# Analisi Matematica B
# – *Lezione 24* –

**Lorenzo Brasco**

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 4 Giugno 2020

Riprendiamo da dove ci eravamo lasciati

## Esercizio

*Si calcoli il flusso del campo vettoriale*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$$

*attraverso*

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^2 = 1, -1/2 \leq z \leq 1/2\right\}$$

## Soluzione

- Facciamo innanzitutto un disegno di $\Sigma$
- si tratta del sottoinsieme della sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1, ottenuto tagliando "sopra" $z = 1/2$ e "sotto" $z = -1/2$

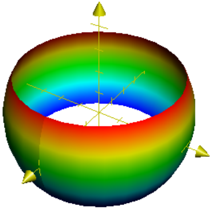


Figura: L'insieme $\Sigma$: si tratta di una sfera "scalottata"

- avevamo detto che c'erano due modi di fare questo esercizio
  1. usando direttamente la definizione di flusso ed andandosi a calcolare l'integrale di superficie

     $$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x, y, z)$$

     con la normale **N** che può essere presa uscente o entrante dalla sfera, a seconda dei gusti
  2. usando un trucco, in modo che sia possibile applicare il *Teorema della divergenza*
- vediamo intanto la correzione del primo metodo
- poi vediamo anche il metodo 2.

1. <u>Primo metodo</u>

- si tratta di calcolare direttamente

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x, y, z)$$

- dobbiamo innanzitutto vedere $\Sigma$ come il sostegno di una superficie regolare
- dal momento che $\Sigma$ è un pezzo di sfera, consideriamo

$$\phi(t, s) = (\cos t \, \sin s, \sin t \, \sin s, \cos s)$$

- dobbiamo trovare l'insieme di definizione $\overline{A}$ di $\phi$, in modo che il suo sostegno sia $\Sigma$ e NON tutta la sfera

- dal momento che $\Sigma$ ha simmetria rotazionale attorno all'asse delle $z$, prenderemo $t \in [0, 2\pi]$
- per quanto riguarda la variabile $s$, osserviamo che se $(x, y, z) \in \Sigma$, allora vale

$$-\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}$$

- dal momento che $z = \cos s$ con $s \in [0, \pi]$, vogliamo quindi

$$-\frac{1}{2} \leq \cos s \leq \frac{1}{2}$$

- ovvero dobbiamo prendere

$$s \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right]$$

- abbiamo allora che $\Sigma$ è il sostegno di

$$\phi(t,s) = (\cos t\, \sin s, \sin t\, \sin s, \cos s),$$

con

$$(t,s) \in \overline{A} = [0, 2\,\pi] \times \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\,\pi\right]$$

- ricordiamo anche che (si veda *Lezione 13*)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} = \Big( -\cos t\, \sin^2 s, -\sin t\, \sin^2 s, -\cos s\, \sin s \Big)$$

- quindi si ha

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x,y,z) = \iint_{\overline{A}} \left\langle \mathbf{F}(\phi(t,s)), \frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle \, dt\, ds$$

- ricordando che $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,0)$, vale

$$\mathbf{F}(\phi(t,s)) = (\cos t\ \sin s, \sin t\ \sin s, 0)$$

- in definitiva

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x,y,z) \\
&\quad = \iint_{\overline{A}} \left\langle \mathbf{F}(\phi(t,s)), \frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle dt\, ds \\
&\quad = \iint_{[0,2\,\pi]\times\left[\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\,\pi\right]} \left\langle \begin{bmatrix} \cos t\ \sin s \\ \sin t\ \sin s \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\cos t\ \sin^2 s \\ -\sin t\ \sin^2 s \\ -\cos s\ \sin s \end{bmatrix} \right\rangle dt\, ds \\
&\quad = -\iint_{[0,2\,\pi]\times\left[\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\,\pi\right]} (\cos^2 t\ \sin^3 s + \sin^2 t\ \sin^3 s)\, dt\, ds
\end{aligned}$$

- usando che $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x,y,z) &= -\iint_{[0,2\pi]\times\left[\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi\right]} \sin^3 s \, dt \, ds \\
&= -2\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \sin^3 s \, ds \\
&= -2\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \sin s \, (1-\cos^2 s) \, ds \\
&= 2\pi \left[ \cos s - \frac{\cos^3 s}{3} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} = -\frac{11}{6}\pi
\end{aligned}$$

