Analisi Matematica B
– *Lezione 5* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 17 Marzo 2020

Capitolo II

“*Funzioni di più variabili reali*”

II.1 Preliminari

- In questo capitolo, vogliamo studiare le funzioni di più variabili reali, che assumono valori reali
- In altre parole, utilizzando le nostre notazioni, vogliamo considerare

  $$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

  e più generalmente

  $$f : A \to \mathbb{R} \qquad \text{dove } A \subset \mathbb{R}^N$$

- Le variabili verranno indicate come $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ e scriveremo quindi

  $$f(x_1, \ldots, x_N) \qquad \text{o in forma compatta} \qquad f(\mathbf{x})$$

  per indicare il valore assunto da f nel punto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$

Casi particolari

Nei casi

- $N = 2$ (funzioni di 2 variabili)
- $N = 3$ (funzioni di 3 variabili)

Useremo come nel Capitolo I le notazioni

$$\mathbf{x} = (x, y) \qquad \text{e quindi} \qquad f(x, y)$$

e

$$\mathbf{x} = (x, y, z) \qquad \text{e quindi} \qquad f(x, y, z)$$

rispettivamente

Perché abbiamo bisogno di funzioni di più variabili?

Essenzialmente perché viviamo in un mondo multidimensionale

Esempio 1

- Supponiamo di avere una barra metallica di lunghezza L
- Supponiamo la barra estremamente sottile, quindi possiamo assumerla idealmente come uni-dimensionale
- Possiamo rappresentarla matematicamente come l'intervallo $[0, L]$
- La barra viene riscaldata (in modo non uniforme) e vogliamo descrivere la temperatura dei punti di questa barra, <u>ad un certo istante di tempo fissato</u>
- Risulta definita la funzione **temperatura** $T : [0, L] \to \mathbb{R}$ tale che

$$T(x) = \text{“ temperatura del punto } x \text{ della barra''}$$

Esempio 2

- Supponiamo adesso di avere la stessa barra, ma di voler tenere conto dell'evoluzione della temperatura al variare del tempo
- Assumiamo per semplicità che l'istante iniziale sia $t = 0$
- Allora risulta definita di nuovo la funzione **temperatura**, che stavolta è una **funzione di** 2 **variabili**, la posizione del punto della barra (*variabile* x) e l'istante di tempo (*variabile* t)
- abbiamo quindi la funzione $T : [0, L] \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che

$$T(x, t) = \text{“ temperatura del punto } x \text{ della barra al tempo } t''$$

Esempio 3

- Invece di una barra metallica sottile, supponiamo adesso di avere una lamina metallica molto sottile
- pensiamo matematicamente questa lamina come l'insieme

$$[0, L] \times [0, h] \subset \mathbb{R}^2$$

- riscaldiamo (in modo non uniforme) la lamina e vogliamo descrivere l'evoluzione nel tempo della sua temperatura
- risulta definita la funzione **temperatura**, stavolta è una **funzione di** 3 **variabili**: la posizione del punto della lamina (*variabili* (x, y)) e l'istante di tempo (*variabile* t)
- abbiamo la funzione $T : [0, L] \times [0, h] \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che

$$T(x, y, t) = \text{“ temperatura del punto } (x, y) \text{ al tempo } t''$$

Si possono fare tanti altri esempi simili di fenomeni fisici, che necessitano l'utilizzo di funzioni di più variabili per essere modellizati (e quindi studiati da un punto di vista matematico)

Per questo motivo, passeremo il resto del corso a familiarizzare con queste funzioni

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di N variabili

Per ogni $t \in \mathbb{R}$, si definisce l'insieme

$$E_f(t) = \left\{ \mathbf{x} \in A \,:\, f(\mathbf{x}) = t \right\}$$

che si chiama **insieme di livello** t **della funzione** f

Osservazione

Si osservi che un insieme di livello di f è **per definizione** un sottoinsieme del dominio di f

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di N variabili

Si definisce il **grafico di** f come

$$\mathrm{Graf}(f) = \Big\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \,:\, \mathbf{x} \in A\Big\}$$

Osservazione

- Si osservi che $\mathrm{Graf}(f)$ è **per definizione** un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{N+1}$
- per tracciare il grafico di una funzione di N variabili, serve uno spazio $(N+1)-$dimensionale
- quindi potremo tracciare il grafico soltanto di funzioni di 2 variabili (che sarà dunque un oggetto tridimensionale)

Esercizio

Si consideri la funzione di due variabili definita da

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

1. *Si dia il dominio di f;*
2. *se ne rappresentino gli insiemi di livello;*
3. *si provi a tracciarne un grafico.*

Soluzione

1. La funzione f contiene una radice quadrata
   - quindi dobbiamo assicurarci che il suo argomento sia ≥ 0
   - d'altra parte $x^2 + y^2 \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
   - f è quindi definita su tutto $\mathbb{R}^2$

2. Determiniamo adesso gli insiemi di livello
   - per ogni $t \in \mathbb{R}$, consideriamo quindi

$$E_f(t) = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, f(x, y) = t\Big\}$$

