calcolata in (6.5.2) ed è data da

$$\frac{\sinh \tau \, \cosh \tau + \tau}{2},$$

abbiamo allora

$$\begin{aligned}
\ell(\gamma) &= \frac{1}{2\,\alpha} \int_0^{\arg\sinh(8\,\pi\,\alpha)} \cosh^2 \tau \, d\tau \\
&= \frac{1}{2\,\alpha} \left[\frac{\sinh \tau \, \cosh \tau + \tau}{2} \right]_0^{\arg\sinh(8\,\pi\,\alpha)} \\
&= \frac{1}{2\,\alpha} \, \frac{8\,\pi\,\alpha \, \cosh(\arg\sinh(8\,\pi\,\alpha)) + \arg\sinh(8\,\pi\,\alpha)}{2}.
\end{aligned}$$

Ricordando che

$$\cosh(\arg\sinh x) = \sqrt{1+x^2} \qquad \text{e} \qquad \arg\sinh x = \log(x + \sqrt{1+x^2}),$$

si ottiene infine

$$\begin{aligned}
\ell(\gamma) &= \frac{1}{2\,\alpha} \, \frac{8\,\pi\,\alpha \sqrt{1+64\,\pi^2\,\alpha^2} + \log(8\,\pi\,\alpha + \sqrt{1+64\,\pi^2\,\alpha^2})}{2} \\
&= 2\,\pi \sqrt{1+64\,\pi^2\,\alpha^2} + \frac{\log(8\,\pi\,\alpha + \sqrt{1+64\,\pi^2\,\alpha^2})}{4\,\alpha}.
\end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 7.6.3 (Asteroide)**.** *Si studi la curva*

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \qquad t \in [0, 2\,\pi],$$

e se ne tracci il sostegno. Si determini anche la sua curvatura, nei punti in cui ciò è possibile.

Soluzione. Osserviamo che si tratta di una curva C^2, i cui vettori velocità e accelerazione sono dati da

$$\gamma'(t) = (-3\,\cos^2 t\,\sin t, 3\,\sin^2 t\,\cos t),$$

e

$$\gamma''(t) = (6\,\cos t\,\sin^2 t - 3\,\cos^3 t, 6\,\sin t\,\cos^2 t - 3\,\sin^3 t).$$

Il modulo della velocità è dato da

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{9\,\cos^4\,t\,\sin^2 t + 9\,\sin^4 t\,\cos^2 t} = 3\,|\sin t\,\cos t|.$$

La curva γ non è quindi regolare e nemmeno regolare a tratti, dal momento che

$$|\gamma'(0)| = \left|\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = |\gamma'(\pi)| = \left|\gamma'\left(\frac{3}{2}\,\pi\right)\right| = 0.$$

Questi corrispondono ad i punti

$$\gamma(0) = (1,0), \qquad \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1), \qquad \gamma(\pi) = (-1,0), \qquad \gamma\left(\frac{3}{2}\,\pi\right) = (0,-1).$$

sul sostegno di γ.

Calcoliamo intanto la curvatura per $t \neq 0, \pi/2, \pi, (3\,\pi)/2$, usando la formula (7.5.13). Si ha

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}\gamma_1'(t) & \gamma_1''(t)\\ \gamma_2'(t) & \gamma_2''(t)\end{bmatrix} &= -18\,\sin^2 t\,\cos^4 t + 9\,\sin^4 t\,\cos^2 t\\ &\quad - 18\,\sin^4 t\,\cos^2 t + 9\,\sin^2 t\,\cos^4 t\\ &= -9\,\sin^4 t\,\cos^2 t - 9\,\sin^2 t\,\cos^2 t\\ &= -9\,\sin^2\,t\,\cos^2 t,\end{aligned}$$

da cui

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{-9\,\sin^2\,t\,\cos^2 t}{27\,|\sin t\,\cos t|^3} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{|\sin t\,\cos t|}, \qquad t \in (0, 2\,\pi) \setminus \left\{\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\,\pi\right\}.$$

Al fine di tracciare il sostegno di γ, osserviamo che le sue componenti hanno la proprietà che

$$(\cos^3 t)^{\frac{2}{3}} + (\sin^3 t)^{\frac{2}{3}} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1, \qquad \text{per ogni } t \in [0, 2\,\pi].$$

Quindi si ha

$$\mathrm{Im}(\gamma) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1\}.$$

Osserviamo che, scritto nell'ultima forma, risulta evidente che il sostegno ha le seguenti proprietà di simmetria

$$\text{se } (x, y) \in \mathrm{Im}(\gamma) \quad \Longleftrightarrow \quad (-x, y),\, (x, -y),\, (-x, -y) \in \mathrm{Im}(\gamma).$$

