Analisi Matematica B
– *Lezione 17* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 5 Maggio 2020

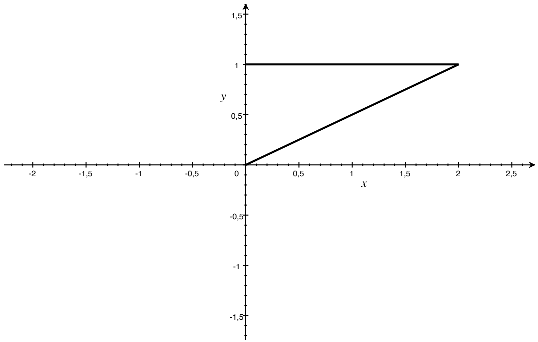
Esercizio

Si calcoli l'integrale doppio seguente

$$\iint_T e^{y^2}\, dx\, dy$$

dove T è il triangolo chiuso di vertici $(0,0)$, $(0,1)$ *e* $(2,1)$

Soluzione



- osserviamo che l'ipotenusa di T coincide col grafico della funzione $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ sull'intervallo $[0,2]$
- quindi T può essere scritto come insieme $y-$semplice

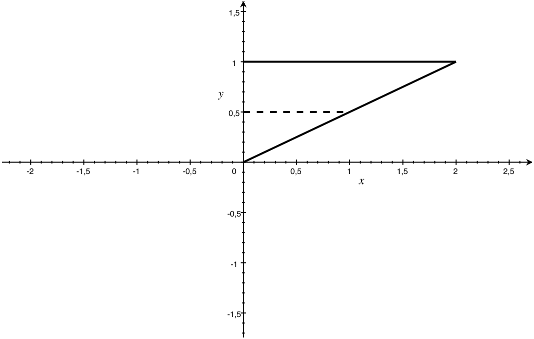
$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0,2],\, \frac{x}{2} \leq y \leq 1\right\}$$

- inoltre, la funzione da integrare è continua su T
- possiamo calcolare l'integrale doppio come *integrale iterato*

$$\iint_T e^{y^2}\, dx\, dy = \int_0^2 \left(\int_{\frac{x}{2}}^1 e^{y^2}\, dy\right) dx$$

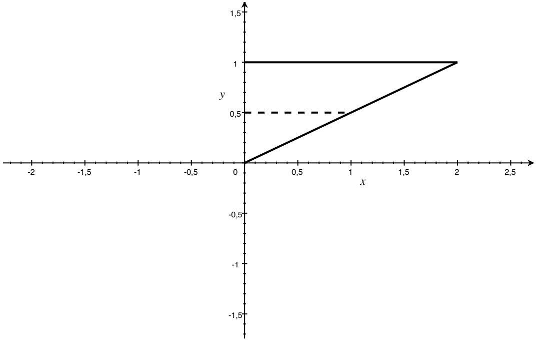
- ARGH!! La funzione e^{y^2} non è per niente banale da integrare! Più precisamente, non ammette primitiva elementare

- ci arrendiamo? Non prima di averle tentate tutte!
- diamo nuovamente un'occhiata al disegno



- l'insieme T sembrerebbe anche $x-$semplice...vogliamo provare a fare l'integrale iterato **prima in** x **e poi in** y?
- non sia mai che per qualche motivo, venga più facile...

- dobbiamo innanzitutto riscriverci T come insieme $x-$semplice



- girando la testa di $\pi/2$ verso destra, mi accorgo che l'ipotenusa coincide anche col grafico di $y \mapsto 2\,y$
- quindi

$$T = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \in [0,1],\, 0 \leq x \leq 2\,y\Big\}$$

- possiamo allora calcolare

$$\iint_T e^{y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\,y} e^{y^2}\,dx\right)\,dy$$
$$= \int_0^1 \left[e^{y^2}\,x\right]_0^{2\,y}\,dy$$
$$= \int_0^1 2\,y\,e^{y^2}\,dy = \left[e^{y^2}\right]_0^1 = e-1$$

- fatto in questo modo, l'integrale non ha presentato nessuna difficoltà!

Commento

Dall'ultimo esercizio, abbiamo imparato che

se l'insieme è sia $x-$semplice che $y-$semplice

l'ordine in cui facciamo l'integrale iterato può semplificarci di molto la vita!

