Analisi Matematica B
– *Lezione 19* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 12 Maggio 2020

Definizione

Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ un insieme Riemann-regolare. Si definiscono

- **volume** di E come

$$\mathrm{Vol}(E) = \iiint_E dx\,dy\,dz$$

- **baricentro** di E come il punto $\mathbf{b}^E \in \mathbb{R}^3$ le cui coordinate sono date da

$$b_1^E = \frac{1}{\mathrm{Vol}(E)} \iiint_E x\,dx\,dy\,dz$$

$$b_2^E = \frac{1}{\mathrm{Vol}(E)} \iiint_E y\,dx\,dy\,dz$$

$$b_3^E = \frac{1}{\mathrm{Vol}(E)} \iiint_E z\,dx\,dy\,dz$$

- **momento d'inerzia di E rispetto ad una retta $\mathfrak{R}$** come

$$\iiint_E \Big(\mathrm{dist}((x,y,z),\mathfrak{R})\Big)^2 \, dx\, dy\, dz$$

  dove $\mathrm{dist}((x,y,z),\mathfrak{R})$ rappresenta la distanza del punto (x,y,z) da $\mathfrak{R}$

Esercizio

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la palla chiusa di centro $(0,0,0)$ e raggio 1, come nell'esercizio precedente. Si calcoli il momento d'inerzia rispetto all'asse delle z

Soluzione

- Abbiamo già osservato in qualche lezione precedente (vedi *Lezione 15*, esercizio dell'elica cilindrica) che

$$\mathrm{dist}\Big((x,y,z),\mathfrak{R}\Big) = \sqrt{x^2+y^2}$$

  quando $\mathfrak{R}$ è l'asse delle z

- si tratta quindi di calcolare

$$\iiint_S \Big(\mathrm{dist}((x,y,z),\mathfrak{R})\Big)^2 \, dx\, dy\, dz = \iiint_S (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$$

- già calcolato nell'esercizio precedente! (*Lezione 18*)

VII.6 Cambio di variabili negli integrali tripli

Teorema [Cambio di variabili negli integrali tripli]

Supponiamo di avere

- *un insieme chiuso* $E \subset \mathbb{R}^3$ *Riemann-regolare*
- *una funzione* $f : E \to \mathbb{R}$ *continua*
- *una funzione biettiva* $\mathbf{F} : \Omega \to E$ *con* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *insieme chiuso Riemann-regolare (***cambio di variabili***)*

Inoltre $\mathbf{F}$ *sia tale che la sua matrice Jacobiana sia invertibile, ovvero*

$$\det J\mathbf{F}(t, s, w) \neq 0$$

per ogni punto (t, s, w) *interno a* Ω

Allora vale

$$\boxed{\iiint_E f(x, y, z)dx\, dy\, dz = \iiint_\Omega f(\mathbf{F}(t, s, w))|\det J\mathbf{F}(t, s, w)|dt\, ds\, dw}$$

Si osservi in particolare la relazione tra gli elementi infinitesimi di volume

$$\boxed{dx\, dy\, dz = \left|\det J\mathbf{F}(t, s, w)\right| dt\, ds\, dw}$$

Alla base della giustificazione di questa relazione, c'è l'analogo tridimensionale del fatto di Geometria e Algebra che ci da l'interpretazione geometrica del determinante

Significato geometrico del determinante

Siano **u**,**v** *e* **w** *tre vettori di* $\mathbb{R}^3$, *aventi componenti*

$$\mathbf{u} = (a, b, c), \quad \mathbf{v} = (d, e, f) \qquad e \qquad \mathbf{w} = (g, h, i)$$

Il volume del parallelogramma generato da **u**, **v** *e* **w** *coincide con*

$$\left|\det \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}\right|$$

Un cambio di variabili speciale: coordinate sferiche

Tra tutti i cambi di variabili tridimensionali possibili, questo è molto utile quando si ha a che fare con una delle due situazioni seguenti