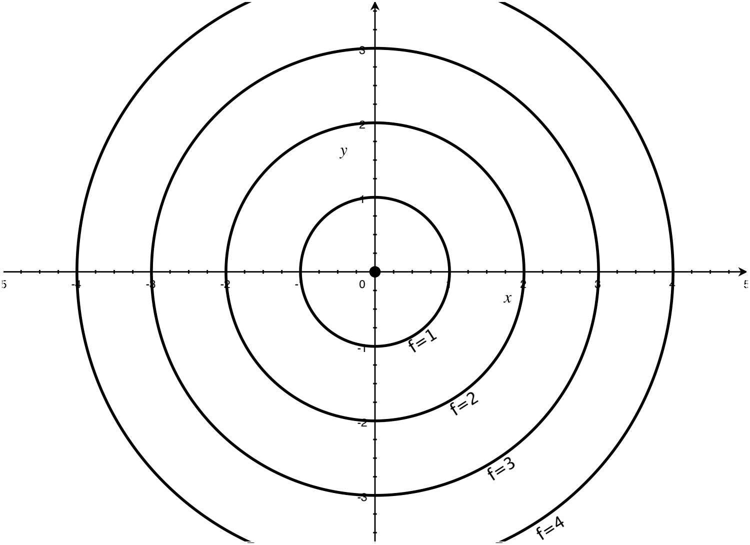
   - usando la definizione di f

$$E_f(t) = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \sqrt{x^2 + y^2} = t\Big\}$$

   - $E_f(t)$ è dato da tutti i punti (x, y) che si trovano a distanza t dall'origine $(0, 0)$
   - abbiamo quindi che

$$E_f(t) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } t < 0, \\ \\ \{(0,0)\}, & \text{se } t = 0, \\ \\ \text{cerchio di centro } (0,0) \text{ e raggio } t, & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

Rappresentiamo nel piano cartesiano alcuni insiemi di livello $E_f(t)$



3. Cerchiamo adesso di tracciare il grafico di f

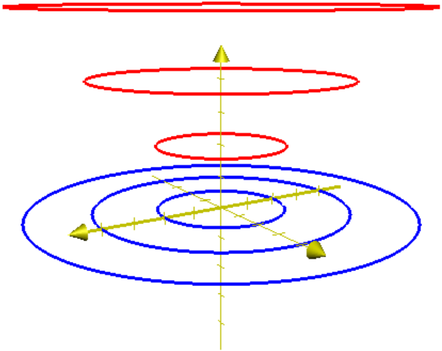


Figura: Alcune linee di livello di f (in blu), con il corrispettivo valore ivi assunto da f (in rosso)

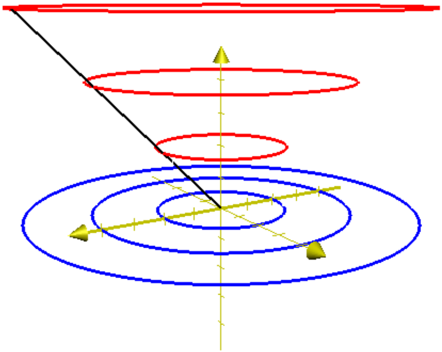


Figura: In nero, il grafico nel piano $x\,z$ della funzione $x \mapsto f(x,0) = |x|$ per $x \geq 0$. Per ogni insieme di livello, il valore assunto da f su di essa è lo stesso del punto $(x,0)$ che appartiene a questo insieme...

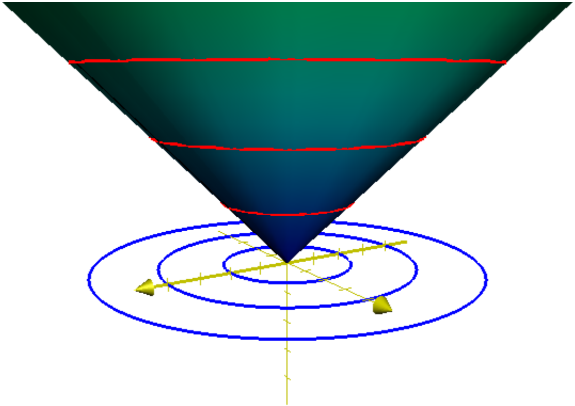


Figura: ...facendo quindi ruotare il grafico $x \mapsto f(x,0) = |x|$ per $x \geq 0$ attorno all'asse z, si ottiene il grafico completo

Esercizio

Si consideri la funzione di due variabili definita da

$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

1. *Si dia il dominio di g;*
2. *se ne rappresentino gli insiemi di livello;*
3. *si provi a tracciarne un grafico.*

Soluzione

1. La funzione g è definita su $\mathbb{R}^2$

2. Determiniamo adesso gli insiemi di livello
   - per ogni $t \in \mathbb{R}$, consideriamo quindi

$$E_g(t) = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, g(x,y) = t\Big\}$$

