Analisi Matematica B
– *Lezione 4* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 11 Marzo 2020

Vediamo adesso un tipo speciale di riparametrizzazione, che talvolta è molto utile

Teorema (Ascissa curvilinea)

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ *una curva regolare. Esiste*

$$\phi : [0, \ell(\gamma)] \to [a,b]$$

tale che la riparametrizzazione

$$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(\phi(s)),$$

conserva l'orientazione ed ha la proprietà seguente

$$|\widetilde{\gamma}'(s)| = 1, \qquad \textit{per ogni } s \in [0, \ell(\gamma)]$$

Dimostrazione

L'idea è la seguente:

- la variabile di partenza $t \in [a, b]$ rappresenta il tempo
- la nuova variabile $s \in [0, \ell(\gamma)]$ del cambio $\phi(s)$ rappresenta una lunghezza
- vogliamo definire $\phi(s)$ come

$\phi(s) =$ "*il tempo t al quale abbiamo percorso una lunghezza s*"

- ovviamente, avremo

$$\phi(0) = a$$

 perché è all'istante iniziale a che non abbiamo percorso ancora nessun tratto

- ed anche

$$\phi(\ell(\gamma)) = b,$$

 perché è all'istante finale b che avremo percorso tutta la lunghezza

- questa è l'idea, ma vogliamo adesso definire esplicitamente il cambio di variabile $\phi(s)$
- dobbiamo legare tempo e lunghezza percorsa, usiamo il *Teorema di rettificabilità*
- in base al *Teorema di rettificabilità* la funzione

$$\psi(t) = \int_a^t |\gamma'(\tau)|\, d\tau$$

rappresenta

$$\psi(t) = \text{``}\textit{la lunghezza } s \textit{ che abbiamo percorso al tempo } t\text{''}$$

- la funzione ϕ che stiamo cercando è quindi l'**inversa** della funzione ψ

- quindi

$$\psi : [a, b] \to [0, \ell(\gamma)] \qquad \text{e} \qquad \phi = \psi^{-1} : [0, \ell(\gamma)] \to [a, b]$$

- prima di andare avanti: chi ci dice che ψ si può invertire, ovvero che ψ è iniettiva & suriettiva?
- dal *Teorema fondamentale del Calcolo Integrale*, la funzione ψ è una primitiva di $|\gamma'|$, quindi

$$\psi'(t) = |\gamma'(t)|$$

- la curva è regolare, quindi $|\gamma'(t)| > 0$
- questo implica che ψ è strettamente crescente, quindi invertibile

- ϕ è ancora monotona crescente, in quanto inversa di una monotona crescente
- in base alla regola per la **derivata della funzione inversa**, si ha

$$\phi'(s) = \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(s))} = \frac{1}{\psi'(\phi(s))} = \frac{1}{|\gamma'(\phi(s))|}$$

- nella seconda uguaglianza abbiamo usato che $\phi(s) = \psi^{-1}(s)$
- nella terza uguaglianza abbiamo usato che $\psi' = |\gamma'|$ (visto prima)
- definiamo quindi la curva

$$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(\phi(s))$$

- derivando questa funzione composta

$$|\widetilde{\gamma}'(s)| = |\gamma'(\phi(s))|\,|\phi'(s)| = |\gamma'(\phi(s))|\,\frac{1}{|\gamma'(\phi(s))|} = 1 \quad OK!$$

Definizione

La nuova variabile s della riparametrizzazione $\widetilde{\gamma}$ si chiama **ascissa curvilinea**

$\widetilde{\gamma}$ si chiama **riparametrizzazione di γ tramite ascissa curvilinea**

Esercizio

Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ una curva di classe C^2, tale che

$$|\gamma'(t)| = \text{ costante}$$

Si dimostri che l'accelerazione è ortogonale alla direzione del moto per ogni $t \in [a, b]$

Soluzione

- si tratta di dimostrare che

$$\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = 0, \qquad \text{per ogni } t \in [a, b]$$