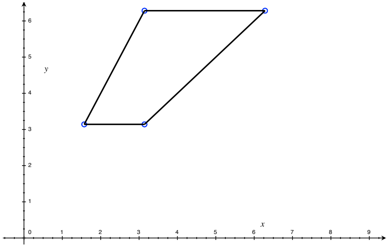
Esercizio per casa

Calcolare l'integrale doppio

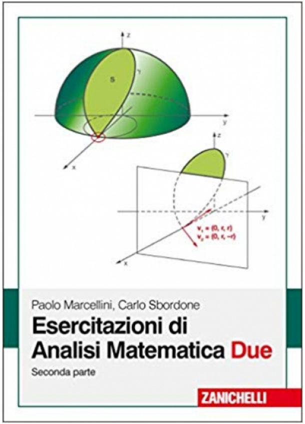
$$\iint_Q \frac{\sin y}{y}\, dx\, dy$$

dove Q è il quadrilatero di vertici

$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),\ (\pi,\pi),\ (\pi, 2\,\pi),\ (2\,\pi, 2\,\pi)$$



Più in generale, per esercitarvi potete usare gli esercizi del **Capitolo 3** del libro che vi avevo suggerito (ma un qualsiasi altro libro di ANALISI II va ugualmente bene)



VII.3 Proprietà degli integrali doppi

Alcune proprietà degli integrali doppi

Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un insieme chiuso Riemann-regolare

- siano $f, g : E \to \mathbb{R}$ funzioni Riemann integrabili, allora

$$\iint_E \Big[f(x,y) + g(x,y)\Big]\, dx\, dy = \iint_E f(x,y)\, dx\, dy + \iint_E g(x,y)\, dx\, dy$$

- se $f \geq g$ su E, vale

$$\iint_E f(x,y)\, dx\, dy \geq \iint_E g(x,y)\, dx\, dy$$

- se E_1 e E_2 sono semplici e sono disgiunti **oppure** hanno in comune solo parti di frontiera

$$\iint_{E_1 \cup E_2} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{E_1} f(x,y)\, dx\, dy + \iint_{E_2} f(x,y)\, dx\, dy$$

Definizione

Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un insieme Riemann-regolare. Si definiscono

- **area** di E come

$$\mathrm{Area}(E) = \iint_E dx\, dy$$

- **baricentro** di E come il punto $\mathbf{b}^E \in \mathbb{R}^2$ le cui coordinate sono date da

$$b_1^E = \frac{1}{\mathrm{Area}(E)} \iint_E x\, dx\, dy$$

$$b_2^E = \frac{1}{\mathrm{Area}(E)} \iint_E y\, dx\, dy$$

- **momento d'inerzia di E rispetto ad una retta $\mathfrak{R}$** come

$$\iint_E \Big(\mathrm{dist}((x,y),\mathfrak{R})\Big)^2\, dx\, dy$$

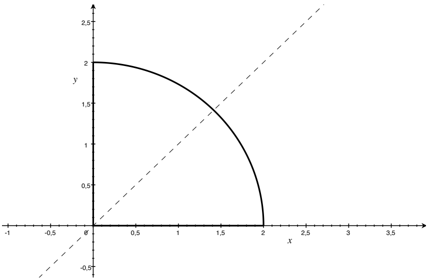
dove $\mathrm{dist}((x,y),\mathfrak{R})$ rappresenta la distanza del punto (x,y) da $\mathfrak{R}$

Esercizio

Sia E lo spicchio di cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1, contenuto nel primo quadrante. Si calcolino:

1. *il baricentro di E;*
2. *il suo momento d'inerzia rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante*

Soluzione



1. <u>baricentro di E</u>

- si tratta del punto $\mathbf{b}^E = (b_1^E, b_2^E)$ con

$$b_1^E = \frac{1}{\mathrm{Area}(E)} \iint_E x\,dx\,dy$$

$$b_2^E = \frac{1}{\mathrm{Area}(E)} \iint_E y\,dx\,dy$$

- trattandosi di un quarto di cerchio, l'area sappiamo subito che è data da

$$\mathrm{Area}(E) = \frac{\pi}{4}$$

- osserviamo che E può essere considerato come un insieme $y-$semplice

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0,1],\, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\right\}$$

- abbiamo quindi

$$
\begin{aligned}
b_1^E = \frac{1}{\mathrm{Area}(E)} \iint_E x\,dx\,dy &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 x \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^1 x\,\sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^1 x\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{4}{\pi} \int_0^1 (-2\,x)\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx \\
&= -\frac{2}{\pi} \left[\frac{2}{3}\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\
&= \frac{4}{3\,\pi}
\end{aligned}
$$

- per quanto riguarda la seconda coordinata, per simmetria dovrebbe risultare $b_2^E = b_1^E$...
- ...verifichiamolo

$$
\begin{aligned}
b_2^E = \frac{1}{\mathrm{Area}(E)} \iint_E y \, dx \, dy &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \right) \, dx \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{1-x^2}{2} \, dx \\
&= \frac{4}{\pi} \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 \\
&= \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right] = \frac{4}{3\,\pi}
\end{aligned}
$$

