Analisi Matematica B
– *Lezione 13* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 21 Aprile 2020

Capitolo VI

“*Superfici nello spazio*”

VI.1 Definizioni

Ricorda

Dato $E \subset \mathbb{R}^N$, il simbolo $\overline{E}$ indica la sua *chiusura*, ovvero

$$\overline{E} = E \cup \partial E,$$

dove ∂E è la frontiera dell'insieme E

Ci servirà anche la seguente definizione di topologia

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un aperto. Si dice che A è **connesso**, se vale:

comunque presi due punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, esiste una curva continua $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ tale che

- $\mathrm{Im}(\gamma) \subset A$
- $\gamma(0) = \mathbf{x} \quad \text{e} \quad \gamma(1) = \mathbf{y}$

In altre parole un aperto connesso A è un aperto per cui è sempre possibile connettere due punti qualsiasi, tramite un cammino continuo che non esce mai da A

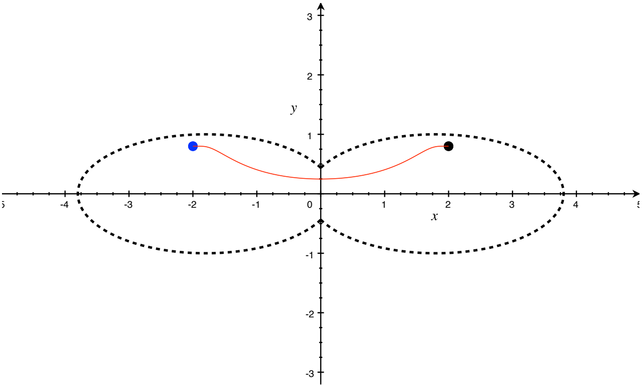


Figura: Un esempio di aperto connesso in $\mathbb{R}^2$

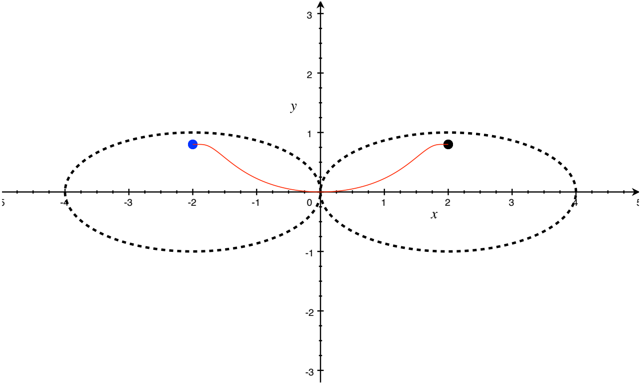


Figura: Un esempio di aperto non connesso in $\mathbb{R}^2$. L'origine $(0,0)$ non fa parte dell'insieme, quindi non è possibile connettere i due punti, senza uscire dall'insieme.

Definizione importante

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto connesso

Si chiama **superficie** una funzione $\phi : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$

Si ha

$$\phi(t,s) = (\phi_1(t,s), \phi_2(t,s), \phi_3(t,s)), \qquad (t,s) \in \overline{A}$$

e le funzioni $\phi_i : A \to \mathbb{R}$ sono dette **componenti** di ϕ

Come per il caso delle curve, chiameremo *sostegno della superficie* ϕ l'insieme

$$\mathrm{Im}(\phi) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \exists (t,s) \in \overline{A} \text{ tale che } (x,y,z) = \phi(t,s) \right\}$$

Osservazione

Si faccia attenzione, come già per le curve, a non confondere

una superficie   ed   il suo sostegno

Il primo è un oggetto **analitico**, ovvero una funzione
Il secondo invece è un oggetto **geometrico**

Per chiarirci le idee, ci conviene cominciare con un...

Esercizio (Sfera!)

