ANALISI MATEMATICA A

– LEZIONE 21 –

LORENZO BRASCO

9 DICEMBRE 2020

CAPITOLO VI

"CALCOLO INTEGRALE PER FUNZIONI DI UNA VARIABILE"

VI. 1 "IL PROBLEMA DELLE AREE"

VOGLIAMO OCCUPARCI DEL SEGUENTE PROBLEMA:

CALCOLARE L'AREA DI UNA FIGURA PIANA QUALSIASI.

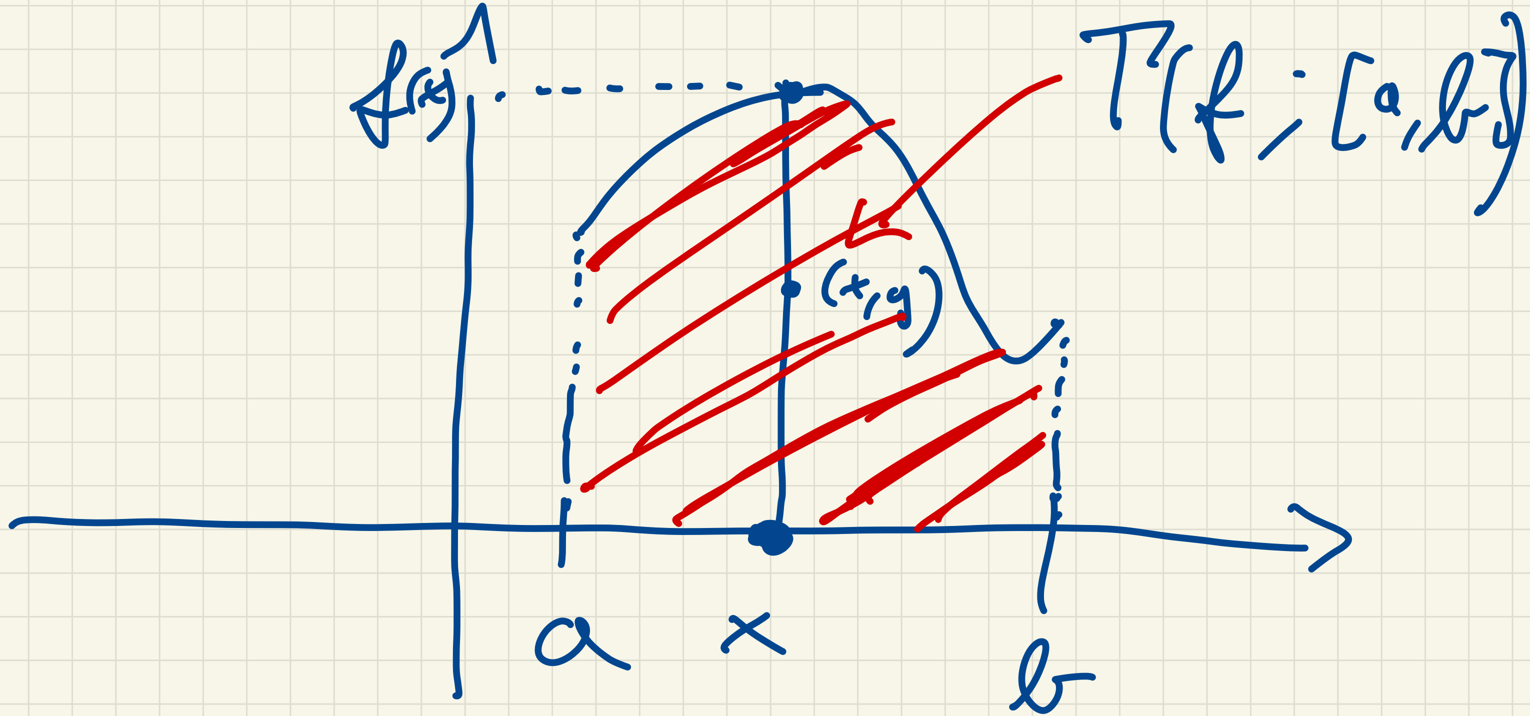
PIÙ PRECISAMENTE, DATA UNA FUNZIONE $f: [a, b] \to \mathbb{R}$

