Analisi Matematica B
– *Lezione 18* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 6 Maggio 2020

Teorema [Cambio di variabili negli integrali doppi]

Supponiamo di avere

- *un insieme chiuso* $E \subset \mathbb{R}^2$ *Riemann-regolare*
- *una funzione* $f : E \to \mathbb{R}$ *continua*
- *una funzione biettiva* $\mathbf{F} : \Omega \to E$ *con* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *insieme chiuso Riemann-regolare (***cambio di variabili***)*

Inoltre $\mathbf{F}$ *sia tale che la sua matrice Jacobiana sia invertibile, ovvero*

$$\det J\mathbf{F}(t,s) \neq 0$$

per ogni punto (t,s) *interno a* Ω

Allora vale

$$\boxed{\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Omega f(\mathbf{F}(t,s))\,|\det J\mathbf{F}(t,s)|\,dt\,ds}$$

Un cambio di variabili speciale: coordinate polari

Tra tutti i cambi di variabili possibili, questo è molto utile quando si ha a che fare con una delle due situazioni seguenti

- la funzione da integrare f è radialmente simmetrica
- l'insieme di integrazione E è un disco, una corona circolare o un settore circolare

Si tratta del cambio

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\vartheta \\ y &= \varrho \sin\vartheta \end{aligned}$$

Le nuove variabili sono quindi (ϱ, ϑ), con

- ϱ rappresenta la distanza dall'origine di (x, y)
- ϑ è l'angolo individuato da (x, y), rispetto al semiasse delle x positive

Useremo spesso questo cambio di variabili, conviene quindi determinarci il **determinante Jacobiano** una volta per tutte

$$\mathbf{F}(\varrho, \vartheta) = (\varrho \cos\vartheta, \varrho \sin\vartheta)$$

Costruiamo innanzitutto la **matrice Jacobiana**, ovvero la matrice 2×2 le cui righe siano i gradienti delle componenti di $\mathbf{F}$

$$J\mathbf{F}(\varrho, \vartheta) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\varrho \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \varrho \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

da cui otteniamo

$$|\det J\mathbf{F}(\varrho, \vartheta)| = |\varrho \cos^2\vartheta + \varrho \sin^2\vartheta|$$

ovvero (ricorda che $\varrho \geq 0$)

$$\boxed{|\det J\mathbf{F}(\varrho, \vartheta)| = \varrho}$$

Abbiamo quindi che la formula generale di cambio di variabili

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Omega f(\mathbf{F}(t,s))\,|\det J\mathbf{F}(t,s)|\,dt\,ds$$

nel caso delle **coordinate polari** prende la forma

$$\boxed{\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Omega f(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta)\,\varrho\,d\varrho\,d\vartheta}$$

dove Ω dovrà corrispondere all'insieme E, descritto in coordinate polari

Cerchiamo di fare un esempio concreto, considerando di nuovo...

Esercizio (Compito del 11/07/2018)

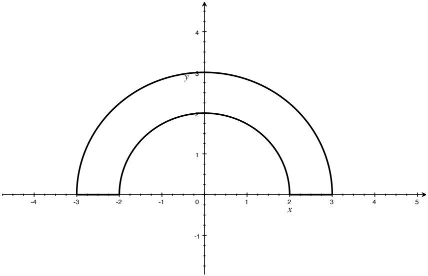
Sia

$$E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \; y \geq 0\Big\},$$

si calcoli il suo baricentro

Soluzione

Disegniamo nuovamente l'insieme, ovvero la metà superiore di una corona circolare centrata in $(0, 0)$ ed avente raggio interno 2 e raggio esterno 3



- utilizzando le coordinate polari

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \vartheta \\ y &= \varrho \sin \vartheta \end{aligned}$$

l'insieme si descrive in modo molto semplice, prendendo

$$2 \leq \varrho \leq 3 \qquad \text{e} \qquad 0 \leq \vartheta \leq \pi$$

- il nuovo insieme di integrazione, diventa quindi

$$\Omega = [2, 3] \times [0, \pi]$$

- ricordando che

$$\boxed{|\det J\mathbf{F}(\varrho, \vartheta)| = \varrho}$$

- otteniamo allora che i due integrali

$$b_1^E = \frac{1}{\mathrm{Area(E)}} \iint_E x \, dx \, dy \quad \text{e} \quad b_2^E = \frac{1}{\mathrm{Area(E)}} \iint_E y \, dx \, dy$$

diventano (ricorda che $\mathrm{Area}(E) = (5\,\pi)/2$)

$$b_1^E = \frac{2}{5\,\pi} \iint_{[2,3]\times[0,\pi]} (\varrho \cos\vartheta)\, \varrho \, d\varrho \, d\vartheta$$

e

$$b_2^E = \frac{2}{5\,\pi} \iint_{[2,3]\times[0,\pi]} (\varrho \sin\vartheta)\, \varrho \, d\varrho \, d\vartheta$$

