Analisi Matematica B
– *Lezione 22* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 20 Maggio 2020

Proposizione

Sia $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^3$ *campo vettoriale di classe* $C^2(A)$

Il suo rotore $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$ *è un campo vettoriale solenoidale*

Dimostrazione

- Si tratta di usare le definizioni
- dobbiamo calcolare

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{F})$$

  e mostrare che questa quantità è identicamente nulla su A
- ricordando la definizione di divergenza ed il fatto che

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

- abbiamo allora

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) \\
& + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) \\
& + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

- ovvero

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = {} & \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x\,\partial z}\right) \\
& + \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y\,\partial x}\right) \\
& + \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

- dal momento che F_1, F_2, F_3 sono di classe $C^2(A)$ per ipotesi, dal *Teorema di Schwarz* (vedi *Lezione 10*) si ha che

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 F_3}{\partial y\,\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial z\,\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial z\,\partial y}$$

- usando queste informazioni nell'espressione della divergenza che avevamo ottenuto, si conclude

Esercizio per casa

Si consideri il potenziale di Lennard-Jones

$$U_{LJ}(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^6} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$

definito su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. *Esso viene utilizzato in Chimica per descrivere l'interazione interatomica ed intermolecolare*

Si dica se il campo vettoriale generato da U_{LJ} *è solenoidale su* $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$

VIII.5 Campi irrotazionali

Definizione

Sia $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe $C^1(A)$

$\mathbf{F}$ si dice **irrotazionale su** A se vale

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, 0), \qquad \text{per ogni } (x, y, z) \in A$$

Caso $N = 2$

Per un campo vettoriale bidimensionale $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^2$, ricordando la definizione di rotore in questo caso, essere **irrotazionale su** A vuol dire che

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y), \qquad \text{per ogni } (x, y) \in A$$

Esercizio

Si dica quali tra i seguenti campi vettoriali sono irrotazionali sul loro dominio di definizione

$$\mathbf{F}(x,y) = (-y\,x, x\,y), \qquad \mathbf{G}(x,y,z) = (x\,y, y\,z, z^2)$$

$$\mathbf{H}(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$$

Soluzione

- Il campo $\mathbf{F}$ è definito su $\mathbb{R}^2$ ed è di classe C^1
- per vedere se è irrotazionale, basta vedere se

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y), \qquad \text{per ogni } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

- si ha
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = -x$$
- queste due funzioni non coincidono identicamente su $\mathbb{R}^2$, quindi **F non è** irrotazionale su $\mathbb{R}^2$

—

- il campo **G** è definito e di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$
- calcoliamo il suo rotore
$$\mathrm{rot}\,\mathbf{G} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x\,y & y\,z & z^2 \end{vmatrix} = (-y, 0, -x)$$

- quindi nemmeno **G** è irrotazionale sul suo dominio

—

- il campo **H** è definito e di classe C^1 su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$
- la prima componente del suo rotore è data da

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}
&= \frac{\partial}{\partial y} z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&- \frac{\partial}{\partial z} y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}\, z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}(2\,y) \\
&+ \frac{1}{2}\, y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}(2\,z) = 0
\end{aligned}$$

- in modo del tutto analogo, si vede che per la seconda e terza componente si ha (verificatelo per esercizio)

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$$

- quindi **H** è irrotazionale!

Il seguente risultato afferma che

essere irrotazionale è **condizione necessaria**

affinché un campo sia conservativo

Teorema (Condizione necessaria per essere conservativo)

Sia $N = 2$ *oppure* $N = 3$

Sia $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^N$ *un campo vettoriale* $C^1(A)$, *con* $A \subset \mathbb{R}^N$

Allora

$$\boxed{\mathbf{F} \text{ conservativo su } A \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{F} \text{ irrotazionale su } A}$$

Dimostrazione

- Facciamo la dimostrazione nel caso $N = 2$
- il caso $N = 3$ è analogo e viene lasciato come esercizio

- ricordando che per un campo vettoriale bidimensionale vale

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

- dobbiamo dimostrare che se $\mathbf{F}$ è conservativo, allora deve aversi

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y), \qquad \text{per ogni } (x, y) \in A.$$

- l'ipotesi su $\mathbf{F}$ implica che esiste un *potenziale* $U : A \to \mathbb{R}$ per $\mathbf{F}$
- ovvero che

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = F_1(x, y) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = F_2(x, y)$$

- per ipotesi F_1 e F_2 sono di classe $C^1(A)$
- le identità precedenti implicano che U è di classe $C^2(A)$
- calcoliamo adesso

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

- si ha

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}(x,y),$$

e

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}(x,y).$$

- abbiamo detto che U è di classe $C^2(A)$, quindi per il *Teorema di Schwarz* (vedi *Lezione 10*) abbiamo che

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}(x,y)$$

- e quindi

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)$$

- ...come volevamo!