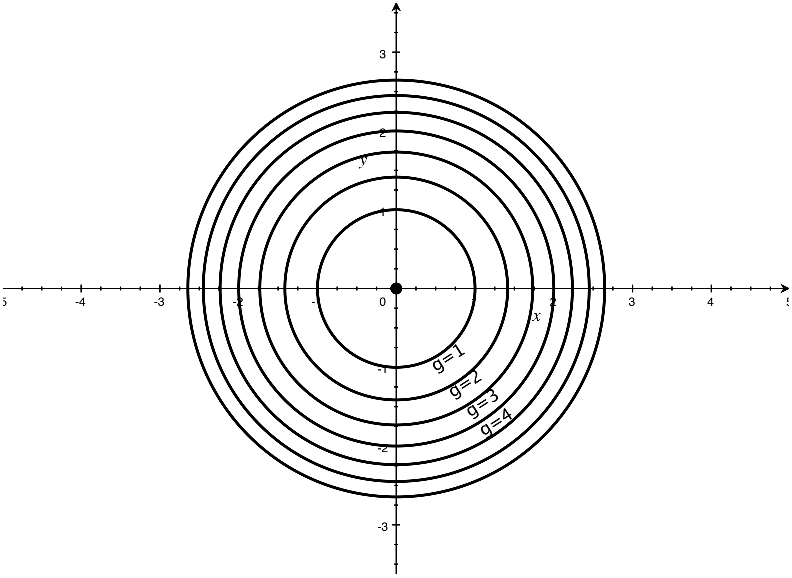
   - usando la definizione di g

$$E_g(t) = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 = t\Big\}$$

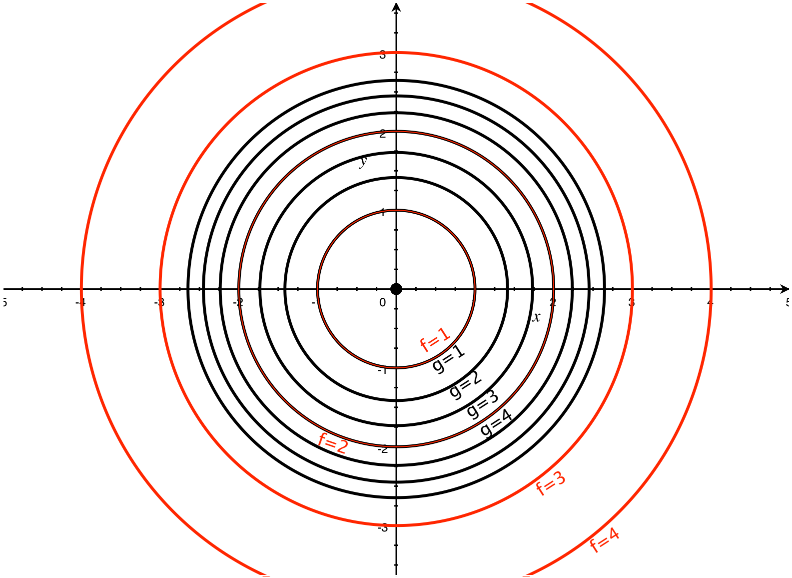
   - $E_g(t)$ è dato da tutti i punti (x,y) la cui **distanza al quadrato** dall'origine $(0,0)$ è t
   - abbiamo quindi che

$$E_g(t) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } t < 0, \\ \{(0,0)\}, & \text{se } t = 0, \\ \text{cerchio di centro } (0,0) \text{ e raggio } \sqrt{t}, & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

Rappresentiamo nel piano cartesiano alcuni insiemi di livello $E_g(t)$



Prima di tracciare il grafico di g, facciamo un raffronto tra le linee di livello di g ed f (*esercizio precedente*)



3. Cerchiamo adesso di tracciare il grafico di g

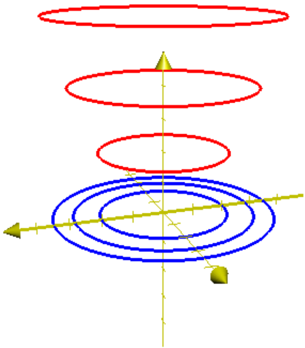


Figura: In blu, alcuni insiemi di livello di g. In rosso, i corrispondenti punti del grafico: in corrispondenza di ogni insieme di livello, la funzione assume valore costante

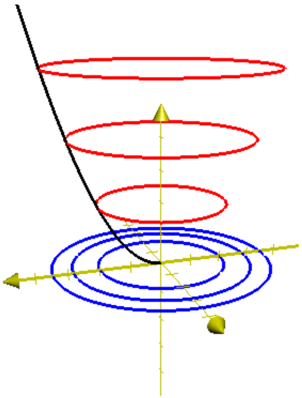


Figura: In nero, il grafico nel piano $x\,z$ della funzione $x \mapsto g(x,0) = x^2$ per $x \geq 0$. Per ogni insieme di livello, il valore assunto da g su di essa è lo stesso del punto $(x,0)$ che appartiene a questo insieme...

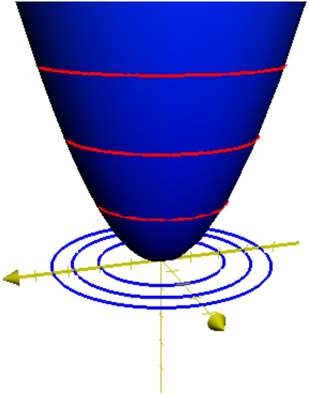


Figura: ...facendo quindi ruotare il grafico $x \mapsto g(x,0) = x^2$ per $x \geq 0$ attorno all'asse z, si ottiene il grafico completo

Esercizio

Si consideri la funzione di due variabili definita da

$$h(x, y) = x\,y$$

1. *Si dia il dominio di h;*
2. *se ne rappresentino gli insiemi di livello;*
3. *si provi a tracciarne un grafico.*