- possiamo dunque calcolare

$$
\begin{aligned}
b_1^E &= \frac{2}{5\,\pi} \iint_{[2,3]\times[0,\pi]} (\varrho \cos\vartheta)\,\varrho\,d\varrho\,d\vartheta \\
&= \frac{2}{5\,\pi} \int_0^{\pi} \left(\int_2^3 \varrho^2\,d\varrho\right) \cos\vartheta\,d\vartheta \\
&= \frac{2}{5\,\pi} \left(\int_2^3 \varrho^2\,d\varrho\right) \int_0^{\pi} \cos\vartheta\,d\vartheta = 0
\end{aligned}
$$

dove abbiamo usato che il valore dell'integrale

$$\int_2^3 \varrho^2\,d\varrho$$

non dipende da ϑ e

$$\int_0^{\pi} \cos\vartheta\,d\vartheta = 0$$

- possiamo dunque calcolare

$$
\begin{aligned}
b_2^E &= \frac{2}{5\,\pi} \iint_{[2,3]\times[0,\pi]} (\varrho \sin\vartheta)\, \varrho\, d\varrho\, d\vartheta \\
&= \frac{2}{5\,\pi} \int_0^{\pi} \left(\int_2^3 \varrho^2\, d\varrho \right) \sin\vartheta\, d\vartheta \\
&= \frac{2}{5\,\pi} \left(\int_2^3 \varrho^2\, d\varrho \right) \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \\
&= \frac{2}{5\,\pi} \left[\frac{\varrho^3}{3} \right]_2^3 \left[-\cos\vartheta \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{5\,\pi} \left[\frac{27}{3} - \frac{8}{3} \right] 2 \\
&= \frac{4 \cdot 19}{15\,\pi} = \frac{76}{15\,\pi}
\end{aligned}
$$

come già avevamo ottenuto

Un raffronto tra i due metodi risolutivi, dovrebbe convincervi dell'interesse di utilizzare le coordinare polari negli integrali doppi

Esercizio per casa

Si consideri l'insieme

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 4, \; 0 \leq y \leq x \right\}$$

Se ne calcoli il momento d'inerzia rispetto all'asse delle x

Suggerimento

Fate prima un disegno....poi provate ad usare le coordinate polari

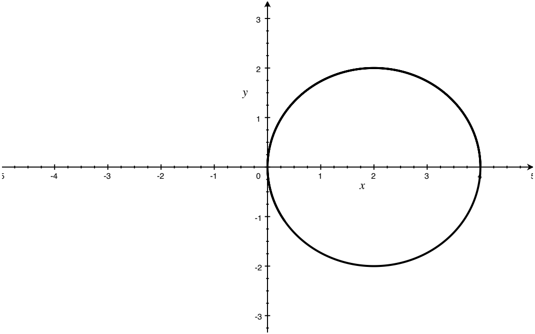
Esercizio

Si calcoli l'integrale doppio seguente

$$\iint_C \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

dove C è il cerchio di centro $(r,0)$ e raggio r

Soluzione



- osservando che la frontiera di C è descritta dall'equazione

$$(x-r)^2+y^2=r^2$$

potremmo considerare C come insieme $y-$semplice

$$C=\left\{x\in[0,2\,r],\ -\sqrt{r^2-(x-r)^2}\le y\le\sqrt{r^2-(x-r)^2}\right\}$$

- ...e usare *integrazione iterata*, prima in y e poi in x
- ovvero

$$\iint_C\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int_0^{2\,r}\left(\int_{-\sqrt{r^2-(x-r)^2}}^{\sqrt{r^2-(x-r)^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy\right)\,dx$$

- non ci piace molto però questa strada, trovare una primitiva di

$$y\mapsto\sqrt{x^2+y^2}$$

non è banale! (È simile a $\sqrt{1+y^2}$, che già non è semplice, con in più anche la presenza del fattore x^2)

- ci arrendiamo? Non prima di averle tentate tutte!
- osserviamo che la funzione da integrare

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

  è radialmente simmetrica
- se passassimo alle coordinate polari

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \vartheta \\ y &= \varrho \sin \vartheta \end{aligned}$$

  essa diventerebbe molto semplicemente

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \varrho$$

- prima di farci prendere dall'entusiasmo, dobbiamo fare attenzione: negli integrali doppi, ci sono sempre due difficoltà di cui tenere conto

  la funzione che integriamo **e** l'insieme di integrazione

- in altre parole: usando le coordinate polari, la funzione da integrare diventa molto semplice...
- ... ma come cambia l'insieme di integrazione?
- per rispondere alla domanda, dobbiamo descrivere l'insieme C in coordinate polari
- attenzione: le coordinate polari che usiamo sono centrate nell'origine (nel senso che ϱ rappresenta la distanza di un punto da $(0,0)$), mentre C è un cerchio "decentrato", cioè centrato in $(0,r)$...
- ...questo dovrà darci qualche grattacapo

