Analisi Matematica A
– *Lezione 4* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 9 Ottobre 2020

Definizione (Importante!)

Sia $E \subset \mathbb{R}$ tale che $E \neq \emptyset$. Si definisce **estremo superiore di** E come:

- se E è limitato superiormente, il più piccolo tra i maggioranti di E. Indicando con M tale numero, si scriverà

$$\sup E = M$$

- se E non è limitato superiormente, esso è $+\infty$ e si scriverà

$$\sup E = +\infty$$

Definizione (Importante!)

Sia $E \subset \mathbb{R}$ tale che $E \neq \emptyset$. Si definisce **estremo inferiore di** E come:

- se E è limitato inferiormente, il più grande tra i minoranti di E. Indicando con m tale numero, si scriverà
$$\inf E = m$$
- se E non è limitato inferiormente, esso è $-\infty$ e si scriverà
$$\inf E = -\infty$$

Si osservi che a priori, le definizioni precedenti **potrebbero non avere senso!**

In altre parole, potrebbe non esistere il più piccolo dei maggioranti o il più grande dei minoranti...

In nostro soccorso, viene il seguente...

Teorema

Sia $E \subset \mathbb{R}$ *tale che* $E \neq \emptyset$. *Allora*

- *se* E *è limitato superiormente, esiste il più piccolo tra i suoi maggioranti;*
- *se* E *è limitato inferiormente, esiste il più grande tra i suoi minoranti.*

Dimostrazione

- Diamo un breve cenno dell'idea principale della dimostrazione
- ci limitiamo al caso in cui E sia limitato superiormente
- la dimostrazione si basa sull'*Assioma di Continuità* dei numeri reali

- partiamo! Scegliamo innanzitutto due punti a_0 e b_0 tali che

    1. b_0 è un maggiorante di E (esiste perché stiamo assumendo che E sia limitato superiormente);

    2. a_0 non è un maggiorante di E (visto che E è non vuoto, conterrà almeno un elemento x, allora possiamo scegliere $x - 1$ come punto a_0).

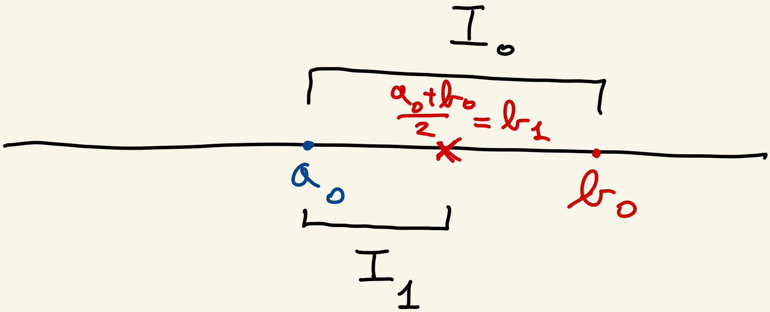
- consideriamo quindi l'intervallo chiuso $I_0 = [a_0, b_0]$
- dividiamolo a metà tramite il suo punto medio

$$\frac{a_0 + b_0}{2}$$

- ...e prendiamo il nuovo intervallo $I_1 = [a_1, b_1]$, dove

  1. scegliamo
  $$a_1 = a_0 \qquad \text{e} \qquad b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$
  se il **punto medio è un maggiorante** di E;

  2. oppure
  $$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} \qquad \text{e} \qquad b_1 = b_0$$
  se il **punto medio non è un maggiorante** di E;



NEL CASO IN CUI $\frac{a_0+b_0}{2} = b_1$ SIA MAGGIORANTE DI E

- si procede in modo **iterativo** in questo modo
- ad ogni passo si divide a metà l'intervallo e prendendo la metà il cui estremo di sinistra non è un maggiorante, mentre il secondo lo è
- si costruisce così una successione di intervalli chiusi dimezzati

$$I_n = [a_n, b_n]$$

  con la proprietà che

  "a_n non è un maggiorante di E" "b_n è un maggiorante di E"
- per l'*Assioma di continuità* dei numeri reali tutti gli I_n hanno **un solo** punto in comune
- ovvero esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x_0\}$$
- il punto x_0 è l'estremo superiore di E (omettiamo la verifica di quest'ultima affermazione)

In base alla definizione, $\sup E$ si può caratterizzare come segue

Caratterizzazione del sup

Sia $E \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente. Allora $M = \sup E$ se e solo se ha la seguenti proprietà

