# Analisi Matematica A
# – *Lezione 2* –

**Lorenzo Brasco**

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 2 Ottobre 2020

## Esercizio (Somma geometrica - Importante)

*Sia* $a \neq 1$ *e non nullo, dimostrare che per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

## Soluzione

- Procediamo per induzione
- Passo 1: base dell'induzione. Per $n = 0$ si vede facilmente che la formula è vera, infatti

$$\sum_{k=0}^{0} a^k = a^0 = 1$$

  cioè la sommatoria contiene un unico termine (corrispondente alla scelta $k = 0$)

- inoltre il membro di destra nella formula, per $n = 0$ vale

$$\frac{a^{0+1} - 1}{a - 1} = \frac{a - 1}{a - 1} = 1$$

- Passo 1: OK!
- Passo 2: passo induttivo Supponiamo adesso che la formula iniziale valga per un certo $n \in \mathbb{N}$, ovvero che per un certo $n \in \mathbb{N}$ si abbia

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \qquad \textit{ipotesi induttiva}$$

- dobbiamo dimostrare che usando questa ipotesi, possiamo dimostrare che la formula vale anche per $n + 1$, ovvero che si ha

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \frac{a^{n+2} - 1}{a - 1}$$

- riscriviamo la sommatoria da 0 a $n+1$, come segue

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \boxed{\sum_{k=0}^{n} a^k} + a^{n+1}$$

ovvero scriviamo esplicitamente l'ultimo termine della sommatoria

- perché? Abbiamo già visto questo trucco in un esercizio precedente, adesso sul termine nel riquadro possiamo usare l'ipotesi induttiva

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

- abbiamo quindi

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1}$$

- adesso dobbiamo solo scrivere meglio l'ultimo termine

- si ha

$$\frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+1}(a-1)}{a-1}$$
$$= \frac{\cancel{a^{n+1}}-1+a^{n+2}\cancel{-a^{n+1}}}{a-1}$$
$$= \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$$

- abbiamo quindi mostrato che l'ipotesi induttiva implica

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \frac{a^{n+2}-1}{a-1},$$

che è la formula iniziale, per $n+1$

- PASSO 2: OK!
- dal *Principio di induzione*, la formula è vera per ogni $n$

—

- La formula della *somma geometrica* sarà molto importante, ci servirà nel Capitolo III quando faremo le *serie numeriche*

- intanto, facciamo vedere una conseguenza interessante della formula precedente

—

## Esercizio (Il “falso” binomio di Newton)

*Siano $x, y$ due numeri positivi. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha*

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y) \sum_{k=0}^{n} x^k \, y^{n-k}$$

## Soluzione

- Osserviamo innanzitutto che se $x = y$ la formula è banalmente vera, perché ambo i membri valgono 0
- inoltre, se $y = 0$ la formula è banalmente vera, entrambi i termini valgono $x^{n+1}$
- supponiamo adesso $x \neq y$ e $y \neq 0$, dimostriamo la formula in generale

- usando le proprietà delle potenze

$$y^{n-k} = y^n \, y^{-k} = y^n \, \frac{1}{y^k},$$

- si ottiene

$$(x-y) \sum_{k=0}^{n} x^k \, y^{n-k} = (x-y) \, y^n \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{y^k} = (x-y) \, y^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x}{y}\right)^k$$

- nell'ultima sommatoria, usiamo la formula per la *somma geometrica* (vedi esercizio precedente)

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

con la scelta $a = x/y$...

- ...si ottiene

$$(x-y)\sum_{k=0}^{n} x^k\, y^{n-k} = (x-y)\, y^n \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x}{y}\right)^k$$
$$= (x-y)\, y^n\, \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}-1}{\frac{x}{y}-1}$$

- svolgiamo adesso un po' di conti per semplificare l'ultima espressione

$$(x-y)\, y^n\, \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}-1}{\frac{x}{y}-1} = (x-y)\, y^n\, \frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{(x-y)\, y^n}$$

- osserviamo che l'ultima quantità è ben definita, in quanto stiamo supponendo $x \neq y$ e $y \neq 0$

- facciamo le dovute semplificazioni

$$\cancel{(x-y)}\,\cancel{y^n}\,\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{\cancel{(x-y)}\,\cancel{y^n}}$$

- abbiamo ottenuto in definitiva

$$(x-y)\sum_{k=0}^{n} x^k\, y^{n-k} = x^{n+1} - y^{n+1}$$

come volevamo!