LIMITATA E POSITIVA, VOGLIAMO UN <u>METODO OPERATIVO</u>

PER CALCOLARE L'AREA DEL SUO SOTTOGRAFICO

OVVERO DELLA REGIONE DI PIANO

$$T(f; [a,b]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$



IDEA CHE STA ALLA BASE DEL METODO: USARE UN PROCEDIMENTO

DI APPROSSIMAZIONE DI

$\Gamma(f; [a, b])$ TRAMITE

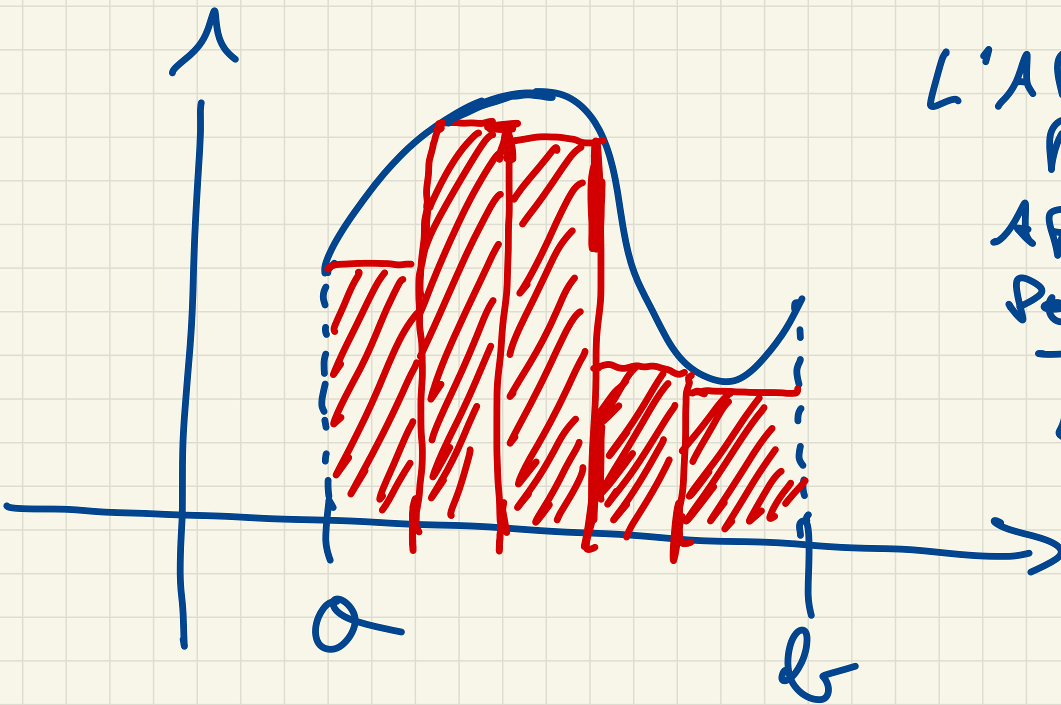
FIGURE GEOMETRICHE PIÙ SEMPLICI, AD ESEMPIO DEI RETTANGOLI.

PIÙ PRECISAMENTE, PROVIAMO AD APPROSSIMARE:

1) PER DIFETTO, PRENDENDO

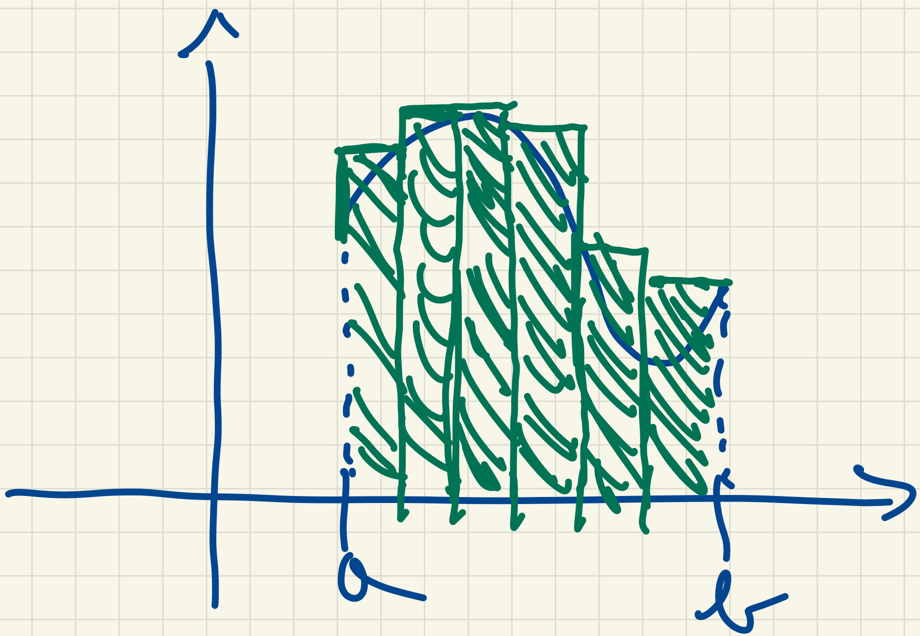
UN'UNIONE DI RETTANGOLI, OGNUNO CONTENUTO NEL SOTTOGRAFICO.