Si trovi una superficie $\phi : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$ *tale che il suo sostegno coincida con*

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1\right\}$$

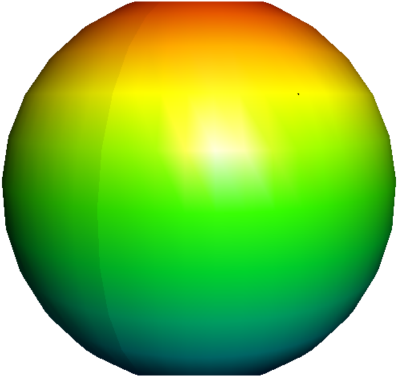


Figura: La sfera di raggio 1 e centro $(0, 0, 0)$

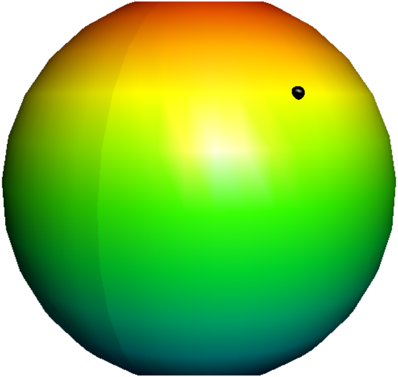


Figura: Fissiamo un punto qualsiasi (in nero) sulla sfera

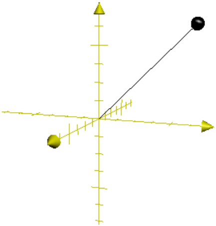


Figura: Togliamo adesso tutto l'involucro, se no non si capisce niente. Dobbiamo trovare una funzione di due variabili $\phi(t, s)$ la cui immagine dia tutti i punti della sfera

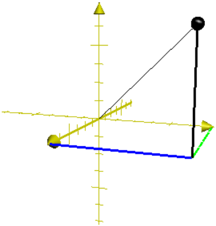


Figura: Il punto fissato ha 3 coordinate: l'altezza z (in nero), l'ascissa x (in verde), l'ordinata y (in blu). Dobbiamo descrivere queste 3 coordinate in termini di due parametri t ed s

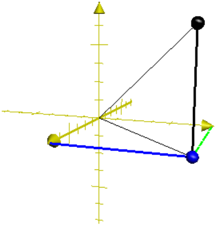


Figura: Ci è utile considerare la proiezione ortogonale del punto nero sul piano $x\,y$ (punto blu)

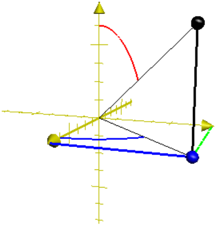
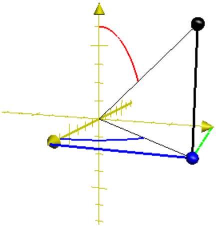


Figura: Per descrivere le 3 coordinate possiamo usare l'angolo rosso s (che varia tra 0 e π) e l'angolo blu t (che varia tra 0 e 2π)



Coordinate del punto nero:

- z si trova tramite $\cos s$
- x e y sono le stesse del punto blu
- $x = \underbrace{\sin s}_{cateto} \cos t \qquad \text{e} \qquad y = \underbrace{\sin s}_{cateto} \sin t$

- ricapitolando, tutti i punti della sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio 1 hanno coordinate

$$\begin{cases} x = \sin s \, \cos t \\ y = \sin s \, \sin t \\ z = \cos s \end{cases}$$

  con $(t,s) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$
- la superficie che cerchiamo è quindi $\phi : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\phi(t,s) = \Big(\sin s \, \cos t, \, \sin s \, \sin t, \, \cos s \Big)$$

  con

$$A = (0, 2\pi) \times (0, \pi) \qquad \text{e} \qquad \overline{A} = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

Esercizio per casa

Dato $R > 0$ *e* (x_0, y_0, z_0), *si trovi una superficie* $\phi : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$ *tale che il suo sostegno coincida con*

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R\right\}$$

Suggerimento

Si parta dalla sfera di prima, la si “dilati” di un fattore R e la si trasli...