Esempio

Abbiamo visto nella *Lezione 21* che il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$$

non è conservativo

Per dimostrarlo, avevamo osservato che il suo lavoro lungo il sostegno del **circuito** $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ era

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_\gamma \rangle \, d\ell(x, y) = 2\pi R^2 \neq 0$$

Utilizzando il Teorema precedente giungiamo alla stessa conclusione più rapidamente: infatti

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

ovvero **F non è** irrotazionale, quindi **non è** conservativo

Abbiamo quindi visto che

$$\boxed{\textbf{F} \textit{ conservativo su } A \quad \Longrightarrow \quad \textbf{F} \textit{ irrotazionale su } A}$$

Domanda

Sarà vero anche il viceversa? Se così fosse, sarebbe molto comodo!

Infatti, in tal caso per dire se **F** è conservativo, basterebbe calcolarsi

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}$$

e vedere se è identicamente nullo oppure no...

...e però **NO**, non vale il viceversa

$$\boxed{\cancel{\mathbf{F} \text{ irrotazionale su } A \implies \mathbf{F} \text{ conservativo su } A}}$$

Esercizio (Legge di Biot-Savart)

Si consideri il campo vettoriale di Biot-Savart, ovvero

$$\mathbf{F}_{BS}(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right), \qquad \textit{per } (x,y) \neq (0,0),\ z \in \mathbb{R}$$

Si dimostri che:

1. $\mathbf{F}_{BS}$ *è irrotazionale sul suo dominio*
2. $\mathbf{F}_{BS}$ *non è conservativo sul suo dominio*

Soluzione

- Facciamo innanzitutto quello che ci chiede l'esercizio
- *en passant* ci "divertiremo" a rappresentare l'effetto del campo di forze $\mathbf{F}_{BS}$

1. Mostriamo che $\mathbf{F}_{BS}$ è irrotazionale

- si noti che $\mathbf{F}_{BS}$ ha la terza componente nulla e non dipenda da z
- quindi il suo rotore è

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{F}_{BS} &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \\ &= \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

- calcoliamo queste due derivate

- si ha

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^2+y^2) - x\,(2\,x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ed anche

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-(x^2+y^2) + y\,(2\,y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

- come si vede

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0,$$

e quindi $\mathbf{F}_{BS}$ è irrotazionale

2. Mostriamo che $\mathbf{F}_{BS}$ non è conservativo

- osserviamo che

$$\mathbf{F}_{BS}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

ha una struttura simile a quella del campo $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$

- in particolare, si noti che

$$\langle \mathbf{F}_{BS}(x, y, z), (x, y, z) \rangle = 0$$

ovvero $\mathbf{F}_{BS}$ è ortogonale al vettore posizione

- inoltre il vettore $\mathbf{F}_{BS}(x, y, z)$ è sempre parallelo al piano $x\,y$ (la terza componente è nulla)

- il modulo del campo è dato da

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{F}_{BS}(x,y,z)| &= \sqrt{\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}
$$

- ricordando che per un punto (x,y,z) la quantità $\sqrt{x^2+y^2}$ rappresenta la sua distanza dall'asse delle z...
- ...abbiamo che l'intensità della forza $\mathbf{F}_{BS}(x,y,z)$ è *inversamente proporzionale alla distanza del punto* (x,y,z) *dall'asse delle* z

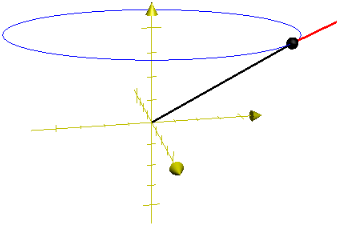

Figura: Nel punto generico (x, y, z) (in nero), il campo $\mathbf{F}_{BS}(x, y, z)$ è tangente al cerchio blu e complanare con esso. A mano a mano che il cerchio blu è più grande, ovvero che ci allontaniamo dall'asse delle z, l'intensità di $\mathbf{F}_{BS}$ diminuisce