- la funzione da integrare f è radialmente simmetrica
- l'insieme di integrazione E è una palla, una corona sferica o un settore sferico

Si tratta del cambio

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\vartheta \sin\varphi \\ y &= \varrho \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= \varrho \cos\varphi \end{aligned}$$

Le nuove variabili sono quindi $(\varrho, \vartheta, \varphi)$, con

- ϱ rappresenta la distanza dall'origine di (x, y, z)
- ϑ, φ sono i due angoli che, come nella superficie "sfera" (vedi *Lezione 13*) individuano la posizione di (x, y, z) sulla sfera di raggio ϱ

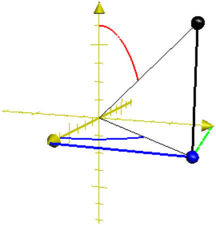

Figura: Il punto di coordinate (x, y, z) (in nero) può essere descritto usando il modulo ϱ (linea nera) ed i due angoli ϑ (in blu) e φ (in rosso)

Capiterà di usare questo cambio di variabili, conviene quindi calcolarci il **determinante Jacobiano** una volta per tutte

$$\mathbf{F}(\varrho, \vartheta, \varphi) = (\varrho \cos\vartheta \sin\varphi, \varrho \sin\vartheta \sin\varphi, \varrho \cos\varphi)$$

Costruiamo innanzitutto la **matrice Jacobiana**, ovvero la matrice 3×3 le cui righe siano i gradienti delle componenti di $\mathbf{F}$

$$J\mathbf{F}(\varrho, \vartheta) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta \sin\varphi & -\varrho \sin\vartheta \sin\varphi & \varrho \cos\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi & \varrho \cos\vartheta \sin\varphi & \varrho \sin\vartheta \cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\varrho \sin\varphi \end{bmatrix}$$

da cui otteniamo (piano piano...)

$$\begin{aligned}\det J\mathbf{F}(\varrho,\vartheta,\varphi) &= -\varrho^2 \cos^2\vartheta \sin^3\varphi - \varrho^2 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi \sin\varphi \\ &\quad - \varrho^2 \cos^2\vartheta \cos^2\varphi \sin\varphi - \varrho^2 \sin^2\vartheta \sin^3\varphi \\ &= -\varrho^2 \sin^3\varphi\,(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) \\ &\quad - \varrho^2 \sin\varphi \cos^2\varphi\,(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) \\ &= -\varrho^2 \sin^3\varphi - \varrho^2 \sin\varphi \cos^2\varphi \\ &= -\varrho^2 \sin\varphi \left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \right) \\ &= -\varrho^2 \sin\varphi\end{aligned}$$

ovvero (ricorda che $\varrho \geq 0$ e che $\varphi \in [0,\pi]$)

$$\boxed{\left|\det J\mathbf{F}(\varrho,\vartheta,\varphi)\right| = \varrho^2 \sin\varphi}$$

Abbiamo quindi che la formula generale di cambio di variabili

$$\iiint_E f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega f(\mathbf{F}(t,s,w))|\det J\mathbf{F}(t,s,w)|\,dt\,ds\,dw$$

nel caso delle **coordinate sferiche** prende la forma

$$\boxed{\begin{aligned}&\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\\ &\qquad = \iiint_\Omega f(\varrho\cos\vartheta\sin\varphi, \varrho\sin\vartheta\sin\varphi, \varrho\cos\varphi)\,\varrho^2\sin\varphi\,d\varrho\,d\vartheta\,d\varphi\end{aligned}}$$

dove Ω dovrà corrispondere all'insieme E, descritto in coordinate sferiche

Esercizio

Si calcoli il volume di una palla tridimensionale di raggio R

Soluzione

- Per semplicità, possiamo supporre di considerare la palla centrata nell'origine