Ricordiamo da Geometria e Algebra

Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$

Ricordiamo che se

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

il loro prodotto vettoriale è definito da

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\
&= \Big(u_2\, v_3 - u_3\, v_2\Big)\, \mathbf{i} + \Big(u_3\, v_1 - u_1\, v_3\Big)\, \mathbf{j} + \Big(u_1\, v_2 - u_2\, v_1\Big)\, \mathbf{k} \\
&= \Big(u_2\, v_3 - u_3\, v_2,\ u_3\, v_1 - u_1\, v_3,\ u_1\, v_2 - u_2\, v_1\Big)
\end{aligned}$$

Definizione

Si dice che una superficie $\phi : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$ è **regolare** se

1. ϕ è iniettiva su A
2. ϕ è di classe $C^1(A)$, ovvero se ognuna delle sue componenti è di classe $C^1(A)$
3. vale che

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,s) \times \frac{\partial \phi}{\partial s}(t,s) \neq (0,0,0), \qquad \text{per ogni } (t,s) \in A,$$

   ovvero

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,s) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial s}(t,s)$$

   sono **linearmente indipendenti**

Esercizio (Sfera...di nuovo!)

Si consideri la superficie definita da

$$\phi(t, s) = (\sin s \, \cos t, \sin s \, \sin t, \cos s),$$

con $t \in [0, 2\pi]$ *e* $s \in [0, \pi]$

Si verifichi che si tratta di una superficie regolare

Soluzione

- Innanzitutto, si ha $\phi : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$ con

$$A = (0, 2\pi) \times (0, \pi) \qquad \text{e} \qquad \overline{A} = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

- sappiamo già che il sostegno di ϕ è la sfera di raggio 1 e centro $(0, 0, 0)$, ovvero

$$\mathrm{Im}(\phi) = \phi(\overline{A}) = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\Big\}$$

Verifichiamo che si tratta di una superficie regolare

1. $\underline{\phi \text{ è iniettiva su } A = (0, 2\pi) \times (0, \pi)}$

- siano (t_1, s_1), $(t_2, s_2) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ tali che

$$\phi(t_1, s_1) = \phi(t_2, s_2)$$

- vogliamo dimostrare che allora deve risultare

$$\boxed{s_1 = s_2} \qquad \text{e} \qquad \boxed{t_1 = t_2}$$

- usando la definizione di ϕ

$$\phi(t_1, s_1) = \phi(t_2, s_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \cos t_1 \, \sin s_1 & = & \cos t_2 \, \sin s_2 \\ \sin t_1 \, \sin s_1 & = & \sin t_2 \, \sin s_2 \\ \cos s_1 & = & \cos s_2 \end{cases}$$

- il coseno è iniettivo sull'intervallo $(0, \pi)$, quindi la terza equazione implica

$$\boxed{s_1 = s_2}$$

- usando questa informazione nelle prime due equazioni, troviamo quindi

$$\begin{cases} \cos t_1 \; \sin s_1 & = & \cos t_2 \; \sin s_1 \\ \sin t_1 \; \sin s_1 & = & \sin t_2 \; \sin s_1 \end{cases}$$

- si osservi adesso che $s_1 \in (0, \pi)$, quindi $\sin s_1 \neq 0$
- possiamo quindi dividere per $\sin s_1$ ed ottenere

$$\begin{cases} \cos t_1 & = & \cos t_2 \\ \sin t_1 & = & \sin t_2 \end{cases}$$

- dal momento che $t_1, t_2 \in (0, 2\,\pi)$ e che su $(0, 2\,\pi)$ due angoli hanno stesso seno e coseno se e solo se essi coincidono....
- otteniamo anche $\boxed{t_1 = t_2}$
- iniettività OK!