- per ipotesi, si ha

$$|\gamma'(t)| = C, \qquad \text{per ogni } t \in [a, b]$$

- possiamo scriverla anche come

$$|\gamma'(t)|^2 = C^2, \qquad \text{per ogni } t \in [a, b]$$

- per definizione di modulo

$$\sum_{i=1}^{N} (\gamma_i'(t))^2 = C^2, \qquad \text{per ogni } t \in [a, b]$$

- deriviamo adesso questa identità, ottenendo

$$2\sum_{i=1}^{N} \gamma_i'(t)\,\gamma_i''(t) = 0, \qquad \text{per ogni } t \in [a, b]$$

- ricordando la definizione di prodotto scalare, l'ultima equazione si può riscrivere

$$\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = 0, \qquad \text{per ogni } t \in [a, b]$$

- questo conclude l'esercizio

I.5 Curve nel piano

I.5.1 Curve cartesiane

In questa sezione, prendiamo **sempre** $\boxed{N = 2}$

Definizione

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione di una variabile

Possiamo definire la curva nel piano $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \qquad t \in [a, b].$$

In tal caso, si dice che γ è una **curva cartesiana**

Osservazioni

Sia $\gamma(t) = (t, f(t))$ una curva cartesiana, allora:

1. il sostegno di γ coincide col grafico di f
2. se f è C^1 su $[a, b]$, γ **è automaticamente** regolare, infatti

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + (f'(t))^2} > 0, \qquad t \in [a, b]$$

3. il versore tangente è dato da

$$\mathbf{T}_\gamma(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}}, \frac{f'(t)}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}} \right)$$

3. se f è C^1, allora γ è rettificabile in base al *Teorema di rettificabilità*

   la formula per la lunghezza diventa

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

Esercizio

Si calcoli la lunghezza del ramo di parabola $y = x^2$, *con* $x \in [0, 1]$.

Soluzione

- Si tratta di calcolare la lunghezza della curva cartesiana

$$\gamma(t) = (t, t^2), \qquad \text{con } t \in [0, 1]$$

- in base alla formula vista prima con $f(t) = t^2$, si ha

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + (f'(t))^2} = \sqrt{1 + (2\,t)^2} = \sqrt{1 + 4\,t^2}$$

- dobbiamo quindi calcolare

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + 4\,t^2}$$

- l'abbiamo già calcolato in precedenza (*finire per casa, usando* $2\,t = \sinh \tau$)

I.5 Curve nel piano

I.5.2 Curve in forma polare

Sono curve nel piano che si presentano nella forma

$$\gamma(\vartheta) = \Big(\varrho(\vartheta)\cos\vartheta, \varrho(\vartheta)\sin\vartheta\Big), \qquad \vartheta \in [a, b],$$

dove la funzione

$$\varrho : [a, b] \to [0, +\infty),$$

è assegnata

Interpretazione

• La variabile ϑ rappresenta l'angolo formato dal vettore posizione $\gamma(\vartheta)$ con l'asse delle ascisse x

• La funzione ϱ rappresenta il suo modulo, i.e. la distanza dell'origine del punto $\gamma(\vartheta)$

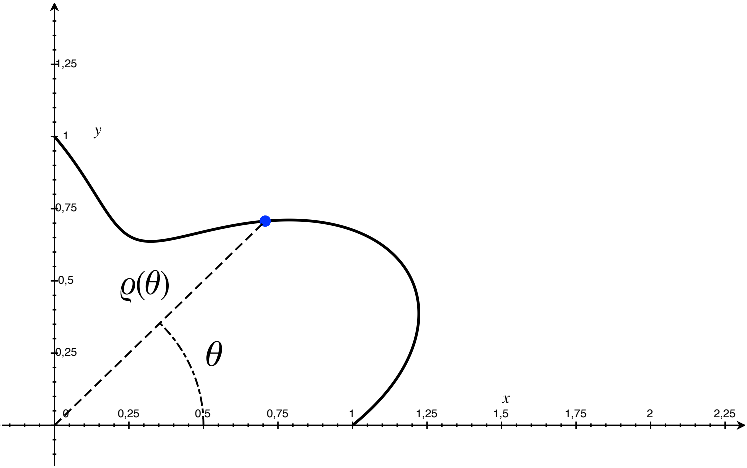

Figura: Il sostegno di una curva in forma polare. Il punto $\gamma(\vartheta)$ può essere descritto usando l'angolo ϑ formato rispetto all'asse delle x e la distanza $\varrho(\vartheta)$ dall'origine