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}$$

- dobbiamo calcolare

$$\iiint_B dx\, dy\, dz$$

- utilizzando le coordinate sferiche

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\vartheta \sin\varphi \\ y &= \varrho \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= \varrho \cos\varphi \end{aligned}$$

l'insieme B si descrive in modo molto semplice, prendendo

$$0 \le \varrho \le R, \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi \qquad \text{e} \qquad 0 \le \varphi \le \pi$$

- il nuovo insieme di integrazione, diventa quindi

$$\Omega = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

che è semplice rispetto a ciascuna variabile (è un parallelepipedo!)
- ricordando che

$$\boxed{\left|\det J\mathbf{F}(\varrho, \vartheta, \varphi)\right| = \varrho^2 \sin\varphi}$$

- otteniamo allora che l'integrale diventa

$$\mathrm{Vol}(B) = \iiint_B dx\,dy\,dz = \iiint_{[0,R]\times[0,2\,\pi]\times[0,\pi]} \varrho^2\, \sin\varphi\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi$$

- abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(B) &= \iint_{[0,2\,\pi]\times[0,\pi]} \left(\int_0^R \varrho^2\, d\varrho\right) \sin\varphi\, d\vartheta\, d\varphi \\ &= \frac{R^3}{3} \iint_{[0,2\,\pi]\times[0,\pi]} \sin\varphi\, d\vartheta\, d\varphi \\ &= \frac{R^3}{3} \int_0^{2\,\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi\right) d\vartheta \\ &= \frac{R^3}{3} \int_0^{2\,\pi} \Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\pi} d\vartheta = \frac{2\,R^3}{3} \int_0^{2\,\pi} d\vartheta = \frac{4\,\pi\,R^3}{3}\end{aligned}$$

Esercizio

Si calcoli nuovamente il momento d'inerzia rispetto all'asse z della palla chiusa di centro $(0,0,0)$ e raggio 1, usando le coordinate sferiche

Soluzione

- Se indichiamo la palla con S, abbiamo già osservato che si tratta di calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_S (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

- sappiamo già che il risultato deve essere $\dfrac{8}{15}\,\pi$

- utilizzando le coordinate sferiche

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\vartheta \sin\varphi \\ y &= \varrho \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= \varrho \cos\varphi \end{aligned}$$

l'insieme S si descrive in modo molto semplice, prendendo

$$0 \leq \varrho \leq 1, \qquad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \qquad \text{e} \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

- il nuovo insieme di integrazione, diventa quindi

$$\Omega = [0,1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

che è semplice rispetto a ciascuna variabile (è nuovamente un parallelepipedo)

- la funzione da integrare diventa

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \varrho^2 \cos^2\vartheta \sin^2\varphi + \varrho^2 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi \\ &= \varrho^2 \sin^2\varphi \, (\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) \\ &= \varrho^2 \sin^2\varphi \end{aligned}$$

- ricordandosi che il determinante Jacobiano ci da un ulteriore $\varrho^2 \sin\varphi$
- abbiamo che l'integrale diventa

$$\begin{aligned} \iiint_S (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz &= \iiint_\Omega \varrho^2 \sin^2\varphi \, \varrho^2 \sin\varphi \, d\varrho \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= \iiint_\Omega \varrho^4 \sin^3\varphi \, d\varrho \, d\,\vartheta \, d\varphi \end{aligned}$$

- abbiamo allora, tramite *integrazione iterata*

$$
\begin{aligned}
\iiint_S (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz &= \iiint_\Omega \varrho^4\,\sin^3\varphi\,d\varrho\,d\,\vartheta\,d\varphi \\
&= \iint_{[0,1]\times[0,\pi]} \varrho^4\,\sin^3\varphi\left(\int_0^{2\,\pi} d\vartheta\right)\,d\varrho\,d\varphi \\
&= 2\,\pi\,\int_0^\pi\left(\int_0^1 \varrho^4\,d\varrho\right)\sin^3\varphi\,d\varphi \\
&= \frac{2\,\pi}{5}\,\int_0^\pi \sin^3\varphi\,d\varphi \\
&= \frac{2\,\pi}{5}\,\int_0^\pi \sin\varphi\,(1-\cos^2\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{2\,\pi}{5}\,\left[-\cos\varphi+\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^\pi = \frac{8\,\pi}{15}
\end{aligned}
$$