## Alleniamoci un po' con le sommatorie

Nella formula precedente, appariva il termine

$$\sum_{k=0}^{n} x^k\, y^{n-k}$$

Scrivendo esplicitamente i termini della sommatoria ed usando che $x^0 = y^0 = 1$, si ha

$$\sum_{k=0}^{n} x^k\, y^{n-k} = \underbrace{y^n}_{k=0} + \underbrace{x\, y^{n-1}}_{k=1} + \underbrace{x^2\, y^{n-2}}_{k=2} + \cdots + x^{n-2}\, y^2 + x^{n-1}\, y + x^n$$

- per $n = 2$
$$\sum_{k=0}^{2} x^k\, y^{n-k} = y^2 + x\, y + x^2$$
- per $n = 1$
$$\sum_{k=0}^{1} x^k\, y^{n-k} = y + x$$

## Casi particolari del “falso” binomio di Newton

A questo punto, possiamo dire che due casi particolari della formula precedente vi saranno probabilmente già noti

Si tratta dei casi $n = 1$ e $n = 2$: in tali casi la formula del *“falso” binomio di Newton* diventa rispettivamente

$$\boxed{x^2 - y^2 = (x - y)\,(x + y)}$$

e

$$\boxed{x^3 - y^3 = (x - y)\,(x^2 + x\,y + y^2)}$$

## Una domanda sorge spontanea

Se la formula precedente l'abbiamo chiamata *"falso" binomio di Newton*, forse c'è anche un *"vero" binomio di Newton*?

Ovviamente sì: la formula del binomio di Newton è quella che serve per calcolare la potenza $n-$esima di un binomio, ovvero

$$(a+b)^n = ....$$

La vedremo tra un po', perché prima ci serve parlare di....

# I.4 Fattoriale e binomiale

## Definizione

Sia $n \in \mathbb{N}$, si definisce il numero $n!$ (da leggersi $n$ **fattoriale**) tramite la relazione ricorsiva

$$\begin{cases} 0! & = & 1, \\ (n+1)! & = & (n+1) \cdot n!, \qquad \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

In altre parole, si ha

$$0! = 1, \qquad 1! = 1 \cdot 1 = 1, \qquad 2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2! = 6, \qquad 4! = 4 \cdot 3! = 24, \qquad 5! = 5 \cdot 4! = 120$$

e così via

## Importante

Si osservi che in base alla definizione, vale in particolare che

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

## Significato del fattoriale

Supponiamo di avere un insieme $S$ formato da $n$ elementi distinti

**Domanda**: quante $n-$uple diverse posso formare con gli elementi di $S$, senza che ci siano ripetizioni?

- in altre parole, immaginiamoci di avere a disposizione $n$ caselle vuote
$$\square \quad \square \quad \square \quad \dots \quad \square$$
da riempire con gli elementi di $S$
- in ogni casella dobbiamo mettere uno ed un solo elemento di $S$
- quante saranno le combinazioni possibili?

- cominciamo dalla casella più a sinistra

$$\underbrace{\square}_{\uparrow} \quad \square \quad \square \quad \dots \quad \square$$

- per essa, abbiamo completa libertà di scelta, ovvero possiamo mettere un elemento qualsiasi di $S$
- abbiamo quindi $n$ possibilità per la prima casella
- una volta che fatta la prima scelta, passiamo alla seconda casella

$$\square \quad \underbrace{\square}_{\uparrow} \quad \square \quad \dots \quad \square$$