2. ϕ è una funzione C^1 su A
   - questo è ovvio, dal momento che le componenti di ϕ sono

$$\phi_1(t,s) = \sin s \, \cos t$$

$$\phi_2(t,s) = \sin s \, \sin t$$

$$\phi_3(t,s) = \cos s$$

   - queste sono funzioni derivabili con continuità infinite volte

3. i vettori

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial s}$$

   sono linearmente indipendenti su A
   - calcoliamo innanzitutto questi vettori

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (-\sin t \, \sin s, \cos t \, \sin s, 0)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = (\cos t \, \cos s, \sin t \, \cos s, -\sin s)$$

- da cui si ottiene (qui ci vuole un po' di pazienza....)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial t} \times \frac{\partial\phi}{\partial s} &= \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin t\ \sin s & \cos t\ \sin s & 0 \\ \cos t\ \cos s & \sin t\ \cos s & -\sin s \end{vmatrix} \\
&= -\Big(\sin^2 s\ \cos t\Big)\,\mathbf{i} \\
&- \Big(\sin^2 s\ \sin t\Big)\,\mathbf{j} \\
&- \Big(\sin^2 t\ \cos s\ \sin s + \cos^2 t\ \cos s\ \sin s\Big)\,\mathbf{k} \\
&= \Big(-\cos t\ \sin^2 s, -\sin t\ \sin^2 s, -\cos s\ \sin s\Big)
\end{aligned}
$$

- dobbiamo dimostrare che per ogni $(t,s) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} \neq (0,0,0)$$

- osserviamo che

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} \right| &= \sqrt{\cos^2 t \, \sin^4 s + \sin^2 t \, \sin^4 s + \cos^2 s \, \sin^2 s} \\
&= \sqrt{\sin^4 s + \cos^2 \, s \, \sin^2 s} \\
&= \sqrt{\sin^2 s \, (\sin^2 s + \cos^2 s)} = \sin s
\end{aligned}$$

- l'ultima quantità è $\neq 0$ per $(t,s) \in A = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$, quindi

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} \neq (0,0,0)$$

...e ϕ è superficie regolare!

Esercizio

Si consideri la superficie definita da

$$\phi(t,s) = (\cos t, \sin t, s), \qquad \textit{per } (t,s) \in [0, 2\pi] \times [-1, 1].$$

Si verifichi che ϕ è una superficie regolare. Si provi a tracciare il sostegno di ϕ.

Soluzione

- Innanzitutto, si ha $\phi : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$ con

$$A = (0, 2\pi) \times (-1, 1) \qquad \text{e} \qquad \overline{A} = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$$

- verifichiamo che si tratta di una superficie regolare

1. ϕ è iniettiva su $A = (0, 2\pi) \times (-1, 1)$

- siano (t_1, s_1), $(t_2, s_2) \in (0, 2\pi) \times (-1, 1)$ tali che

$$\phi(t_1, s_1) = \phi(t_2, s_2)$$

- vogliamo dimostrare che allora deve risultare

$$\boxed{s_1 = s_2} \qquad \text{e} \qquad \boxed{t_1 = t_2}$$

- usando la definizione di ϕ

$$\phi(t_1, s_1) = \phi(t_2, s_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \cos t_1 & = & \cos t_2 \\ \sin t_1 & = & \sin t_2 \\ s_1 & = & s_2 \end{cases}$$

- dalla terza equazione risulta immediatamente

$$\boxed{s_1 = s_2}$$

- dalle prime due equazioni, abbiamo che $t_1, t_2 \in (0, 2\pi)$ e devono avere lo stesso seno e lo stesso coseno
- risulta quindi anche

$$\boxed{t_1 = t_2}$$

2. $\underline{\phi \text{ è una funzione } C^1 \text{ su } A}$

   - anche stavolta è ovvio, dal momento che le componenti di ϕ sono

$$\phi_1(t,s) = \cos t$$

$$\phi_2(t,s) = \sin t$$

$$\phi_3(t,s) = s$$

   - queste sono funzioni derivabili con continuità infinite volte

3. <u>i vettori</u>

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial s}$$

<u>sono linearmente indipendenti su A</u>

- calcoliamo innanzitutto questi vettori

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (-\sin t, \cos t, 0) \qquad \frac{\partial \phi}{\partial s} = (0, 0, 1)$$