2. Secondo metodo

- usiamo un trucco, in modo che sia possibile applicare il *Teorema della divergenza*
- ricordatevi che avevamo già discusso nella *Lezione 23* perché non fosse possibile applicare direttamente il Teorema della divergenza
- il motivo è che l'insieme $\Sigma$ non è la frontiera di un insieme aperto e limitato

- quindi **non** possiamo usare il *Teorema della divergenza* e trasformare
$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x, y, z)$$
in un integrale triplo...
- va bene, allora lasciamolo un attimo da parte e seguitemi in "falegnameria"
- indichiamo con $\Sigma_+$ e $\Sigma_-$ i due "tappi" circolari per poter chiudere $\Sigma$

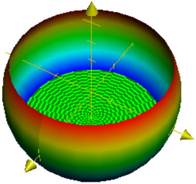


Figura: Aggiungiamo il “fondo” $\Sigma_-$ della botte, che è un cerchio di centro $(0, 0, -1/2)$...

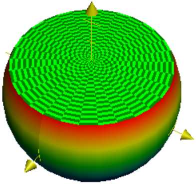


Figura: ...e tappiamo la botte con il “tappo” $\Sigma_+$, un altro cerchio, stavolta di raggio $(0, 0, 1/2)$

- alla fine di questa operazione da falegnami, se chiamiamo

$$E = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 < 1,\ -1/2 < z < 1/2\Big\}$$

  ovvero la porzione di spazio racchiusa dentro la “botte”...

- ...abbiamo che $E$ è un insieme aperto e limitato, la cui frontiera è

$$\partial E = \Sigma \cup \Sigma_+ \cup \Sigma_-$$

- ora, per il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso $\partial E$ (e non più solamente attraverso $\Sigma$...) posso applicare il *Teorema della divergenza* e dire che

$$\iint_{\partial E} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E} \rangle \, d\sigma(x, y, z) = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx\, dy\, dz$$

  dove $\mathbf{N}_{\partial E}$ adesso deve essere la normale uscente, per forza

- ricordando che $\partial E$ è l'unione di 3 pezzi disgiunti, ovvero $\Sigma$ ed i due tappi $\Sigma_+$ e $\Sigma_-$
- per le proprietà dell'integrale

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}\langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E}\rangle \, d\sigma(x,y,z) + \iint_{\Sigma_+}\langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E}\rangle \, d\sigma(x,y,z) \\ + \iint_{\Sigma_-}\langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E}\rangle \, d\sigma(x,y,z) \\ = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz\end{aligned}$$

- ovvero, il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso $\Sigma$ è dato da

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}\langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E}\rangle \, d\sigma(x,y,z) = -\iint_{\Sigma_+}\langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E}\rangle \, d\sigma(x,y,z) \\ - \iint_{\Sigma_-}\langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E}\rangle \, d\sigma(x,y,z) \\ + \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz\end{aligned}$$

- quindi, al prezzo di aver aggiunto gli integrali di superficie sui due “tappi”, siamo riusciti ad usare il *Teorema della divergenza*

- non vi sembra un gran guadagno? È perché non vi siete accorti che il campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 0) \qquad \text{ovvero} \qquad F_3 = 0$$

mentre le normali ai “tappi” sono date da

$$\mathbf{N} = \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1) \qquad \text{su } \Sigma_+$$

$$\mathbf{N} = -\mathbf{e}_3 = (0, 0, -1) \qquad \text{su } \Sigma_-$$

- quindi

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E} \rangle = 0 \qquad \text{su } \Sigma_+$$
$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E} \rangle = 0 \qquad \text{su } \Sigma_-$$

- ...ovvero, il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso $\Sigma$ è dato da

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E}\rangle \, d\sigma(x,y,z) = & \cancel{- \iint_{\Sigma_+} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E}\rangle \, d\sigma(x,y,z)} \\ & \cancel{- \iint_{\Sigma_-} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E}\rangle \, d\sigma(x,y,z)} \\ & + \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz\end{aligned}$$

- grazie al nostro magico falegname, abbiamo quindi scoperto che in questo caso vale

$$\iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E}\rangle \, d\sigma(x,y,z) = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz$$

come se avessimo potuto usare il *Teorema delle divergenza* fin da subito!

