Analisi Matematica A
– *Lezione 3* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 7 Ottobre 2020

I.5 Teoria degli insiemi

Sia A un **insieme**, gli oggetti contenuti dentro A sono detti **elementi** di A

Notazione

Il simbolo

$$x \in A$$

vuol dire *l'elemento x appartiene ad A*

Indichiamo con

$$x \notin A,$$

la negazione della proposizione precedente, ovvero *l'elemento x non appartiene ad A*.

Definizione

Sia B un altro insieme. Si dice che B è un **sottoinsieme** di A se per ogni $x \in B$, si ha $x \in A$.

Altrimenti detto, ogni elemento di B è contenuto in A, ovvero

$$\forall b \in B, \quad \text{si ha} \quad b \in A.$$

In tal caso, utilizzeremo la notazione

$$B \subseteq A$$

Col simbolo $\emptyset$ denoteremo l'**insieme vuoto**, ovvero l'insieme che non contiene elementi

Ovviamente, vale sempre che

$$\emptyset \subseteq A$$

Di conseguenza, avremo che due insiemi A, B sono eguali se e soltanto se

$$B \subseteq A \qquad \underline{\text{e}} \qquad A \subseteq B.$$

In tal caso useremo la notazione $A = B$.

Al contrario, la scrittura

$$B \not\subseteq A$$

vuol dire che B *non è un sottoinsieme di* A, i.e. in formule

$$\exists b \in B \, : \, b \notin A.$$

Attenzione!

Non bisogna fare confusione tra i simboli a e $\{a\}$

Col primo si indica un elemento di A...

...mentre il secondo indica un sottoinsieme di A che contiene il solo elemento a.

In particolare, la scrittura

$$a \in A$$

è corretta, mentre la scrittura

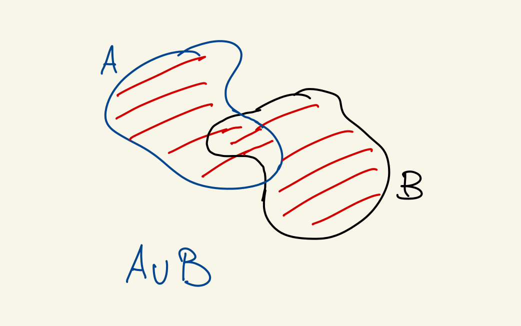
$$\{a\} \in A$$

non ha senso.

Definizione (Unione)

Siano A, B due insiemi, allora chiameremo **unione di** A **e** B il nuovo insieme definito da

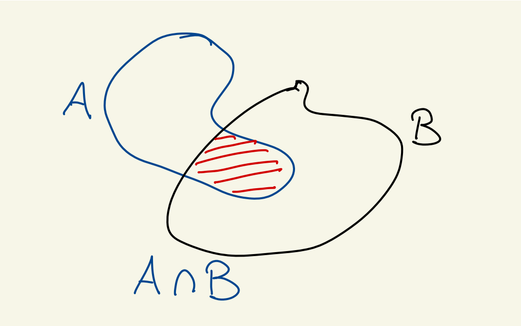
$$A \cup B = \left\{ x \ : \ x \in A \ \text{ o } \ x \in B \right\}$$



Definizione (Intersezione)

Siano A, B due insiemi, allora chiameremo **intersezione di** A **e** B il nuovo insieme definito da

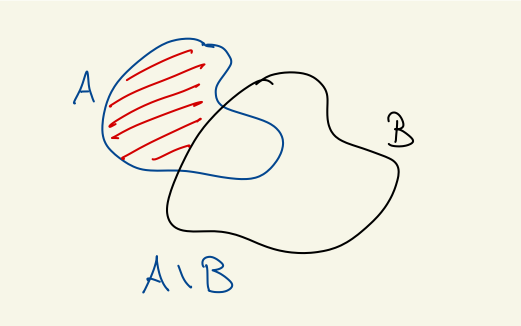
$$A \cap B = \left\{ x \ : \ x \in A \ \text{e} \ x \in B \right\}$$



Definizione (Differenza)

Siano A, B due insiemi, allora chiameremo **differenza di A e B** il nuovo insieme definito da