- da cui si ottiene anche

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

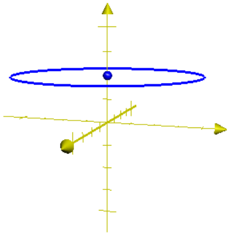
$$= \cos t \, \mathbf{i} + \sin t \, \mathbf{j} = (\cos t, \sin t, 0)$$

- questo vettore non è mai nullo, perché seno e coseno non possono annullarsi contemporaneamente

- proviamo adesso a tracciare il sostegno di ϕ
- si osservi che se "congeliamo" la variabile s, i punti della forma

$$\phi(t,s) = (\cos t, \sin t, s) \qquad \text{con } t \in [0, 2\pi]$$

descrivono una circonferenza di raggio 1, centrata in $(0,0,s)$ ed appartenente al piano $z = s$



- se adesso facciamo variare la “quota” s e prendiamo l’unione di tutte queste circonferenze....

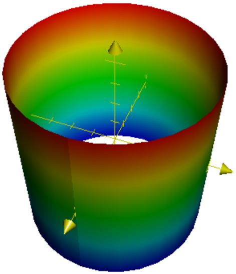


Figura: Il sostegno della superficie $\phi(t, s) = (\cos t, \sin t, s)$ è un cilindro, avente come asse di simmetria rotazionale l’asse z e come sezione un cerchio di raggio 1

Esercizio (Cono)

Si dia una superficie ϕ *il cui sostegno coincida con il cono ottenuto facendo ruotare attorno all'asse z il segmento che congiunge il punto* $(1, 0, \alpha)$ *con l'origine*

Se ne discuta la regolarità

Soluzione

- Cominciamo intanto facendo qualche disegno
- assumiamo per semplicità che $\alpha > 0$
- in questo modo, il cono avrà la punta "in basso"

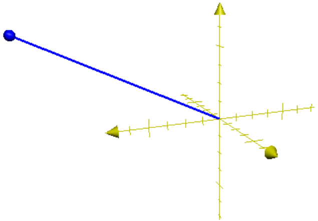


Figura: Il segmento che congiunge il punto $(1, 0, \alpha)$ all'origine

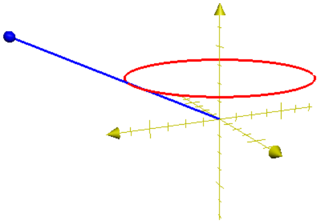


Figura: ...facciamolo ruotare attorno all'asse z...

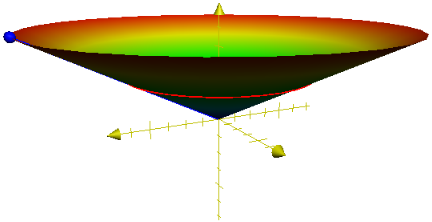


Figura: ...et voilà! Il cono in questione

- dobbiamo adesso trovare una superficie $\phi(t, s)$ il cui sostegno sia questo cono
- in altre parole, dobbiamo descrivere i punti del cono usando due variabili t ed s
- useremo come variabile t l'angolo formato dal segmento mentre ruota, con l'asse delle x
- come variabile s useremo la "quota" del generico punto che si trova sul segmento

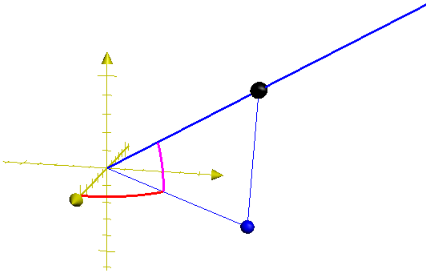
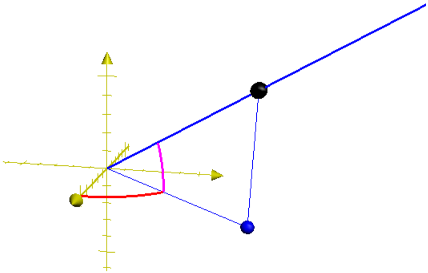