- calcoliamo quindi la divergenza

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} 0 = 2$$

- quindi si ha

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E} \rangle \, d\sigma(x, y, z) = \iiint_{E} 2 \, dx \, dy \, dz = 2 \, \mathrm{Vol}(E)$$

- non resta che calcolare il volume di $E$, usando per esempio le coordinate cilindriche

$$\begin{array}{rcl} x & = & \varrho \cos \vartheta \\ y & = & \varrho \sin \vartheta \\ z & = & z \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{con} \\ \vartheta \in [0, 2\pi] \\ -1/2 \leq z \leq 1/2 \\ 0 \leq \varrho \leq \sqrt{1 - z^2} \end{array}$$

- l'insieme $E$ nelle nuove coordinate diventa

$$\Omega = \left\{(\varrho, \vartheta, z) \,:\, (\vartheta, z) \in [0, 2\,\pi] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\, 0 \le \varrho \le \sqrt{1 - z^2}\right\}$$

- in base alla formula di cambio di variabili negli integrali tripli, si ha

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E}\rangle \, d\sigma(x, y, z) &= \iiint_{E} 2\, dx\, dy\, dz \\
&= 2 \iiint_{\Omega} \varrho\, d\varrho\, d\vartheta\, dz \\
&= 2 \iint_{[0,2\,\pi]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]} \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-z^2}} d\vartheta\, dz \\
&= \iint_{[0,2\,\pi]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]} (1 - z^2)\, d\vartheta\, dz
\end{aligned}$$

- in conclusione, si ottiene

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E} \rangle \, d\sigma(x,y,z) &= \iint_{[0,2\,\pi]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]} (1 - z^2)\, d\vartheta\, dz \\ &= 2\,\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 - z^2)\, dz \\ &= 2\,\pi \left[ z - \frac{z^3}{3} \right]_{-1/2}^{1/2} \\ &= 2\,\pi \left( 1 - \frac{1}{12} \right) = \frac{11}{6}\,\pi\end{aligned}$$

## Commento finale

Con i due metodi, otteniamo apparentemente due risultati diversi...come mai?

Se ci fate caso, la differenza è data da un segno "-", ovvero

$$-\frac{11}{6}\pi \qquad \text{VS.} \qquad \frac{11}{6}\pi$$

Questo dipende dal fatto che col primo metodo, abbiamo scelto la normale $\mathbf{N}$ "entrante", mentre col secondo metodo (visto che siamo passati attraverso il *Teorema della divergenza*) la normale $\mathbf{N}_{\partial E}$ era "uscente"

Dal momento che sui punti di $\Sigma$ si ha

$$\mathbf{N} = -\mathbf{N}_{\partial E}$$

ecco spiegata l'apparente differenza!

# VIII.7 Flusso nel piano

La definizione di *flusso di un campo vettoriale* si può adattare anche al caso di campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$

## Definizione

Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare

Sia $\mathbf{F} : E \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale continuo, con $E \subset \mathbb{R}^2$ aperto tale che

$$\mathrm{Im}(\gamma) \subset E$$

Si definisce **flusso di F attraverso il sostegno di** $\gamma$ come il seguente integrale curvilineo

$$\Phi_{\mathbf{F}|_{\mathrm{Im}(\gamma)}} = \int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_\gamma \rangle \, d\ell(x, y)$$

## Osservazione

Ricordando le definizioni di:

- integrale curvilineo (vedi *Lezione 15*), in particolare

$$\boxed{d\ell(x, y) = |\gamma'(t)|\, dt}$$

- versore normale al sostegno di una curva regolare (vedi *Lezione 4*)

$$\mathbf{N}_\gamma = \frac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{|\gamma'(t)|}$$

abbiamo che il flusso di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^2$ può essere riscritto come....

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\mathbf{F}|_{\mathrm{Im}(\gamma)}} &= \int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_\gamma \rangle \, d\ell(x,y) \\
&= \int_a^b \left\langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \frac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{|\gamma'(t)|} \right\rangle |\gamma'(t)| \, dt
\end{aligned}
$$

ovvero, semplificando l'elemento di lunghezza $|\gamma'(t)|$, si ottiene

$$
\boxed{\Phi_{\mathbf{F}|_{\mathrm{Im}(\gamma)}} = \int_a^b \left\langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \begin{bmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{bmatrix} \right\rangle dt}
$$

Anche per il flusso di campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$ vale il

## Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$

*Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e limitato, la cui frontiera $\partial E$ coincida con il sostegno di una curva regolare <u>oppure</u> con l'unione di un numero finito di sostegni di curve regolari*

*Sia $\mathbf{F} : \overline{E} \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe $C^1(\overline{E})$*

*Allora per il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso $\partial E$ vale l'identità seguente*

$$\boxed{\int_{\partial E} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E} \rangle \, d\ell(x,y) = \iint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy}$$