1. $M \geq x$ per ogni $x \in E$
2. $\forall \varepsilon > 0$, esiste $x_\varepsilon \in E$ tale che $x_\varepsilon > M - \varepsilon$

Commento

Il punto 1. equivale a dire che M è un maggiorante per E

Il punto 2. equivale a dire che ogni numero strettamente minore di M, smette di essere un maggiorante per E

Caratterizzazione del inf

Sia $E \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente. Allora $m = \inf E$ se e solo se ha la seguenti proprietà

1. $m \leq x$ per ogni $x \in E$
2. $\forall \varepsilon > 0$, esiste $x_\varepsilon \in E$ tale che $x_\varepsilon < m + \varepsilon$

Commento

Il punto 1. equivale a dire che m è un minorante per E

Il punto 2. equivale a dire che ogni numero strettamente maggiore di m, smette di essere un minorante per E

ATTENZIONE!

Non sempre l'estremo superiore di un insieme E è un elemento di E. Stessa cosa per l'estremo inferiore.

Esempio

Si consideri l'insieme

$$E = (1, 2) \cup \{7, 8\}$$

dato dall'intervallo aperto $(1, 2)$ a cui aggiungiamo i due singoli elementi 7 ed 8

È abbastanza facile vedere che E è un insieme limitato

- Calcoliamo

$$\sup E \qquad \text{e} \qquad \inf E$$

- è abbastanza facile vedere che

$$\sup E = 8$$

- infatti si ha

$$x \leq 8 \qquad \text{per ogni } x \in E$$

- inoltre per ogni $\varepsilon > 0$, si ha che $8 - \varepsilon$ non è più un maggiorante di E, dal momento che

$$8 - \varepsilon < 8 \in E$$

- quindi 8 è il più piccolo dei maggioranti di E, ovvero $\sup E = 8$

- per quanto riguarda l'estremo inferiore, si ha

$$\inf E = 1$$

- infatti si ha

$$x \geq 1 \qquad \text{per ogni } x \in E$$

- inoltre per ogni $\varepsilon > 0$, si ha che $1 + \varepsilon$ non è più un minorante di E, dal momento che

$$1 + \frac{\varepsilon}{2} < 1 + \varepsilon$$

e

$$1 + \frac{\varepsilon}{2} \in E$$

- quindi 1 è il più grande dei minoranti di E, ovvero $\inf E = 1$

Ricapitolando per l'insieme

$$E = (1,2) \cup \{7,8\}$$

vale

$$\inf E = 1 \qquad \text{e} \qquad \sup E = 8$$

Si osservi che **in questo esempio**

$$\inf E \notin E$$

dal momento che l'intervallo $(1,2)$ è aperto, quindi $1 \notin (1,2)$

Al contrario, in questo caso particolare, si ha

$$\sup E \in E$$

Definizione

Sia $E \subset \mathbb{R}$ tale che $E \neq \emptyset$. Supponiamo che E sia limitato superiormente e si chiami $M = \sup E$

Se $M \in E$, allora diremo che M è il **massimo di** E e scriveremo

$$M = \max E$$

Definizione

Sia $E \subset \mathbb{R}$ tale che $E \neq \emptyset$. Supponiamo che E sia limitato inferiormente e si chiami $m = \inf E$.

Se $m \in E$, allora diremo che m è il **minimo di** E e scriveremo

$$m = \min E$$

Esempio

Torniamo a considerare l'insieme

$$E = (1, 2) \cup \{7, 8\}$$

visto in precedenza

Abbiamo visto che

$$\inf E = 1 \notin E \qquad \text{e} \qquad \sup E = 8 \in E$$

Possiamo quindi dire che

$$\max E = \sup E = 8$$

mentre invece

$$\nexists \min E$$

ovvero **non esiste il minimo** di E, dal momento che l'estremo inferiore non appartiene all'insieme

Esercizio

Si consideri l'insieme

$$E = \left\{ \frac{n+1}{n+2} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Si calcolino $\sup E$ *e* $\inf E$ *e si dica se si tratta del massimo e del minimo di* E*, rispettivamente.*

Soluzione

- Dobbiamo innanzitutto cercare di capire se l'insieme in questione è limitato superiormente e/o inferiormente
- possiamo sicuramente osservare che tutti gli elementi di E sono **numeri positivi**
- ovvero

$$\frac{n+1}{n+2} \geq 0, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

- questo dimostra che E ammette un minorante (che è 0), quindi E è limitato inferiormente
- osserviamo anche che $n+1 < n+2$ per ogni naturale n...
- ...quindi (poiché $n+2>0$) si ha

$$\frac{n+1}{n+2} < 1, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

- questo dimostra che E ammette un maggiorante (che è 1), quindi E è limitato superiormente
- per il momento, sappiamo che E è limitato
- quanto valgono $\sup E$ e $\inf E$?