FACCIAMO UN DISEGNO:



L'AREA IN ROSSO APPROSSIMA PER DIFETTO L'AREA DI $\Gamma(f;[a,b])$

2) PER ECCESSO, PRENDENDO UN'UNIONE DI RETTANGOLI, CHE CONTENGA IL SOTTOGRAFICO.



SI VEDE FACILMENTE CHE IN GENERALE QUESTE 2 COSTRUZIONI DANNO UN VALORE APPROSSIMATO DELL' AREA.

QUELLO CHE POSSIAMO FARE PER MIGLIORARE QUESTI VALORI APPROSSIMATI, È CERCARE DI PRENDERE DEI RETTANGOLI SEMPRE PIÙ "STRETTI". IN ALTRE PAROLE, VORREMMO

USARE UNA SPECIE DI PROCEDIMENTO DI LIMITE, IN CUI LE BASI DEI RETTANGOLI DIVENTANO INFINITESIME ED I 2 VALORI APPROSSIMATI "TENDONO" AD UN VALORE COMUNE, CHE SARÀ L'AREA DI $T(f;[a,b])$.

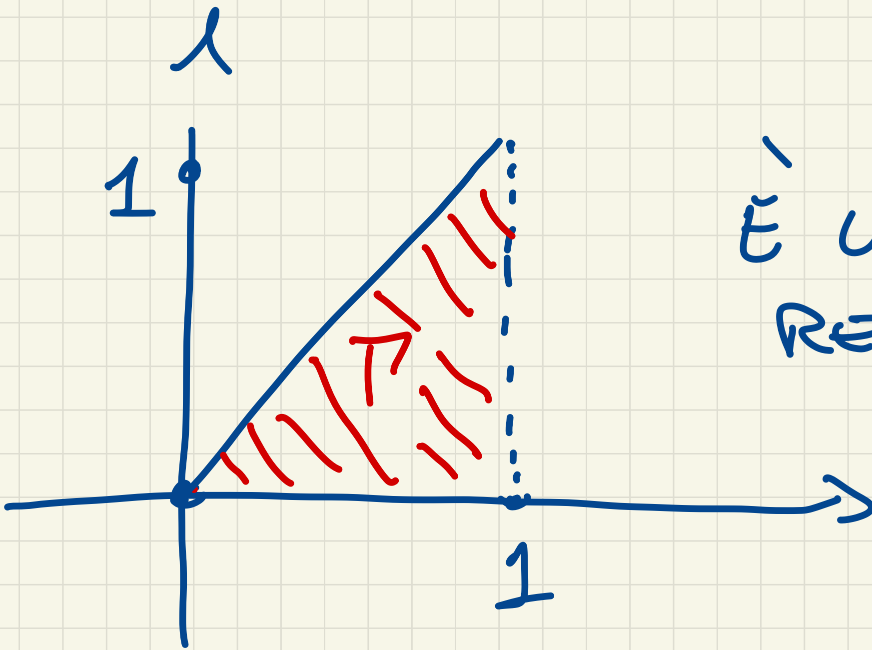
QUESTA È L'IDEA CHE STA ALLA BASE DELL'INTEGRALE DI

RIEMANN

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ CONSIDERIAMO LA FUNZIONE $f(x) = x$ SU $[0, 1]$.