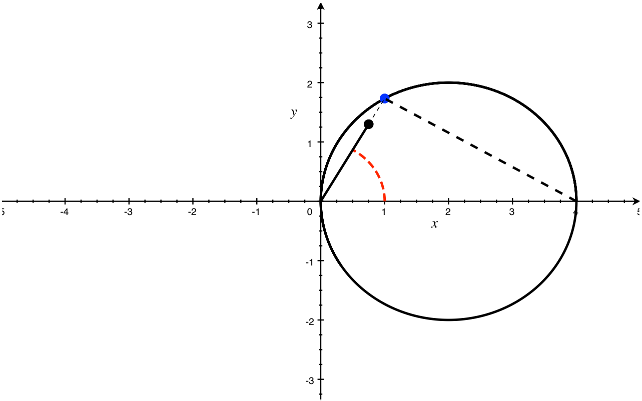


Figura: Prendiamo un punto qualsiasi (in nero) all'interno del cerchio C. L'angolo in rosso rappresenta ϑ, che dovrà quindi variare tra $-\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\pi}{2}$. Per ogni ϑ fissato, la distanza massima dall'origine ϱ non è fissata, ma dipende dall'angolo ϑ stesso...

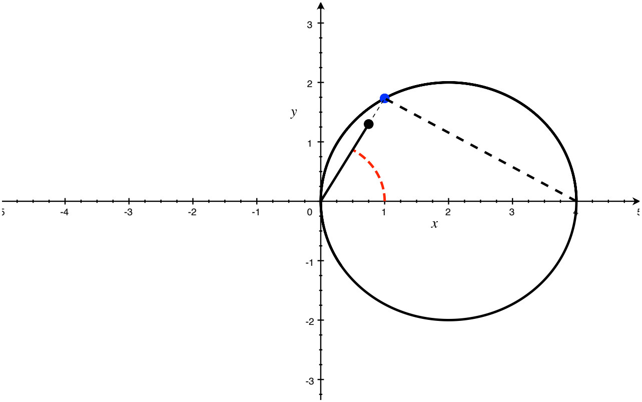


Figura: Lavoriamo sul triangolo rettangolo ottenuto prolungando il raggio vettore fino a incontrare C (punto blu). Fissato ϑ come in figura, il modulo ϱ del punto nero è minore o uguale alla lunghezza del cateto compreso tra "punto blu" e l'origine. Questa lunghezza, dalla trigonometria, sappiamo che è $\boxed{2\,r\,\cos\vartheta}$ (infatti $2\,r$ è la lunghezza dell'ipotenusa, che coincide con il diametro del cerchio)

- abbiamo allora che l'insieme iniziale C si descrive in coordinate polari come

$$\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \text{e} \qquad 0 \leq \varrho \leq 2\, r\, \cos\vartheta$$

- in altre parole, il nuovo insieme di integrazione sarà

$$\Omega = \left\{(\varrho, \vartheta)\, :\, \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ 0 \leq \varrho \leq 2\, r\, \cos\vartheta\right\}$$

  che è $\varrho-$semplice

- dopo questa lunga discussione, siamo pronti a svolgere l'integrale di partenza

- usando le coordinate polari e la formula di cambio variabili, abbiamo allora

$$\iint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_\Omega \varrho\,\varrho\,d\varrho\,d\vartheta = \iint_\Omega \varrho^2\,d\varrho\,d\vartheta$$

- per svolgere l'ultimo integrale, usiamo *integrazione iterata* (prima in ϱ e poi in ϑ, perché Ω è $\varrho-$semplice)
- ovvero

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \varrho^2\,d\varrho\,d\vartheta &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\,r\,\cos\vartheta} \varrho^2\,d\varrho\right)\,d\vartheta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^{2\,r\,\cos\vartheta} d\vartheta \\ &= \frac{8}{3}\,r^3\,\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\vartheta\,d\vartheta\end{aligned}$$

- ci manca da integrare $\cos^3\vartheta$

- basta scrivere

$$\cos^3\vartheta = \cos\vartheta\,\cos^2\vartheta = \cos\vartheta - \cos\vartheta\,\sin^2\vartheta$$

- abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\frac{8}{3}\,r^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\vartheta\,d\vartheta &= \frac{8}{3}\,r^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\,d\vartheta \\
&\quad - \frac{8}{3}\,r^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\,\sin^2\vartheta\,d\vartheta \\
&= \frac{8}{3}\,r^3\Big[\sin\vartheta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{8}{3}\,r^3\left[\frac{\sin^3\vartheta}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{16}{3}\,r^3 - \frac{16}{9}\,r^3 = \frac{32}{9}\,r^3
\end{aligned}$$

Esercizio (Compito del 17/07/2019)

Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_Q \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

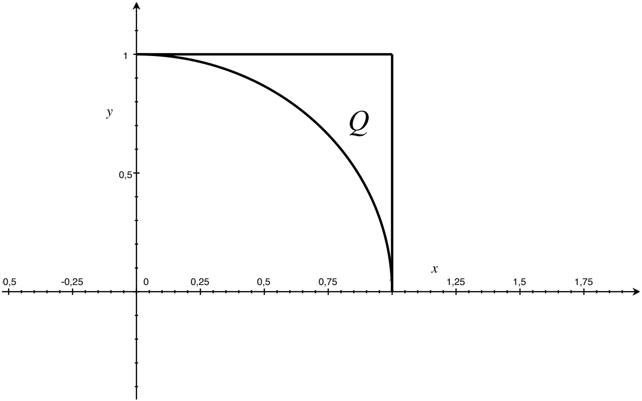
dove $Q \subset \mathbb{R}^2$ *è definito da*

$$Q = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \geq 1,\, 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1\right\}$$