Una curva in forma polare è nota una volta che si assegni la sua funzione **modulo** $\varrho : [a, b] \to [0, +\infty)$

Esempi

1. il "solito" moto circolare uniforme

$$\gamma(\vartheta) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$$

   è una curva in forma polare. In tal caso $\varrho(\vartheta) = 1$

2. la curva

$$\gamma(\vartheta) = (\vartheta \cos\vartheta, \vartheta \sin\vartheta)$$

   è una curva in forma polare. In tal caso $\varrho(\vartheta) = \vartheta$

   Torneremo tra un attimo sullo studio di questa curva

Definizione

Sia

$$\gamma(\vartheta) = \Big(\varrho(\vartheta)\,\cos\vartheta, \varrho(\vartheta)\,\sin\vartheta\Big), \qquad \vartheta \in [a, b],$$

una curva in forma polare

Se ϱ è continua e monotona, la curva si dirà una **spirale**

In tal caso:

- se ϱ è monotona decrescente, diremo che la spirale è **contrattiva**
- se ϱ è monotona crescente, diremo che la spirale è **espansiva**

Esempi

- $\varrho(\vartheta) = \vartheta$
- $\varrho(\vartheta) = \vartheta^2$
- $\varrho(\vartheta) = e^{-\vartheta}$

Esempio: la spirale archimedea

In tal caso, la funzione modulo è data da

$$\varrho(\vartheta) = \vartheta, \qquad \vartheta \in [0, L].$$

A mano a mano che l'angolo ϑ cresce, la distanza dall'origine di $\gamma(\vartheta)$ cresce in modo lineare

Il sostegno della spirale archimedea

La spirale archimedea ha la seguente particolarità

- la distanza tra due “filamenti” successivi resta costante

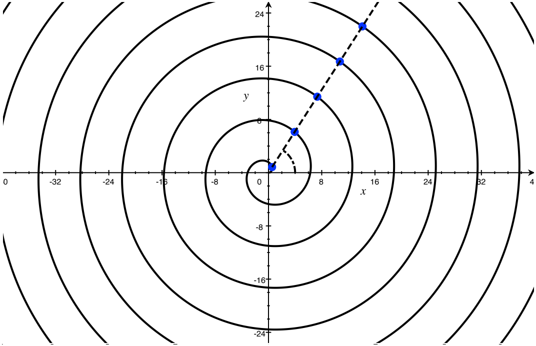

Figura: Il sostegno della spirale archimedea. I punti in blu si trovano in corrispondenza degli angoli ϑ, $\vartheta + 2\pi$, $\vartheta + 4\pi$ etc. La distanza tra un punto ed il successivo è sempre la stessa...e non dipende da ϑ!

Facciamo la **verifica analitica** di questo fatto

Infatti

$$
\begin{aligned}
&|\gamma(\vartheta + 2\,\pi) - \gamma(\vartheta)| \\
&= \sqrt{(\varrho(\vartheta + 2\,\pi) - \varrho(\vartheta))^2\ \cos^2\vartheta + (\varrho(\vartheta + 2\,\pi) - \varrho(\vartheta))^2\ \sin^2\vartheta} \\
&= \sqrt{(\varrho(\vartheta + 2\,\pi) - \varrho(\vartheta))^2} \\
&= |\varrho(\vartheta + 2\,\pi) - \varrho(\vartheta)| \\
&= |(\vartheta + 2\,\pi) - \vartheta| \\
&= 2\,\pi
\end{aligned}
$$

