Analisi Matematica B
– *Lezione 14* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 22 Aprile 2020

Esercizio (Ciambella)

Si consideri la circonferenza giacente nel piano xz, avente raggio r e centro in $(R, 0, 0)$, con $R > r$. Si faccia ruotare di 2π questa circonferenza, attorno all'asse delle z. Si chiami $\mathbb{T}$ l'insieme così ottenuto, una specie di "ciambella".

Trovare una superficie regolare ϕ il cui sostegno coincida con $\mathbb{T}$.

Soluzione

- Il problema è analogo a quello della sfera: dobbiamo trovare due variabili t, s per descrivere tutti i punti di $\mathbb{T}$
- prima però, ci conviene provare a fare un disegno, per capire bene la situazione!

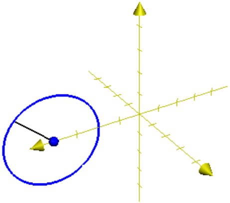


Figura: La circonferenza iniziale di raggio r, che si trova nel piano $x\,z$. Il centro si trova sull'asse x, in corrispondenza di $R > r$.

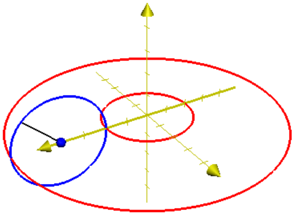


Figura: ...facciamo ruotare questa circonferenza attorno all'asse z...

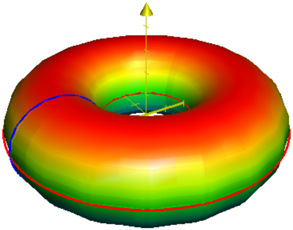
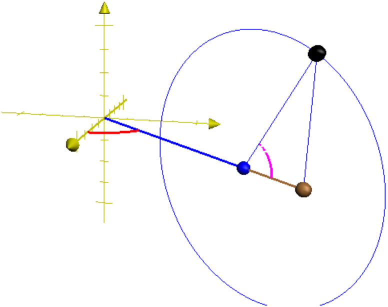


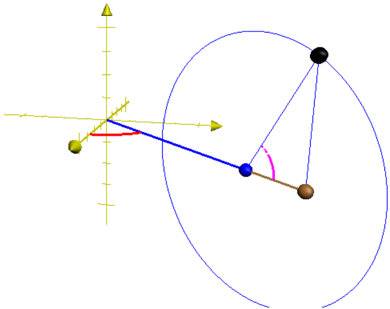
Figura: ...otteniamo la ciambella $\mathbb{T}$

- la costruzione stessa dell'insieme $\mathbb{T}$, ci deve suggerire la forma della superficie ϕ
- le due variabili da utilizzare, saranno due angoli:
  - l'angolo formato dal cerchio (mentre ruota attorno all'asse z) con l'asse x, lo chiamiamo t
  - una volta fissato l'angolo t, abbiamo una circonferenza di raggio r, i cui punti possono essere descritti tramite l'angolo formato col piano $x\,y$...chiamiamo s questo angolo



La circonferenza ruotata di un angolo t (evidenziato in rosso)

- Il punto blu è il centro della circonferenza
- il punto nero è un generico punto della circonferenza, individuato dall'angolo s (in viola)
- il punto marrone è la sua proiezione ortogonale sul piano $x\,y$



Coordinate del punto nero:

- z si trova tramite $r \sin s$
- x e y sono le stesse del punto marrone
- $x = \underbrace{(R + r\ \cos s)}_{\text{marrone + blu}}\ \cos t \qquad \text{e} \qquad y = \underbrace{(R + r\ \cos s)}_{\text{marrone + blu}}\ \sin t$

- ricapitolando, tutti i punti della ciambella $\mathbb{T}$ hanno coordinate

$$\begin{cases} x &= (R + r\,\cos s)\,\cos t \\ y &= (R + r\,\cos s)\,\sin t \\ z &= r\,\sin s \end{cases}$$

  con $(t,s) \in [0, 2\,\pi] \times [0, 2\,\pi]$

- la superficie che cerchiamo è quindi $\phi : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\phi(t,s) = \Big((R + r\,\cos s)\,\cos t,\, (R + r\,\cos s)\,\sin t,\, r\,\sin s\Big)$$

  con

$$A = (0, 2\,\pi) \times (0, 2\,\pi) \qquad \text{e} \qquad \overline{A} = [0, 2\,\pi] \times [0, 2\,\pi]$$