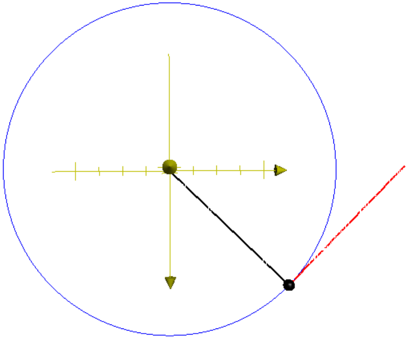

Figura: Una vista verticale dell'azione del campo $\mathbf{F}_{BS}$ (freccia rossa)

- bei disegni, bella discussione, ma...dobbiamo ancora dimostrare che $\mathbf{F}_{BS}$ non è conservativo!
- come possiamo fare? Possiamo tentare di mostrare che il lavoro lungo un opportuno circuito **non è nullo**
- proviamo a calcolare il lavoro lungo un cammino circolare, che ruota attorno all'asse delle z
- per esempio, prendiamo

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0), \qquad \text{per } t \in [0, 2\pi]$$

- calcoliamo

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}_{BS}, \mathbf{T}_\gamma \rangle \, d\ell(x, y, z)$$

- si ha

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}_{BS}, \mathbf{T}_\gamma \rangle \, d\ell(x,y,z) = \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{F}_{BS}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

- in base alle definizioni di $\mathbf{F}_{BS}$ e γ si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{BS}(\gamma(t)) &= \left(-\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, 0 \right) \\ &= (-\sin t, \cos t, 0) \end{aligned}$$

ed anche

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

- abbiamo allora

$$\int_0^{2\pi} \langle \mathbf{F}_{BS}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt = 2\pi \neq 0$$

- quindi $\mathbf{F}_{BS}$ non è conservativo sul suo dominio di definizione

L'esempio precedente mostra come in generale valga

$$\cancel{\boxed{\mathbf{F}\ \textit{irrotazionale su } A \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{F}\ \textit{conservativo su } A}}$$

Commento

Siamo un po' tristi: sarebbe stato un criterio molto comodo per sapere quando un campo era conservativo, senza dover calcolare integrali di linea o potenziali....

Tuttavia!

...se l'insieme A su cui il campo è definito non è troppo "brutto", c'è una speranza...

Vale infatti il seguente **importante risultato** (che non dimostriamo)

Teorema (“Campi e stellati”)

Sia $N = 2$ *oppure* $N = 3$

- *Sia* $A \subset \mathbb{R}^N$ *aperto* **stellato rispetto ad un suo punto** $\mathbf{x}_0 \in A$, *ovvero tale che*

  “per ogni $\mathbf{x} \in A$, *il* <u>*segmento*</u> *che unisce* $\mathbf{x}_0$ *a* $\mathbf{x}$

  è tutto contenuto in A*”*

- *Sia* $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^N$ *campo vettoriale di classe* $C^1(A)$

Allora

$$\boxed{\mathbf{F} \text{ irrotazionale su } A \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{F} \text{ conservativo su } A}$$

L'esempio che abbiamo visto del campo di Biot-Savart

$$\mathbf{F}_{BS}(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right), \qquad \text{per } (x,y) \neq (0,0),\ z \in \mathbb{R}$$

non contraddice ovviamente il risultato precedente

Osservate infatti che

- $\mathbf{F}_{BS}$ è irrotazionale su

  $$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \neq (0,0)\right\}$$

  come verificato prima
- ma l'insieme aperto A **non è stellato rispetto a nessun suo punto**!