- per rispondere, cerchiamo di capire come sono fatti gli elementi che compongono l'insieme E
- scriviamo i primi 4 o 5 termini, tanto per avere un'idea

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{3}, \qquad \frac{3}{4}, \qquad \frac{4}{5}, \qquad \frac{5}{6} \qquad \dots$$

- sembrerebbe una sequenza di numeri crescenti, che si avvicinano sempre di più ad 1...
- proviamo a dimostrare queste due proprietà
- **NOTA BENE**: il fatto che le proprietà sopra dette siano vere per i primi 5 termini **non dimostra niente**. Dobbiamo fare una vera dimostrazione

- cominciamo con lo scrivere ogni elemento di E

$$\frac{n+1}{n+2}$$

  in un modo apparentemente stupido...

- ...ovvero

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2-1}{n+2} = \frac{n+2}{n+2} - \frac{1}{n+2}$$

- in altre parole, ogni elemento di E è della forma

$$1 - \frac{1}{n+2} \qquad \text{per } n \in \mathbb{N}$$

- osserviamo adesso che la quantità $n+2$ cresce al crescere di n
- di conseguenza, il reciproco

$$\frac{1}{n+2}$$

  decresce al crescere di n
- ...ma allora, con un segno $-$ davanti

$$-\frac{1}{n+2}$$

  cresce al crescere di n
- e quindi

$$1-\frac{1}{n+2} \qquad \text{per } n \in \mathbb{N}$$

  cresce al crescere di n

- dalla discussione precedente, otteniamo quindi che per $n = 0$ si ottiene l'elemento più piccolo di tutti
- ovvero
$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{n+2} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$
- questo implica che
$$\inf E = \min E = \frac{1}{2}$$
- ok! Ci manca solo il $\sup E$
- abbiamo detto che
$$1 - \frac{1}{n+2}$$
cresce al crescere di n. Inoltre, per n che diventa "grandissimo", questo numero si avvicina sempre di più ad 1

- siamo portati a sospettare che

$$\sup E = 1$$

- dimostriamolo!
- usando la "*Caratterizzazione del* sup" dobbiamo dimostrare che 1 ha le seguenti proprietà

  1. $1 \geq x$ per ogni $x \in E$
  2. $\forall \varepsilon > 0$, esiste $x_\varepsilon \in E$ tale che $x_\varepsilon > 1 - \varepsilon$

- la proprietà 1. è di verifica banale, dal momento che tutti gli elementi di E sono

$$1 - \frac{1}{n+2}$$

  che sono ovviamente minori di 1

- la proprietà 2. è più delicata: fissiamo $\varepsilon > 0$
- se $\varepsilon \geq 1$, la verifica che $1 - \varepsilon$ non è più un maggiorante è banale...
- ...infatti in tal caso

$$1 - \varepsilon \leq 0 < 1 - \frac{1}{n+2}$$

- supponiamo quindi che $0 < \varepsilon < 1$, dobbiamo dimostrare che esiste un elemento di E, ovvero che esiste un indice $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n_\varepsilon + 2}$$

- per trovare un indice n_ε che verifica la proprietà precedente, basta risolvere la disuguaglianza

- ovvero

$$
\begin{aligned}
1-\varepsilon < 1-\frac{1}{n_\varepsilon+2} \qquad &\iff \qquad -\varepsilon < -\frac{1}{n_\varepsilon+2} \\
&\iff \qquad \varepsilon > \frac{1}{n_\varepsilon+2} \\
&\iff \qquad n_\varepsilon+2 > \frac{1}{\varepsilon} \\
&\iff \qquad n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}-2
\end{aligned}
$$