- verifichiamo che si tratta di una superficie regolare

1. ϕ è iniettiva su $A = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$

- siano (t_1, s_1), $(t_2, s_2) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ tali che

$$\phi(t_1, s_1) = \phi(t_2, s_2)$$

- vogliamo dimostrare che allora deve risultare

$$\boxed{s_1 = s_2} \qquad \text{e} \qquad \boxed{t_1 = t_2}$$

- usando la definizione di ϕ

$$\phi(t_1, s_1) = \phi(t_2, s_2)$$
$$\iff \begin{cases} (R + r\,\cos s_1)\cos t_1 &= (R + r\,\cos s_2)\cos t_2 \\ (R + r\,\cos s_1)\sin t_1 &= (R + r\,\cos s_2)\sin t_2 \\ r\,\sin s_1 &= r\,\sin s_2 \end{cases}$$

- dalla terza equazione, otteniamo due possibilità

$$\boxed{s_1 = s_2} \qquad \text{oppure} \qquad \boxed{s_1 = \pi - s_2}$$

- nel primo caso, ovvero se $s_1 = s_2$, sostituendo nelle prime due equazioni si ha

$$\begin{cases} (R + r\,\cos s_1)\cos t_1 & = & (R + r\,\cos s_1)\cos t_2 \\ (R + r\,\cos s_1)\sin t_1 & = & (R + r\,\cos s_1)\sin t_2 \end{cases}$$

- osservando che $R + r\,\cos s_1 \neq 0$, questo è equivalente a

$$\begin{cases} \cos t_1 & = & \cos t_2 \\ \sin t_1 & = & \sin t_2 \end{cases}$$

- t_1 e t_2 sono due angoli di $(0, 2\,\pi)$ che hanno stesso coseno e stesso seno, quindi

$$\boxed{t_1 = t_2}$$

- resta da escludere che possa verificarsi il caso $s_1 = s_2 - \pi$
- in tal caso, sostituendo questa identità nelle prime due equazioni, si trova

$$\begin{cases} (R - r\cos s_2)\cos t_1 & = & (R + r\cos s_2)\cos t_2 \\ (R - r\cos s_2)\sin t_1 & = & (R + r\cos s_2)\sin t_2 \end{cases}$$

- in particolare, prendendo il rapporto delle due equazioni, si ottiene

$$\tan t_1 = \tan t_2$$

- ovvero $\boxed{t_1 = t_2}$ oppure $\boxed{t_1 = t_2 + \pi}$
- in entrambi i casi, si ottiene un assurdo (*completare per casa i dettagli*)

2. ϕ è una funzione C^1 su A
   - questo è ovvio, dal momento che le componenti di ϕ sono

$$\phi_1(t,s) = (R + r\,\cos s)\,\cos t$$

$$\phi_2(t,s) = (R + r\,\cos s)\,\sin t$$

$$\phi_3(t,s) = r\,\sin s$$

   - queste sono funzioni derivabili con continuità infinite volte

3. i vettori

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial s}$$

sono linearmente indipendenti su A
   - calcoliamo innanzitutto questi vettori

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \Big(-(R + r\,\cos s)\,\sin t, (R + r\,\cos s)\,\cos t, 0\Big)$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \Big(-r\,\sin s\,\cos t, -r\,\sin s\,\sin t, r\,\cos s\Big)$$

- da cui si ottiene anche

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial t}\times\frac{\partial\phi}{\partial s} &= \det\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -(R+r\,\cos s)\sin t & (R+r\,\cos s)\cos t & 0 \\ -r\,\sin s\,\cos t & -r\,\sin s\,\sin t & r\,\cos s \end{vmatrix} \\
&= \Big(r\,\cos s\,(R+r\,\cos s)\,\cos t\Big)\,\mathbf{i} \\
&+ \Big(r\,\cos s\,(R+r\,\cos s)\,\sin t\Big)\,\mathbf{j} \\
&+ \Big(r\,\sin s\,(R+r\,\cos s)\,\sin^2 t\Big)\,\mathbf{k} \\
&+ \Big(r\,\sin s\,(R+r\,\cos s)\,\cos^2 t\Big)\,\mathbf{k} \\
&= r\,(R+r\,\cos s)\Big(\cos t\,\cos s\,,\sin t\,\cos s,\sin s\Big)
\end{aligned}
$$