Esempio: la spirale logaritmica

In tal caso, la funzione modulo è data da

$$\varrho(\vartheta) = \log \vartheta, \qquad \vartheta \in [1, L].$$

A mano a mano che l'angolo ϑ cresce, la distanza dall'origine di $\gamma(\vartheta)$ cresce in modo logaritmico

Il sostegno della spirale logaritmica

La spirale logaritmica ha la seguente particolarità

• la distanza tra due "filamenti" successivi decresce in modo asintoticamente equivalente a $\dfrac{2\,\pi}{\vartheta}$

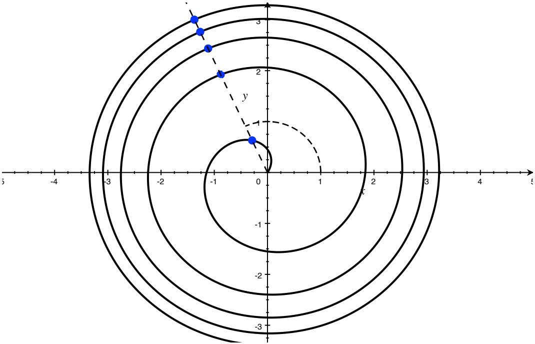

Figura: Il sostegno della spirale logaritmica. I punti in blu si trovano in corrispondenza degli angoli ϑ, $\vartheta + 2\,\pi$, $\vartheta + 4\,\pi$ etc. La distanza tra un punto ed il successivo decresce...e tende a 0 come $2\pi/\vartheta$ per $\vartheta \to +\infty$

Facciamo la **verifica analitica** di questo fatto

Infatti

$$
\begin{aligned}
&|\gamma(\vartheta + 2\,\pi) - \gamma(\vartheta)| \\
&= \sqrt{(\varrho(\vartheta + 2\,\pi) - \varrho(\vartheta))^2 \, \cos^2\vartheta + (\varrho(\vartheta + 2\,\pi) - \varrho(\vartheta))^2 \, \sin^2\vartheta} \\
&= \sqrt{(\varrho(\vartheta + 2\,\pi) - \varrho(\vartheta))^2} \\
&= |\varrho(\vartheta + 2\,\pi) - \varrho(\vartheta)| \\
&= |\log(\vartheta + 2\,\pi) - \log\vartheta| \\
&= \log\left(1 + \frac{2\,\pi}{\vartheta}\right) \sim \frac{2\,\pi}{\vartheta} \qquad \text{se } \vartheta \to +\infty
\end{aligned}
$$

Memento

$$
\log(1 + t) \sim t \qquad \text{se } t \to 0
$$

Velocità di una curva polare

Per una curva in forma polare

$$\gamma(\vartheta) = (\varrho(\vartheta)\,\cos\vartheta, \varrho(\vartheta)\,\sin\vartheta)$$

il vettore velocità è dato da

$$\gamma'(\vartheta) = \Big(\varrho'(\vartheta)\,\cos\vartheta - \varrho(\vartheta)\,\sin\vartheta,\ \varrho'(\vartheta)\,\sin\vartheta + \varrho(\vartheta)\,\cos\vartheta\Big)$$

Il suo modulo è quindi dato da

$$\begin{aligned}|\gamma'(\vartheta)| &= \sqrt{\Big(\varrho'(\vartheta)\,\cos\vartheta - \varrho(\vartheta)\,\sin\vartheta\Big)^2 + \Big(\,\varrho'(\vartheta)\,\sin\vartheta + \varrho(\vartheta)\,\cos\vartheta\Big)^2} \\ &= \sqrt{\Big(\varrho'(\vartheta)\Big)^2(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) + \Big(\varrho(\vartheta)\Big)^2(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)}\end{aligned}$$

(i doppi prodotti che non vedete **si sono cancellati**)

Ovvero, per una curva in forma polare

$$|\gamma'(\vartheta)| = \sqrt{\Big(\varrho'(\vartheta)\Big)^2 + \Big(\varrho(\vartheta)\Big)^2}$$