- quindi, fissato $0<\varepsilon<1$, prendendo come indice n_ε un qualsiasi numero naturale con la proprietà

$$n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}-2$$

- ...si ottiene in automatico

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n_\varepsilon + 2}$$

- ovvero $1 - \varepsilon$ non è più un maggiorante di E
- anche la proprietà 2. è verificata
- abbiamo quindi $\sup E = 1$
- ci resta da dire se 1 è il massimo di E
- in base alla definizione, dobbiamo quindi verificare **se** $1 \in E$
- dal momento che ogni elemento di E si scrive come

$$1 - \frac{1}{n + 2}$$

  si vede facilmente che $1 \notin E$
- in conclusione: l'insieme E **non ha massimo**

Provate a generalizzare il l'esercizio precedente, ovvero

Esercizio (per casa)

Siano $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$ *assegnati, si calcolino l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme*

$$E = \left\{ \frac{n+\alpha}{n+\beta} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si dica inoltre se si tratta del massimo e del minimo di E*, rispettivamente.*

Capitolo II

“*Funzioni tra insiemi*”

II.1 Definizioni

Siano $X \neq \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$ due insiemi non vuoti

una **funzione**

$$f : X \to Y$$

è una legge che associa ad ogni elemento $x \in X$ **uno ed un solo elemento** $f(x) \in Y$

- L'insieme X si chiama **dominio** della funzione f
- mentre Y si chiama **codominio** della funzione f

Notazione

Useremo la notazione

$$\boxed{\begin{array}{rccc} f : & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}}$$

o anche semplicemente $x \mapsto f(x)$, quando saranno chiari dal contesto il dominio ed il codominio

Definizione

Sia $f : X \to Y$ una funzione e sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme non vuoto.

Chiamiamo **immagine di** A **tramite** f il sottoinsieme di Y formato da tutti i valori che sono assunti da f in corrispondenza degli elementi di A. In altre parole

$$f(A) = \Big\{ y \in Y \, : \, \exists x \in A \text{ tale che } y = f(x) \Big\}$$

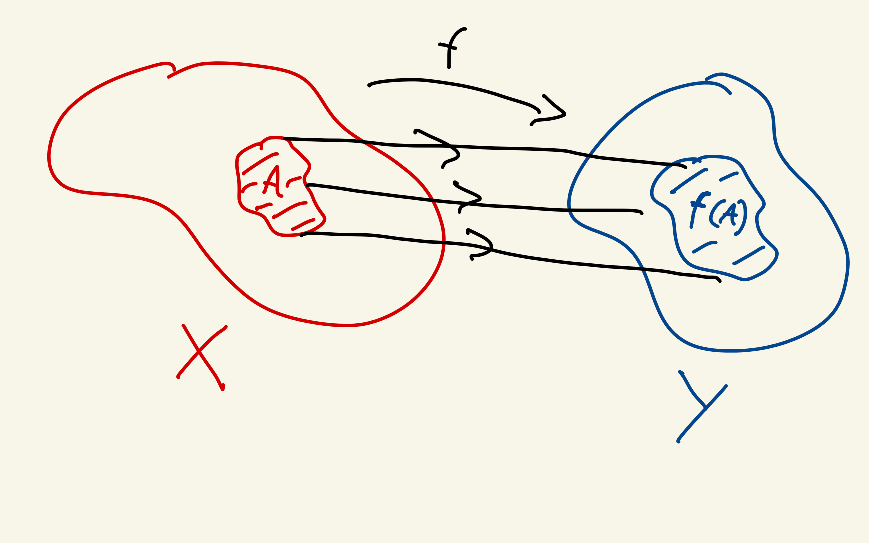
Nel caso in cui $A = X$, chiameremo l'insieme $f(X)$ semplicemente **immagine di** f

Attenzione

Si ha

$$f(A) \subseteq Y$$

cioè le immagini sono <u>sottoinsiemi del codominio</u>


f
A
f(A)
X
Y

Definizione

Sia $f : X \to Y$ una funzione e sia $B \subseteq Y$ un sottoinsieme non vuoto.