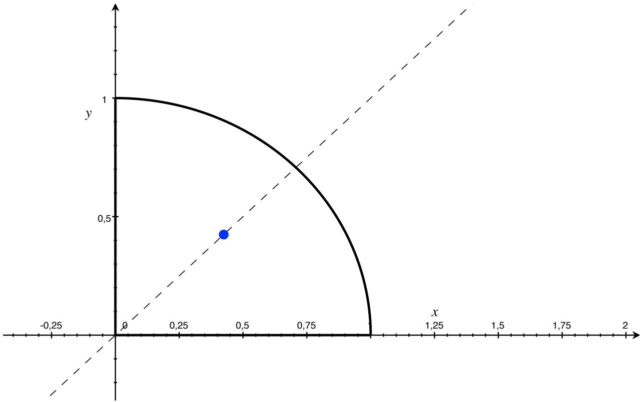


Figura: Il baricentro dell'insieme E

1. momento d'inerzia di E rispetto alla retta $y = x$

- dobbiamo calcolare l'integrale doppio

$$\iint_E \Big(\mathrm{dist}((x,y),\mathfrak{R})\Big)^2 \, dx\, dy$$

- prima però, dobbiamo capire chi è $\mathrm{dist}((x,y),\mathfrak{R})$
- dato (x_0, y_0), basta trovare l'intersezione con la retta ortogonale a $y = x$, che passi per (x_0, y_0)

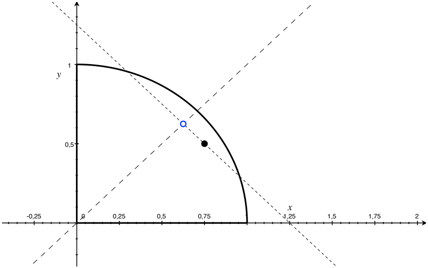


Figura: In nero, un generico punto (x_0, y_0). Tratteggiata, la retta ortogonale a $y = x$, che passa per (x_0, y_0)

- tale retta è data da

$$y = y_0 - (x - x_0)$$

- per trovare l'intersezione, si risolve il sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x \\ y & = & y_0 - (x - x_0) \end{array} \right.$$

- usando la prima equazione nella seconda, si trova

$$x = y_0 - (x - x_0) \quad \text{ovvero} \quad 2\,x = y_0 + x_0 \quad \text{ovvero} \quad x = \frac{y_0 + x_0}{2}$$

- ricordando che $y = x$, si trova che

$$\left(\frac{x_0 + y_0}{2}, \frac{x_0 + y_0}{2} \right)$$

  è il punto di intersezione

- abbiamo allora

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}((x_0, y_0), \mathfrak{R}) &= \left| (x_0, y_0) - \left(\frac{x_0 + y_0}{2}, \frac{x_0 + y_0}{2} \right) \right| \\
&= \sqrt{\left(x_0 - \frac{x_0 + y_0}{2} \right)^2 + \left(y_0 - \frac{x_0 + y_0}{2} \right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{x_0 - y_0}{2} \right)^2 + \left(\frac{y_0 - x_0}{2} \right)^2} \\
&= |x_0 - y_0| \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

- in definitiva, dobbiamo calcolare

$$\iint_E \Big(\operatorname{dist}((x, y), \mathfrak{R}) \Big)^2 \, dx \, dy = \frac{1}{2} \iint_E (x - y)^2 \, dx \, dy$$

- sviluppando il quadrato ed usando la linearità dell'integrale, dobbiamo calcolare

$$\frac{1}{2}\iint_E x^2\,dx\,dy - \iint_E x\,y\,dx\,dy + \frac{1}{2}\iint_E y^2\,dx\,dy$$

- calcoliamo il primo di questi integrali, gli altri due li lasciamo *per casa*

$$\begin{aligned}\iint_E x^2\,dx\,dy &= \int_0^1 x^2\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\right)dx\\ &= \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx\end{aligned}$$

- per risolvere l'ultimo integrale, possiamo usare il cambio di variabile

$$x = \sin t, \qquad \text{da cui } dx = \cos t\,dt$$

con nuovi estremi di integrazione 0 e $\pi/2$

- con questo cambio, abbiamo allora

$$\iint_E x^2\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt$$

- osservando che sull'intervallo $[0, \pi/2]$ il **coseno è positivo**, abbiamo

$$\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$$

- ci siamo quindi ridotti a calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\cos^2 t\,dt$$

- questo possiamo calcolarlo per parti oppure usando un po' di trigonometria (quale metodo userò secondo voi?)

- ...il secondo, avete indovinato!
- ricordiamo che
$$\sin(2\,t) = 2\,\sin t\,\cos t$$
- quindi
$$\sin^2 t\,\cos^2 t = \frac{\sin^2(2\,t)}{4}$$
- inoltre, dalle *formule di bisezione*
$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\,\alpha)}{2}$$
- in definitiva, abbiamo
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\cos^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(2\,t)}{4}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(4\,t)}{8}\,dt$$

- ricapitolando, abbiamo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\iint_E x^2\,dx\,dy &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\cos^2 t\,dt\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(4\,t)}{8}\,dt\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{t}{8}-\frac{\sin(4\,t)}{32}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{32}
\end{aligned}
$$