Esercizio

Si consideri l'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \, z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

Si calcolino:

1. *il volume di E;*
2. *il suo baricentro;*
3. *il momento d'inerzia rispetto all'asse delle z*

Soluzione

- Come sempre, ci conviene innanzitutto fare un po' di disegni

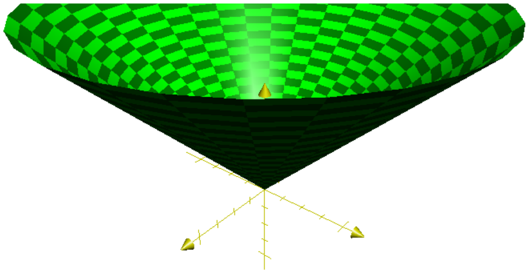

Figura: Il grafico della funzione radialmente simmetrica $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Si ricordi (vedi *Lezione 5*) che esso si ottiene facendo ruotare il grafico della funzione $f(x,0) = |x|$. Si tratta di un **cono**

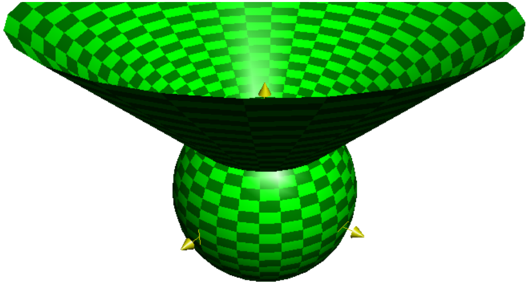

Figura: E è costituito da tutti i punti della palla, che si trovino **sotto** il grafico di $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dobbiamo quindi "scavare" un buco a forma di cono...

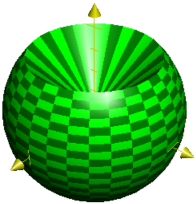

Figura: ...ecco l'insieme risultante E

- per calcolare tutti gli integrali richiesti, vogliamo usare le coordinate sferiche

$$\begin{array}{rcl} x & = & \varrho\cos\vartheta\,\sin\varphi \\ y & = & \varrho\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ z & = & \varrho\cos\varphi \end{array}$$

- bisogna saper descrivere l'insieme E in queste coordinate
- E ha simmetria rotazionale attorno all'asse z, quindi l'angolo $\vartheta \in [0, 2\,\pi]$
- per capire l'insieme in cui variano ϱ e φ, facciamo un altro disegno

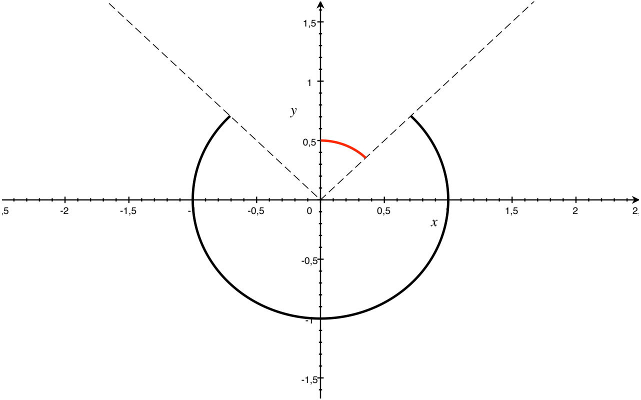

Figura: Sezione "verticale" dell'insieme E, ottenuta sezionandolo col piano $x = 0$. Facendo ruotare intorno all'asse verticale (asse delle z) questo insieme, si ottiene il nostro insieme E. La variabile φ, che rappresenta l'inclinazione rispetto all'asse verticale, deve essere almeno l'angolo rosso evidenziato (ovvero $\dfrac{\pi}{4}$) ed al più π