PROVIAMO AD USARE IN MODO "ARTIGIANALE" L'IDEA PRECEDENTE, PER CALCOLARE L'AREA DEL SOTTOGRAFICO

$$\Gamma(f; [0,1]) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [0,1], \; 0 \le y \le x \right\}$$



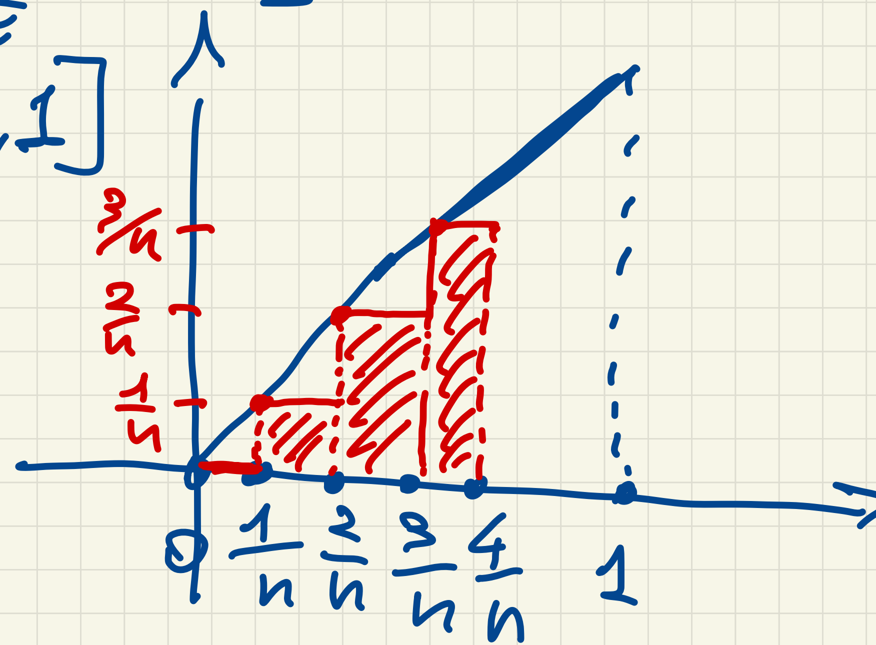
È UN TRIANGOLO RETTANGOLO ISOSCELE, DI AREA $\dfrac{1}{2}$

VEDIAMO SE TROVIAMO QUESTO RISULTATO TRAMITE APPROSSIMAZIONE.

PER OGNI $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, PRENDO LA SUDDIVISIONE REGOLARE DI $[0,1]$ DEFINITA DA

$$t_{n_i} = \frac{i}{n} \quad \text{PER}$$

$$i = 0, \ldots, n$$



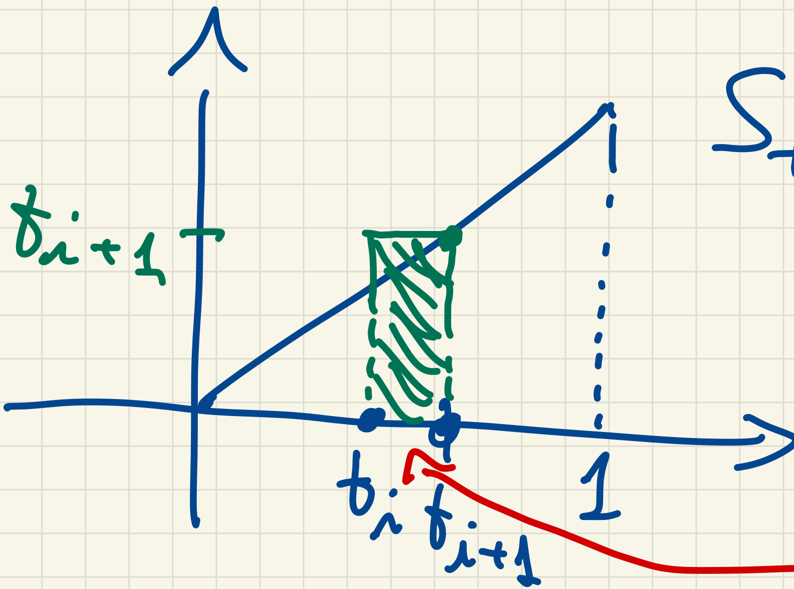
L'APPROSSIMAZIONE PER DIFETTO CORRISPONDENTE È DATA DA

$$S_-(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{BASE}} \overbrace{f_i}^{\text{ALTEZZA}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{i}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{VEDI} \\ \text{LEZIONE 1}}}{=} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)(n-\cancel{1+1})}{2}$$