- i due integrali rimanenti

$$
-\iint_E x\,y\,dx\,dy \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2}\iint_E y^2\,dx\,dy
$$

si fanno in modo del tutto simile (in realtà il primo è più facile)

Esercizio (Compito del 11/07/2018)

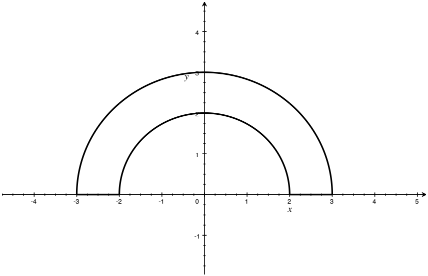
Sia

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \, y \geq 0\}$$

si calcoli il suo baricentro

Soluzione

L'insieme in questione è la metà superiore di una corona circolare centrata in $(0, 0)$ ed avente raggio interno 2 e raggio esterno 3



- dobbiamo calcolare i due integrali doppi

$$b_1^E = \frac{1}{\mathrm{Area}(E)} \iint_E x \, dx \, dy$$

$$b_2^E = \frac{1}{\mathrm{Area}(E)} \iint_E y \, dx \, dy$$

- essi corrispondono alle due coordinate del baricentro $\mathbf{b}^E$
- anche in questo caso, l'area possiamo calcolarla con la geometria elementare

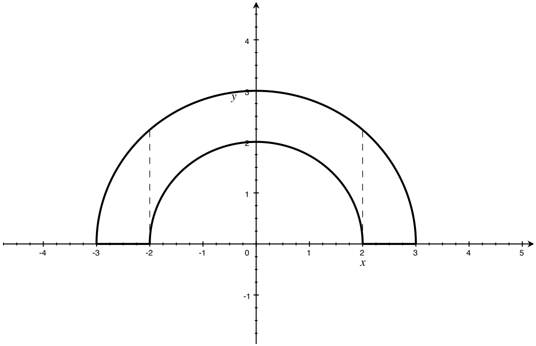
$$\mathrm{Area}(E) = \frac{9\,\pi - 4\,\pi}{2} = \frac{5\,\pi}{2}$$

- per calcolare i due integrali di cui sopra, ci conviene vedere E come un insieme **Riemann-regolare**

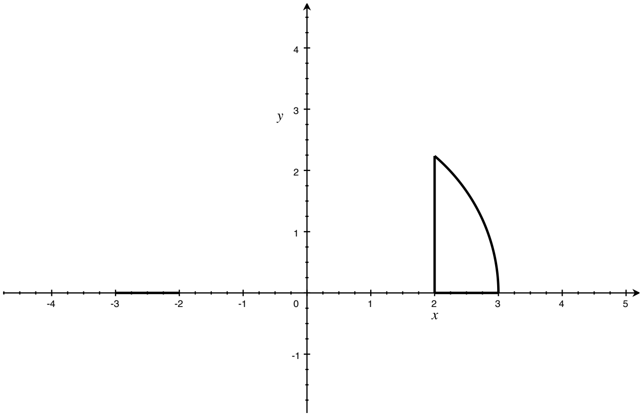
- più precisamente, vediamo E come

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

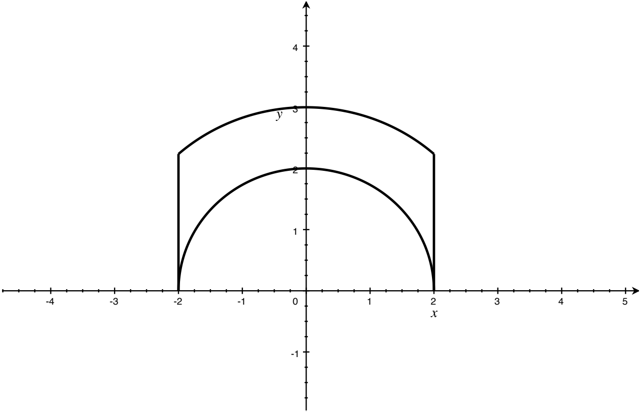
tutti $y-$semplici



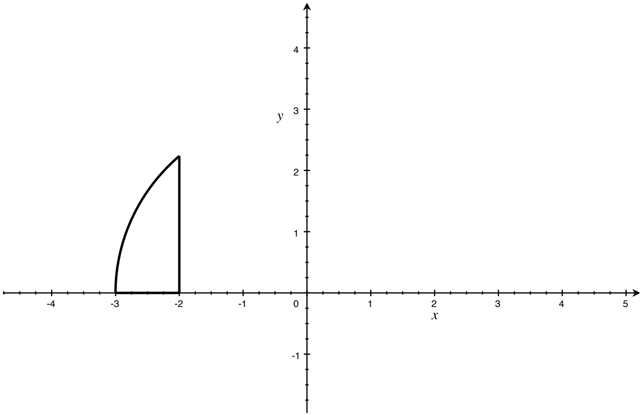
$$E_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [2,3],\ 0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2} \right\}$$



$$E_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [-2, 2],\ \sqrt{4 - x^2} \le y \le \sqrt{9 - x^2} \right\}$$



$$E_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \in [-3, -2], \; 0 \le y \le \sqrt{9 - x^2} \right\}$$