Quindi il sostegno di γ è simmetrico rispetto all'asse delle x, all'asse delle y ed è simmetrico rispetto all'origine $(0, 0)$. Possiamo quindi restringerci a tracciare il sostegno nel primo quadrante e poi ottenere il sostegno completo per riflessione. In altre parole, ci resta da studiare l'insieme

$$E_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0, y \geq 0,\, x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1\}.$$

Osserviamo subito che se $(x, y) \in E_+$, allora deve risultare

$$x^{\frac{2}{3}} \leq x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 \qquad \text{da cui quindi } x \leq 1,$$

ed anche

$$y^{\frac{2}{3}} \leq x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 \qquad \text{da cui quindi } y \leq 1.$$

Quindi l'insieme E_+ è contenuto nel quadrato aventi vertici in $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$. Osserviamo che

$$(x, y) \in E_+ \qquad \Longleftrightarrow \qquad y^{\frac{2}{3}} = 1 - x^{\frac{2}{3}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

In altre parole, E_+ coincide con il grafico della funzione

$$f(x) = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}, \qquad \text{per } x \in [0, 1].$$

Si osservi che f è derivabile in $[0, 1)$ e vale

$$f'(x) = -x^{-\frac{1}{3}}\,(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} < 0, \qquad \text{per } x \in (0, 1).$$

Quindi f è strettamente decrescente in $[0, 1]$. Inoltre, si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1^-} f'(x) = 0.$$

Possiamo a questo punto tracciare un grafico approssimativo della funzione f e quindi, per simmetria, del sostegno di γ. Si osservi che in corrispondenza dei punti della curva

$$\gamma(0) = (1, 0), \qquad \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1), \qquad \gamma(\pi) = (-1, 0), \qquad \gamma\left(\frac{3}{2}\,\pi\right) = (0, -1),$$

in cui il vettore velocità era nullo, si hanno 4 cuspidi esterne. Si veda la Figura 3. □

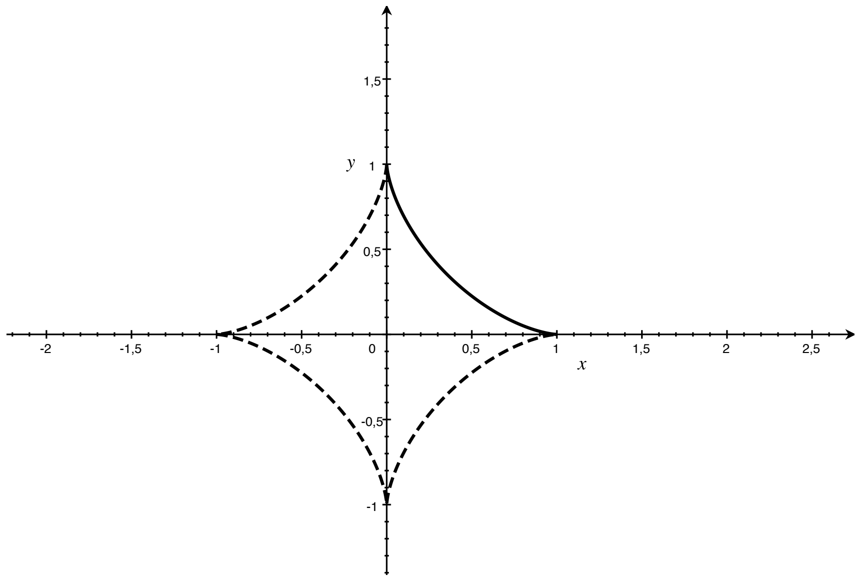

Figura 3. Il grafico dell'asteroide, ottenuto riflettendo il grafico della funzione $f(x) = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ (tracciato in nero).

Esercizio 7.6.4 (Curvatura per curve in forma cartesiana)**.** *Sia $\gamma(t) = (t, f(t))$ una curva cartesiana, con $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ di classe C^2. Si dimostri che la sua curvatura è data da*

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{f''(t)}{(1 + |f'(t)|^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \textit{per } t \in [a, b].$$

Dimostrazione. Sappiamo che per una curva cartesiana C^1, la velocità è sempre non nulla. Abbiamo

$$\gamma'(t) = (1, f'(t)), \qquad |\gamma'(t)| = \sqrt{1 + |f'(t)|^2}, \qquad \gamma''(t) = (0, f''(t)),$$

da cui

$$\det \begin{bmatrix} \gamma_1'(t) & \gamma_1''(t) \\ \gamma_2'(t) & \gamma_2''(t) \end{bmatrix} = f''(t).$$

Usando la formula (7.5.13), si conclude. □

Esercizio 7.6.5. *Usare la formula dell'Esercizio precedente, per calcolare la curvatura delle seguenti curve in forma cartesiana*

$$\gamma(t) = (t, t^2), \qquad \eta(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}), \qquad \omega(t) = (t, e^t),$$

nei punti in cui questo è possibile.