- dobbiamo mostrare che questo vettore non si annulla per $(t,s)\in(0,2\,\pi)\times(0,2\,\pi)$

- ci basta far vedere che

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} \right| \neq 0$$

- si ha

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} \right|^2 &= r^2 \, (R + r \cos s)^2 \\
&\quad \cdot \left(\cos^2 t \cos^2 s + \sin^2 t \cos^2 s + \sin^2 s \right) \\
&= r^2 \, (R + r \cos s)^2 \left(\cos^2 s + \sin^2 s \right) \\
&= r^2 \, (R + r \cos s)^2
\end{aligned}$$

- l'ultimi termine non si annulla mai, perché $|\cos s| \leq 1$, quindi

$$R + r \cos s \geq R - r > 0$$

grazie alla scelta di R e r

VI.2 Piano tangente

Se ϕ è una superficie regolare, allora fissando s e facendo variare t si ha che

$$t \mapsto \phi(t, s) \in \mathbb{R}^3$$

rappresenta una curva in $\mathbb{R}^3$

Il **vettore velocità** di questa curva è dato da

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, s) = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t}(t, s), \frac{\partial \phi_2}{\partial t}(t, s), \frac{\partial \phi_3}{\partial t}(t, s) \right)$$

Ricorda

Il vettore velocità è tangente al sostegno della curva (e quindi al sostegno della superficie, in questo caso)

Analogamente, se fisso t e faccio variare solo s si ha che

$$s \mapsto \phi(t,s) \in \mathbb{R}^3$$

rappresenta una curva in $\mathbb{R}^3$
Il vettore velocità di questa curva è dato da

$$\frac{\partial \phi}{\partial s}(t,s) = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial s}(t,s), \frac{\partial \phi_2}{\partial s}(t,s), \frac{\partial \phi_3}{\partial s}(t,s) \right)$$

Anch'esso è tangente al sostegno della curva (e quindi al sostegno della superficie)

Dal momento che ϕ è **regolare**, allora

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, s) \times \frac{\partial \phi}{\partial s}(t, s) \neq (0, 0, 0)$$

ovvero questi due vettori “tangenti” sono linearmente indipendenti

Quindi l’insieme delle loro combinazioni lineari genera uno piano, che possiamo immaginare come il pianto tangente alla superficie

Più precisamente...

Definizione

Il **piano tangente** al sostegno della superficie regolare ϕ nel punto $\phi(t_0, s_0)$ è dato dallo spazio affine

$$\Pi_{\phi(t_0,s_0)} = \phi(t_0, s_0) + \mathrm{Vect}\left\{\frac{\partial \phi}{\partial t}(t_0, s_0), \frac{\partial \phi}{\partial s}(t_0, s_0)\right\},$$

dove con

$$\mathrm{Vect}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\},$$

si intende l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori **v** e **w**

• Cerchiamo di chiarire la costruzione del piano tangente con l'esempio della sfera

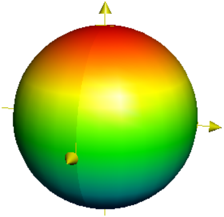


Figura: La sfera di raggio 1 e centro l'origine, ovvero il sostegno della superficie $\phi(t,s) = (\cos t \, \sin s, \sin t \, \sin s, \cos s)$

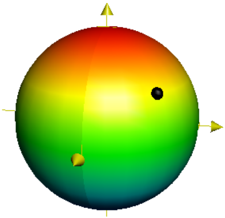


Figura: Scegliamo un punto, per esempio $\phi\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$

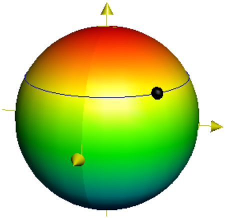


Figura: Teniamo fisso $s = \dfrac{\pi}{3}$ e prendiamo il sostegno della curva $\phi\left(t, \dfrac{\pi}{3}\right)$. Si ottiene una circonferenza che giace sulla sfera e si trova ad altezza $z = \cos\dfrac{\pi}{3}$