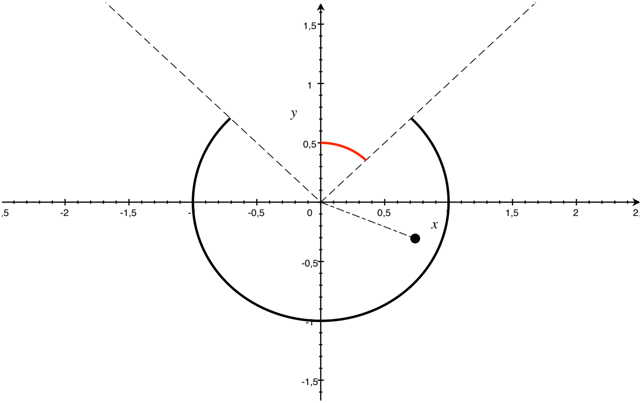

Figura: ...per ogni punto $(x, y, z) \in E$ (in nero), il suo modulo è sempre compreso tra 0 (corrispondente all'origine) e 1 (corrispondente a stare sulla frontiera della palla)

- in definitiva, usando le coordinate sferiche, l'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \, z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

diventa

$$\Omega = \left\{ (\varrho, \vartheta, \varphi) \, : \, \varrho \in [0, 1], \, \vartheta \in [0, 2\,\pi], \, \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi \right] \right\}$$

- ricordiamoci inoltre che in ogni integrale avremo

$$\boxed{dx\, dy\, dz = \varrho^2 \, \sin\varphi \, d\varrho \, d\vartheta \, d\varphi}$$

- procediamo quindi a calcolare gli integrali

1. <u>Volume di E</u>

- dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(E) &= \iiint_E dx\,dy\,dz \\
&= \iiint_\Omega \varrho^2 \sin\varphi \, d\varrho \, d\vartheta \, d\varphi \\
&= \iint_{[0,2\pi]\times\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]} \left(\int_0^1 \varrho^2 \, d\varrho\right) \sin\varphi \, d\vartheta \, d\varphi \\
&= \frac{1}{3} \iint_{[0,2\pi]\times\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]} \sin\varphi \, d\vartheta \, d\varphi \\
&= \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right) \sin\varphi \, d\varphi \\
&= \frac{2\pi}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi = \frac{2\pi}{3} \Big[-\cos\varphi \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}
\end{aligned}$$

- in conclusione, risulta

$$\mathrm{Vol}(E) = \frac{2\,\pi}{3}\,\frac{2+\sqrt{2}}{2} = \frac{(2+\sqrt{2})\,\pi}{3}$$

2. <u>baricentro di E</u>

- dobbiamo calcolare

$$b_1^E = \frac{1}{\mathrm{Vol}(E)}\iiint_E x\,dx\,dy\,dz$$

$$b_2^E = \frac{1}{\mathrm{Vol}(E)}\iiint_E y\,dx\,dy\,dz$$

$$b_3^E = \frac{1}{\mathrm{Vol}(E)}\iiint_E z\,dx\,dy\,dz$$

- dal momento che E ha simmetria rotazionale attorno all'asse z, ci aspettiamo che

$$b_1^E = b_2^E = 0$$

- *verificatelo per esercizio*
- calcoliamo la terza coordinata b_3^E

$$\begin{aligned} b_3^E &= \frac{3}{(2+\sqrt{2})\,\pi} \iiint_E z\,dx\,dy\,dz \\ &= \frac{3}{(2+\sqrt{2})\,\pi} \iiint_\Omega \varrho\,\cos\varphi\,\varrho^2\,\sin\varphi\,d\varrho\,d\vartheta\,d\varphi \\ &= \frac{3}{(2+\sqrt{2})\,\pi} \iiint_\Omega \varrho^3\,\cos\varphi\,\sin\varphi\,d\varrho\,d\vartheta\,d\varphi \end{aligned}$$