- abbiamo allora

$$
\begin{aligned}
b_1^E &= \frac{2}{5\,\pi}\,\sum_{i=1}^{3}\iint_{E_i} x\,dx\,dy \\
&= \frac{2}{5\,\pi}\,\int_2^3 x\left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\,dy\right)\,dx \\
&+ \frac{2}{5\,\pi}\,\int_{-2}^{2} x\left(\int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\,dy\right)\,dx \\
&+ \frac{2}{5\,\pi}\,\int_{-3}^{-2} x\left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\,dy\right)\,dx
\end{aligned}
$$

- dalla formula precedente, abbiamo allora

$$
\begin{aligned}
b_1^E = & \frac{2}{5\,\pi} \int_2^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx \\
& + \frac{2}{5\,\pi} \int_{-2}^2 x\left(\sqrt{9-x^2}-\sqrt{4-x^2}\right) dx \\
& + \frac{2}{5\,\pi} \int_{-3}^{-2} x\sqrt{9-x^2}\,dx
\end{aligned}
$$

- osserviamo che nel secondo integrale, abbiamo da integrare una funzione dispari, su un insieme simmetrico rispetto all'origine, ovvero $[-2, 2]$
- abbiamo quindi

$$\int_{-2}^2 x\left(\sqrt{9-x^2}-\sqrt{4-x^2}\right) dx = 0$$

senza bisogno di trovare la primitiva

- siamo quindi rimasti con

$$
\begin{aligned}
b_1^E = \frac{2}{5\,\pi} \int_2^3 x\,\sqrt{9-x^2}\,dx \\
+ \frac{2}{5\,\pi} \int_{-3}^{-2} x\,\sqrt{9-x^2}\,dx
\end{aligned}
$$

- osserviamo di nuovo, che dobbiamo integrare la funzione dispari

$$x\,\sqrt{9-x^2}$$

su un insieme simmetrico rispetto all'origine, ovvero $[-3,-2] \cup [2,3]$

- abbiamo quindi

$$\int_2^3 x\,\sqrt{9-x^2}\,dx + \int_{-3}^{-2} x\,\sqrt{9-x^2}\,dx = 0$$

senza bisogno di trovare la primitiva!

- abbiamo in conclusione

$$b_1^E = 0$$

- ovvero il baricentro si trova sull'asse delle y
- dal momento che E è simmetrico rispetto all'asse delle y, questo risultato non dovrebbe sorprenderci!
- procediamo adesso col calcolo di b_2^E

- abbiamo allora

$$
\begin{aligned}
b_2^E &= \frac{2}{5\,\pi} \sum_{i=1}^{3} \iint_{E_i} y \, dx \, dy \\
&= \frac{2}{5\,\pi} \int_2^3 \left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}} y \, dy \right) dx \\
&+ \frac{2}{5\,\pi} \int_{-2}^2 \left(\int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} y \, dy \right) dx \\
&+ \frac{2}{5\,\pi} \int_{-3}^{-2} \left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}} y \, dy \right) dx
\end{aligned}
$$

- dalla formula precedente, abbiamo allora

$$
\begin{aligned}
b_2^E = {} & \frac{2}{5\,\pi} \int_2^3 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{9-x^2}} dx \\
& + \frac{2}{5\,\pi} \int_{-2}^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dx \\
& + \frac{2}{5\,\pi} \int_{-3}^{-2} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{9-x^2}} dx
\end{aligned}
$$

- sostituendo gli estremi, abbiamo

$$b_2^E = \frac{1}{5\,\pi} \int_2^3 (9 - x^2)\,dx + \frac{1}{5\,\pi} \int_{-2}^{2} (9 - \cancel{x^2} - (4 - \cancel{x^2}))\,dx + \frac{1}{5\,\pi} \int_{-3}^{-2} (9 - x^2)\,dx$$

- prima di procedere oltre, osserviamo che

$$\int_{-3}^{-2} (9 - x^2)\,dx = \int_2^3 (9 - x^2)\,dx$$

dal momento che la funzione da integrare è pari

- arriviamo quindi a

$$
\begin{aligned}
b_2^E &= \frac{2}{5\,\pi} \int_2^3 (9 - x^2)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 dx \\
&= \frac{2}{5\,\pi} \left[9\,x - \frac{x^3}{3} \right]_2^3 + \frac{4}{\pi} \\
&= \frac{2}{5\,\pi} \left[27 - \frac{27}{3} - 18 + \frac{8}{3} \right] + \frac{4}{\pi} \\
&= \frac{76}{15\,\pi}
\end{aligned}
$$