Abbiamo quindi che

- γ è **di classe** C^1 se e solo se ϱ è una funzione C^1
- γ è **regolare** se e solo se $\Big(\varrho'(\vartheta)\Big)^2 + \Big(\varrho(\vartheta)\Big)^2 \neq 0$

Inoltre, dal *Teorema di rettificabilità* abbiamo che se ϱ è C^1, allora la curva

$$\gamma(\vartheta) = (\varrho(\vartheta)\cos\vartheta, \varrho(\vartheta)\sin\vartheta), \qquad \text{per } \vartheta \in [a, b]$$

è rettificabile e vale la formula

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\Big(\varrho'(\vartheta)\Big)^2 + \Big(\varrho(\vartheta)\Big)^2}\, d\vartheta$$

Esercizio

Si calcoli la lunghezza del ramo di spirale archimedea

$$\gamma(\vartheta) = (\vartheta \cos\vartheta, \vartheta \sin\vartheta), \qquad \vartheta \in [0, L]$$

Soluzione

- Si osservi che $\varrho(\vartheta) = \vartheta$ è C^1, quindi γ è anch'essa di classe C^1
- possiamo usare il *Teorema di rettificabilità*
- per quanto visto prima

$$\ell(\gamma) = \int_0^L \sqrt{\Big(\varrho'(\vartheta)\Big)^2 + \Big(\varrho(\vartheta)\Big)^2}\, d\vartheta$$

- usando che $\varrho(\vartheta) = \vartheta$, si ha dunque

$$\ell(\gamma) = \int_0^L \sqrt{\vartheta^2 + 1}\, d\vartheta$$

- ...di nuovo!? L'abbiamo già calcolato varie volte
- usare il cambio di variabile

$$\vartheta = \sinh s$$

quindi

$$\begin{aligned}\int_0^L \sqrt{\vartheta^2 + 1}\, d\vartheta &= \int_0^{\operatorname{arg\,sinh} L} \sqrt{1 + \sinh^2 s}\, \cosh s\, ds \\ &= \int_0^{\operatorname{arg\,sinh} L} \cosh^2 s\, ds\end{aligned}$$

I.5 Curve nel piano

I.5.3 Versore normale

Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare

Abbiamo visto, che in tal caso è ben definito il versore tangente

$$\mathbf{T}_\gamma(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}, \qquad t \in [a, b].$$

Possiamo anche definire il **versore normale**: si ottiene ruotando di $\pi/2$ in senso orario il versore $\mathbf{T}_\gamma$

Dal corso Geometria e Algebra

In $\mathbb{R}^2$, l'applicazione lineare

"ruotare un vettore $\mathbf{x}$ di angolo ϑ_0 in senso orario"

è definita dalla moltiplicazione per la **matrice ortogonale**

$$\begin{bmatrix} \cos\vartheta_0 & \sin\vartheta_0 \\ -\sin\vartheta_0 & \cos\vartheta_0 \end{bmatrix}$$

Scegliendo $\vartheta_0 = \pi/2$, otteniamo quindi l'espressione del versore normale

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_\gamma(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \ \mathbf{T}_\gamma(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \ \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{(\gamma_2'(t)\,,\ -\gamma_1'(t))}{|\gamma'(t)|} \end{aligned}$$

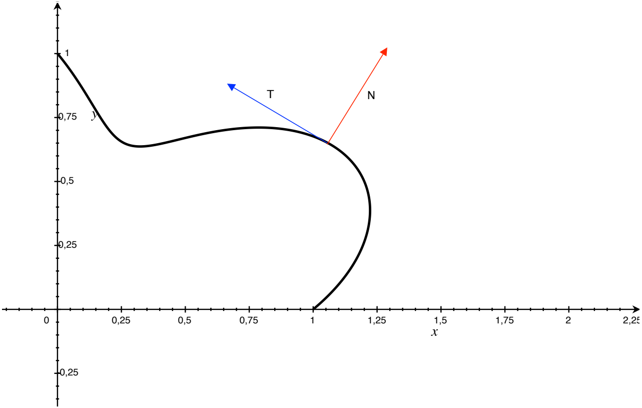

Figura: Il sostegno di una curva regolare γ. In blu, il versore tangente in un punto $\gamma(t_0)$, in rosso il versore normale. Per costruzione, sono tra loro perpendicolari.