*dove* **ATTENZIONE** *il versore $\mathbf{N}_{\partial E}$ è il versore normale alla frontiera $\partial E$, orientato in modo <u>uscente</u> rispetto all'insieme $E$*

# VIII.8 Finale

Facciamo la correzione del seguente

## Esercizio per casa (Lezione 23)

*Si calcoli il flusso del campo gravitazionale* $\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}$ *attraverso la sfera* $\Sigma$ *di centro* $(0,0,0)$ *e raggio* $2$

## Soluzione

- Vi avevo già fatto osservare come non si possa usare il *Teorema della divergenza*
- infatti $\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}$ non è $C^1$ all'interno della regione racchiusa da $\Sigma$
- non ci resta quindi che calcolare direttamente

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}_{\mathrm{grav}}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x,y,z)$$

- ricordiamoci che

$$\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}(x, y, z) = -\frac{G\, m\, m_S}{x^2 + y^2 + z^2} \times \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

- $\Sigma$, in quanto sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 2, è il sostegno della superficie

$$\phi(t, s) = (2\, \cos t\, \sin s, 2\, \sin t\, \sin s, 2\, \cos s)$$

con

$$(t, s) \in \overline{A} = [0, 2\,\pi] \times [0, \pi]$$

- per costruzione, i punti della forma $\phi(t,s)$ sono tali che

$$|\phi(t,s)| = \sqrt{(2\cos t\,\sin s)^2 + (2\sin t\,\sin s)^2 + (2\cos s)^2} = 2$$

- quindi si ha

$$\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}(\phi(t,s)) = -\frac{G\,m\,m_S}{4}\,(\cos t\,\sin s, \sin t\,\sin s, \cos s)$$

- inoltre, come prima si ha

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} \times \frac{\partial\phi}{\partial s} = \Big(-4\cos t\,\sin^2 s, -4\sin t\,\sin^2 s, -4\cos s\,\sin s\Big)$$

(si osservi che il fattore 4 viene dal fatto che, rispetto a prima, ogni componente è moltiplicata per 2)

- in definitiva, il flusso è dato da

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}_{\mathrm{grav}}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x,y,z) \\
&= -\frac{G\, m\, m_S}{4} \iint_{[0,2\,\pi]\times[0,\pi]} \left\langle \begin{bmatrix} \cos t \, \sin s \\ \sin t \, \sin s \\ \cos s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \, \cos t \, \sin^2 s \\ -4 \, \sin t \, \sin^2 s \\ -4 \, \cos s \, \sin s \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= G\, m\, m_S \iint_{[0,2\,\pi]\times[0,\pi]} \cos^2 t \, \sin^3 s + \sin^2 t \, \sin^3 s + \cos^2 s \, \sin s \\
&= G\, m\, m_S \iint_{[0,2\,\pi]\times[0,\pi]} \left[\sin^3 s + \cos^2 s \, \sin s\right] \, dt\, ds \\
&= G\, m\, m_S \iint_{[0,2\,\pi]\times[0,\pi]} \left[\sin s\,(1-\cos^2 s) + \cos^2 s \, \sin s\right] \, dt\, ds \\
&= G\, m\, m_S \iint_{[0,2\,\pi]\times[0,\pi]} \sin s \, dt\, ds
\end{aligned}
$$

- ovvero

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}_{\mathrm{grav}}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x,y,z) &= G\, m\, m_S \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} \sin s \, dt \, ds \\ &= 2\pi\, G\, m\, m_S \int_0^{\pi} \sin s \, ds \\ &= 2\pi\, G\, m\, m_S \Big[ -\cos s \Big]_0^{\pi} \\ &= 4\pi\, G\, m\, m_S\end{aligned}$$

- *per casa*: rifatelo, prendendo come $\Sigma$ la sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio $R$....il risultato finale dipende da $R$?

## Esercizio per casa (Lezione 23)

*Si calcoli il flusso del campo vettoriale costante*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (1, 0, 2)$$

*attraverso il sostegno della superficie "ciambella" (vedi Lezione 14)*

## Soluzione

- Osserviamo innanzitutto che ogni campo vettoriale costante è di classe $C^1$ e solenoidale
- infatti si ha

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} 1 + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z} 2 = 0$$

- ricordiamoci come è fatta la “ciambella”:
- si considera la circonferenza giacente nel piano $x\,z$, avente raggio $r$ e centro in $(R, 0, 0)$, con $R > r$
- si fa ruotare di $2\,\pi$ questa circonferenza, attorno all’asse delle $z$
- l’insieme così ottenuto è la ciambella

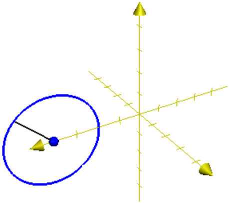


Figura: La circonferenza iniziale di raggio $r$, che si trova nel piano $x\,z$. Il centro si trova sull'asse $x$, in corrispondenza di $R > r$.