Soluzione

1. La funzione h è definita su $\mathbb{R}^2$, ovviamente

2. Determiniamo adesso gli insiemi di livello
   - per ogni $t \in \mathbb{R}$, consideriamo quindi
   $$E_h(t) = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, h(x, y) = t\Big\}$$
   - usando la definizione di h
   $$E_h(t) = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x\,y = t\Big\}$$
   - ovvero, se $t \neq 0$
   $$E_h(t) = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = \frac{t}{x}\Big\}$$
   grafico dell'iperbole equilatera $y \mapsto t/x$
   - mentre se $t = 0$
   $$\begin{aligned} E_h(0) &= \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x\,y = 0\Big\} \\ &= \Big\{(x, 0) \,:\, x \in \mathbb{R}\Big\} \cup \Big\{(0, y) \,:\, y \in \mathbb{R}\Big\} \end{aligned}$$

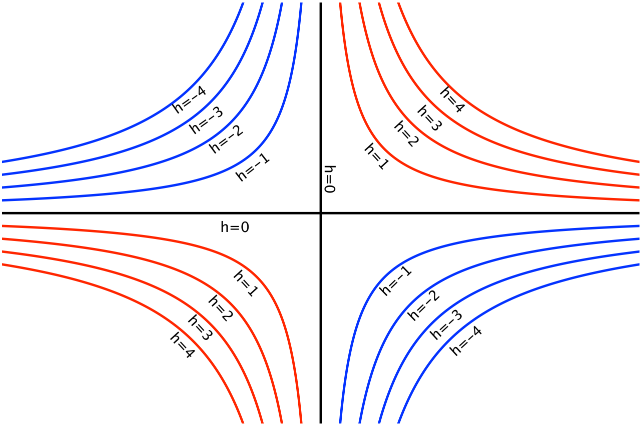


Figura: Alcuni insiemi di livello di $h(x, y) = x\,y$. Sono tutte iperboli equilatere: su quelle in rosso, h assume valori positivi; su quell in blu, h assume valori negativi. In nero, le iperboli degeneri date dai due assi cartesiani, su cui h si annulla

3. Proviamo adesso a tracciare il grafico di h

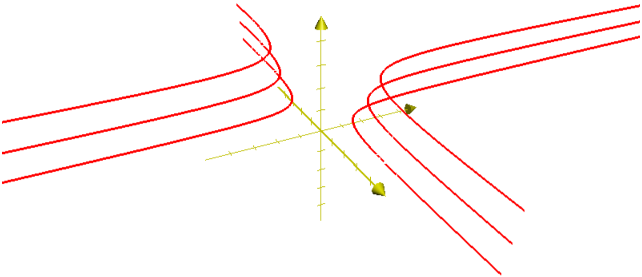


Figura: I punti del grafico di h in cui i valori assunti sono rispettivamente 1, 2 e 3. Per la discussione precedente, i punti corrispondenti sul grafico formano delle iperboli equilatere

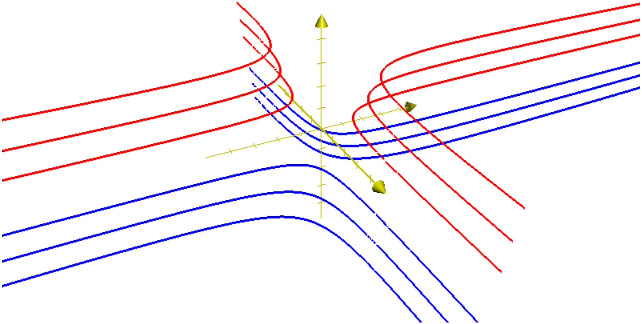


Figura: In blu, i punti del grafico di h in cui i valori assunti sono rispettivamente -1, -2 e -3. Per la discussione precedente, i punti corrispondenti sul grafico formano delle iperboli equilatere

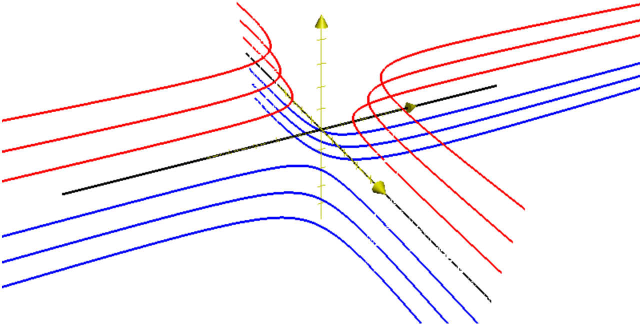


Figura: Aggiungiamo anche i punti (in nero) in cui la funzione h si annulla (sono i due assi cartesiani x e y)

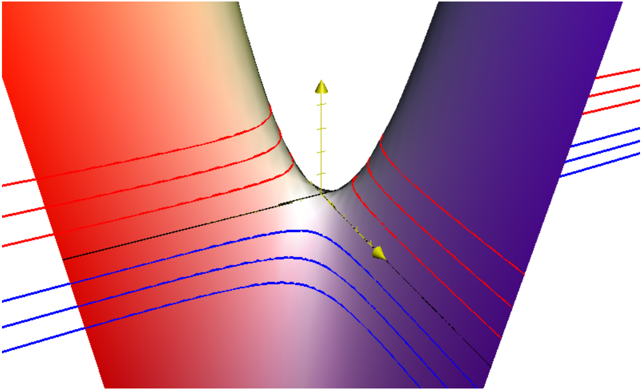


Figura: ....il grafico completo è una bella sella!