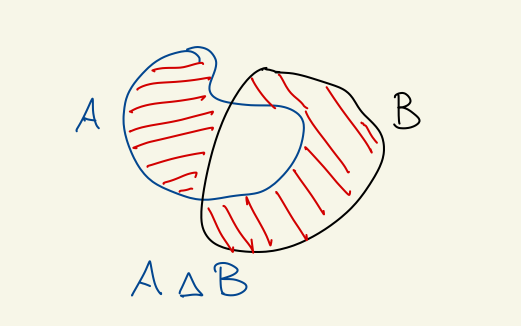
$$A \setminus B = \left\{ x \ : \ x \in A \ \text{ e } \ x \notin B \right\}$$



Definizione (Differenza simmerica)

Siano A, B due insiemi, allora chiameremo **differenza simmetrica di** A **e** B il nuovo insieme definito da

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Definizione (Prodotto cartesiano)

Siano A, B due insiemi, allora chiameremo **prodotto cartesiano** A **e** B il nuovo insieme definito da

$$A \times B = \Big\{ (x, y) \,:\, x \in A \text{ e } y \in B \Big\}$$

Esercizio

Consideriamo i due insiemi di numeri naturali

$$A = \{1, 2, 5\} \qquad e \qquad B = \{2, 5, 7\}$$

Si calcolino

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad A \Delta B, \quad A \times B$$

Soluzione

- In base alla definizione, si ha

$$A \cup B = \{x \, : \, x \in A \text{ o } x \in B\} = \{1, 2, 5, 7\}$$

- per l'intersezione, dobbiamo prendere gli elementi comuni

$$A \cap B = \{x \, : \, x \in A \text{ e } x \in B\} = \{2, 5\}$$

- per la differenza $A \setminus B$ dobbiamo prendere gli elementi che stanno in A, **ma non** in B

$$A \setminus B = \{1\}$$

- per la differenza $B \setminus A$ dobbiamo prendere gli elementi che stanno in B, **ma non** in A

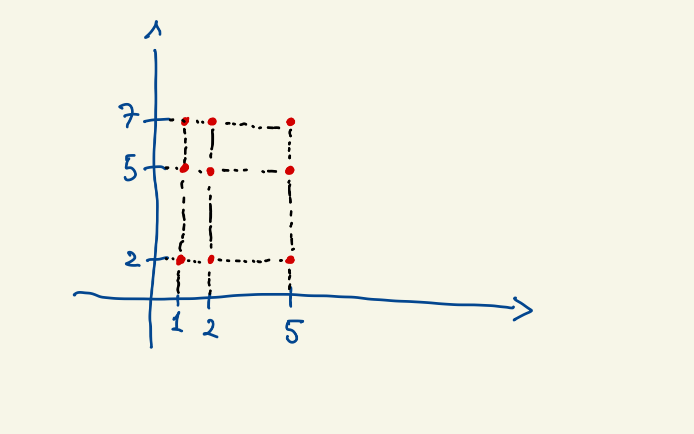
$$B \setminus A = \{7\}$$

- in particolare, la differenza simmetrica è data da

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 7\}$$

- infine, il prodotto cartesiano $A \times B$ si può rappresentare nel *piano cartesiano*, come l'insieme dei punti

$$(x, y) \qquad \text{con } x \in \{1, 2, 5\},\ y \in \{2, 5, 7\}$$



I.6 Insiemi di numeri

Tra gli insiemi, quelli per noi più importanti saranno gli *insiemi di numeri*

Richiamiamo i principali: abbiamo già visto l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, consideriamo anche

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\} \qquad \textbf{numeri interi}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \; : \; p, q \in \mathbb{Z} \text{ con } q \neq 0 \right\} \qquad \textbf{numeri razionali}$$

provvisti delle usuali operazioni di <u>somma</u> e <u>prodotto</u>

Due differenze importanti tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$

1. Se $p/q < m/n \in \mathbb{Q}$, allora si ha anche che il loro **punto medio**

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p}{q}+\frac{m}{n}\right) \in \mathbb{Q} \qquad (\textit{verificatelo!})$$

e

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q}+\frac{p}{q}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q}+\frac{m}{n}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}+\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}$$

Ovvero $\mathbb{Q}$ ha la seguente proprietà:

$$\boxed{\forall x < y \in \mathbb{Q},\ \exists z \in \mathbb{Q}\ :\ x < z < y}$$

cioè, tra due numeri razionali ne esiste sempre un terzo, distinto da entrambi

Questa proprietà è ovviamente **falsa** per $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$ (esempio: presi 0 e 1, nel mezzo...non c'è nessun intero)

2. Per ogni elemento $p/q \in \mathbb{Q}$ diverso da 0, esiste ed è unico quello che si chiama l'**elemento inverso** di p/q rispetto al prodotto