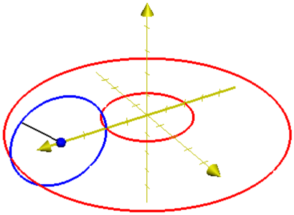


Figura: ...facciamo ruotare questa circonferenza attorno all'asse $z$...

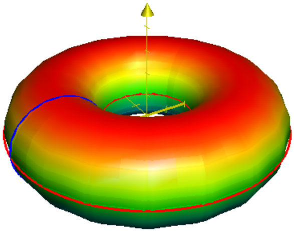


Figura: ...otteniamo la ciambella

- si vede in particolare che la “ciambella” è la frontiera di un insieme aperto e limitato
- dal *Corollario* sul flusso dei campi solenoidali (vedi *Lezione 23*), si ottiene quindi che il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la “ciambella” è nullo

## Esercizio per casa (Lezione 21)

*Si dica quali tra i seguenti potenziali generano un campo vettoriale solenoidale sul loro dominio di definizione*

$$U(x,y) = \arctan\frac{x}{y}, \qquad V(x,y) = x^2 - y^2$$

$$W(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad T(x,y) = x^2 + y^2$$

## Soluzione

- La funzione $U$ è definita e di classe $C^2$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{y=0\}$
- il campo vettoriale da esso generato è il gradiente di $U$, ovvero

$$\mathbf{F}(x,y) = \nabla U(x,y) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

- calcoliamo le componenti del campo

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \arctan \frac{x}{y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2 + x^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \arctan \frac{x}{y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2 + x^2}$$

- vediamo quindi se il campo

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{y}{y^2 + x^2}, -\frac{x}{y^2 + x^2}\right)$$

è solenoidale su $\mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\}$

- si ha

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{F}(x,y) &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{y^2+x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{x}{y^2+x^2} \right) \\ &= -\frac{2\,y\,x}{(y^2+x^2)^2} + \frac{2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2} = 0\end{aligned}$$

- il campo generato da $U$ è quindi solenoidale

—

- la funzione $V(x,y) = x^2 - y^2$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è di classe $C^2$ sul suo dominio
- il campo vettoriale da esso generato è il gradiente di $V$, ovvero

$$\mathbf{F}(x,y) = \nabla V(x,y) = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right) = (2\,x, -2\,y)$$

- si ha

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{F}(x,y) &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(2\,x) + \frac{\partial}{\partial y}(-2\,y) \\ &= 2 - 2 = 0\end{aligned}$$

- quindi anche $V$ genera un campo solenoidale

—

- la funzione $W$ è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ed è ivi di classe $C^2$
- il campo vettoriale da esso generato è il gradiente di $W$, ovvero

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}\right)$$

- calcoliamo queste derivate parziali, si ha

$$F_1 = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)-2\,x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$F_2 = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{x^2+y^2} = -\frac{2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2}$$

- la divergenza è quindi data da

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{-2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

- osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2\,x\,(x^2+y^2)^2-(y^2-x^2)\,2\,(x^2+y^2)\,(2\,x)}{(x^2+y^2)^4}$$
$$= \frac{-2\,x\,(x^2+y^2)-(y^2-x^2)\,4\,x}{(x^2+y^2)^3}$$
$$= \frac{2\,x^3-6\,x\,y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

- si ha anche

$$\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{-2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2\,x\,(x^2+y^2)^2+4\,x\,y\,(x^2+y^2)\,(2\,y)}{(x^2+y^2)^4}$$
$$= \frac{-2\,x\,(x^2+y^2)+8\,x\,y^2}{(x^2+y^2)^3}$$
$$= \frac{-2\,x^3+6\,x\,y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

- si ha dunque

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{-2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{2\,x^3 - 6\,x\,y^2}{(x^2+y^2)^3} + \frac{-2\,x^3 + 6\,x\,y^2}{(x^2+y^2)^3} = 0
\end{aligned}
$$

- anche questo è solenoidale!