- abbiamo quindi

$$\begin{aligned} b_3^E &= \frac{3}{(2+\sqrt{2})\,\pi} \iiint_\Omega \varrho^3 \cos\varphi \sin\varphi \, d\varrho \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= \frac{3}{(2+\sqrt{2})\,\pi} \iint_{[0,2\pi]\times[\frac{\pi}{4},\pi]} \left(\int_0^1 \varrho^3 \, d\varrho\right) \cos\varphi \sin\varphi \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= \frac{3}{4\,(2+\sqrt{2})\,\pi} \iint_{[0,2\pi]\times[\frac{\pi}{4},\pi]} \cos\varphi \sin\varphi \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= \frac{3}{4\,(2+\sqrt{2})\,\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos\varphi \sin\varphi \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right) d\varphi \\ &= \frac{3}{2\,(2+\sqrt{2})} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi \end{aligned}$$

- infine, per l'ultimo integrale basta osservare che

$$\cos\varphi \sin\varphi = \frac{1}{2} \sin(2\,\varphi)$$

- in conclusione, otteniamo

$$
\begin{aligned}
b_3^E &= \frac{3}{2\,(2+\sqrt{2})}\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{1}{2}\ \sin(2\,\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{3}{2\,(2+\sqrt{2})}\ \left[-\frac{1}{4}\ \cos(2\,\varphi)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
&= \frac{3}{2\,(2+\sqrt{2})}\ \left[-\frac{1}{4}\right] \\
&= -\frac{3}{8\,(2+\sqrt{2})}
\end{aligned}
$$

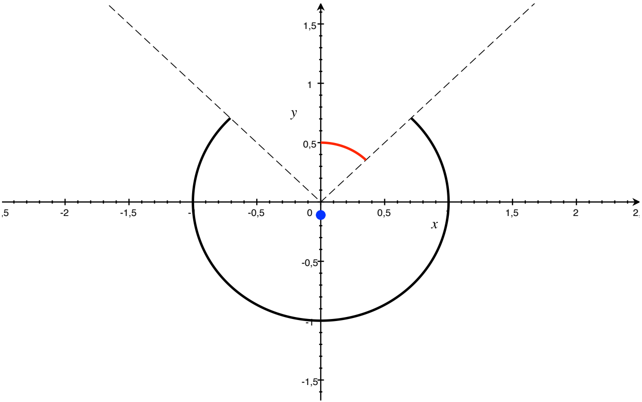

Figura: La sezione dell'insieme E, con la posizione del baricentro (in blu)

3. momento d'inerzia rispetto all'asse z

- si tratta di calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_E (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

- osserviamo che in coordinate sferiche la funzione da integrare diventa

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \varrho^2 \cos^2\vartheta \sin^2\varphi + \varrho^2 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi \\ &= \varrho^2 \sin^2\varphi\,(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) \\ &= \varrho^2 \sin^2\varphi \end{aligned}$$

- abbiamo quindi

$$\iiint_E (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz = \iiint_\Omega \varrho^2 \sin^2\varphi\, \varrho^2 \sin\varphi\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi$$

- si tratta praticamente di rifare il conto dell'esercizio precedente (cambiano solo alcuni estremi di integrazione)

$$
\begin{aligned}
\iiint_E (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz &= \iiint_\Omega \varrho^4\,\sin^3\varphi\,d\varrho\,d\vartheta\,d\varphi \\
&= \iint_{[0,1]\times\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]} \varrho^4\,\sin^3\varphi\left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right)\,d\varrho\,d\varphi \\
&= 2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\left(\int_0^1 \varrho^4\,d\varrho\right)\sin^3\varphi\,d\varphi \\
&= \frac{2\pi}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi \\
&= \frac{2\pi}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin\varphi\,(1-\cos^2\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{2\pi}{5}\left[-\cos\varphi+\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}
\end{aligned}
$$