   In altre parole, esiste $x \in \mathbb{Q}$ tale che

   $$\frac{p}{q} \cdot x = 1$$

   Tale unico elemento è dato da

   $$x = \frac{q}{p}$$

   Anche questa proprietà è ovviamente **falsa** per $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$

I numeri razionali sono "moltissimi"

Per esempio per ogni $p/q \in \mathbb{Q}$, si ha che

$$1+\frac{p}{q}, \quad \frac{1}{2}+\frac{p}{q}, \quad \frac{1}{3}+\frac{p}{q}, \quad \dots, \quad \frac{1}{n}+\frac{p}{q}, \dots,$$

è una **sequenza infinita** di numeri razionali che si "accumulano" verso p/q

...ma sono "abbastanza"?

Prendiamo una retta, su cui fissiamo 0 e 1. È vero che ogni punto di questa retta corrisponde ad una lunghezza (misurata rispetto all'origine) che si può esprimere tramite un numero razionale

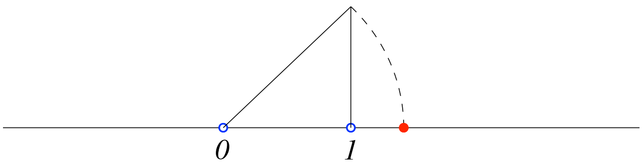
$$\frac{p}{q}, \qquad p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0?$$

Esempio

Prendiamo un triangolo rettangolo isoscele con cateto lungo 1

L'ipotenusa è dunque lunga $\sqrt{2}$ (dal Teorema di Pitagora)

Riportiamo questa lunghezza sulla retta: il punto rosso corrispondente è un razionale?



Esercizio

Si dimostri che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Soluzione

- Procediamo *per contraddizione*
- supponiamo quindi che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
- allora esistono $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tali che

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

- possiamo supporre che la frazione sia irriducibile (p e q non hanno divisori comuni, a parte 1)
- l'identità precedente implica dunque

$$2\,q^2 = p^2,$$

ovvero p è un naturale **il cui quadrato è un numero pari**

- ricordiamo che nell'Esempio "*Una proprietà dei numeri naturali*" (vedi *Lezione 1*), abbiamo dimostrato che

  se n^2 è pari, allora n pari

- utilizzando questo fatto, otteniamo che p è pari
- ovvero p è divisibile per 2, cioè esiste $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che

$$p = 2\, m.$$

- utilizziamo adesso questa informazione nell'identità

$$2\, q^2 = p^2,$$

  che avevamo ottenuto prima
- si ottiene

$$2\, q^2 = 4\, m^2 \qquad \text{e quindi} \qquad q^2 = 2\, m^2.$$

- ovvero q è un naturale **il cui quadrato è un numero pari**
- come prima, ne concludiamo che q è anch'esso pari
- **contraddizione**! Abbiamo ottenuto che p che q sono entrambi pari
- questo contraddice il fatto che la frazione p/q sia irriducibile
- in conclusione $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

I razionali non sono "abbastanza"

Quindi, se prendiamo una retta su cui fissiamo 0 e 1, **non è vero** che ogni punto di questa retta corrisponde ad un razionale.

Ci sono moltissimi altri numeri che non appartengono a $\mathbb{Q}$ e si chiamano **irrazionali**

Un altro problema dei razionali

Esistono *sequenze infinite* di numeri razionali che si "avvicinano sempre di più" ad un numero che **non è** razionale. Esempio:

$$1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\ \ldots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \ldots$$

che studieremo in dettaglio nel *Capitolo III*

Da qui la necessità di introdurre

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{numeri irrazionali}\} \qquad \textit{numeri reali}$$

che sono in **corrispondenza biunivoca** coi punti della retta

Definizione (Intervalli)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, utilizzeremo le notazioni seguenti per gli *intervalli* di $\mathbb{R}$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\} \qquad \textit{intervallo chiuso},$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\} \qquad \textit{intervallo aperto},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x < b\} \qquad \textit{intervallo chiuso a sinistra}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leq b\} \qquad \textit{intervallo chiuso a destra}$$

Useremo anche le notazioni

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq a\},$$

e

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leq b\}.$$

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è caratterizzato dal seguente

Assioma di continuità (Importante!)