—

- infine si vede facilmente che il campo generato da $T(x,y) = x^2 + y^2$ <u>non è</u> solenoidale, infatti

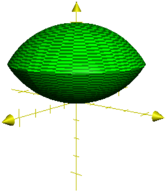
$$\operatorname{div} \nabla T = \operatorname{div}(2\,x, 2\,y) = 2 + 2 = 4 \neq 0$$

## Esercizio per casa (Lezione 20, proposto da H. I.)

*Si calcoli l'integrale triplo*

$$\iiint_S z^2 \, dx \, dy \, dz,$$

*dove $S$ è il solido tridimensionale ottenuto intersecando due palle chiuse di raggio* $1$*, una centrata in* $(0,0,0)$ *e l'altra in* $(0,0,1)$



## Soluzione

- Proviamo a calcolare l'integrale triplo usando le coordinate cilindriche

$$\begin{array}{rcl} x & = & \varrho\cos\vartheta \\ y & = & \varrho\sin\vartheta \\ z & = & z \end{array}$$

- come sempre, dobbiamo capire come si modifica l'insieme di integrazione $S$ con questo cambio
- in altre parole, dobbiamo descrivere $S$ usando le coordinate cilindriche
- ancora una volta, abbiamo a che fare con un insieme che ha simmetria rotazionale rispetto all'asse $z$, quindi

$$\vartheta \in [0, 2\,\pi]$$

- per capire come variano $z$ e $\varrho$, ci conviene disegnare l'insieme $S$ sezionato con il piano $x = 0$

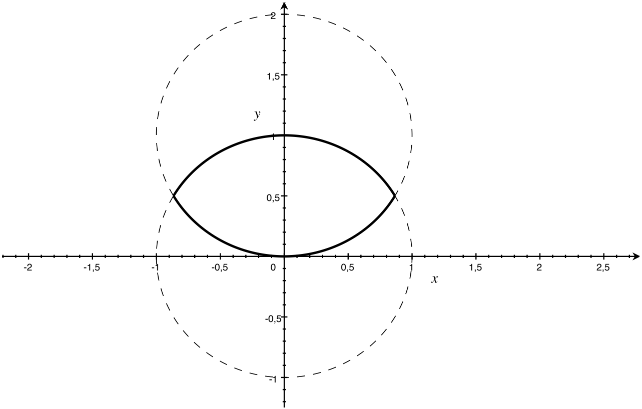



Figura: L'insieme $S$ è ottenuto ruotando all'asse verticale la regione racchiusa dalle due curve nere

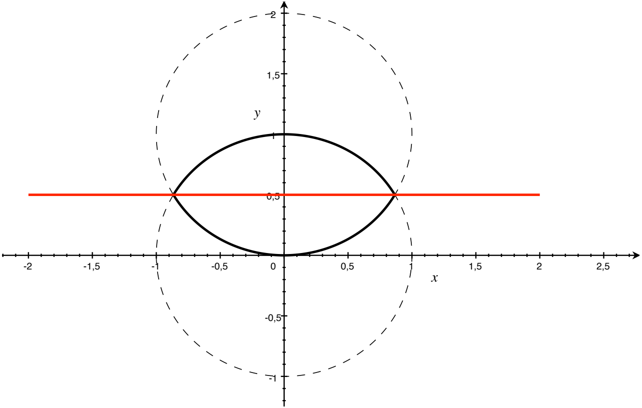



Figura: La variabile $z$ appartiene all'intervallo $[0, 1]$, per capire dove varia $\varrho$ dobbiamo dividere l'insieme a metà, tramite l'asse rosso, che corrisponde a $z = 1/2$

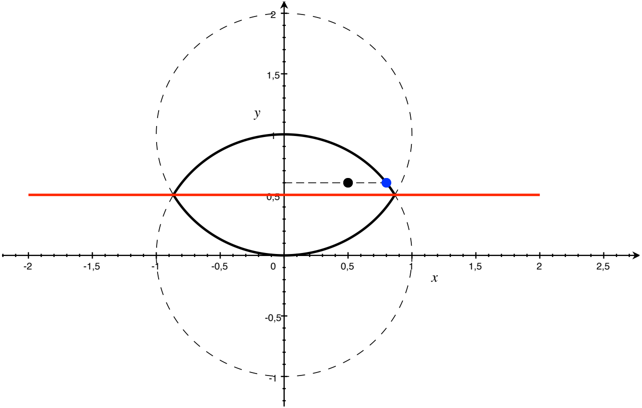



Figura: Se $1/2 \leq z \leq 1$, la distanza $\varrho$ di un punto qualsiasi (in nero) dall'asse delle $z$, varia tra 0 e la corrispondente distanza del punto blu. Tale punto si trova sulla frontiera della palla di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1, quindi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ovvero $\varrho^2 + z^2 = 1$ da cui $\varrho = \sqrt{1 - z^2}$. Questa è la distanza dall'asse delle $z$ del punto blu