$$= \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2}$$

IN MODO SIMILE, L'APPROSSIMAZIONE PER ECCESSO È DATA DA



$$S_+(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{BASE}} t_{i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\,\frac{i+1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)$$

$$\underset{(i+1=m)}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{n} m$$

$$= \frac{1}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}$$

VEDI LEZIONE 1

RICAPITOLANDO

$$S_-(n) = \frac{n(n-1)}{2n^2}$$ PER DIFETTO

$$S_+(n) = \frac{n(n+1)}{2n^2}$$ PER ECCESSO

E QUANDO $n \longrightarrow \infty$ SUCCEDE

CHE $$\lim_{n \to \infty} S_-(n) = \lim_{n \to \infty} S_+(n) = \frac{1}{2}$$

WOW!

IN QUESTO CASO PARTICOLARE, LA NOSTRA IDEA HA FUNZIONATO!

VEDIAMO SE RIUSCIAMO A RENDERLA RIGOROSA, IN MODO DA POTERLA USARE IN GENERALE

VI.2 L'INTEGRALE DI RIEMANN

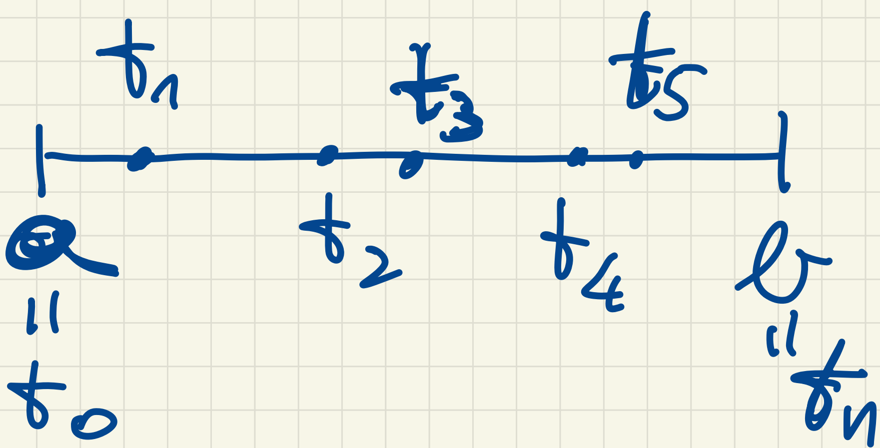
$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ SIA $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO.

UN INSIEME DI PUNTI $\{t_0, \ldots, t_n\} \subseteq [a, b]$ SI DICE PARTIZIONE DI $[a, b]$ SE VALGONO LE 2 PROPRIETÀ SEGUENTI:

1) $t_i < t_{i+1}$ PER OGNI $i = 0, \ldots, n-1$

2) $t_0 = a$ e $t_n = b$

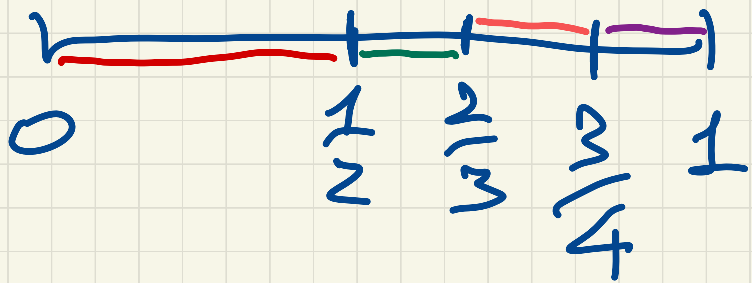
INDICHIAMO CON $\mathcal{P}([a, b])$ L'INSIEME DI TUTTE LE PARTIZIONI DI $[a, b]$