Soluzione

- Cerchiamo innanzitutto di capire come è fatto l'insieme Q
- dalle condizioni $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$, abbiamo che Q è costituito da punti contenuti dentro il quadrato $[0,1] \times [0,1]$
- abbiamo però l'ulteriore condizione $x^2+y^2 \geq 1$

- Q è quindi costituito da tutti i punti del quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$, che si trovano a distanza dall'origine **almeno** 1



- si tratta di un insieme che è sia $x-$semplice che $y-$semplice
- ad esempio, potremmo scriverlo come

$$Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \in [0, 1], \; \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq 1\right\}$$

- la funzione da integrare $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ è continua su Q (notate che il punto "pericoloso" $(0, 0) \notin Q$)
- possiamo quindi dire che f è Riemann integrabile su Q e l'integrale doppio in esame è ben definito
- potremmo anche calcolarlo come *integrale iterato*

$$\iint_Q \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dy \right) dx$$

- calcolare il primo integrale

$$\int_{\sqrt{1-x^2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy$$

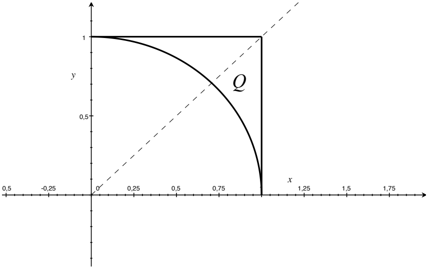
  sembra però un impresa ardua (ma non impossibile: *provateci per casa*)

- prima di lanciarci in questa impresa, conviene pensare se non si possa usare un cambio di variabili
- la funzione da integrare è radialmente simmetrica, potremmo provare con le **coordinate polari**
- la funzione da integrare si semplificherà molto, ma c'è un prezzo da pagare: bisogna saper descrivere Q in coordinate polari

- vogliamo quindi usare il cambio di variabili

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\vartheta \\ y &= \varrho \sin\vartheta \end{aligned}$$

- prima di procedere oltre, ci conviene fare una piccola discussione preliminare che ci semplifichi la vita
- dal disegno, si vede chiaramente che l'insieme Q è **simmetrico rispetto all'asse** $y = x$

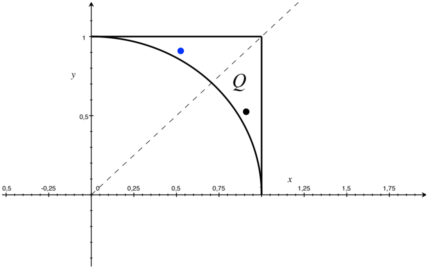


- la funzione

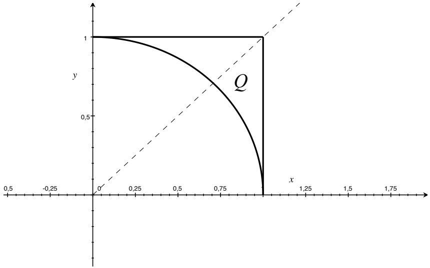
$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

come detto è **radialmente simmetrica**

- in particolare il suo grafico in $\mathbb{R}^3$ è simmetrico rispetto al piano $x = y$
- in altre parole, il valore assunto da f nel punto (x_0, y_0) (in blu) è uguale a quello assunto nel punto (y_0, x_0) (in nero), che ne rappresenta il simmetrico rispetto all'asse $y = x$



- questo ci permette di dire che se dividiamo Q nei due sottoinsiemi Q_1 e Q_2, tramite l'asse $y = x$



abbiamo

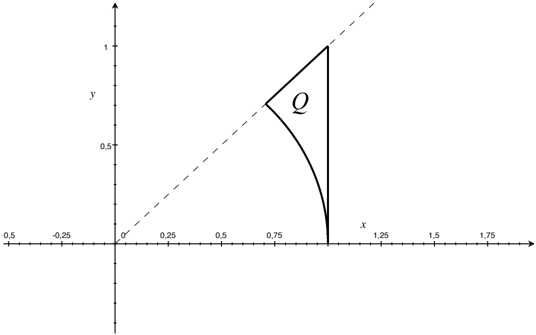
$$\iint_{Q_1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy = \iint_{Q_2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy$$

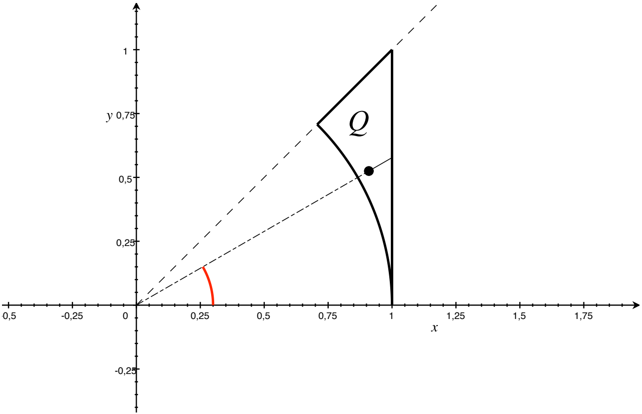
(si ricordi che l'integrale doppio di una funzione positiva rappresenta il volume del sottografico!)