Chiamiamo **controimmagine di** B **tramite** f il sottoinsieme di X formato da tutti gli elementi la cui immagine tramite f appartiene a B

In altre parole

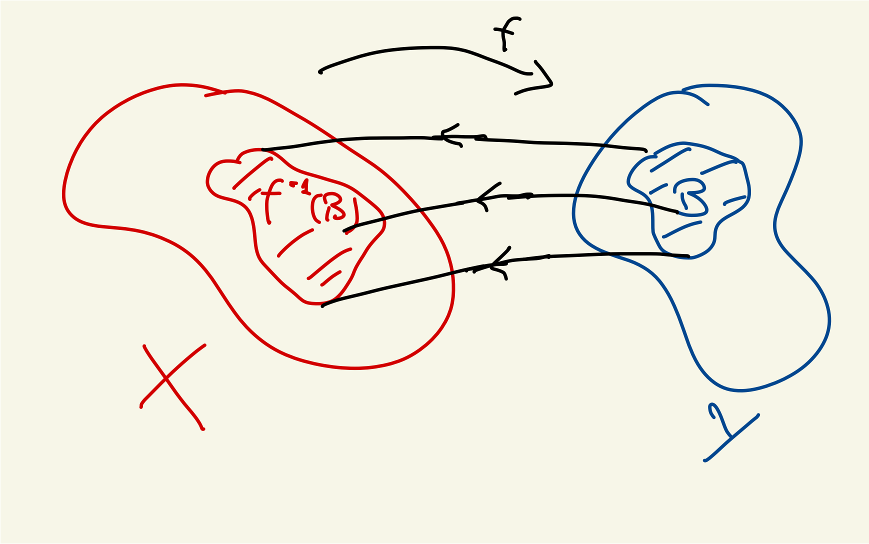
$$f^{-1}(B) = \Big\{x \in X \,:\, f(x) \in B\Big\}$$

Attenzione

Si ha

$$f^{-1}(B) \subseteq X$$

cioè le controimmagini sono <u>sottoinsiemi del dominio</u>


f
f⁻¹(B)
B
X
Y

Esercizio

Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *la funzione definita da*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ è pari,} \\ -1, & \text{se } x \text{ è dispari.} \end{cases}$$

1. *Si calcoli l'immagine di* $\{0, 2, -4, -6\}$ *tramite* f*;*
2. *si calcoli l'immagine di* f*;*
3. *si calcolino le controimmagini degli insiemi* $\{-1\}$ *e* $[2, 3]$

Soluzione

1. Dalla definizione di f e di immagine, abbiamo che

$$f(\{0, 2, -4, -6\}) = \{1\},$$

dal momento che $0, 2, -4$ e -6 sono **numeri pari** e quindi

$$f(0) = f(2) = f(-4) = f(-6) = 1$$

2. Dal momento che f assume solo i valori 1 e -1, l'immagine di f è data da
$$f(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$$

3. troviamo infine le controimmagini richieste
$$f^{-1}(\{-1\}) = \{x \in \mathbb{Z} \,:\, f(x) = -1\} = \{x \in \mathbb{Z} \,:\, x \text{ è dispari}\},$$
e per quanto riguarda l'intervallo chiuso $[2, 3]$
$$\begin{aligned} f^{-1}([2,3]) &= \{x \in \mathbb{Z} \,:\, f(x) \in [2,3]\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \,:\, 2 \leq f(x) \leq 3\} = \emptyset, \end{aligned}$$
cioè l'insieme vuoto.

   Questo segue dal fatto che f assume solo i valori 1 e -1, quindi non esistono x in cui il valore $f(x)$ è compreso tra 2 e 3

Definizione

Sia $f : X \to Y$ una funzione

si chiama **grafico di** f il seguente sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times Y$

$$\mathrm{Graph}(f) = \Big\{(x, y) \in X \times Y \,:\, y = f(x)\Big\}$$

Caso particolare

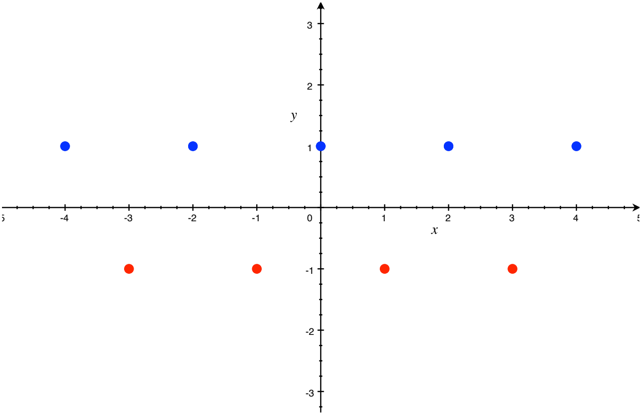
Se $X \subseteq \mathbb{R}$ e $Y \subseteq \mathbb{R}$ allora

$$\mathrm{Graph}(f) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

ovvero il grafico può essere rappresentato graficamente nel piano cartesiano

Ad esempio, nel caso dell'Esercizio precedente, il grafico di f è formato da tutte le coppie di punti nel piano cartesiano della forma

$$(x, 1) \quad \text{se } x \in \mathbb{Z} \text{ è pari}, \qquad (x, -1) \quad \text{se } x \in \mathbb{Z} \text{ è dispari.}$$