- adesso abbiamo $n-1$ scelte, visto che un elemento di $S$ l'abbiamo già usato per riempire la prima casella
- ricapitolando: per riempire le prime due caselle, abbiamo a disposizione

$$n \cdot (n-1)$$

possibilità

- passiamo adesso alla terza casella

$$\square \quad \square \quad \underbrace{\square}_{\uparrow} \quad \dots \quad \square$$

- per essa, le possibilità si sono ridotte a $n - 2$ (avevamo $n$ elementi, ma 2 li abbiamo già piazzati)
- per le prime tre caselle abbiamo quindi

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$$

possibilità

- proseguendo in questo modo fino ad esaurire gli elementi e le caselle, in totale abbiamo le seguenti possibilità di riempimento

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Più in generale possiamo rispondere alla domanda seguente:

*dato un insieme $S$ formato da $n$ elementi e dato $1 \leq k \leq n$, quante $k-$uple con elementi distinti di $S$ si possono formare?*

## Fattoriale troncato

- dobbiamo riempire adesso $k$ caselle
- possiamo ragionare come nel caso precedente
- ed ottenere che la risposta è data da

$$n \cdot (n-1) \cdot \ \ldots \ \cdot (n-k+1).$$

- osservate infatti che quando arriviamo a riempire la $k-$esima (e ultima!) casella, abbiamo già riempito $k-1$ caselle...
- ...ovvero, abbiamo già usato $k-1$ elementi di $S$
- all'ultima casella, le scelte a nostra disposizione sono quindi

$$\underbrace{n} - \underbrace{(k-1)} = n-k+1$$

## Esercizio

*Sia* $S = \{a, b, c\}$ *l'insieme formato dai* 3 *elementi* $a$, $b$ *e* $c$. *Quante sono le coppie di elementi distinti che possiamo formare con gli elementi di* $S$*?*

## Soluzione

- Ci basta utilizzare la formula del **fattoriale troncato** con le scelte

$$n = 3 \qquad \text{e} \qquad k = 2$$

- quindi il numero di coppie è

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = 3 \cdot 2 = 6$$

- **verifica**: effettivamente tutte le coppie di elementi distinti di $S$ sono date da

$$a\,b \qquad b\,a \qquad a\,c \qquad c\,a \qquad b\,c \qquad c\,b$$

## Definizione

Siano $n, k \in \mathbb{N}$, con $k \leq n$. Il **coefficiente binomiale** $n$ **su** $k$ è il numero naturale definito da

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ \ldots \ \cdot (n-k+1)}{k!}$$

## Osservazione

In base alla definizione di fattoriale, possiamo anche riscrivere il coefficiente binomiale come

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Infatti

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ \ldots \ \cdot (n-k+1) \cdot \cancel{(n-k)!}}{k!\,\cancel{(n-k)!}}$$

## Significato del coefficiente binomiale

- Prendiamo un insieme $S$ formato da $n$ elementi distinti
- Fissiamo $1 \leq k \leq n$ e poniamoci una nuova domanda:

  *quante $k-$uple diverse posso formare con elementi* **distinti** *di $S$, senza tenere conto dell'***ordine** *in cui scrivo gli elementi?*
- Cerchiamo di capire la domanda, ripartendo dall'Esercizio con l'insieme $S = \{a, b, c\}$ visto in precedenza
- Vogliamo sapere quante coppie di elementi distinti possiamo formare, **senza però** tenere conto dell'ordine in cui sono scritti gli elementi di ogni coppia
- in altre parole, in questo nuovo problema

$$a\,b \qquad \text{oppure} \qquad b\,a,$$

sono esattamente la stessa coppia.