- in base a questa piccola discussione, abbiamo che

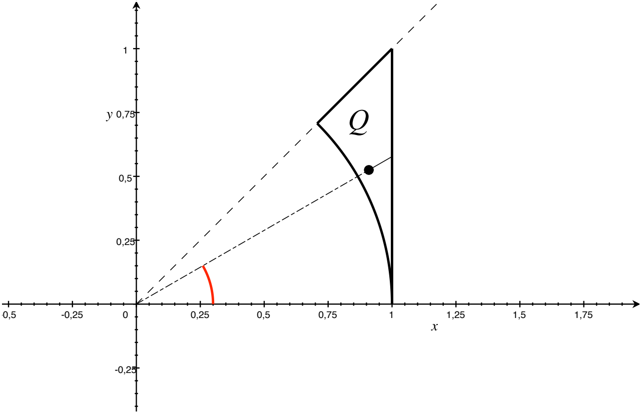
$$\iint_Q \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = 2\iint_{Q_1} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

- usiamo le coordinate polari per calcolare quest'ultimo integrale





Prendiamo un punto $(x, y) \in Q_1$ (in nero), sia $\vartheta \in [0, \pi/4]$ l'angolo corrispondente (in rosso). Il suo modulo $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ varia tra 1 (dobbiamo stare fuori dal cerchio!) ed un modulo massimo $\varrho_0(\vartheta)$, che coincide con l'ipotenusa del triangolo rettangolo...



....dal momento che il cateto adiacente all'angolo ϑ è lungo 1, si ha

$$\varrho_0(\vartheta)\,\cos\vartheta = 1 \qquad \text{ovvero} \qquad \varrho_0(\vartheta) = \frac{1}{\cos\vartheta}$$

- abbiamo allora che l'insieme Q_1 si descrive in coordinate polari come

$$\vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \qquad \text{e} \qquad 1 \leq \varrho \leq \frac{1}{\cos\vartheta}$$

- in altre parole, il nuovo insieme di integrazione sarà

$$\Omega = \left\{(\varrho, \vartheta) \,:\, \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ 1 \leq \varrho \leq \frac{1}{\cos\vartheta}\right\}$$

  che è $\varrho-$semplice

- dopo questa lunga discussione, siamo pronti a svolgere l'integrale di partenza

- abbiamo dalla formula di cambio di variabili

$$\begin{aligned}\iint_Q \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy &= 2\iint_{Q_1} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\\ &= 2\iint_\Omega \frac{1}{\varrho}\,\varrho\,d\varrho\,d\vartheta\\ &= 2\iint_\Omega d\varrho\,d\vartheta\end{aligned}$$

- ricordando che Ω è $\varrho-$semplice, l'ultimo integrale lo calcoliamo come *integrale iterato*, prima in ϱ e poi in ϑ

- ovvero

$$\begin{aligned}
\iint_Q \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy &= 2\iint_\Omega d\varrho\,d\vartheta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_1^{\frac{1}{\cos\vartheta}} d\varrho\right) d\vartheta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{\cos\vartheta} - 1\right] d\vartheta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\vartheta}\,d\vartheta - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

- ci manca da integrare $\dfrac{1}{\cos\vartheta}$
- è il momento giusto per tirare fuori dal cilindro un cambio di variabile "magico", che non abbiamo avuto tempo di vedere ad Analisi Matematica A...

- si ponga $\vartheta = 2 \arctan t$
- abbiamo allora

$$\begin{aligned}\cos\vartheta &= \cos(2 \arctan t)\\ &= 2 \cos^2(\arctan t) - 1\end{aligned}$$

- ricordando che

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

- abbiamo allora

$$\begin{aligned}\cos\vartheta &= 2\,\frac{1}{1 + \tan^2(\arctan t)} - 1\\ &= \frac{2}{1+t^2} - 1\\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}$$

- osserviamo anche che col cambio $\vartheta = 2\arctan t$, si ha

$$d\vartheta = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

- infine, gli estremi di integrazione

$$0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\pi}{4}$$

  diventano nella variabile $t = \tan(\vartheta/2)$

$$0 \qquad \text{e} \qquad \tan\frac{\pi}{8}$$

- in definitiva, col cambio $\vartheta = 2\arctan t$ si ottiene che..