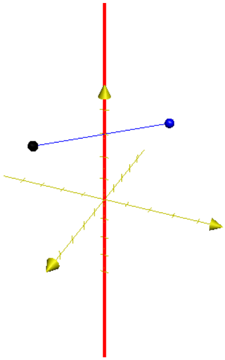

Figura: Il dominio di definizione A del campo di Biot-Savart: consiste di $\mathbb{R}^3$ privato dell'asse delle z (in rosso). Supponiamo per assurdo che A sia stellato rispetto al punto nero (x_0, y_0, z_0): il segmento che congiunge questo punto al punto blu simmetrico $(-x_0, -y_0, z_0)$ incrocia l'asse delle z, ovvero "esce" da A. Questo argomento è valido ovunque posizioniamo il punto nero, quindi A non è stellato rispetto a nessun punto

Vediamo alcuni esempi di insiemi stellati e non

Esempi

- $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ sono chiaramente stellati, per esempio rispetto all'origine (in realtà sono stellati rispetto ad un qualsiasi punto)
- ogni palla $B_R(\mathbf{x}_0)$ è stellata, rispetto al suo centro $\mathbf{x}_0$
- un semipiano, ad esempio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y > 0\}$, è stellato rispetto ad un qualsiasi suo punto
- un semispazio, ad esempio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, z > 0\}$, è stellato rispetto ad un qualsiasi suo punto

- l'insieme
$$\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$$
non è stellato rispetto a nessuno suo punto

  Infatti, se $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, il segmento che connette questo punto col suo *anti-podale* $-\mathbf{x_0}$ passa necessariamente dall'origine $\mathbf{0}$, che però non fa parte dell'insieme
- per lo stesso motivo, una corona circolare
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, r^2 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2\right\}$$
non è stellata rispetto a nessun suo punto

Osservazione

Il criterio del *Teorema "Campi e stellati"* è molto utile, ma potete usarlo solo quando avete l'ipotesi di **stellatura** del dominio

Se invece siete in un caso in cui **F** è irrotazionale su A, ma A non è stellato...ahi!

In tal caso, per decidere se **F** è conservativo oppure no, non vi resta che procedere in modo "artigianale" come segue:

A *troviamo un circuito regolare* γ *sul cui sostegno il lavoro è* $\neq 0$

In tal caso **F non è** conservativo

— oppure —

B *troviamo "a mano" un potenziale per* **F**

In tal caso **F è** conservativo

Esercizio

Si dica quali tra i seguenti campi vettoriali sono conservativi sul loro insieme di definizione

$$\mathbf{F}(x,y) = (\cos x, \sin y) \qquad \mathbf{G}(x,y,z) = (z,y,x)$$

$$\mathbf{H}(x,y) = (x^2+2\,x\,y+1, x^2+y) \qquad \mathbf{B}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

In caso affermativo, si trovi un potenziale

Soluzione

- $\mathbf{F}$ è definito e C^1 su $\mathbb{R}^2$, che è stellato rispetto ad ogni suo punto
- per decidere se $\mathbf{F}$ è conservativo, possiamo usare il *Teorema "Campi e stellati"*

- vediamo quindi se $\mathbf{F}$ è irrotazionale
- dal momento che si tratta di un campo bidimensionale, basta vedere se

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \qquad \text{identicamente su } \mathbb{R}^2$$

- dal momento che $\mathbf{F}(x, y) = (\cos x, \sin y)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \sin y - \frac{\partial}{\partial y} \cos x = 0 - 0 = 0$$

- $\mathbf{F}$ è irrotazionale su $\mathbb{R}^2$ e per il *Teorema "Campi e stellati"* possiamo quindi dire che è anche conservativo

- ci manca di trovare un potenziale, come si fa?
- lasciamoci guidare dalla definizione, dobbiamo trovare una funzione $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = F_2$$

- ovvero tale che

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \cos x \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \sin y$$

- si tratta di un problema simile a quello della "ricerca di primitive" già incontrato ad Analisi Matematica A, ma **attenzione** che adesso abbiamo più variabili!

- cerchiamo di dare un algoritmo per trovare il potenziale
- parto dalla prima equazione

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \cos x$$

e prendo tutte le primitive rispetto ad x

- ovvero U deve essere della forma

$$U(x, y) = \sin x + g(y)$$

- osservate infatti che avendo due variabili, ma prendendo la primitiva solo rispetto a x, la primitiva che troviamo non è più "a meno di costanti" (come in una variabile), ma "a meno di funzioni che dipendono solo da y"
- osservate infatti che

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sin x + g(y)) = \frac{\partial}{\partial x}\sin x = \cos x$$

- per trovare il potenziale e concludere, ci manca da determinare la funzione g
- per questo, abbiamo ancora una condizione a disposizione, infatti deve valere anche