Sia $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ *una successione di intervalli chiusi, aventi la seguente proprietà*

$$I_{n+1} \text{ coincide con una delle due metà di } I_n, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Allora esiste uno ed un solo $x_0 \in \mathbb{R}$ *che appartenga a tutti gli intervalli* I_n*, ovvero*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap \dots I_n \cap \cdots = \{x_0\}$$

Osservazione

Di nuovo, questa proprietà è falsa se lavorassimo solo su $\mathbb{Q}$

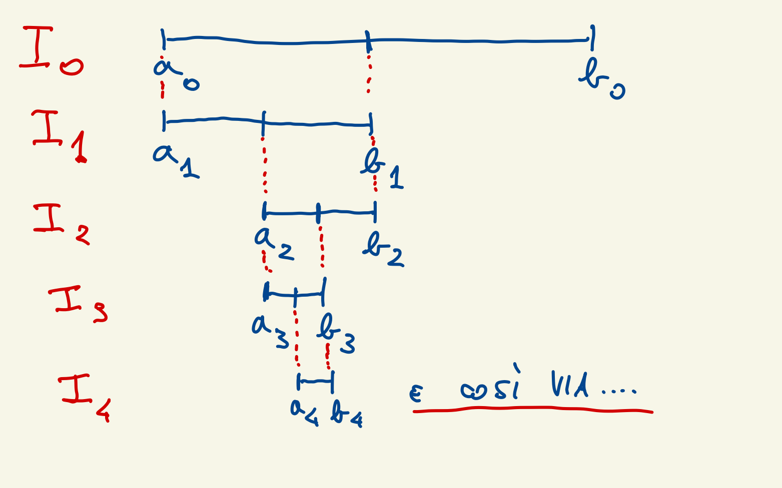


Figura: La successione di “intervalli dimezzati” dell'*Assioma di continuità*

Un'altra importante proprietà dei numeri reali è la seguente

Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ è **denso** in $\mathbb{R}$ ovvero:

dato $x \in \mathbb{R}$,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists x_\varepsilon \in \mathbb{Q} \ : \ x - \varepsilon < x_\varepsilon < x + \varepsilon$$

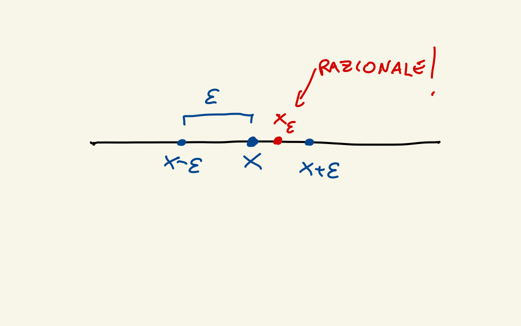


Figura: Ogni numero reale può essere approssimato con precisione arbitraria tramite un numero razionale

Richiamo: il valore assoluto

Se $x \in \mathbb{R}$, si definisce il suo *valore assoluto* $|x|$ come

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Esercizio per casa

Si trovino tutte le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ *della seguente equazione*

$$\Big| |x| - 1 \Big| = 2$$

Esercizio

Sia $a \geq 0$, *si dimostri che*

$$|x| \leq a \qquad \Longleftrightarrow \qquad -a \leq x \leq a.$$

Soluzione

- Dimostriamo le due implicazioni

  $$|x| \leq a \qquad \Longrightarrow \qquad -a \leq x \leq a,$$

  e

  $$|x| \leq a \qquad \Longleftarrow \qquad -a \leq x \leq a,$$

  separatamente.
- supponiamo che $|x| \leq a$, in base alla definizione abbiamo due possibilità...

1. $x \geq 0$, allora in tal caso la nostra ipotesi diventa $x = |x| \leq a$

- per ipotesi $a \geq 0$, quindi $-a \leq 0$
- dal momento che $x \geq 0$, abbiamo quindi anche $-a \leq x$
- quindi in tal caso, abbiamo sicuramente

$$-a \leq x \leq a;$$

2. se invece $x < 0$, dalla definizione di valore assoluto si avrà $-x = |x| \leq a$

- ovvero $-a \leq x$
- d'altra parte, $a \geq 0$ quindi si ha anche $x < 0 \leq a$
- in conclusione, anche in questo caso si ha

$$-a \leq x \leq a.$$

Abbiamo quindi dimostrato che

$$|x| \leq a \qquad \Longrightarrow \qquad -a \leq x \leq a.$$

Proviamo adesso l'implicazione contraria.