- sostituendo e svolgendo qualche conto semplice si trova

$$\iiint_E (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz = \frac{8 + 5\sqrt{2}}{30}\,\pi$$

Un cambio di variabili speciale: coordinate cilindriche

Questo è molto utile quando si ha a che fare con una delle due situazioni seguenti

- la funzione da integrare f ha una simmetria cilindrica (ad esempio, dipende solo da $\sqrt{x^2+y^2}$)
- l'insieme di integrazione E è un cilindro o una porzione opportuna di cilindro

Si tratta del cambio

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\vartheta \\ y &= \varrho \sin\vartheta \\ z &= z \end{aligned}$$

Le nuove variabili sono quindi (ϱ, ϑ, z), con

- ϱ rappresenta la distanza dall'asse delle z di (x, y, z)
- z rappresenta la "quota" del punto
- ϑ è l'angolo che ha lo stesso ruolo che aveva nella superficie "cilindro" (vedi *Lezione 13*)

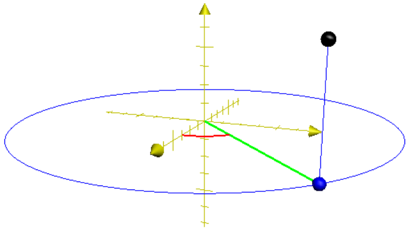

Figura: Un punto qualsiasi $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (in nero), può essere individuato in coordinate cilindriche, usando l'angolo ϑ (in rosso), la quota z e la distanza ϱ dall'asse delle x (segmento verde). Il punto blu è la proiezione ortogonale nel piano $x\,y$ del punto nero

Calcoliamoci il **determinante Jacobiano** di questo cambio di variabili

$$\mathbf{F}(\varrho, \vartheta, z) = (\varrho \cos\vartheta, \varrho \sin\vartheta, z)$$

Costruiamo la **matrice Jacobiana**, ovvero la matrice 3×3 le cui righe siano i gradienti delle componenti di $\mathbf{F}$

$$J\mathbf{F}(\varrho, \vartheta, z) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\varrho \sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \varrho \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si vede facilmente che

$$|\det J\mathbf{F}(\varrho, \vartheta, z)| = \varrho \cos^2\vartheta + \varrho \sin^2\vartheta = \varrho$$

Abbiamo quindi che la formula generale di cambio di variabili

$$\iiint_E f(x,y)dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega f(\mathbf{F}(t,s,w))|\det J\mathbf{F}(t,s,w)|\,dt\,ds\,dw$$

nel caso delle **coordinate cilindriche** prende la forma

$$\boxed{\begin{aligned}&\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\\ &\qquad = \iiint_\Omega f(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta, z)\,\varrho\,d\varrho\,d\vartheta\,dz\end{aligned}}$$

dove Ω dovrà corrispondere all'insieme E, descritto in coordinate cilindriche

Esercizio

Si calcoli il momento d'inerzia rispetto all'asse delle z dell'insieme

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq \frac{1}{2} \right\}$$

Soluzione

- Come sempre, cerchiamo di capire innanzitutto che insieme è V
- si tratta sicuramente di un sottoinsieme della palla chiusa di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1
- più precisamente, si tratta di tutti i punti della palla, la cui "quota" è maggiore o uguale a $1/2$

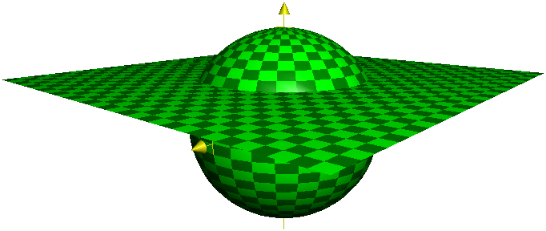

Figura: La palla di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1 ed il piano $z = 1/2$