Figura: Indichiamo con t l'angolo rosso, abbiamo quindi $t \in [0, 2\pi]$. L'angolo viola (chiamiamolo θ) è assegnato e dipende **solo** dall'inclinazione del segmento iniziale. Tale angolo è tale che $\tan\theta = \alpha$



Le coordinate del punto nero sono date da

- $z = s$, con $s \in [0, \alpha]$
- $x = \underbrace{(s/\tan\theta)}_{cateto} \cos t = \dfrac{s}{\alpha} \cos t$
- $y = \underbrace{(s/\tan\theta)}_{cateto} \sin t = \dfrac{s}{\alpha} \, , \sin t$

- la superficie che cerchiamo è quindi $\phi : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\phi(t,s) = \left(\frac{s}{\alpha}\ \cos t, \frac{s}{\alpha}\ \sin t, s\right)$$

dove

$$A = (0, 2\,\pi) \times (0, \alpha) \qquad \text{e} \qquad \overline{A} = [0, 2\,\pi] \times [0, \alpha]$$

- verifichiamo che si tratta di una superficie regolare

1. $\underline{\phi \text{ è iniettiva su } A = (0, 2\pi) \times (0, \alpha)}$

- siano (t_1, s_1), $(t_2, s_2) \in (0, 2\pi) \times (0, \alpha)$ tali che

$$\phi(t_1, s_1) = \phi(t_2, s_2)$$

- vogliamo dimostrare che allora deve risultare

$$\boxed{s_1 = s_2} \qquad \text{e} \qquad \boxed{t_1 = t_2}$$

- usando la definizione di ϕ

$$\phi(t_1, s_1) = \phi(t_2, s_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{s_1}{\alpha} \cos t_1 & = & \dfrac{s_2}{\alpha} \cos t_2 \\ \dfrac{s_1}{\alpha} \sin t_1 & = & \dfrac{s_2}{\alpha} \sin t_2 \\ s_1 & = & s_2 \end{cases}$$

- dalla terza equazione risulta immediatamente

$$\boxed{s_1 = s_2}$$

- dalle prime due equazioni, abbiamo che $t_1, t_2 \in (0, 2\pi)$ e devono avere lo stesso seno e lo stesso coseno
- risulta quindi anche

$$\boxed{t_1 = t_2}$$

2. ϕ è una funzione C^1 su A

   - anche stavolta è ovvio, dal momento che le componenti di ϕ sono

$$\phi_1(t, s) = \frac{s}{\alpha} \cos t$$

$$\phi_2(t, s) = \frac{s}{\alpha} \sin t$$

$$\phi_3(t, s) = s$$

   - queste sono funzioni derivabili con continuità infinite volte

3. i vettori
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial s}$$
sono linearmente indipendenti su A

- calcoliamo innanzitutto questi vettori

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left(-\frac{s}{\alpha}\sin t, \frac{s}{\alpha}\cos t, 0\right) \qquad \frac{\partial \phi}{\partial s} = \left(\frac{1}{\alpha}\cos t, \frac{1}{\alpha}\sin t, 1\right)$$

- da cui si ottiene anche

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} &= \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{s}{\alpha}\sin t & \frac{s}{\alpha}\cos t & 0 \\ \frac{1}{\alpha}\cos t & \frac{1}{\alpha}\sin t & 1 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{s}{\alpha}\cos t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{s}{\alpha}\sin t\right)\mathbf{j} \\ &\quad - \left(\frac{s}{\alpha^2}\sin^2 t + \frac{s}{\alpha^2}\cos^2 t\right)\mathbf{k}\end{aligned}$$

- si ha quindi

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{s}{\alpha}\Big(\cos t, \sin t, -\frac{1}{\alpha}\Big)$$

- questo vettore non è mai nullo per $(t, s) \in (0, 2\pi) \times (0, \alpha)$