Esercizio

Si consideri la seguente funzione di due variabili

$$k(x, y) = \log(1 - x\,y)$$

1. *Si trovi il dominio di questa funzione, rappresentandolo graficamente nel piano;*
2. *se ne rappresentino gli insiemi di livello.*

Soluzione

- La funzione contiene un logaritmo, dobbiamo quindi imporre che risulti

$$1 - x\,y > 0$$

- il dominio è quindi dato dall'insieme

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x\,y < 1\Big\}$$

- cerchiamo di determinare questo insieme esplicitamente, in modo da poterlo rappresentare graficamente
- dobbiamo trovare tutte le coppie di punti del piano per cui $x\,y < 1$
- se $x > 0$, allora questa è equivalente a

$$y < \frac{1}{x}$$

- se $x = 0$, allora in questo caso $x\,y = 0$ che minore di 1, per ogni $y \in \mathbb{R}$

- infine, se $x < 0$ allora possiamo riscrivere

$$x\,y < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (-x)\,y > -1 \quad \Longleftrightarrow \quad y > \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

- in altre parole, riassumendo, abbiamo trovato che il dominio D può essere riscritto come

$$\begin{aligned} D = & \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0 \ \text{ e } \ y < \frac{1}{x}\right\} \\ & \cup \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \in \mathbb{R}\right\} \\ & \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x < 0 \ \text{ e } \ y > \frac{1}{x}\right\} \end{aligned}$$

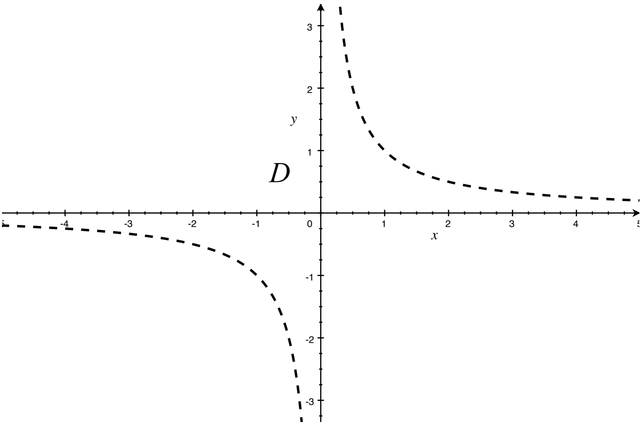


Figura: Il dominio della funzione $k(x, y)$. La linea tratteggiata è esclusa dal dominio (su di essa l'argomento del logaritmo si annulla!)

- troviamo adesso gli insiemi di livello
- per definizione, sono gli insiemi

$$\begin{aligned} E_k(t) &= \Big\{(x,y) \in D \,:\, \log(1 - x\,y) = t\Big\} \\ &= \Big\{(x,y) \in D \,:\, 1 - x\,y = e^t\Big\} \\ &= \Big\{(x,y) \in D \,:\, x\,y = 1 - e^t\Big\} \end{aligned}$$

- siamo in un caso simile all'esercizio precedente, gli insiemi di livello sono iperboli!
- più precisamente, se $1 - e^t \neq 0$ ovvero se $t \neq 0$, si ha

$$E_k(t) = \Big\{(x,y) \in D \,:\, y = \frac{1 - e^t}{x}\Big\}$$

grafico dell'iperbole $y = \dfrac{1 - e^t}{x}$

- più precisamente, si osservi che tali iperboli sono simmetriche rispetto all'asse $y = x$ se

$$1 - e^t > 0 \qquad \text{ovvero se} \qquad t < 0$$

su queste iperboli, la funzione k assume dunque valori negativi

- mentre tali iperboli sono simmetriche rispetto all'asse $y = -x$ se

$$1 - e^t < 0 \qquad \text{ovvero se} \qquad t > 0$$

su queste iperboli, la funzione k assume dunque valori positivi

- se invece $1 - e^t = 0$ ovvero $t = 0$, allora

$$\begin{aligned} E_k(0) &= \Big\{(x, y) \in D \,:\, x\, y = 0\Big\} \\ &= \Big\{(x, 0) \,:\, x \in \mathbb{R}\Big\} \cup \Big\{(0, y) \,:\, y \in \mathbb{R}\Big\} \end{aligned}$$

  ovvero l'insieme di livello zero è dato dall'unione dei due assi cartesiani

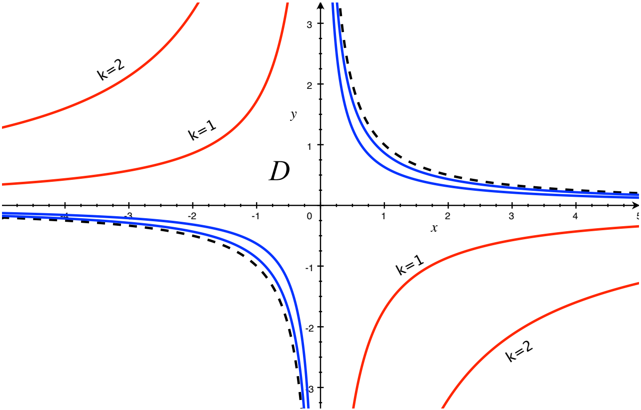


Figura: Alcuni insiemi di livello della funzione $\log(1 - x\,y)$. Sulle iperboli rosse i valori assunti sono positivi, sulle iperboli blu sono negativi. Avvicinandoci al "confine" tratteggiato in nero, i valori della funzione si avvicinano a $-\infty$

II.2 Classi speciali di funzioni

II.2.1 Funzioni radialmente simmetriche

Definizione

Funzioni il cui valore in $\mathbf{x}$ dipende **soltanto dal modulo** $|\mathbf{x}|$