II.2 Iniettività e suriettività

I due concetti che introdurremo in questa sezione sono di **fondamentale importanza**

Se capiamo bene il concetto di funzione iniettiva e/o suriettiva, non avremo difficoltà a comprendere il concetto di *funzione inversa*

In tal caso, funzioni solitamente "difficili" da gestire per gli studenti come per esempio il *logaritmo* e l'*arcoseno*, non avranno segreti per noi

Se invece non capiamo bene questi concetti, beh....

Definizione

Una funzione $f : X \to Y$ si dice **iniettiva** se vale la proprietà seguente

"$\forall y \in Y,$ l'equazione $y = f(x)$ ammette **al più** una soluzione $x \in X$"

Osservazione

Un modo equivalente di descrivere l'iniettività di f è dire che "elementi diversi hanno immagine diverse", ovvero che

$$\forall x_1 \neq x_0, \text{ si ha } f(x_0) \neq f(x_1).$$

Definizione

Una funzione $f : X \to Y$ si dice **suriettiva** se vale la proprietà seguente

"$\forall y \in Y,$ l'equazione $y = f(x)$ ammette **almeno** una soluzione $x \in X$"

Osservazione (Rendere suriettiva una funzione)

Nel caso in cui $f : X \to Y$ non sia suriettiva, la si può sempre rendere tale rimpiazzando il codominio Y con l'immagine della funzione $f(X)$

In altre parole, $\boxed{f : X \to f(X)}$ è sempre suriettiva

Definizione

Una funzione $f : X \to Y$ si dice **biettiva** se è allo stesso tempo iniettiva e suriettiva.

In altre parole, $f : X \to Y$ è biettiva se vale la proprietà seguente

"$\forall y \in Y,$ l'equazione $y = f(x)$ ammette
una ed una sola soluzione $x \in X$"

Esempio

Riprendiamo l'esempio della funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ è pari,} \\ -1, & \text{se } x \text{ è dispari,} \end{cases}$$

Si vede facilmente che questa funzione **non è iniettiva e nemmeno suriettiva**

Per esempio, prendendo $1 \in \mathbb{R}$, l'equazione

$$f(x) = 1$$

ha **infinite** soluzioni $x \in \mathbb{Z}$, corrispondenti ad ogni numero pari di $\mathbb{Z}$.

Questo dimostra che f non è iniettiva.

D'altra parte, prendendo $2 \in \mathbb{R}$ si vede che

$$f(x) = 2,$$

non ammette soluzioni $x \in \mathbb{Z}$, dal momento che f assume solo i valori 1 e -1.

Quindi f non è suriettiva.

Osservazione

Si noti però che considerando f come una funzione

$$f : \mathbb{Z} \to \{-1, 1\},$$

adesso sarebbe suriettiva.

Esempio (Elevamento al quadrato)

Consideriamo la funzione

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

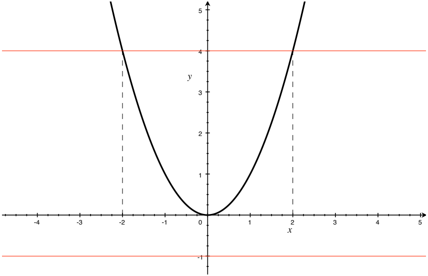


Figura: Il grafico della funzione f. Si osservi che ogni valore y positivo è assunto da esattamente due numeri reali distinti (quindi f **non** è iniettiva). Al contrario, i valori y strettamente negativi, non sono mai assunti (quindi f **non** è suriettiva, se prendiamo come codominio $\mathbb{R}$).

Anche questa funzione **non è ne' iniettiva ne' suriettiva**

- Infatti, l'equazione

$$f(x) = 1 \qquad \text{ovvero} \qquad x^2 = 1,$$

  ammette <u>due</u> soluzioni in $\mathbb{R}$, ovvero $x = 1$ e $x = -1$. Questo dimostra che f non è iniettiva.