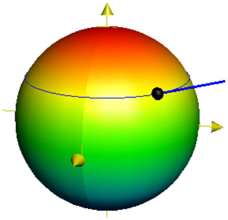


Figura: Prendiamo adesso il vettore velocità di questa curva, nel punto assegnato

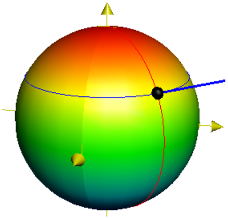


Figura: Analogamente, teniamo fisso $t = \dfrac{\pi}{4}$ e prendiamo il sostegno della curva $\phi\left(\dfrac{\pi}{4}, s\right)$. Si ottiene una mezza circonferenza che giace sulla sfera, connette Polo Nord e Polo Sud, e forma un angolo di $\cos\dfrac{\pi}{4}$ con l'asse x

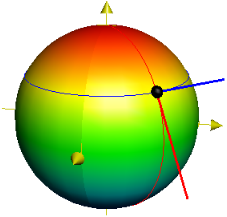


Figura: Prendiamo anche il vettore velocità di questa curva, nel punto assegnato. Abbiamo due vettori linearmente indipendenti dello spazio tangente

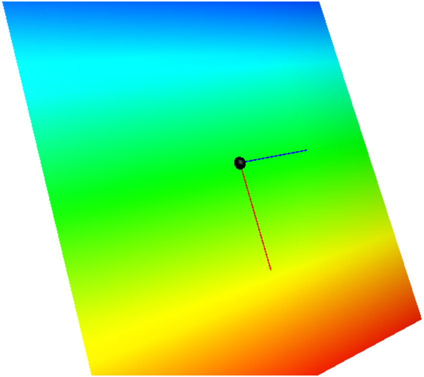


Figura: ....essi generano tutto il piano tangente alla sfera, nel punto assegnato (la sfera è nascosta dietro il piano)

Esercizio

Sia $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ *la sfera di centro* $(0,0,0)$ *e raggio* 1. *Si scriva l'equazione del piano tangente a* $\mathcal{S}$ *nel punto di coordinate*

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Soluzione

- Verifichiamo innanzitutto che il punto dato appartenga a $\mathcal{S}$
- si ha

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{4} = 1$$

- ricorda che $\mathcal{S}$ coincide con il sostegno della superficie regolare

$$\phi(t,s) = (\cos t \, \sin s, \sin t \, \sin s, \cos s), \quad t \in [0, 2\pi], \, s \in [0, \pi]$$

- in termine di t e s, il punto assegnato corrisponde a

$$t = \frac{\pi}{4} \qquad \text{e} \qquad s = \frac{\pi}{6}$$

- infatti (verifica)

$$\begin{aligned}\phi\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right) &= \left(\cos\frac{\pi}{4}\ \sin\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{4}\ \sin\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

- calcoliamo i vettori velocità nel punto assegnato
- innanzitutto ricordiamo che

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (-\sin t\ \sin s, \cos t\ \sin s, 0)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = (\cos t\ \cos s, \sin t\ \cos s, -\sin s)$$

- da cui otteniamo

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$$

- il piano tangente nel punto assegnato è quindi dato dallo spazio affine

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{Vect}\left\{\frac{\partial \phi}{\partial t}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right), \frac{\partial \phi}{\partial s}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)\right\},$$

- in altre parole, è dato da tutti i punti della forma

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} - \mu \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \lambda \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\[2ex] y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \mu \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \lambda \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\[2ex] z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \lambda \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

  al variare di $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$
- questa rappresenta la forma parametrica del piano tangente. *Esercizio per casa*: trovatene la forma cartesiana

Osservazione

Dal momento che i due vettori

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t_0, s_0) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial s}(t_0, s_0),$$

individuano il piano tangente al sostegno della superficie

ricordando le proprietà del prodotto vettoriale

tramite il loro prodotto vettoriale possiamo individuare una direzione **normale** alla superficie