- nell'esercizio precedente, abbiamo calcolato esplicitamente tutte le coppie di elementi distinti
- accorpando quelle che differiscono solo per la permutazione degli elementi, la risposta è 3
- le coppie in questione sono infatti

$$a\,b \qquad b\,c \qquad a\,c$$

- cerchiamo adesso di rispondere alla domanda nel caso generale
- l numero che ci interessa si otterrà nel modo seguente:

$$\frac{\text{numero di } k\text{−uple di elementi distinti di } S}{\text{numero in cui disporre } k \text{ elementi distinti in modo diverso}}$$
$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \; \ldots \; \cdot (n-k+1)}{k!}$$

ovvero è esattamente il coefficiente binomiale $n$ su $k$

In altre parole, la risposta alla domanda

*quante $k-$uple diverse posso formare con elementi* **distinti** *di $S$, senza tenere conto dell'***ordine** *in cui scrivo gli elementi?*

è data da

$$\binom{n}{k}$$

## Esercizio (Una regola utile)

*Siano $k, n \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$. Usando la definizione, si dimostri che*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

## Soluzione

- Basta scrivere esplicitamente i due coefficienti binomiali
- si ha
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$
e
$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!},$$
- essi effettivamente coincidono

## Esempio

Calcoliamo alcuni coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$ notevoli

Sia $n \geq 2$, allora si ha

- per $k = 0$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

- per $k = 1$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

- per $k = 2$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{1}{2}\,\frac{n\,(n-1)!}{(n-2)!} = \frac{1}{2}\,\frac{n\,(n-1)\,(n-2)!}{(n-2)!}$$
$$= \frac{n\,(n-1)}{2}$$

Da questi, ricordando la formula

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

si ha anche

$$\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2},$$

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n,$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$$

Vi lascio un paio di semplici esercizi per casa, per prendere un po' di confidenza col fattoriale ed il binomiale

### Esercizio (Lo scassinatore maldestro)

*Un ladro un po' maldestro è venuto in possesso di una valigia (prodotta dalla* SANSONAIT*) piena di oggetti di valore. La valigia è chiusa da un codice di sicurezza a* 3 *cifre, ogni cifra è un numero da* 0 *a* 9*. Il ladro non conosce il codice esatto di sbloccaggio e non ha con sé alcuno strumento per forzare l'apertura o indovinare il codice. L'unica cosa che il ladro sa, è che per le valigie* SANSONAIT *il codice di* 3 *cifre non contiene ripetizioni. Quanti codici possibili deve provare il ladro, prima di essere sicuro di aprire la valigia?*

## Esercizio

*Lo stesso ladro di cui sopra, si impossessa stavolta di una valigia di marca* RONCHELLI. *Le valigie di questa marca hanno un codice di sicurezza apparentemente più complicato: infatti, il codice è composta da ben* 5 *cifre (ogni cifra è un numero da* 0 *a* 9*). Per poterla aprire però, è sufficiente in realtà digitare correttamente le* 5 *cifre che compongono il codice, non importa in che ordine siano messe le cifre. Sapendo di nuovo che il codice non contiene ripetizioni, quanti codici possibili deve provare il ladro, prima di essere sicuro di aprire la valigia?*

## Esercizio ("Somma di binomiali")

*Dimostrare che per ogni* $n, k \in \mathbb{N}$ *tali che* $1 \leq k \leq n$, *si ha*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

## Soluzione

- Dobbiamo ricordarci che

$$k \cdot (k-1)! = k!$$

- adesso basta scrivere esplicitamente i binomiali e svolgere qualche calcolo

- infatti si ha

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}$$

- facciamo il minimo comune denominatore delle due frazioni
- moltiplico e divido la prima frazione per $(n-k+1)$....
- ...moltiplico e divido la seconda frazione per $k$
- abbiamo così

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)\cdot(n-k)!} + \frac{n!\,k}{k\cdot(k-1)!\,(n-k+1)!}$$

- usiamo adesso che

$$(n-k+1)\cdot(n-k)! = (n-k+1)! \qquad \text{e} \qquad k\cdot(k-1)! = k!$$

- fin'ora abbiamo quindi ottenuto

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} + \frac{n!\,k}{k!\,(n-k+1)!}$$

- raccogliendo un $n!$ a numeratore, si ha

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!\,(n-k+1) + n!\,k}{k!\,(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!\,(n \cancel{-k} + 1 + \cancel{k})}{k!\,(n-k+1)!}\end{aligned}$$

- ovvero abbiamo

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{(n+1)\,n!}{k!\,(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k},$$

come volevamo!