ESEMPIO

$$\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

È UNA PARTIZIONE DI $[0, 1]$

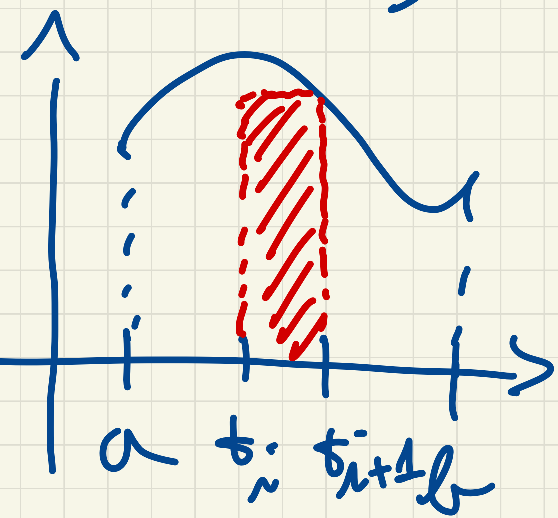


POSSIAMO ADESSO FORMALIZZARE RIGOROSAMENTE L'IDEA DELL'APPROSSIMAZIONE

DEFINIZIONE SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ LIMITATA, PER OGNI $\{t_0,\dots,t_n\}\in \mathcal{P}([a,b])$

SI DEFINISCE

$$S_-(f;\{t_0,\dots,t_n\}) = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(t_{i+1}-t_i)}_{\text{BASE}} \overbrace{\inf_{[t_i,t_{i+1}]} f}^{\text{ALTEZZA}}$$



CHE SI CHIAMA

SOMMA DI RIEMANN INFERIORE DI f SUBORDINATA ALLA PARTIZIONE $\{t_0, \dots, t_n\}$.

ANALOGAMENTE, DEFINISCO

$$S_+(f; \{t_0, \dots, t_n\}) = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{\text{BASE}} \cdot \underbrace{\sup_{[t_i, t_{i+1}]} f}_{\text{ALTEZZA}}$$

CHE SI CHIAMA

SOMMA DI RIEMANN SUPERIORE DI f SUBORDINATA ALLA PARTIZIONE $\{t_0, \dots, t_n\}$

$\boxed{\text{OSS.}}$ NEL CASO IN CUI f SIA POSITIVA, NON È DIFFICILE VEDERE CHE $S_-\left(f; \{t_0, \dots, t_n\}\right)$ ED $S_+\left(f; \{t_0, \dots, t_n\}\right)$ RAPPRESENTANO

UN'APPROSSIMAZIONE DELL'AREA DI $T(f; [a, b])$

(LA PRIMA "PER DIFETTO", LA SECONDA "PER ECCESSO").

INOLTRE, ~~PER~~ COSTRUZIONE, SI AVRÀ SEMPRE

$$S_+(f; \{t_0, \dots, t_n\}) \geq S_-(f; \{x_0, \dots, x_k\})$$

PER OGNI COPPIA DI PARTIZIONI

$\{t_0, \dots, t_n\}, \{x_0, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}([a,b])$

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ SIA $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
FUNZIONE LIMITATA.
DEFINIAMO

$$S_- = \sup\left\{ S_-\left(f, \{t_0, \dots, t_n\}\right) : \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}([a,b]) \right\}$$

("LA MIGLIOR APPROSSIMAZIONE PER DIFETTO")

$$\overline{S}_f = \inf\left\{ S_+\left(f, \{t_0, \dots, t_n\}\right) : \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}([a,b]) \right\}$$

("LA MIGLIOR APPROSSIMAZIONE PER ECCESSO")

SI DICE CHE f È RIEMANN INTEGRABILE SU $[a, b]$ SE VALE

$$\boxed{S_- = S_+}$$

IN TAL CASO, INDICHIAMO QUESTO VALORE COMUNE CON IL SIMBOLO

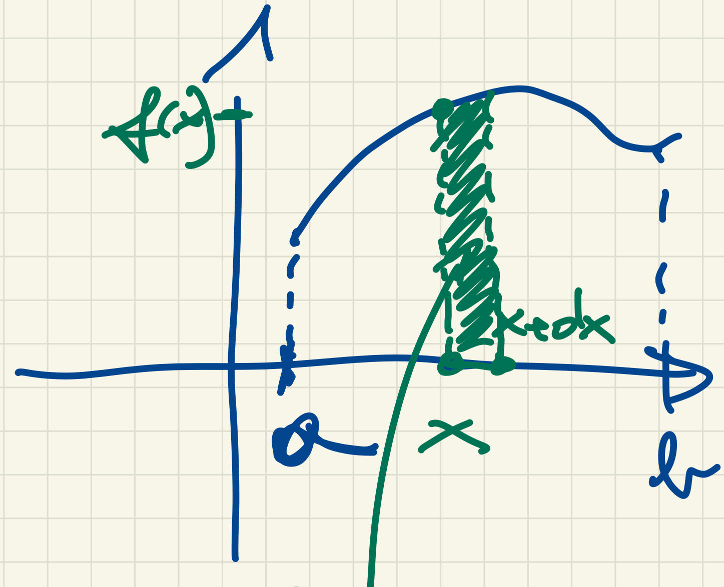
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