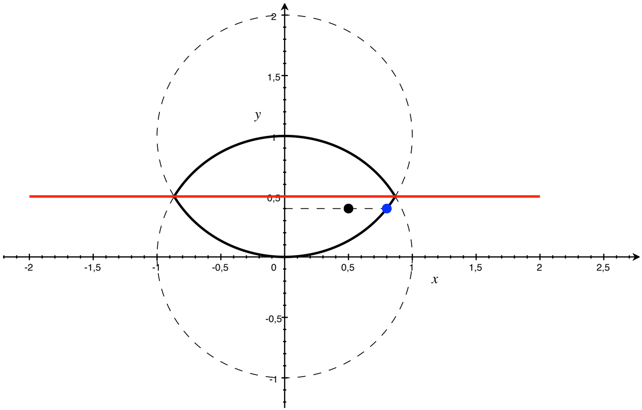



Figura: Se $0 \leq z \leq 1/2$, la distanza $\varrho$ di un punto qualsiasi (in nero) dall'asse delle $z$, varia tra 0 e la corrispondente distanza del punto blu. Tale punto si trova sulla frontiera della palla di centro $(0, 0, 1)$ e raggio 1, quindi $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, ovvero $\varrho^2 + (z-1)^2 = 1$ da cui $\varrho = \sqrt{1-(z-1)^2}$. Questa è la distanza dall'asse delle $z$ del punto blu

- in conclusione, abbiamo che il nuovo insieme di integrazione diventa

$$\Omega = \left\{ (\varrho, \vartheta, z) \,:\, (\vartheta, z) \in [0, 2\pi] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \; 0 \leq \varrho \leq \sqrt{1 - z^2} \right\}$$
$$\cup \left\{ (\varrho, \vartheta, z) \,:\, (\vartheta, z) \in [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \; 0 \leq \varrho \leq \sqrt{1 - (z-1)^2} \right\}$$

  che è un insieme Riemann-regolare, unione di due insiemi $\varrho-$semplici

- usando la formula per il cambio di variabili negli integrali tripli, si ha...

- ...la formula seguente

$$
\begin{aligned}
\iiint_S z^2\,dx\,dy\,dz &= \iiint_\Omega z^2\,\varrho\,d\varrho\,d\vartheta\,dz \\
&= \iint_{[0,2\pi]\times\left[\frac{1}{2},1\right]} \left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \varrho\,d\varrho\right) z^2\,d\vartheta\,dz \\
&+ \iint_{[0,2\pi]\times\left[0,\frac{1}{2}\right]} \left(\int_0^{\sqrt{1-(z-1)^2}} \varrho\,d\varrho\right) z^2\,d\vartheta\,dz \\
&= \iint_{[0,2\pi]\times\left[\frac{1}{2},1\right]} \frac{1-z^2}{2}\,z^2\,d\vartheta\,dz \\
&+ \iint_{[0,2\pi]\times\left[0,\frac{1}{2}\right]} \frac{1-(z-1)^2}{2}\,z^2\,d\vartheta\,dz
\end{aligned}
$$

- integrando adesso rispetto a $\vartheta$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\iiint_S z^2\,dx\,dy\,dz &= 2\,\pi\,\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1-z^2}{2}\,z^2\,dz \\
&\quad + 2\,\pi\,\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1-(z-1)^2}{2}\,z^2\,dz \\
&= \pi\,\int_{\frac{1}{2}}^{1} (z^2-z^4)\,dz \\
&\quad + \pi\,\int_{0}^{\frac{1}{2}} (2\,z^3-z^4)\,dz \\
&= \pi\,\left[\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \pi\,\left[\frac{z^4}{2}-\frac{z^5}{5}\right]_{0}^{\frac{1}{2}} \\
&= \pi\,\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{96}\right)
\end{aligned}$$

## Esercizio

*Calcolare il lavoro del campo*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (e^x \cos y, -e^x \sin y, 1)$$

*lungo il cammino*

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z = y\right\}$$

## Soluzione

- Il campo $\mathbf{F}$ è definito su $\mathbb{R}^3$ ed è di classe $C^1$
- proviamo a vedere se $\mathbf{F}$ è conservativo: come abbiamo visto, questo può semplificare il calcolo del lavoro