- Si assuma che $-a \leq x \leq a$
- questo vuol dire che

$$x \leq a \qquad \text{e} \qquad -x \leq a.$$

- dal momento che per definizione

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

- ...questo implica che $|x| \leq a$, come volevamo.

Osservazione

In base all'esercizio precedente, osserviamo che si ha

$$\Big\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x| \leq a\Big\} = [-a, a]$$

In modo del tutto simile, si ha anche

$$\Big\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x| < a\Big\} = (-a, a)$$

Questa osservazione potrà tornarci utile nel futuro

Esercizio

Sia $a \geq 0$, *si dimostri che*

$$|x| > a \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < -a \textit{ oppure } x > a.$$

Soluzione

- Usiamo l'esercizio precedente e quel po' di logica vista nella *Lezione 1*
- infatti "$|x| > a$" è la *negazione* di "$|x| \leq a$"
- inoltre, la proposizione $-a \leq x \leq a$ è la *congiunzione* delle due proposizioni

$$\text{“}x \leq a\text{''} \ \text{ e } \ \text{“}-a \leq x\text{''}$$

- usando la formalizzazione logica, abbiamo allora

$$\text{“}|x| > a\text{''} \;=\; \text{non “}|x| \le a\text{''} \;=\; \text{non}\left(\text{“}x \le a\text{''} \;\text{ e }\; \text{“}-a \le x\text{''}\right)$$

- si ricordi adesso (visto nella *Lezione 1*) che

$$\text{non}\,(\mathcal{P}\,\text{e}\,\mathcal{Q}) = \text{non}\,\mathcal{P} \;\text{ o }\; \text{non}\,\mathcal{Q}$$

- possiamo quindi dire

$$\begin{aligned}\text{“}|x| > a\text{''} &= \text{non “}x \le a\text{'' o non “}-a \le x\text{''}\\ &= \text{“}x > a\text{'' o “}x < -a\text{''}\end{aligned}$$

- ovvero

$$|x| > a \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > a \text{ oppure } x < -a,$$

proprio come volevamo

Osservazione

In base all'esercizio precedente, osserviamo che si ha

$$\Big\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x| > a\Big\} = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$$

In modo del tutto simile, si ha anche

$$\Big\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x| \geq a\Big\} = (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$$

Questa osservazione potrà tornarci utile nel futuro

Vediamo infine una **proprietà molto importante** del valore assoluto

Esercizio (Disuguaglianza triangolare)

Si dimostri che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, *vale*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Soluzione

- Si osservi che in base alla definizione, si ha

$$-|x| \leq x \leq |x|,$$

e

$$-|y| \leq y \leq |y|.$$

- sommando queste due disuguaglianze, si trova

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

- si ricordi adesso (visto prima)

$$-a \leq x \leq a \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x| \leq a$$

- usando questo fatto con $a = |x| + |y|$, si ottiene

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y| \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x+y| \leq |x|+|y|$$

- ...ovvero quello che volevamo!

Esercizio per casa

Usando la disuguaglianza triangolare, si dimostri che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ *valgono anche*

$$|x - y| \leq |x| + |y|$$

$$\Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|$$

I.7 Estremo superiore ed estremo inferiore

Definizione

Sia $E \subset \mathbb{R}$ tale che $E \neq \emptyset$. Si dice che

- $M \in \mathbb{R}$ è un **maggiorante di** E se

$$x \leq M, \quad \forall x \in E$$

- $m \in \mathbb{R}$ è un **minorante di** E se

$$x \geq m, \quad \forall x \in E$$

Definizione

Sia $E \subset \mathbb{R}$ tale che $E \neq \emptyset$. Si dice che E è

- **limitato superiormente** se ammette un maggiorante;
- **limitato inferiormente** se ammette un minorante;
- **limitato** se è sia limitato superiormente che limitato inferiormente.

Esempio

Si consideri l'insieme

$$E = (-\infty, 2) \cup \{3, 4, 8\}.$$

Tale insieme è limitato superiormente (ogni numero maggiore o uguale a 8 è un maggiorante)...

...ma non è limitato inferiormente.

Esempio

Si consideri l'insieme

$$E = \left\{ \frac{1}{n} \, : \, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$$

E è costituito da un insieme di numeri che decrescono al crescere di n, quindi

$$\frac{1}{n} \leq 1, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

ovvero E è limitato superiormente (1 è un maggiorante)

D'altra parte, tutti i i numeri facenti parte di E sono positivi, ovvero

$$\frac{1}{n} \geq 0, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

quindi E è anche limitato inferiormente (0 è un minorante)