E LO CHIAMIAMO INTEGRALE DI RIEMANN DI f SU $[a, b]$

OSS. (COMMENTO SUL SIMBOLO)

$$\underbrace{\int_a^b}_{\text{S DI "SOMMA"}} \overbrace{f(x)}^{\text{ALTEZZA}}\,\overbrace{dx}^{\text{BASE}}$$

AREA DELLA STRISCIOLINA INFINITESIMA



STRISCIOLINA INFINITESIMA

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (CONDIZIONI SUFFICIENTI DI INTEGRABILITÀ)

SIA $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE LIMITATA, AVENTE ALMENO 1 DELLE PROPRIETÀ SEGUENTI:

1. f È CONTINUA SU $[a, b]$
2. f È MONOTONA SU $[a, b]$

ALLORA f È RIEMANN INTEGRABILE SU $[a,b]$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

DOBBIAMO PORCI ADESSO QUESTA DOMANDA: SE $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ È RIEMANN INTEGRABILE, COME SI CALCOLA CONCRETAMENTE

$$\int_a^b f(x)\,dx \,?$$

DOBBIAMO USARE LA DEFINIZIONE OPPURE.... ?

LASCIAMO PER UN ATTIMO IN SOSPESO QUESTA DOMANDA.

VEDIAMO PRIMA ALCUNE PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DI RIEMANN:

I SIANO $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ RIEMANN INTEGRABILI, SIANO $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ALLORA $\alpha f + \beta g$ È ANCORA RIEMANN INTEGRABILE E VALE

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx$$

$$= \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

II SE $f(x) \leq g(x)$ PER OGNI $x \in [a, b]$

ALLORA $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$

III SE $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ È RIEMANN INTEGRABILE, ANCHE $|f|$ È RIEMANN INTEGRABILE E VALE

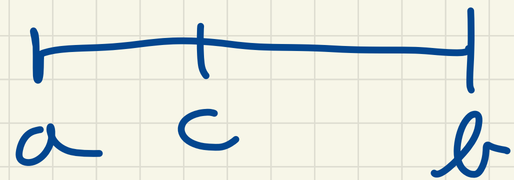
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

IV SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ RIEMANN INTEGRABILE E SIA $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$

ALLORA f È RIEMANN INTEGRABILE ANCHE SU $[\alpha, \beta]$.

V SIA $c \in [a, b]$, ALLORA

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



VI.3 "IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE"

IN QUESTA SEZIONE, CERCHIAMO DI CAPIRE COME SI CALCOLA

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

SENZA DOVER RICORRERE ALLA SUA DEFINIZIONE.

$\boxed{\text{PROPOSIZIONE}}$ (MEDIA INTEGRALE)

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA. ALLORA $\exists\, z\in[a,b]$

TALE CHE

$$f(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

DIM.

OSSERVIAMO CHE $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

IN QUANTO CONTINUA, AMMETTE

MASSIMO $M = \max_{[a,b]} f$ (× TEO. WEIERSTRASS)

E minimo $m = \min_{[a,b]} f$

INOLTRE, f È RIEMANN INTEGRABILE IN QUANTO CONTINUA (V. TEOREMA PRECEDENTE)

ABBIAMO

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b]$$

PER UNA DELLE PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE SI HA

$$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx$$

ORA, PER COSTRUZIONE DI INTEGRALE DI RIEMANN, SI HA

(SE CER) $$\int_a^b c \, dx = c(b-a)$$

OVVERO QUINDI

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

DA CUI DIVIDENDO PER $(b-a)$

$$\boxed{m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{MEDIA INTEGRALE}} \leq M}$$

OVVERO $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ È

UN NUMERO COMPRESO TRA IL MASSIMO DI f ED IL SUO MINIMO.

ORA, DAL TEOREMA DEI VALORI

INTERMEDI, OGNI $y \in [m, M]$

FA PARTE DELL'IMMAGINE DI f.