- ...l'integrale diventa

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\vartheta}\, d\vartheta = \int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt$$
$$= \int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \frac{2}{1-t^2}\, dt$$

- quest'ultimo è un **integrale di funzione razionale**, del tipo che abbiamo visto ad ANALISI MATEMATICA A
- basta decomporre

$$\frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}$$

ed osservare che si tratta della derivata di

$$-\log|1-t| + \log|1+t|$$

- in definitiva, abbiamo trovato

$$
\begin{aligned}
\iint_Q \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\vartheta}\,d\vartheta - \frac{\pi}{2} \\
&= 2\int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \frac{2}{1-t^2}\,dt - \frac{\pi}{2} \\
&= 2\Big[-\log|1-t| + \log|1+t|\Big]_0^{\tan\frac{\pi}{8}} - \frac{\pi}{2} \\
&= 2\log\frac{1+\tan\dfrac{\pi}{8}}{1-\tan\dfrac{\pi}{8}} - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Esercizio

Si calcoli il momento d'inerzia dell'insieme

$$E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 4\,y^2 \leq 1\Big\}$$

rispetto all'asse delle x

Soluzione

- L'insieme in questione è la regione di piano racchiusa da un'ellisse
- più precisamente, si ricordi che

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

è l'equazione di un'ellisse avente semiassi a (lungo l'asse x) e b (lungo l'asse y)

- nel nostro caso la frontiera ∂E

$$x^2 + 4\,y^2 = 1$$

  corrisponde quindi a $a = 1$ e $b = \dfrac{1}{2}$

- l'integrale che dobbiamo calcolare è

$$\iint_E y^2\,dx\,dy$$

  ricordando che $\mathrm{dist}\Big((x,y),\mathfrak{R}\Big) = y$ nel caso in cui l'asse $\mathfrak{R}$ sia l'asse delle x

- potremmo calcolarci questo integrale considerando E come insieme $y-$semplice...
- ... ma proviamo ad usare un cambio di variabili, che può tornare utile anche in altri occasioni
- si tratta di una specie di coordinate polari, ma adattate alle ellissi
- poniamo

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\vartheta \\ y &= \frac{\varrho}{2} \sin\vartheta \end{aligned}$$

con $\varrho \in [0,1]$ e $\vartheta \in [0, 2\,\pi]$

- si osservi che effettivamente prendendo $\varrho = 1$ si ha

$$x^2 + 4\,y^2 = \cos^2\vartheta + 4\,\left(\frac{1}{2}\right)^2\,\sin^2\vartheta = \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1$$

- calcoliamo il determinante Jacobiano per questo cambio di variabili

$$\mathbf{F}(\varrho,\vartheta) = \left(\varrho\,\cos\vartheta, \frac{\varrho}{2}\,\sin\vartheta\right)$$

- si ha

$$J\mathbf{F}(\varrho,\vartheta) = \left[\begin{array}{cc} \cos\vartheta & -\varrho\,\sin\vartheta \\ 1/2\,\sin\vartheta & \varrho/2\,\cos\vartheta \end{array}\right]$$

- da cui si ottiene

$$|\det J\mathbf{F}(\varrho,\vartheta)| = \frac{\varrho}{2}\,\cos^2\vartheta + \frac{\varrho}{2}\,\sin^2\vartheta = \frac{\varrho}{2}$$

- l'integrale che dobbiamo calcolare diventa quindi

$$\iint_E y^2\,dx\,dy = \iint_\Omega \frac{\varrho^2}{4}\,\sin^2\vartheta\,\frac{\varrho}{2}\,d\varrho\,d\vartheta$$

  dove

$$\Omega = \Big\{(\varrho,\vartheta)\ :\ \varrho\in[0,1],\ \vartheta\in[0,2\,\pi]\Big\}$$

- abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\iint_E y^2\,dx\,dy &= \iint_\Omega \frac{\varrho^3}{8}\,\sin^2\vartheta\,d\varrho\,d\vartheta\\ &= \int_0^{2\,\pi}\left(\int_0^1 \frac{\varrho^3}{8}\,d\varrho\right)\sin^2\vartheta\,d\vartheta\\ &= \left[\frac{\varrho^4}{32}\right]_0^1\int_0^{2\,\pi}\sin^2\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{32}\int_0^{2\,\pi}\sin^2\vartheta\,d\vartheta\end{aligned}$$

- per integrare $\sin^2 \vartheta$, usiamo il solito trucco della *formula di bisezione*

$$\sin^2 \vartheta = \frac{1 - \cos(2\,\vartheta)}{2}$$

- in definitiva il momento d'inerzia è dato da

$$\begin{aligned}\iint_E y^2\,dx\,dy &= \frac{1}{32}\int_0^{2\,\pi} \sin^2 \vartheta\,d\vartheta \\ &= \frac{1}{32}\int_0^{2\,\pi} \frac{1 - \cos(2\,\vartheta)}{2}\,d\vartheta \\ &= \frac{1}{32}\left[\frac{\vartheta}{2} - \frac{\sin(2\,\vartheta)}{4}\right]_0^{2\,\pi} \\ &= \frac{1}{32}\cdot\frac{2\,\pi}{2} = \frac{\pi}{32}\end{aligned}$$