Ovvero sono funzioni della forma

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(|\mathbf{x}|)$$

con $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ funzione di una sola variabile

La funzione φ si dice **funzione generatrice**

Osservazione

Alcuni esempi della sezione precedente erano funzioni radialmente simmetriche

- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, la funzione generatrice è $\varphi(t) = t$, infatti

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$$

- $g(x, y) = x^2 + y^2$, la funzione generatrice è $\varphi(t) = t^2$, infatti

$$g(x, y) = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$$

Gli insiemi di livello di una funzione radialmente simmetrica sono **sempre** sfere o unioni di sfere concentriche

Infatti per definizione (supponiamo per semplicità che φ sia invertibile)

$$\begin{aligned} E_f(t) &= \Big\{ \mathbf{x} \in A \,:\, f(\mathbf{x}) = t \Big\} \\ &= \Big\{ \mathbf{x} \in A \,:\, \varphi(|\mathbf{x}|) = t \Big\} \\ &= \Big\{ \mathbf{x} \in A \,:\, |\mathbf{x}| = \varphi^{-1}(t) \Big\} \end{aligned}$$

ovvero l'insieme di livello $E_f(t)$ è la sfera di $\mathbb{R}^N$ centrata nell'origine e di raggio $\varphi^{-1}(t)$

Caso $N = 2$

In questo caso, si può tracciare il grafico di una funzione radialmente simmetrica

L'operazione è molto facile: se

$$f(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

ovvero se i valori assunti da f dipendono solo dalla distanza di (x,y) dall'origine

- basta tracciare nel piano $x\,z$ il grafico della funzione generatrice $\varphi(x)$ per $x \geq 0$
- poi lo si fa ruotare attorno all'asse delle z

Esercizio (per casa)

Si considerino le seguenti funzioni radialmente simmetriche di due variabili

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad g(x,y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$h(x,y) = (1 - x^2 - y^2)^2$$

1. *Si diano i domini di queste funzioni e si dia la funzione generatrice;*
2. *se ne rappresentino gli insiemi di livello;*
3. *si provi a tracciarne il grafico.*

Soluzione

- Facciamo insieme la seconda funzione

$$g(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$$

  le altre sono lasciate per casa

- la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}^2$
- la funzione generatrice è data da

$$\varphi(t) = \sin t$$

  infatti

$$g(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$$

- determiniamo adesso gli insiemi di livello: dobbiamo prestare attenzione al fatto che la funzione generatrice φ non è iniettiva
- in base alla definizione

$$E_g(t) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) = t\right\}$$

- osserviamo quindi subito che

$$E_g(t) = \emptyset \qquad \text{se } |t| > 1,$$

 dal momento che il seno assume valori sempre compresi tra 1 e -1

- prendiamo adesso $t = 1$, l'insieme di livello

$$
\begin{aligned}
E_g(1) &= \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) = 1\Big\} \\
&= \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi,\ k \geq 0\Big\} \\
&= \bigcup_{k \geq 0} \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi,\Big\}
\end{aligned}
$$

ovvero l'insieme di livello 1 è l'unione di infiniti cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio

$$
\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi, \qquad \text{al variare di } k \in \mathbb{N}
$$

- in modo del tutto simile, se $t = -1$, l'insieme di livello

$$\begin{aligned} E_g(-1) &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sin(\sqrt{x^2+y^2}) = -1 \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{x^2+y^2} = \frac{3}{2}\,\pi + 2\,k\,\pi,\ k \geq 0 \right\} \\ &= \bigcup_{k \geq 0} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{x^2+y^2} = \frac{3}{2}\,\pi + 2\,k\,\pi, \right\} \end{aligned}$$

ovvero l'insieme di livello -1 è l'unione di infiniti cerchi di centro $(0,0)$ e raggio

$$\frac{3}{2}\,\pi + 2\,k\,\pi, \qquad \text{al variare di } k \in \mathbb{N}$$

- infine, se prendiamo un qualsiasi livello $-1 < t < 1$, per determinare l'insieme di livello

$$E_g(t) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) = t\right\}$$

dobbiamo determinare tutte le soluzioni ρ **positive** di

$$\sin \rho = t$$

- esse sono date da

$$\rho = \arcsin t + 2\,k\,\pi \qquad \text{con } \; k \in \mathbb{N}$$

e

$$\rho = \pi - \arcsin t + 2\,k\,\pi \qquad \text{con } \; k \in \mathbb{N}$$

- fissato $-1 < t < 1$, prendendo l'unione di tutti i cerchi centrati in $(0,0)$ ed aventi raggio

$$\rho = \arcsin t + 2\,k\,\pi \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}$$

e

$$\rho = \pi - \arcsin t + 2\,k\,\pi \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}$$

si trova l'insieme di livello $E_g(t)$

Attenzione: nella scelta di k bisognerà sempre assicurarsi che ρ sia **positivo**, dal momento che quest'ultimo rappresenta il raggio di una circonferenza