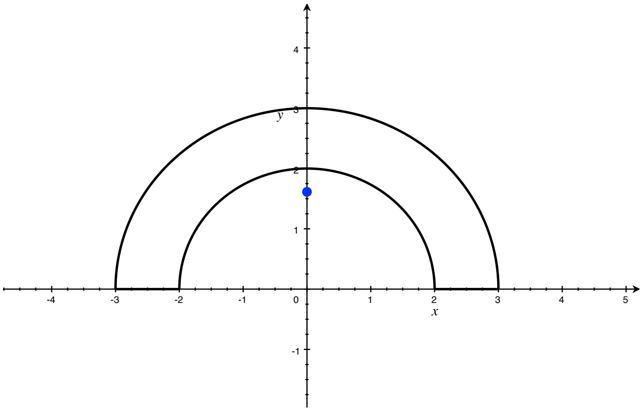


Figura: Il baricentro dell'insieme precedente

I calcoli dell'esercizio precedente erano elementari, ma un po' laboriosi...

Vedremo tra un po' che, se avessimo usato le variabili "giuste", sarebbe stato tutto molto più semplice....

Prima però dobbiamo occuparci di...

VII.4 Cambio di variabili negli integrali doppi

Cominciamo con un esercizio di GEOMETRIA E ALGEBRA (ancora?!) che apparentemente non c'entra nulla...

Esercizio [Significato geometrico del determinante]

Siano $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *due vettori di* $\mathbb{R}^2$*, aventi componenti*

$$\mathbf{v} = (a, b) \qquad e \qquad \mathbf{w} = (c, d)$$

Si dimostri che l'area del parallelogramma generato da $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *coincide con*

$$\left| \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \right|$$

Soluzione

- Ci conviene partire facendo un disegno, così capiamo anche cosa intendiamo con

parallelogramma generato da **v** *e* **w**

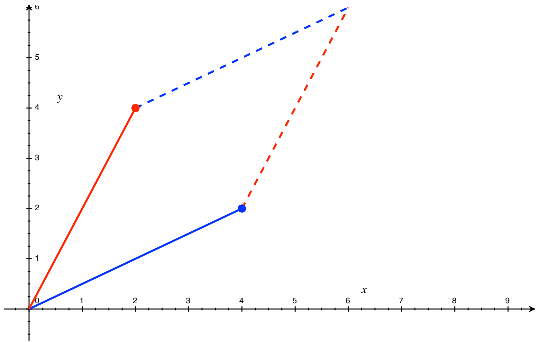


Figura: In rosso il vettore **w**, in blu il vettore **v**. In evidenza, il parallelogramma generato. Il punto blu ha coordinate (a, b), il punto rosso ha coordinate (c, d)

- per trovare l'area, calcoliamo "base $\times$ altezza"

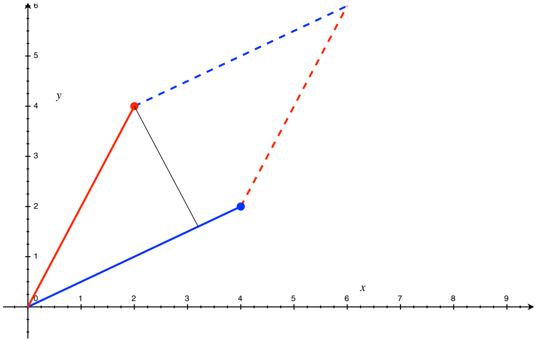


Figura: Prendiamo come base il blu, l'altezza corrispondente è evidenziata in nero

- la base è quindi lunga $|\mathbf{v}|$

- per trovare l'altezza, usiamo un po' di trigonometria
- chiamo ϑ l'angolo formato da **v** e **w**
- allora vale

$$\text{altezza} = |\mathbf{w}|\,|\sin\vartheta|$$

- ci manca di sapere quanto vale $\sin\vartheta$
- si ricordi la relazione tra *prodotto scalare* e l'angolo ϑ

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,\cos\vartheta$$

- ovvero

$$\cos\vartheta = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|}$$

- abbiamo allora

$$|\sin\vartheta| = \sqrt{1-\cos^2\vartheta} = \sqrt{1-\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle^2}{|\mathbf{v}|^2\,|\mathbf{w}|^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{|\mathbf{v}|^2\,|\mathbf{w}|^2-\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle^2}}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|}$$

- l'area del parallelogramma è data da

$$\begin{aligned}
\text{base} \times \text{altezza} &= |\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|\,|\sin\vartheta| \\
&= \cancel{|\mathbf{v}|}\,\cancel{|\mathbf{w}|}\,\frac{\sqrt{|\mathbf{v}|^2\,|\mathbf{w}|^2-\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle^2}}{\cancel{|\mathbf{v}|}\,\cancel{|\mathbf{w}|}} \\
&= \sqrt{(a^2+b^2)\,(c^2+d^2)-(a\,c+b\,d)^2} \\
&= \sqrt{a^2\,d^2+b^2\,c^2-2\,a\,c\,b\,d} \\
&= \sqrt{(a\,d-b\,c)^2}
\end{aligned}$$

- in definitiva l'area è data da

$$\sqrt{(a\,d - b\,c)^2} = |a\,d - b\,c| = \left|\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right|$$

come volevamo!