Commento

Più in generale, se si ha a che fare con un integrale doppio su insieme delimitato da un'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

può essere utile fare il cambio di variabili

$$\begin{aligned} x &= a\,\varrho\cos\vartheta \\ y &= b\,\varrho\sin\vartheta \end{aligned}$$

il cui determinante Jacobiano è dato da

$$|\det J\mathbf{F}(\varrho,\vartheta)| = a\,b\,\varrho$$

Esercizio per casa

Si calcoli l'area dell'insieme

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq R^2 \right\}$$

rappresentandolo graficamente

VII.5 Integrali tripli

In modo del tutto analogo a quello che abbiamo fatto per gli integrali doppi, si può definire l'integrale di una funzione f di 3 **variabili**, ovvero

$$f : \overline{A} \to \mathbb{R} \qquad \text{con } A \subset \mathbb{R}^3 \text{ aperto}$$

Si parla in tal caso **integrale triplo di Riemann di f su $\overline{A}$**

$$\iiint_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Commento

Non rifacciamo tutta la costruzione dell'integrale triplo di Riemann, ma l'idea è sempre la stessa: approssimare il "volume" quadridimensionale del sottografico di f **per eccesso** e **per difetto**, tramite somme finite di figure geometriche elementari

Anche gli integrali tripli, vorremo farli su insiemi “belli”

Ci serve quindi la generalizzazione a $\mathbb{R}^3$ del concetto di **insieme semplice** e **insieme Riemann-regolare**, visto nella sezione precedente

Definizione

Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ un insieme chiuso limitato

Si dice che E è $z-$**semplice** se

esistono $A \subset \mathbb{R}^2$ e due funzioni continue $g_1, g_2 : A \to \mathbb{R}$ tali che

l'insieme E è della forma

$$E = \Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, (x, y) \in A, \, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y) \Big\}$$

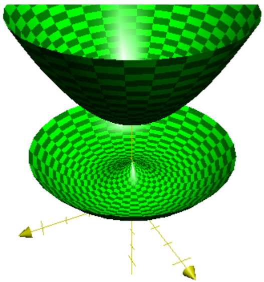


Figura: I grafici delle funzioni $g_1(x, y)$ (in basso) e $g_2(x, y)$ (in alto)...

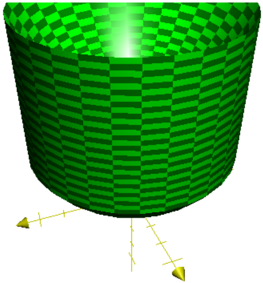


Figura: ...la porzione di spazio compresa tra questi due grafici, ci da un insieme $z-$semplici

Definizione

Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ un insieme chiuso limitato

Si dice che E è $y-$**semplice** se

esistono $B \subset \mathbb{R}^2$ e due funzioni continue $h_1, h_2 : B \to \mathbb{R}$ tali che

l'insieme E è della forma

$$E = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; (x, z) \in B, \; h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z)\Big\}$$

Definizione

Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ un insieme chiuso limitato

Si dice che E è $x-$**semplice** se

esistono $C \subset \mathbb{R}^2$ e due funzioni continue $k_1, k_2 : C \to \mathbb{R}$ tali che

l'insieme E è della forma

$$E = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; (y, z) \in C, \; k_1(y, z) \le x \le k_2(y, z)\Big\}$$

Infine, dal momento che gli insiemi che ci interessano non saranno sempre $x-$semplici o $y-$semplici, ci serve la seguente definizione più generale

Definizione

Si dice che un insieme $E \subset \mathbb{R}^3$ è **Riemann-regolare** se coincide con l'unione di un numero finito

$$E_1, E_2, \ldots, E_n$$

di insiemi $x-$semplici, $y-$semplici o $z-$semplici, che si intersecano a due a due lungo la frontiera

Un esempio di insieme Riemann-regolare tridimensionale

Si consideri

$$E = \left\{ (x, y, z) \, : \, \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$$

ovvero si tratta della *corona sferica* centrata nell'origine, con raggio interno $1/2$ e raggio esterno 1

È l'analogo tridimensionale dell'esempio C che abbiamo fatto nella *Lezione 16*

Esercizio per casa

Si dimostri che E è Riemann-regolare, scrivendolo come **unione di 3 insiemi**, *tutti z−semplici*

Teorema (integrali tripli z-semplici)

Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ un insieme chiuso e limitato $z-$semplice, dato da

$$E = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x, y) \in A,\, g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y)\Big\}$$

Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua

Allora f è Riemann integrabile su E

Inoltre il suo integrale triplo si calcola tramite la formula di "integrazione iterata"

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_A \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy$$

Osservazione

Vale un risultato analogo per insiemi $x-$semplici e $y-$semplici

Esercizio

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ *la palla chiusa di centro* $(0,0,0)$ *e raggio* 1. *Si calcoli l'integrale triplo*

$$\iiint_S (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

Soluzione

- L'insieme S si può scrivere come

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$$

- non è difficile vedere che lo possiamo scrivere come insieme $z-$semplice

- usiamo un argomento simile a quello che abbiamo usato in $\mathbb{R}^2$ per il disco
- la frontiera ∂S è descritta dall'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad \text{ovvero} \qquad z^2 = 1 - x^2 - y^2$$

- perché l'ultima relazione sia possibile (osservate che $z^2 \geq 0$) ci serve

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

- in tal caso, la frontiera ∂S coincide con l'unione dei due grafici (sostegni di superfici cartesiane!)