- per vedere se $\mathbf{F}$ è conservativo, calcolo intanto il suo rotore

$$
\operatorname{rot} \mathbf{F} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^x \cos y & -e^x \sin y & 1 \end{vmatrix}
$$
$$
= (0, 0, -e^x \sin y - (-e^x \sin y)) = (0, 0, 0)
$$

- quindi $\mathbf{F}$ è irrotazionale
- dal momento che $\mathbf{F}$ è definito su $\mathbb{R}^3$ che è stellato, dal *Teorema "Campi e stellati"* possiamo dire che $\mathbf{F}$ è conservativo

- proviamo a calcolare un potenziale $U$ di $\mathbf{F}$ (anche se non è detto che ci serva...)
- la funzione $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ deve essere tale che

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^x \cos y, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -e^x \sin y, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = 1$$

- parto dalla prima equazione e prendo le primitive **rispetto ad** $x$, quindi

$$U(x, y, z) = e^x \cos y + g(y, z)$$

- dobbiamo determinare la funzione incognita $g$, imponiamo la seconda condizione

- si ha allora
$$-e^x \sin y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y + g(y,z)) = -e^x \sin y + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z)$$

- ovvero
$$\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = 0$$

- in altre parole, $g$ è costante come funzione di $y$, di conseguenza dipende solo da $z$
- fin'ora abbiamo ottenuto che il potenziale $U$ deve avere la forma
$$U(x,y,z) = e^x \cos y + g(z)$$

- imponendo anche la terza condizione, si ha

$$1 = \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}(e^x \cos y + g(z)) = g'(z)$$

- ovvero $g'(z) = 1$
- possiamo per esempio prendere $g(z) = z$ ed ottenere in definitiva il potenziale

$$U(x, y, z) = e^x \cos y + z$$

- veniamo adesso al cammino lungo cui dobbiamo calcolare il lavoro
- osserviamo che
$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2+z^2=1,\,z=y\right\}$$
è l'intersezione tra la sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio 1 ed il piano di equazione $z=y$
- facciamo un disegno (l'ultimo)

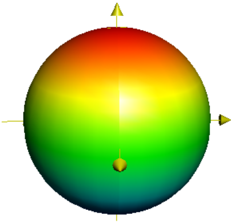


Figura: La sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1

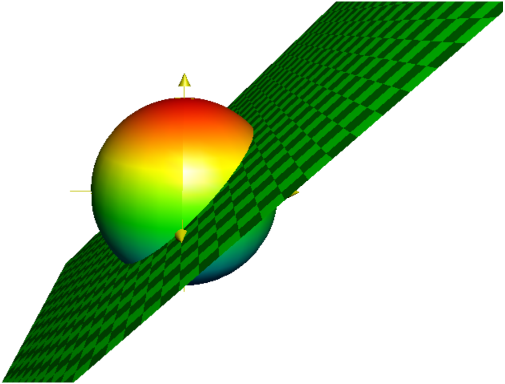


Figura: Il piano di equazione $z = y$

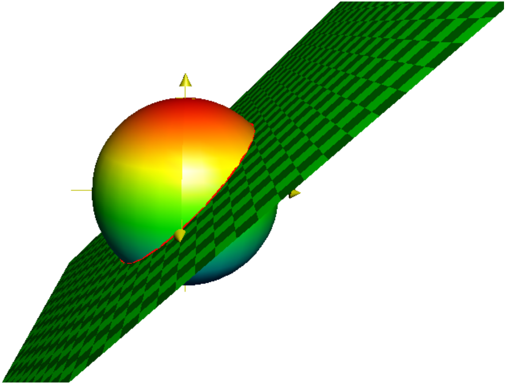


Figura: Evidenziata in rosso, la loro intersezione

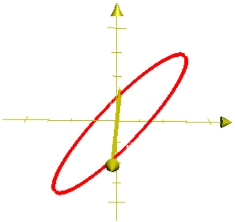


Figura: ...et voilà il nostro cammino, si tratta di un cerchio che giace sulla sfera

- si tratta quindi di calcolare il lavoro di un campo conservativo, lungo un **circuito**
- dal Corollario visto nella *Lezione 21*, ovvero

### Corollario

*Sia* $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^N$ *un campo vettoriale conservativo*

*Il lavoro di* $\mathbf{F}$ *è nullo lungo il sostegno di ogni* <u>*circuito*</u> *regolare a tratti*

- ...si ottiene che il lavoro è nullo!
- notate che il potenziale $U$ in effetti non ci è servito!

FINE