Vogliamo adesso occuparci di sapere come si comportano gli integrali doppi quando si esegue un **cambio di variabili** del tipo

$$(x, y) = \mathbf{F}(t, s)$$

ovvero quando si pone

$$\begin{array}{rcl} x & = & F_1(t, s) \\ y & = & F_2(t, s) \end{array}$$

Supponiamo quindi di avere

- un insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ Riemann-regolare
- una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ continua
- una funzione biettiva $\mathbf{F} : \Omega \to E$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ Riemann-regolare (**cambio di variabili**)

Supponiamo di dover calcolare l'integrale doppio

$$\iint_E f(x, y)\, dx\, dy$$

e di fare il cambio

$$(x, y) = \mathbf{F}(t, s)$$

Domanda

Come si riscrive l'integrale doppio in termini delle nuove variabili $(t, s) \in \Omega$?

- $E \longrightarrow \Omega$
- $(x, y) \longrightarrow \mathbf{F}(t, s)$
- $dx\, dy \longrightarrow ???\, dt\, ds$

ovvero

$$\iint_E f(x, y)\, dx\, dy = \iint_\Omega f(\mathbf{F}(t, s)) \overset{?}{\ldots}\, dt\, ds$$

Dobbiamo capire come si modifica l'**elemento infinitesimale di area** $dx\,dy$ tramite cambio di variabili

NON dobbiamo aspettarci che sia

$$dx\,dy = dt\,ds$$

in generale, questo è già falso per una variabile!

Memento (Analisi Matematica A)

Per funzioni di una variabile, valeva la formula di cambio di variabile

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

se $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ *biettiva crescente derivabile (***cambio di variabile***)*

$$\boxed{dx = \varphi'(t)\,dt}$$

Cerchiamo di analizzare la situazione in due variabili con un disegno

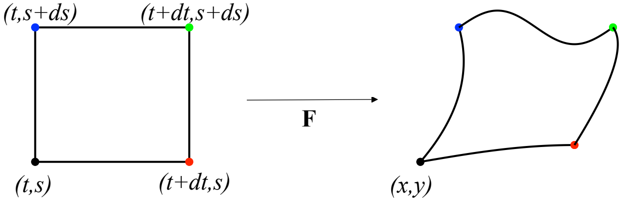


Figura: Prendiamo un punto qualsiasi $(t, s) \in \Omega$ ed il relativo quadratino di area infinitesima $dt\, ds$. Prendendo l'immagine tramite il cambio di variabili $(x, y) = \mathbf{F}(t, s)$, il quadratino si modifica in qualcosa di "storto" come nella figura di destra

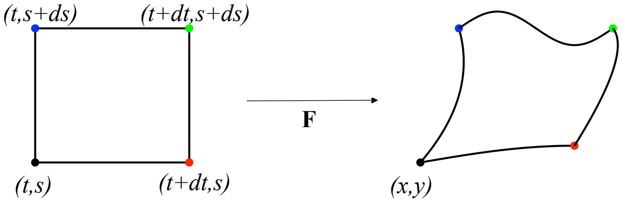


Figura: Ci chiediamo come si modifica l'area infinitesima $dt\,ds$, ovvero che area $dx\,dy$ ha il quadrilatero di destra in funzione di t e s (almeno con buona approssimazione)

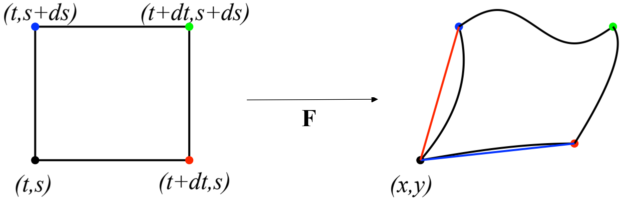


Figura: In prima battuta, possiamo pensare di approssimare il quadrilatero con il parallelogramma generato dai due vettori **v** (blu) e **w** (rosso)

In base all'esercizio precedente, se questi due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ hanno componenti

$$\mathbf{v} = (a, b) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{w} = (c, d)$$

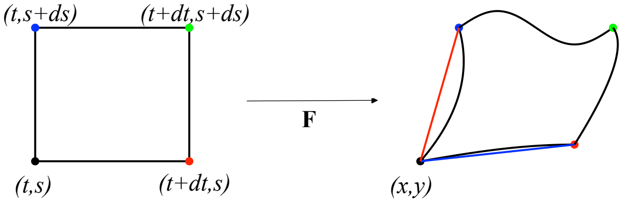
sappiamo quindi che l'area di questo parallelogramma è data da

$$\left| \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \right|$$

quindi abbiamo l'area approssimata

$$dx\, dy \simeq \left| \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \right|$$