Definizione

Sia $\phi : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare

Per ogni $(t_0, s_0) \in A$ si definisce

$$\mathbf{N}_\phi(t_0, s_0) = \frac{\dfrac{\partial \phi}{\partial t}(t_0, s_0) \times \dfrac{\partial \phi}{\partial s}(t_0, s_0)}{\left| \dfrac{\partial \phi}{\partial t}(t_0, s_0) \times \dfrac{\partial \phi}{\partial s}(t_0, s_0) \right|}$$

che si chiama il **versore normale** al sostegno della superficie nel punto $\phi(t_0, s_0)$

Si osservi che dal momento che la superficie è regolare, la definizione di tale versore è ben posta

Osservazione

Un altro modo di vedere il piano tangente è come

"*il piano ortogonale a* $\mathbf{N}_\phi(t_0, s_0)$ *e passante dal punto* $\phi(t_0, s_0)$"

ovvero

$$\Pi_{\phi(t_0,s_0)} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \, : \, \langle \mathbf{x} - \phi(t_0, s_0), \mathbf{N}_\phi(t_0, s_0) \rangle = 0 \right\}$$

Esercizio

Si scrivano i versori normali alle seguenti superfici regolari, nei punti in cui questo è possibile

1. **sfera**
$$\phi(t,s) = (\sin s\ \cos t, \sin s\ \sin t, \cos s)$$

2. **cilindro**
$$\phi(t,s) = (\cos t, \sin t, s)$$

3. **cono** *(con $\alpha \neq 0$)*
$$\phi(t,s) = \left(\frac{s}{\alpha}\ \cos t, \frac{s}{\alpha}\ \sin t, s\right)$$

4. **ciambella** *(con raggi $r < R$)*
$$\phi(t,s) = \Big((R + r\ \cos s)\ \cos t, (R + r\ \cos s)\ \sin t, r\ \sin s\Big)$$

Soluzione

1. **sfera**
   - abbiamo già visto in precedenza che

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}\times\frac{\partial\phi}{\partial s}=\det\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -\sin t\ \sin s & \cos t\ \sin s & 0\\ \cos t\ \cos s & \sin t\ \cos s & -\sin s\end{vmatrix}$$
$$=\Big(-\cos t\ \sin^2 s, -\sin t\ \sin^2 s, -\cos s\ \sin s\Big)$$

   - avevamo anche calcolato

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial t}\times\frac{\partial\phi}{\partial s}\right|=\sin s$$

   - il versore normale alla superficie è dato da

$$\mathbf{N}_\phi(t,s)=(-\cos t\ \sin s, -\sin t\ \sin s, -\cos s)$$

definito per $s\in(0,\pi)$ (ovvero **polo nord** e **polo sud** esclusi)

2. **cilindro**

- per il cilindro, abbiamo già visto in precedenza che

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \cos t \, \mathbf{i} + \sin t \, \mathbf{j} = (\cos t, \sin t, 0)$$

- osservando che

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} \right| = 1,$$

il versore normale alla superficie è dato da

$$\mathbf{N}_\phi(t, s) = \frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} = (\cos t, \sin t, 0)$$

- si osservi che il versore normale $\mathbf{N}_\phi$ così definito è “uscente” rispetto al cilindro

3. **cono**

- per il cono, abbiamo già visto in precedenza che

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} \times \frac{\partial\phi}{\partial s} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{s}{\alpha} \sin t & \frac{s}{\alpha} \cos t & 0 \\ \frac{1}{\alpha} \cos t & \frac{1}{\alpha} \sin t & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{s}{\alpha}\left(\cos t, \sin t, -\frac{1}{\alpha}\right)$$

- osservando che

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial t} \times \frac{\partial\phi}{\partial s}\right| = \left|\frac{s}{\alpha}\right| \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha^2}},$$

il versore normale alla superficie è dato da

$$\mathbf{N}_\phi(t,s) = \frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\left(\cos t, \sin t, -\frac{1}{\alpha}\right)$$