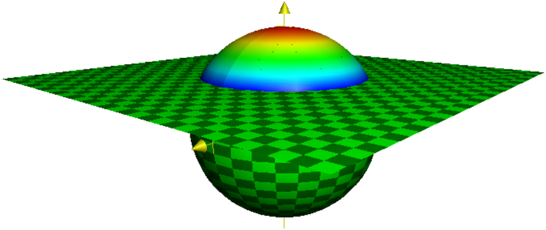

Figura: ...la parte che “sta sopra” il piano, forma una **calotta sferica**, che è il nostro insieme V

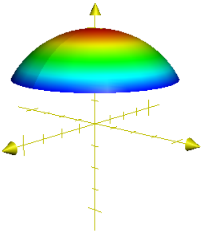

Figura: ...ecco qua V

- per determinare il momento d'inerzia, dobbiamo calcolare

$$\iiint_V (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

dal momento che se $\mathfrak{R}$ è l'asse delle z, allora

$$\mathrm{dist}\Big((x, y, z), \mathfrak{R}\Big) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- scegliamo di fare questo integrale usando le coordinate cilindriche

$$\begin{array}{rcl} x & = & \varrho \cos\vartheta \\ y & = & \varrho \sin\vartheta \\ z & = & z \end{array}$$

- il punto più delicato è descrivere V in queste coordinate

- osserviamo che $z \in [1/2, 1]$
- inoltre, dal momento che V ha come asse di simmetria rotazionale l'asse delle z, l'angolo ϑ deve muoversi in tutto l'intervallo $[0, 2\pi]$
- di resta da scoprire l'intervallo in cui varia la variabile ρ, che rappresenta la distanza dall'asse delle z
- osserviamo che tutti i punti di V, sono tali che

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \qquad \text{ovvero} \qquad x^2 + y^2 \leq 1 - z^2$$

- estraendo la radice quadrata e ricordando che $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ in coordinate cilindriche, si ottiene

$$0 \leq \varrho \leq \sqrt{1 - z^2}$$

- abbiamo quindi che il nuovo insieme di integrazione diventa

$$\Omega = \left\{(\varrho, \vartheta, z) \,:\, (\vartheta, z) \in [0, 2\pi] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right],\, 0 \le \varrho \le \sqrt{1 - z^2}\right\}$$

che è un insieme tridimensionale $\varrho-$semplice

- abbiamo quindi, passando alle coordinate cilindriche

$$\begin{aligned}
\iiint_V (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz &= \iiint_\Omega \varrho^2\, \varrho\, d\varrho\, d\vartheta\, dz \\
&= \iint_{[0,2\pi]\times\left[\frac{1}{2},1\right]} \left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \varrho^3\, d\varrho\right) d\vartheta\, dz \\
&= \iint_{[0,2\pi]\times\left[\frac{1}{2},1\right]} \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1-z^2}} d\vartheta\, dz
\end{aligned}$$

- sostituendo $\varrho = \sqrt{1 - z^2}$ e $\varrho = 0$, si trova

$$
\begin{aligned}
\iiint_V (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz &= \iint_{[0,2\pi]\times\left[\frac{1}{2},1\right]} \frac{(1 - z^2)^2}{4}\, d\vartheta\, dz \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1 - z^2)^2}{4} \left(\int_0^{2\,\pi} d\vartheta \right) dz \\
&= 2\,\pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1 - 2\,z^2 + z^4}{4}\, dz \\
&= \frac{\pi}{2} \left[z - \frac{2}{3}\, z^3 + \frac{z^5}{5} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\, \frac{1}{8} + \frac{1}{5}\, \frac{1}{32} \right) \right] \\
&= \frac{\pi}{2}\, \frac{53}{480}
\end{aligned}
$$

Esercizio (per casa)

Sia $C \subset \mathbb{R}^3$ *l'insieme*

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \, z \in \left[0, \sqrt{3} \right] \right\}$$

Si calcoli $\mathrm{Vol}(C)$ *ed il momento d'inerzia rispetto all'asse delle z*