Dimostrazione. Per la curva γ, abbiamo direttamente

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{2}{(1 + 4\,t^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R},$$

dalla formula dell'esercizio precedente. Per la curva η dobbiamo fare attenzione, perché essa è definita soltanto per $t \in [-1, 1]$ ed è C^2 soltanto sull'intervallo aperto $(-1, 1)$. Osservando che per

$-1 < t < 1$ si ha

$$\frac{d}{dt}\sqrt{1-t^2} = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2}{dt^2}\sqrt{1-t^2} = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t^2}{(1-t)^{\frac{3}{2}}},$$

abbiamo allora dalla formula dell'esercizio precedente

$$\begin{aligned}\kappa_\eta(t) &= \frac{1}{\left(1+\dfrac{t^2}{1-t^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t^2}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}\right] \\ &= (1-t^2)^{\frac{3}{2}}\,\frac{-(1-t^2)-t^2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} = -1, \qquad \text{per } -1 < t < 1.\end{aligned}$$

Infine, per la terza curva, abbiamo

$$\kappa_\omega(t) = \frac{e^t}{(1+e^{2\,t})^{\frac{3}{2}}}, \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 7.6.6 (Curvatura per una curva in forma polare)**.** *Sia* $\gamma(\vartheta) = (\varrho(\vartheta)\,\cos\vartheta, \varrho(\vartheta)\,\sin\vartheta)$ *una curva in forma polare, con* $\vartheta \in [a,b]$*. Supponendo* ϱ *di classe* C^2 *e tale che*

$$\sqrt{|\varrho(\vartheta)|^2 + |\varrho'(\vartheta)|^2} > 0,$$

si dimostri che la curvatura è data da

$$\kappa_\gamma(\vartheta) = \frac{\varrho(\vartheta)^2 + 2\,(\varrho'(\vartheta))^2 - \varrho''(\vartheta)\,\varrho(\vartheta)}{(\varrho(\vartheta)^2 + (\varrho'(\vartheta))^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{7.6.14}$$

Soluzione. Vogliamo usare la formula (7.5.13), dobbiamo perciò calcolare i due vettori γ' e γ''. Si ha

$$\gamma'(\vartheta) = (\varrho'(\vartheta)\,\cos\vartheta - \varrho(\vartheta)\,\sin\vartheta, \varrho'(\vartheta)\,\sin\vartheta + \varrho(\vartheta)\,\cos\vartheta),$$

e

$$\gamma''(\vartheta) = (\varrho''(\vartheta)\,\cos\vartheta - 2\,\varrho'(\vartheta)\,\sin\vartheta - \varrho(\vartheta)\,\cos\vartheta, \varrho''(\vartheta)\,\sin\vartheta + 2\,\varrho'(\vartheta)\,\cos\vartheta - \varrho(\vartheta)\,\sin\vartheta).$$

Abbiamo

$$|\gamma'(\vartheta)| = \sqrt{\varrho(\vartheta)^2 + (\varrho'(\vartheta))^2},$$

e

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}\gamma_1'(\vartheta) & \gamma_1''(\vartheta)\\ \gamma_2'(\vartheta) & \gamma_2''(\vartheta)\end{bmatrix} &= \Big(\varrho'(\vartheta)\,\cos\vartheta - \varrho(\vartheta)\,\sin\vartheta\Big)\Big(\varrho''(\vartheta)\,\sin\vartheta + 2\,\varrho'(\vartheta)\,\cos\vartheta - \varrho(\vartheta)\,\sin\vartheta\Big)\\ &- \Big(\varrho''(\vartheta)\,\cos\vartheta - 2\,\varrho'(\vartheta)\,\sin\vartheta - \varrho(\vartheta)\,\cos\vartheta\Big)\Big(\varrho'(\vartheta)\,\sin\vartheta + \varrho(\vartheta)\,\cos\vartheta\Big)\\ &= \varrho(\vartheta)^2\,(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) + 2\,(\varrho'(\vartheta))^2\,(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)\\ &- \varrho(\vartheta)\,\varrho''(\vartheta)\,(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)\\ &= \varrho(\vartheta)^2 + 2\,(\varrho'(\vartheta))^2 - \varrho(\vartheta)\,\varrho''(\vartheta).\end{aligned}$$

Basta adesso applicare la formula (7.5.13) per concludere. □

Indice analitico