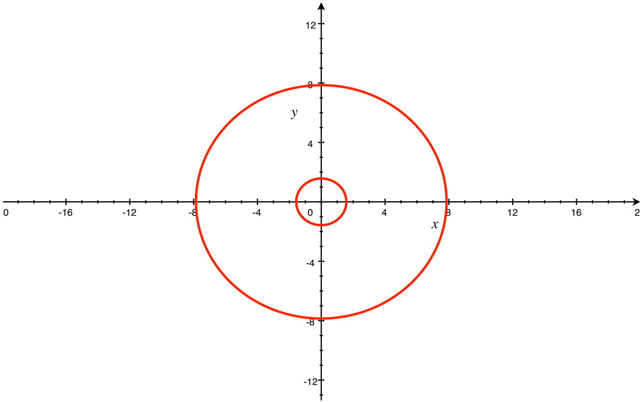


Figura: Due cerchi facenti parte dell'insieme di livello $E_g(1)$

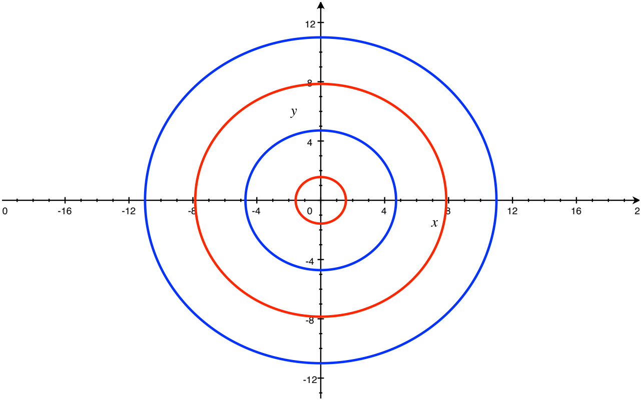


Figura: ...aggiungiamo (in blu) due cerchi facenti parte dell'insieme di livello $E_g(-1)$

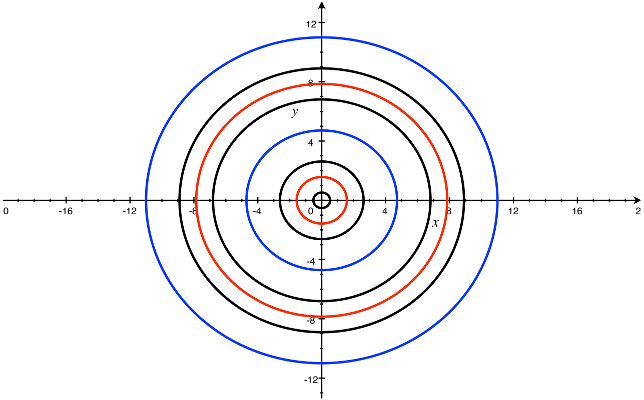


Figura: ....aggiungiamo (in nero) quattro cerchi facenti parte dell'insieme di livello $E_g(1/2)$

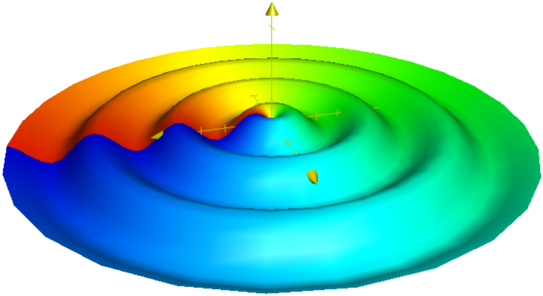


Figura: Il grafico della funzione $g(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$

II.2 Classi speciali di funzioni

II.2.2 Funzioni a variabili separate

Definizione

Sono funzioni di più variabili $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ della forma

$$f(\mathbf{x}) = f_1(x_1)\, f_2(x_2) \dots f_N(x_N)$$

ovvero sono prodotti di funzioni, ognuno di una singola variabile

Esempi

- $f(x, y) = x\, y$ (che avevamo visto nella sezione precedente)
- $f(x, y) = e^x \sin y$
- $f(x, y, z) = x\, y\, \tan(z)$

Caso $N = 2$

In questo caso, si può tracciare il grafico di una funzione a variabili separate

$$f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y)$$

L'operazione è abbastanza facile:

- possiamo considerare una delle due variabili come un parametro, ad esempio y
- per ogni y_0 fissato, disegniamo il grafico della funzione di una variabile

$$x \mapsto f_1(x)\, f_2(y_0)$$

- ognuno di questi grafici, va disegnato nel piano parallelo a quello $x\,z$ e passante da y_0
- "incollando" tutti questi grafici, si ottiene il grafico completo di $f(x, y)$