Non resta adesso che scriverci le coordinate di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ in funzione di (t, s)



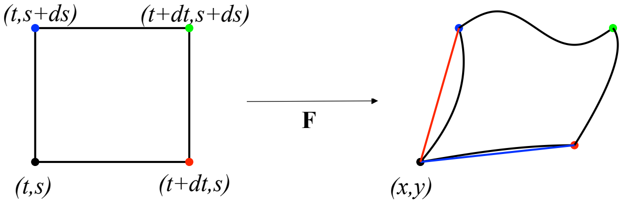
Il vettore **v** in blu unisce i punti $\mathbf{F}(t+dt,s)$ e $\mathbf{F}(t,s)$, quindi si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{F}(t+dt,s)-\mathbf{F}(t,s)\\ &= \Big(F_1(t+dt,s)-F_1(t,s), F_2(t+dt,s)-F_2(t,s)\Big)\end{aligned}$$

Visto che stiamo facendo delle approssimazioni...continuiamo ad approssimare!

Usiamo uno sviluppo di Taylor all'ordine 1 rispetto alla variabile t

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \mathbf{F}(t+dt,s) - \mathbf{F}(t,s) \\
&= \Big(F_1(t+dt,s) - F_1(t,s), F_2(t+dt,s) - F_2(t,s)\Big) \\
&= \left(\frac{\partial F_1}{\partial t}(t,s)\,dt + o(dt), \frac{\partial F_2}{\partial t}(t,s)\,dt + o(dt)\right)
\end{aligned}
$$



Il vettore **w** in rosso unisce i punti $\mathbf{F}(t, s + ds)$ e $\mathbf{F}(t, s)$, quindi si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \mathbf{F}(t, s + ds) - \mathbf{F}(t, s) \\ &= \Big(F_1(t, s + ds) - F_1(t, s), F_2(t, s + ds) - F_2(t, s)\Big)\end{aligned}$$

Di nuovo, usiamo uno sviluppo di Taylor all'ordine 1, stavolta rispetto alla variabile s

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \mathbf{F}(t, s+ds) - \mathbf{F}(t,s) \\ &= \Big(F_1(t, s+ds) - F_1(t,s), F_2(t, s+ds) - F_2(t,s)\Big) \\ &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial s}(t,s)\, ds + o(ds), \frac{\partial F_2}{\partial s}(t,s)\, ds + o(ds)\right)\end{aligned}$$

In base a quanto detto prima, abbiamo allora che

$$dx\, dy \simeq \left| \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial t}(t,s)\, dt & \dfrac{\partial F_1}{\partial s}(t,s)\, ds \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial t}(t,s)\, dt & \dfrac{\partial F_2}{\partial s}(t,s)\, ds \end{bmatrix} \right|$$

In altre parole, usando le bilinearità del determinante per fare "uscire" dt e ds, ci troviamo

$$\boxed{dx\,dy \simeq \left|\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial t}(t,s) & \dfrac{\partial F_1}{\partial s}(t,s) \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial t}(t,s) & \dfrac{\partial F_2}{\partial s}(t,s) \end{bmatrix}\right| dt\,ds}$$

Questa è la relazione che deve valere tra il "vecchio" elemento infinitesimo di area $dx\,dy$ e quello "nuovo" $dt\,ds$, a seguito del cambio di variabili

$$(x,y) = (F_1(t,s), F_2(t,s))$$

Definizione

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un cambio di variabili bidimensionale, ovvero

$$\mathbf{F}(t,s) = (F_1(t,s), F_2(t,s))$$

Se F_1 e F_2 sono due funzioni di classe C^1, allora la matrice 2×2 costituita dalle derivate parziali di F_1 e F_2, ovvero

$$J\mathbf{F}(t,s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial t}(t,s) & \dfrac{\partial F_1}{\partial s}(t,s) \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial t}(t,s) & \dfrac{\partial F_2}{\partial s}(t,s) \end{bmatrix}$$

si chiama **matrice Jacobiana** di $\mathbf{F}$

Il suo determinante, si chiama **determinante Jacobiano** di $\mathbf{F}$

Riassumendo questa lunga discussione, abbiamo quindi capito che se nell'integrale doppio

$$\iint_E f(x, y)\, dx\, dy$$

facciamo il cambio

$$(x, y) = \mathbf{F}(t, s), \qquad \text{con } (t, s) \in \Omega$$

dovrebbero valere le seguenti modifiche

- $E \longrightarrow \Omega$
- $(x, y) \longrightarrow \mathbf{F}(t, s)$
- $dx\, dy \longrightarrow \left|\det J\mathbf{F}\right| dt\, ds$

Quanto fatto fin'ora era solo una discussione informale per cercare di capire come cambiava $dx\, dy$. In effetti, vale che...