- si osservi che il versore normale $\mathbf{N}_\phi$ non è definito per $s = 0$

4. **ciambella**

- per la ciambella, abbiamo già visto in precedenza che

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} \times \frac{\partial\phi}{\partial s} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -(R + r\ \cos s)\sin t & (R + r\ \cos s)\cos t & 0 \\ -r\ \sin s\ \cos t & -r\ \sin s\ \sin t & r\ \cos s \end{vmatrix}$$

$$= r\,(R + r\ \cos s)\Big(\cos t\ \cos s\,, \sin t\ \cos s, \sin s\Big)$$

- avevamo anche calcolato

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial t} \times \frac{\partial\phi}{\partial s}\right| = r\,(R + r\ \cos s)$$

- il versore normale alla superficie è dato da

$$\mathbf{N}_\phi(t, s) = \Big(\cos t\ \cos s\,, \sin t\ \cos s, \sin s\Big)$$

- si osservi che il versore normale $\mathbf{N}_\phi$ così definito è “uscente” rispetto alla ciambella

Esercizio per casa

Si dimostri che la superficie

$$\phi(t,s) = (\cos t\ \sinh s, \sin t\ \sinh s, \cosh s), \qquad \textit{per } (t,s) \in [0, 2\pi] \times [0,1]$$

è regolare. Si scriva poi il suo versore normale, nei punti in cui questo è possibile.

VI.3 Superfici cartesiane

Si tratta dell'analogo "bidimensionale" delle **curve cartesiane** (vedi *Lezione 4*)

Più precisamente

Definizione

Sia $f : \overline{A} \to \mathbb{R}$, dove come prima $A \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto connesso

La superficie $\phi : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\phi(t, s) = (t, s, f(t, s)), \qquad \text{per ogni } (t, s) \in \overline{A},$$

si dice **superficie cartesiana**

Si osservi che per definizione

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\phi) &= \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \exists (t, s) \in \overline{A} \text{ t.c. } (x, y, z) = (t, s, f(t, s))\Big\} \\ &= \mathrm{Graf}(f)\end{aligned}$$

Regolarità di una superficie cartesiana

Se f è C^1, allora la corrispondente superficie cartesiana è regolare

1. l'iniettività di ϕ su A è ovvia

$$\phi(t_1, s_1) = \phi(t_2, s_2) \quad \Longleftrightarrow \quad (t_1, s_1, f(t_1, s_1)) = (t_2, s_2, f(t_2, s_2))$$

2. il fatto che ϕ sia C^1, segue facilmente dal fatto che $f \in C^1$
3. infine, si osservi

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial s} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial s}\right)$$

Da questo, si ottiene

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} = \left(-\frac{\partial f}{\partial t}, -\frac{\partial f}{\partial s}, 1\right) \neq (0, 0, 0)$$

Versore normale di una superficie cartesiana

Si osservi inoltre che

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial t}\times\frac{\partial\phi}{\partial s}\right| = \sqrt{\left(-\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2+\left(-\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2+1} = \sqrt{1+|\nabla f|^2}$$

Il versore normale, è quindi definito da

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_\phi &= \frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial t}\times\dfrac{\partial\phi}{\partial s}}{\left|\dfrac{\partial\phi}{\partial t}\times\dfrac{\partial\phi}{\partial s}\right|}\\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\,\frac{\partial f}{\partial t}, -\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\,\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)\end{aligned}$$

Esercizio

Si trovi una superficie cartesiana il cui sostegno coincida con la calotta superiore della sfera, ovvero con

$$\mathcal{S}_+ = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z \geq 0\right\}.$$

Soluzione

- Osserviamo che $\mathcal{S}_+$ può essere riscritto come

$$\mathcal{S}_+ = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z^2 = 1 - x^2 - y^2 \text{ e } z \geq 0\right\}$$

ovvero come

$$\mathcal{S}_+ = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ e } x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

- in altre parole $\mathcal{S}_+$ coincide con il grafico della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

definita su

$$\overline{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

- quindi la superficie cartesiana che cerchiamo è data da $\phi : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= (x, y, f(x,y)) \\ &= \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right) \end{aligned}$$

- si osservi che f è C^1 sull'aperto

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1\right\}$$

quindi ϕ è in automatico una superficie regolare

Esercizio per casa

Si trovi una superficie cartesiana il cui sostegno coincida con il cono ottenuto facendo ruotare attorno all'asse z*, il segmento che unisce il punto* $(1, 0, \alpha)$ *all'origine. Si dica se si tratta di una superficie regolare.*