I.5 Curve nel piano

I.5.4 Curvatura

Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ rappresenta la traiettoria di un punto materiale

dalla fisica, sappiamo che

"*un punto materiale in movimento nel piano*
è soggetto ad un'accelerazione centripeta
direttamente proporzionale al quadrato
del modulo della sua velocità"

Mettiamo in formula matematica questa affermazione: esiste una funzione

$$\kappa_\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$$

tale che, per ogni $t \in [a, b]$,

$$\langle \gamma''(t), -\mathbf{N}_\gamma(t) \rangle = \kappa_\gamma(t)\, |\gamma'(t)|^2$$

Infatti, l'**accelerazione centripeta** è la componente di γ'' che è ortogonale al moto, quindi è data da

$$\langle \gamma''(t), -\mathbf{N}_\gamma(t) \rangle$$

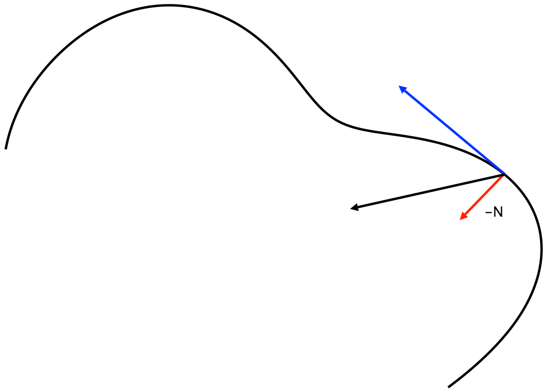

Figura: In blu il vettore velocità, in rosso $-\mathbf{N}_\gamma$, in nero il vettore accelerazione. Il prodotto scalare $\langle \gamma'', -\mathbf{N}_\gamma \rangle$ rappresenta la proiezione ortogonale di γ'' lungo il versore $-\mathbf{N}_\gamma$. Esso ci da dunque l'accelerazione centripeta.

Definizione

La funzione κ nella legge precedente si chiama **curvatura di** γ

Se γ è regolare e di classe C^2, possiamo ricavare

$$\boxed{\kappa_\gamma(t) = \frac{\langle \gamma''(t), -\mathbf{N}_\gamma(t) \rangle}{|\gamma'(t)|^2}}$$

Più in generale, κ_γ si può calcolare in tutti i t tali che $|\gamma'(t)| \neq 0$

Dimensioni fisiche della curvatura

In base alla definizione, le dimensioni sono

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{\text{accelerazione}}{(\text{velocità})^2} = \frac{\dfrac{\text{lunghezza}}{(\text{tempo})^2}}{\left(\dfrac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}}\right)^2} = \frac{1}{\text{lunghezza}}$$

Esempio

Consideriamo la curva regolare (ancora lei!)

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t) \qquad \text{per } t \in [0, 2\pi]$$

Calcoliamone la curvatura

- il vettore velocità

$$\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t) \qquad \text{da cui} \qquad |\gamma'(t)| = R$$

- da questo, otteniamo il versore normale

$$\mathbf{T}_\gamma(t) = (-\sin t, \cos t) \qquad \text{da cui} \qquad \mathbf{N}_\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

- l'accelerazione è data da

$$\gamma''(t) = (-R\cos t, -R\sin t)$$

Abbiamo allora

$$
\begin{aligned}
\kappa_\gamma(t) &= \frac{\langle \gamma''(t), -\mathbf{N}_\gamma(t) \rangle}{|\gamma'(t)|^2} \\
&= \frac{\langle (-R \cos t, -R \sin t), -(\cos t, \sin t) \rangle}{R^2} \\
&= \frac{R}{R^2} = \frac{1}{R}
\end{aligned}
$$

Ovvero

- la curvatura è costante (come potevamo aspettarci)
- e coincide con l'inverso del raggio R (in perfetto accordo con l'analisi delle dimensioni fisiche)