Esempio

Proviamo a tracciare il grafico della funzione a variabili separate

$$f(x, y) = e^x \sin y$$

Useremo l'idea precedente, di trattare una delle due variabili come un parametro

Partiamo considerando y come un parametro

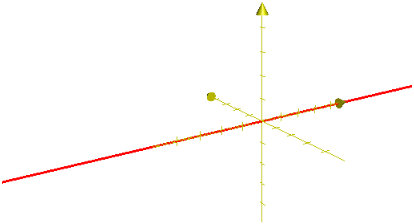


Figura: Fissato $y = 0$, il grafico di $x \mapsto f(x, 0) = e^x \sin(0)$

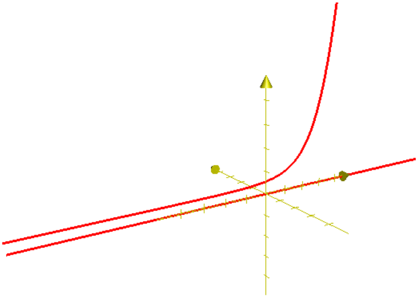


Figura: Fissato $y = 1$, il grafico di $x \mapsto f(x, 1) = e^x \sin 1$

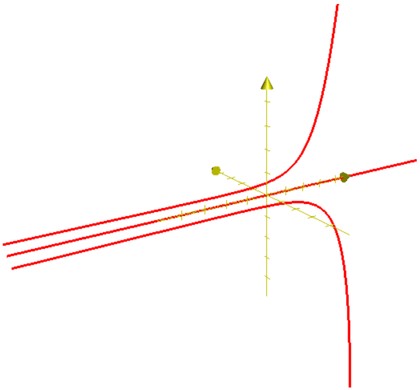


Figura: Fissato $y = -1$, il grafico di $x \mapsto f(x, -1) = e^x \sin(-1)$

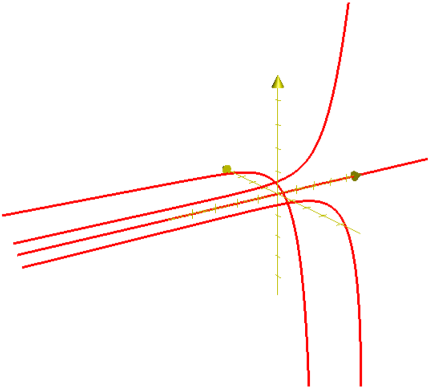


Figura: Fissato $y = 4$, il grafico di $x \mapsto f(x, 4) = e^x \sin 4$

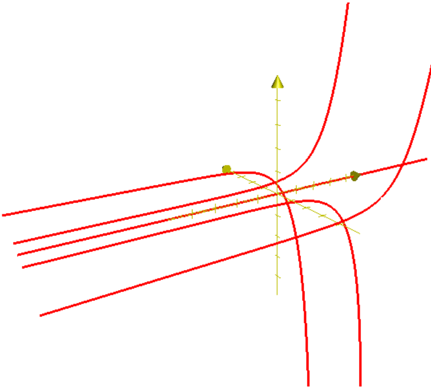


Figura: Fissato $y = -4$, il grafico di $x \mapsto f(x, -4) = e^x \sin(-4)$

Posso però anche cambiare punto di vista e considerare x come un parametro

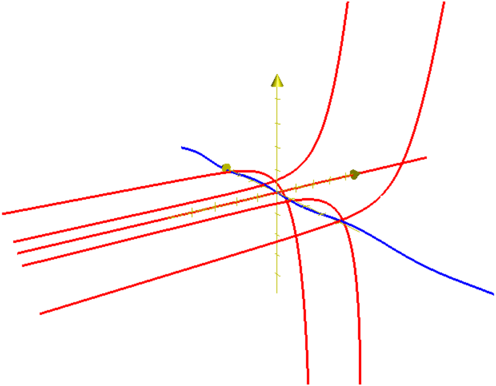


Figura: Fissato $x = 0$, il grafico di $y \mapsto f(0, y) = e^0 \sin y$

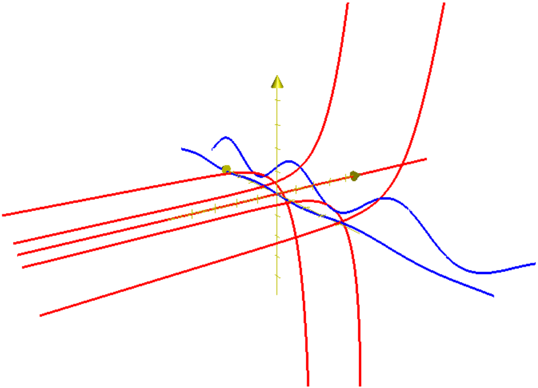


Figura: Fissato $x = 2$, il grafico di $y \mapsto f(2, y) = e^2 \sin y$

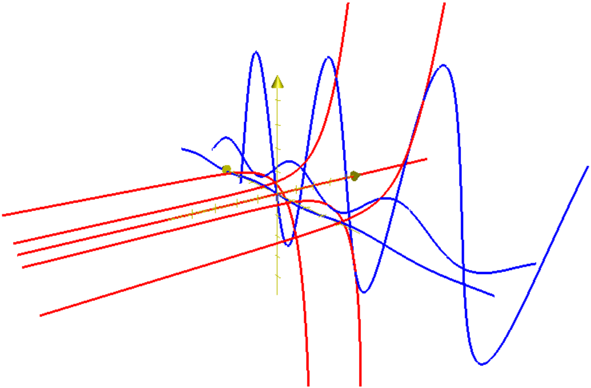


Figura: Fissato $x = 4$, il grafico di $y \mapsto f(4, y) = e^4 \sin y$

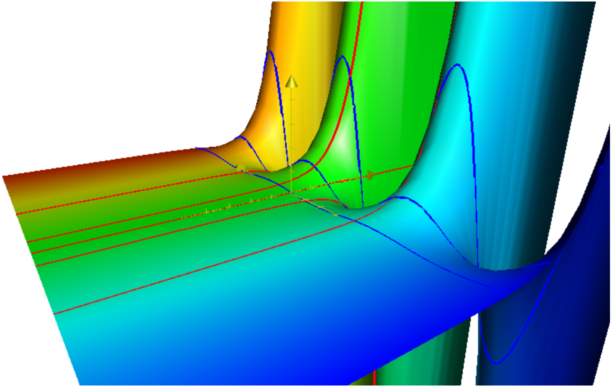


Figura: ....e finalmente il grafico completo!