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad \text{e} \qquad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

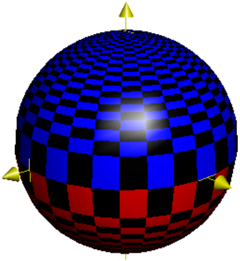


Figura: L'insieme S è compreso tra il grafico di $\sqrt{1-x^2-y^2}$ (in nerazzurro) ed il grafico di $-\sqrt{1-x^2-y^2}$ (in rossonero)

- l'insieme di integrazione S, può essere quindi scritto come

  $$S = \left\{(x, y, z) : (x, y) \in A,\ -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}$$

  dove $A \subset \mathbb{R}^2$ è il disco di centro $(0, 0)$ e raggio 1
- la funzione che dobbiamo integrare $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ è continua
- l'integrale triplo

  $$\iiint_S (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz,$$

  è ben definito e può essere calcolato tramite *integrazione iterata*

- abbiamo dunque

$$\iiint_S (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iint_A \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz \right)\,dx\,dy$$
$$= 2\iint_A (x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

- ci siamo quindi ricondotti al calcolo di un integrale doppio
- si ricordi che

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 1 \right\}$$

- dobbiamo integrare su un disco, una funzione radialmente simmetrica...
- proviamo ad usare le coordinate polari per risolvere l'integrale doppio?

- operando quindi il cambio di variabili

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\vartheta \\ y &= \varrho \sin\vartheta \end{aligned}$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} \iiint_S (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz &= 2\iint_A (x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy \\ &= 2\iint_\Omega \varrho^2\sqrt{1-\varrho^2}\,\varrho\,d\varrho\,d\vartheta \\ &= 2\iint_\Omega \varrho^3\sqrt{1-\varrho^2}\,d\varrho\,d\vartheta \end{aligned}$$

- il nuovo insieme di integrazione è

$$\Omega = \Big\{(\varrho,\vartheta)\;:\;\varrho\in[0,1],\;\vartheta\in[0,2\,\pi]\Big\}$$

- integrando prima rispetto a ϑ e notando che la funzione da integrare è indipendente da ϑ, si ottiene

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \varrho^3 \sqrt{1-\varrho^2}\, d\varrho\, d\vartheta &= \int_0^1 \varrho^3 \sqrt{1-\varrho^2} \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right) d\varrho \\ &= 2\pi \int_0^1 \varrho^3 \sqrt{1-\varrho^2}\, d\varrho\end{aligned}$$

- quindi abbiamo

$$\iiint_S (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz = 4\pi \int_0^1 \varrho^3 \sqrt{1-\varrho^2}\, d\varrho$$

- ci siamo ridotti a calcolare un integrale in una variabile!

- l'integrale in questione è simile ad altri già visti in precedenza
- facciamo il cambio di variabile

$$\varrho = \sin t \qquad \text{da cui} \qquad d\varrho = \cos t \, dt$$

- i nuovi estremi di integrazione diventano 0 e $\pi/2$
- abbiamo allora

$$\begin{aligned}\iiint_S (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz &= 4\pi \int_0^1 \varrho^3 \sqrt{1-\varrho^2}\, d\varrho \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t\, dt \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\, \cos^2 t\, dt\end{aligned}$$

- l'ultimo integrale si può fare per parti

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \, \cos^2 t \, dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \, \cos t \, \cos t \, dt \\ &= \cancel{\left[\frac{\sin^4 t}{4} \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^5 t}{4} \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t \, (1 - \cos^2 t)}{4} \, dt\end{aligned}$$

- ovvero, otteniamo l'identità

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \, \cos^2 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t}{4} \, dt - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \, \cos^2 t \, dt$$

- da cui anche

$$\frac{5}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \, \cos^2 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t}{4} \, dt$$

- questo ci permette di affermare che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\, \cos^2 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t}{5}\, dt$$

- per il momento, ricapitolando, abbiamo quindi ottenuto

$$\begin{aligned}\iiint_S (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz &= 4\,\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\, \cos^2 t\, dt \\ &= \frac{4\,\pi}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\, dt\end{aligned}$$

- abbiamo quasi finito, ci manca l'ultimo integrale: basta scrivere

$$\sin^3 t = \sin t\,(1 - \cos^2 t) = \frac{d}{dt}\left(-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}\right)$$

- abbiamo quindi

$$\iiint_S (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{4\,\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\,dt$$
$$= \frac{4\,\pi}{5}\left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{4\,\pi}{5}\left[1-\frac{1}{3}\right] = \frac{8\,\pi}{15}$$

Commento finale

Il calcolo dell'integrale triplo precedente è stato un po' laborioso

Sarebbe stato molto semplice se avessimo potuto usare un vero cambio di variabile **tridimensionale**

$$(x,y,z) = \mathbf{F}(t,s,w)$$

...prossimamente...