## Esercizio (Binomio di Newton)

*Siano $x, y$ due numeri positivi. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}$$

## Soluzione

- Procediamo usando il principio di induzione
- PASSO 1: BASE DELL'INDUZIONE. Per $n = 1$ la formula diventa
$$x + y = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^k\, y^{1-k}$$
- è immediato verificare che questa formula è vera, basta ricordare che $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$

- PASSO 1: OK!
- PASSO 2: PASSO INDUTTIVO Supponiamo adesso che la formula iniziale valga per un certo $n \in \mathbb{N}$, ovvero che per un certo $n \in \mathbb{N}$ si abbia

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k} \qquad \text{ipotesi induttiva}$$

- vorremmo dimostrare che questo ci permette di concludere che la formula è vera anche per $n+1$
- in altre parole, dobbiamo dimostrare che vale l'implicazione

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k} \quad \Longrightarrow \quad (x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k\, y^{n+1-k}$$

- osserviamo innanzitutto che possiamo scrivere

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)\,(x+y)^n,$$

- usando questo semplice fatto e l'ipotesi induttiva, si ha

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)\,(x+y)^n \\ &= (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,y^{n-k}\end{aligned}$$

- usiamo la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, quindi

$$(x+y)^{n+1} = x\,\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,y^{n-k} + y\,\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,y^{n-k}$$

- che possiamo anche riscrivere come

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}\,y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,y^{n-k+1}$$

- riscriviamo adesso la prima sommatoria, cambiando il nome dell'indice di somma e ponendo $k = m - 1$

- in termini del nuovo indice $m = k + 1$ (che andrà adesso da 1 a $n+1$), la prima sommatoria diventa

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1}\, y^{n-k} = \sum_{m=1}^{n+1} \binom{n}{m-1} x^{m}\, y^{n-m+1},$$

- fin'ora abbiamo ottenuto

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{m=1}^{n+1} \binom{n}{m-1} x^{m}\, y^{n-m+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k}\, y^{n-k+1}$$

- nella prima sommatoria scriviamo esplicitamente il termine con $m = n + 1$
- nella seconda sommatoria scriviamo esplicitamente il termine con $k = 0$ e rinominiamo l'indice $k = m$
- allora, abbiamo ottenuto

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{m=1}^{n} \left[ \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} \right] x^{m}\, y^{n-m+1}$$

- utilizziamo adesso l'Esercizio "*Somma di binomiali*" per dire che
$$\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}$$
- abbiamo allora
$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{m=1}^{n} \binom{n+1}{m} x^m \, y^{n-m+1}$$
- infine, se si ricorda che
$$\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1,$$
l'ultima formula può essere riscritta
$$(x+y)^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} x^k \, y^{n-m+1},$$

- ....ovvero la formula del binomio di Newton per $n + 1$
- quindi PASSO 2: OK!
- per il principio di induzione, la formula vale per ogni $n \geq 1$

## Casi particolari del binomio di Newton

- per $n = 2$, si ha

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} x^k\, y^{2-k} \\
&= \binom{2}{0} y^2 + \binom{2}{1} x\, y + \binom{2}{2} x^2 \\
&= y^2 + 2\, x\, y + x^2
\end{aligned}
$$

  ovvero la ben nota formula per il quadrato del binomio

- per $n = 3$, si ha

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} x^k\, y^{3-k} \\ &= \binom{3}{0} y^3 + \binom{3}{1} x\, y^2 + \binom{3}{2} x^2\, y + \binom{3}{3} x^3 \\ &= y^3 + 3\, x\, y^2 + 3\, x^2\, y + x^3\end{aligned}$$

ovvero la ben nota formula per il cubo del binomio

Abbiamo usato che

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \text{e} \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

con $n = 3$

Come utile esercizio per casa, per prendere dimestichezza con questa formula, scrivete esplicitamente

$$(x+y)^4 \qquad (x+y)^5 \qquad (x+y)^6$$