Una formula alternativa

Ricordiamo che

$$\mathbf{N}_\gamma(t) = \frac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{|\gamma'(t)|},$$

possiamo riscrivere la curvatura

$$\begin{aligned}
\kappa_\gamma(t) &= \frac{\langle \gamma''(t), -\mathbf{N}_\gamma(t)\rangle}{|\gamma'(t)|^2} \\
&= \frac{\langle (\gamma_1''(t), \gamma_2''(t)), (-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t))\rangle}{|\gamma'(t)|^3} \\
&= \frac{-\gamma_1''(t)\,\gamma_2'(t) + \gamma_2''(t)\,\gamma_1'(t)}{|\gamma'(t)|^3} \\
&= \frac{1}{|\gamma'(t)|^3} \det \begin{bmatrix} \gamma_1'(t) & \gamma_1''(t) \\ \gamma_2'(t) & \gamma_2''(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Attenzione al segno della curvatura!

La definizione è scelta in modo che...

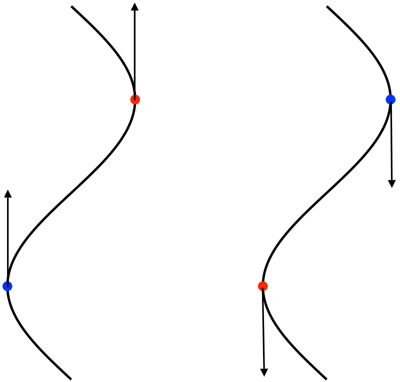

Figura: A destra e a sinistra, lo stesso sostegno, percorso nei due sensi opposti. Nei punti rossi, la curvatura è positiva; in quelli blu è negativa.

Esercizio

Sia

$$\gamma(t) = (a\,\cos t, b\,\sin t), \qquad \textit{per } t \in [0, 2\,\pi],$$

dove $a, b > 0$ *sono due parametri fissati. Si calcoli* $\kappa_\gamma(t)$*.*

Soluzione

- Osserviamo intanto che

$$\frac{(a\,\cos t)^2}{a^2} + \frac{(b\,\sin t)^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1, \qquad \text{per } t \in [0, 2\,\pi]$$

- il sostegno di γ è quindi l'**ellisse** centrata in $(0, 0)$, con semiassi a e b
- si ha

$$\gamma'(t) = (-a\,\sin t, b\,\cos t)$$

- si tratta di una curva regolare, dal momento che

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} > 0,$$

(seno e coseno non sono contemporaneamente nulli)

- si ha quindi

$$\mathbf{T}_\gamma(t) = \left(-\frac{a \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}, \frac{b \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \right),$$

- da cui

$$\mathbf{N}_\gamma(t) = \left(\frac{b \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}, \frac{a \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \right).$$

- calcoliamo adesso l'accelerazione

$$\gamma''(t) = (-a \cos t, -b \sin t).$$

- usando la formula per la curvatura

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{\langle \gamma''(t), -\mathbf{N}_\gamma(t) \rangle}{|\gamma'(t)|^2} = \frac{a\, b}{\left(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}$$

- si noti la curvatura stavolta non è costante
- **caso particolare**: se l'ellisse *degenera* in un cerchio di raggio R, ovvero se $b = a = R$, da sopra ritroviamo

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}$$

Esercizio (per casa)

Si calcoli la curvatura delle seguenti curve cartesiane

$$\gamma(t) = (t, t^2), \qquad \eta(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}), \qquad \omega(t) = (t, e^t),$$

nei punti in cui questo è possibile

(La soluzione si trova sulle dispense, Esercizio 7.6.5)

Esercizio (per casa)

Si consideri la curva

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

- *si dica se la curva è regolare e si calcoli il versore tangente, nei punti in cui questo è possibile*
- *si calcoli la lunghezza di* γ
- *si calcoli la curvatura di* γ*, nei punti in cui questo è possibile*

(Una parte della soluzione si trova sulle dispense, Esercizio 7.6.3)