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \sin y$$

- imponiamo questa condizione, sapendo che deve valere

$$U(x, y) = \sin x + g(y)$$

- abbiamo quindi

$$\sin y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin x + g(y)) = g'(y)$$

- ovvero $g(y)$ deve essere una primitiva di $\sin y$

- possiamo quindi prendere $g(y) = -\cos y$
- abbiamo quindi trovato un potenziale per $\mathbf{F}$, dato da

$$U(x, y) = \sin x - \cos y$$

—

- veniamo al campo vettoriale

$$\mathbf{G}(x, y, z) = (z, y, x)$$

- esso è definito e di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$, che è stellato rispetto ad ogni suo punto
- per decidere se $\mathbf{G}$ è conservativo, possiamo usare il *Teorema "Campi e stellati"*

- calcoliamo il rotore

$$\operatorname{rot}\mathbf{G} = \det\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y & x \end{vmatrix} = (0, 1-1, 0) = (0,0,0)$$

- **G** è irrotazionale sull'insieme stellato $\mathbb{R}^3$, quindi possiamo dire che **G** è conservativo
- cerchiamo un potenziale
- procediamo esattamente come prima, tenendo presente che adesso ci sono 3 **variabili**

- dobbiamo trovare una funzione $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = F_2 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = F_3$$

- ovvero tale che

$$\frac{\partial U}{\partial x} = z \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = x$$

- procediamo come prima: partiamo dalla prima equazione e prendiamo le primitive *rispetto ad* x, da cui si ottiene

$$U(x, y, z) = x\, z + g(y, z)$$

 dove g è una funzione incognita che dipende solo dalle variabili rispetto a cui non abbiamo preso le primitive

- per determinare g, osserviamo che ci restano ancora due condizioni da imporre

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = x$$

- imponendo la prima di queste due condizioni ed usando quello che già sappiamo su U, si trova

$$y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(z\,x + g(y,z)) = \frac{\partial g}{\partial y}(y,z)$$

- ovvero, prendendo le primitive rispetto ad y, la funzione g deve avere la forma

$$g(y,z) = \frac{y^2}{2} + h(z)$$

- ci manca da determinare la funzione h, funzione solo di z

- per questo, abbiamo ancora una condizione a disposizione, infatti deve valere anche

$$\frac{\partial U}{\partial z} = x$$

- imponiamo questa condizione, sapendo che deve valere

$$U(x, y, z) = x\,z + \frac{y^2}{2} + h(z)$$

- abbiamo quindi

$$x = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(x\,z + \frac{y^2}{2} + h(z)\right) = x + h'(z)$$

- ovvero deve valere $h'(z) = 0$, cioè h deve essere costante!

- possiamo allora prendere $h(z) = 0$ per esempio...
- ...e concludere che

$$U(x, y, z) = x\,z + \frac{y^2}{2}$$

è un potenziale di $\mathbf{G}$

—

- il campo vettoriale

$$\mathbf{H}(x, y) = (x^2 + 2\,x\,y + 1, x^2 + y)$$

è definito e di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$

- finite la discussione su $\mathbf{H}$ *per casa*

- infine, consideriamo il campo vettoriale

$$\mathbf{B}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

- osserviamo che questo campo è definito e di classe C^1 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ che **non è stellato**
- non possiamo quindi usare il *Teorema "Campi e stellati"*
- ricordiamo comunque che l'implicazione

$$\boxed{\mathbf{B} \textit{ conservativo su } A \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B} \textit{ irrotazionale su } A}$$

 è sempre valida (*Teorema "Condizione necessaria per essere conservativo"*)
- vediamo quindi se $\mathbf{B}$ è irrotazionale: se non lo fosse, potremmo già affermare che non è conservativo

- essendo **B** un campo bidimensionale, ci basta calcolare

$$\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}$$

- ovvero

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{x^2+y^2} = -\frac{2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

- **B** è irrotazionale, ma il suo dominio non è stellato
- siamo nel caso peggiore: non resta che procedere in modo "artigianale"

- osserviamo che le due componenti del campo vettoriale

$$\frac{x}{x^2+y^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{y}{x^2+y^2}$$

assomigliano tanto a due derivate parziali...