- D'altra parte, preso $y < 0$ l'equazione

$$x^2 = y,$$

  <u>non ammette soluzioni</u> in $\mathbb{R}$, quindi f non è nemmeno suriettiva.

Esempio (Elevamento al quadrato...reprise!)

Consideriamo adesso la funzione

$$f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty) & \rightarrow & [0,+\infty) \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Apparentemente niente è cambiato rispetto all'esempio precedente...**ma non è così**!

Notate che il **dominio** adesso è $[0,+\infty)$ e non più tutto $\mathbb{R}$

...il **codominio** adesso è $[0,+\infty)$ e non più tutto $\mathbb{R}$

La funzione f è diventata **biettiva**! Infatti...

- Se prendiamo $y \in [0, +\infty)$ adesso l'equazione

$$f(x) = y \qquad \text{ovvero} \qquad x^2 = y$$

ha **al più una soluzione** $\boxed{x \geq 0}$, ovvero f è iniettiva

- D'altra parte, $y \in [0, +\infty)$ è il quadrato di un numero reale positivo[1], ovvero...

  ...per ogni $y \in [0, +\infty)$ l'equazione

$$f(x) = y \qquad \text{ovvero} \qquad x^2 = y$$

  ammette **almeno una** soluzione $x \geq 0$.

  Questo mostra che la funzione f è anche suriettiva e quindi, in conclusione, biettiva.

---

[1] La giustificazione rigorosa di questo fatto intuitivo richiede gli strumenti del Capitolo IV, in particolare l'utilizzo del *Teorema dei valori intermedi*.

In particolare abbiamo

"$\forall y \geq 0$, l'equazione $y = x^2$ ha **una ed una sola** soluzione $x \geq 0$"

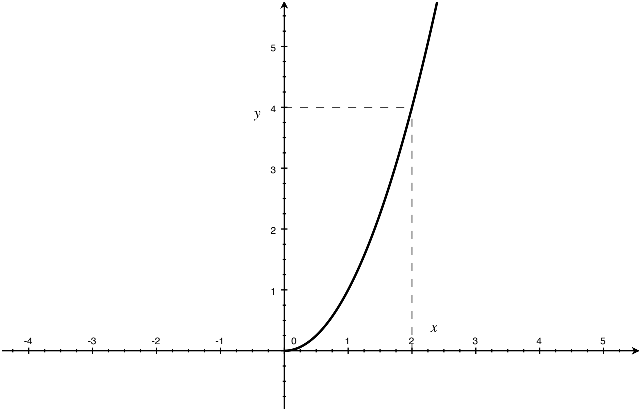


Figura: Il grafico della funzione $x \mapsto x^2$ con dominio $[0, +\infty)$ e codominio $[0, +\infty)$. Si osservi che stavolta abbiamo una **corrispondenza biunivoca** tra i punti del semiasse $x \geq 0$ e quelli del semiasse $y \geq 0$.

Ha quindi perfettamente senso definire la funzione

$$\begin{array}{rccl} g: & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & y & \mapsto & \text{`` l'unica soluzione } x \geq 0 \text{ di } x^2 = y\text{''} \end{array}$$

Vediamo se abbiamo capito come è fatta g, calcoliamo qualche suo valore

$$g(1) = \text{`` l'unica soluzione } x \geq 0 \text{ di } x^2 = 1\text{''} = 1$$

$$g(4) = \text{`` l'unica soluzione } x \geq 0 \text{ di } x^2 = 4\text{''} = 2$$

$$g(9) = \text{`` l'unica soluzione } x \geq 0 \text{ di } x^2 = 9\text{''} = 3$$

Tale funzione

$$\begin{array}{rccl} g: & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & y & \mapsto & \text{“ l'unica soluzione } x \geq 0 \text{ di } x^2 = y\text{''} \end{array}$$

è detta **radice quadrata**, indicata col simbolo $y \mapsto \sqrt{y}$.

Per come è stata costruita, è facile verificare che

$$f(g(y)) = y, \qquad \text{per } y \in [0,+\infty),$$

e

$$g(f(x)) = x, \qquad \text{per } x \in [0,+\infty).$$

Tra un attimo, cercheremo di generalizzare questo discorso....cercate di assicurarvi di aver capito bene questo esempio **perché è estremamente importante**