PRENDENDO $y = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$

SI CONCLUDE CHE $\exists\, z \in [a, b]$

T.C. $f(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ ▨

ARRIVIAMO QUINDI AL

TEOREMA (FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)

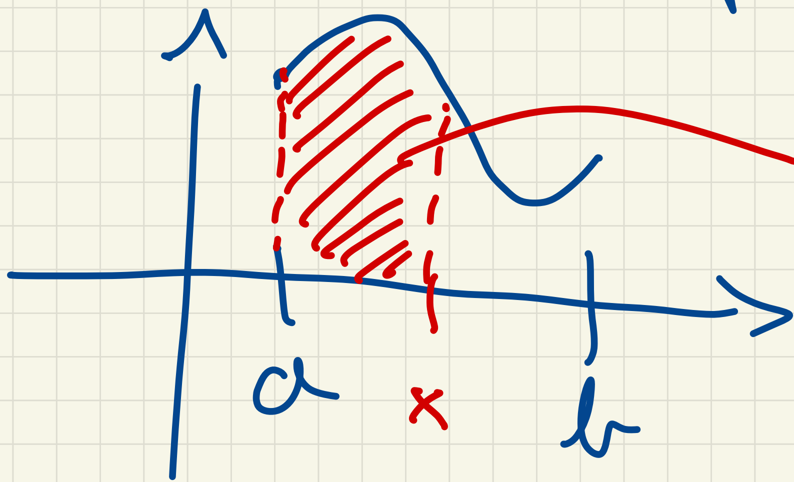
SIA $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA.

ALLORA LA SUA FUNZIONE INTEGRALE

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad , \forall x \in [a, b]$$

È DERIVABILE SU (a, b) E VALE

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a,b)$$



QUESTA AREA $= F(x)$

LA DIMOSTRAZIONE LA VEDIAMO NELLA PROSSIMA LEZIONE.

DEFINIZIONE SIA $f : (a,b) \to \mathbb{R}$

UNA FUNZIONE f, CHIAMIAMO PRIMITIVA DI f SU (a,b)

OGNI FUNZIONE

$F : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ DERIVABILE

E TALE CHE

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a,b)$$

$\boxed{\text{OSS.}}$ IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE CI

STA QUINDI DICENDO CHE

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

(FUNZIONE INTEGRALE DI f)

È UNA PRIMITIVA DI f.

$\boxed{\text{PROPOSIZIONE}}$ SIA $H: (a, b) \to \mathbb{R}$ DERIVABILE. SE $H'(x) = 0$ PER OGNI $x \in (a, b)$ $\Rightarrow$ H È COSTANTE SU (a, b).

IN PARTICOLARE, SE $F, G : (a,b) \to \mathbb{R}$ SONO TALI CHE

$$F'(x) = G'(x), \quad \forall x \in (a,b)$$

ALLORA $\exists\, c \in \mathbb{R}$ T.C.

$$F(x) = G(x) + c.$$

DIM.

SE $H'(x) = 0$ PER OGNI $x \in (a,b)$

DAL TEST DI MONOTONIA ABBIAMO CHE

H DEVE ESSERE COSTANTE.

SUPPONIAMO QUINDI CHE F E G ABBIANO LA STESSA DERIVATA, ALLORA LA FUNZIONE DIFFERENZA

$$H(x) = F(x) - G(x)$$

HA DERIVATA

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$$ QUINDI

$\exists\, c \in \mathbb{R}$ T.C.

$$c = H(x) = F(x) - G(x)$$

COME VOLEVAMO $\blacksquare$

COROLLARIO

SIA $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA

E SIA G UNA PRIMITIVA DI f.

ALLORA

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)}$$

DIM.

DAL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO SAPPIAMO CHE

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$ È UNA PRIMITIVA DI f

ANCHE G È PRIMITIVA DI f, QUINDI

$$F'(x) = f(x) = G'(x)$$

E PER LA PROPOSIZIONE PRECEDENTE $\exists\, c \in \mathbb{R}$ T.C.

$$F(x) = G(x) + c \, .$$

ABBIAMO QUINDI

$$G(b) - G(a) = (F(b) - \cancel{c}) - (F(a) - \cancel{c})$$

$$= F(b) - F(a)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dt - \cancel{\int_a^a f(x)\,dt} \quad = 0$$

$$= \int_a^b f(x)\,dt \qquad \blacksquare$$