- ...se poniamo $f(x,y) = x^2 + y^2$, allora le componenti hanno la forma

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{f(x,y)}\,\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2}\,\frac{1}{f(x,y)}\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

- ovvero sembrerebbero le derivate di un logaritmo...
- in effetti, se si prende

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\log f(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$$

- ...questo è un potenziale per $\mathbf{B}$
- in conclusione, il campo vettoriale $\mathbf{B}$ è conservativo
- ce l'abbiamo fatta!

Un paio di trucchetti

- quando trovate un potenziale U per $\mathbf{F}$, fate sempre la verifica finale che effettivamente

$$\nabla U = \mathbf{F}$$

- per dire che un campo è conservativo e trovare un potenziale, non sempre è necessario fare tutta la discussione dettagliata fatta in precedenza: se avete buon colpo d'occhio e vedete subito una funzione U tale che per il campo assegnato $\mathbf{F}$ valga

$$\mathbf{F} = \nabla U$$

  avete già finito!

Esercizio su richiesta (Compito del 18 Giugno 2018)

Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (0, \cosh y \ \sin z, \sinh y \ \cos z)$$

lungo il sostegno dell'elica cilindrica

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t), \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Soluzione

- il calcolo del lavoro usando direttamente la definizione è complicato (*provateci!*)
- possiamo usare la *Proposizione "Lavoro di un campo conservativo"*? (vedi *Lezione 21*)
- se $\mathbf{F}$ fosse conservativo ed avessimo un potenziale U per $\mathbf{F}$, allora il lavoro sarebbe dato dalla differenza di potenziale

$$U\left(\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - U(\gamma(0))$$

- per fare ciò, dobbiamo però
  1. vedere se $\mathbf{F}$ è conservativo
  2. in caso affermativo, calcolarne un potenziale
- dividiamo quindi la discussione dei due punti

1. <u>$\mathbf{F}$ è conservativo?</u>

- $\mathbf{F}$ è definito su $\mathbb{R}^3$, che è stellato rispetto ad ogni suo punto
- ci basta allora mostrare che $\mathbf{F}$ è irrotazionale

- calcoliamo il rotore! Ricordando che

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (0, \cosh y\ \sin z, \sinh y\ \cos z)$$

si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \ \det &\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \cosh y\ \sin z & \sinh y\ \cos z \end{vmatrix} \\
&= (\cosh y\ \cos z - \cosh y\ \cos z, 0, 0) \\
&= (0,0,0)
\end{aligned}$$

- quindi **F** è effettivamente conservativo

1. potenziale di $\mathbf{F}$?

- dobbiamo trovare $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \cosh y \, \sin z, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = \sinh y \, \cos z$$

- la prima equazione

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

ci dice subito che U non dipende da x

- prendendo una primitiva rispetto ad y della seconda equazione, otteniamo quindi

$$U(x, y, z) = \sinh y \, \sin z + g(z)$$

dove g è una funzione incognita, che dipende solo da z

- usando questa informazione e la terza equazione, abbiamo

$$\begin{aligned} \sinh y \, \cos z = \frac{\partial U}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\Big(\sinh y \, \sin z + g(z) \Big) \\ &= \sinh y \, \cos z + g'(z) \end{aligned}$$

- quindi deve risultare $g'(z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{R}$, ovvero g costante
- possiamo prendere per esempio $g = 0$ identicamente nulla e

$$U(x, y, z) = \sinh y \, \sin z,$$

sarà un potenziale per $\mathbf{F}$

- per la *Proposizione "Lavoro di un campo vettoriale"*

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_\gamma \rangle \, d\ell &= U(\gamma(\pi/2)) - U(\gamma(0)) \\ &= U\left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right) - U(0,0,0) \\ &= \sinh 1 \, \sin \frac{\pi}{2} - \sinh 0 \, \sin 0 \\ &= \sinh 1\end{aligned}$$

Esercizio (per casa)

Si verifichi che l'insieme seguente

$$C = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y > 0\Big\},$$

è stellato rispetto ad ogni suo punto. Si dimostri che il campo di Biot-Savart

$$\mathbf{F}_{BS}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0\right)$$

è conservativo su C e se ne calcoli un potenziale

Perplessità?

"Prof, sono perplesso....non si era detto che $\mathbf{F}_{BS}$ NON era conservativo?!" **Attenzione**, si era detto che $\mathbf{F}_{BS}$ non era conservativo <u>sul suo dominio di definizione</u>, ma qui abbiamo cambiato l'insieme su cui lo consideriamo... "*AH*"