

ANALISI MATEMATICA A

- LEZIONE 17 -

LORENZO BRASCO

25 NOVEMBRE 2020

CAPITOLO V

"CALCOLO DIFFERENZIALE
PER FUNZIONI DI
UNA VARIABILE"

V.1 "RETTA TANGENTE AL GRAFICO"

RICORDO CHE L'EQUAZIONE
DI UNA RETTA GENERICA
NEL PIANO CARTESIANO

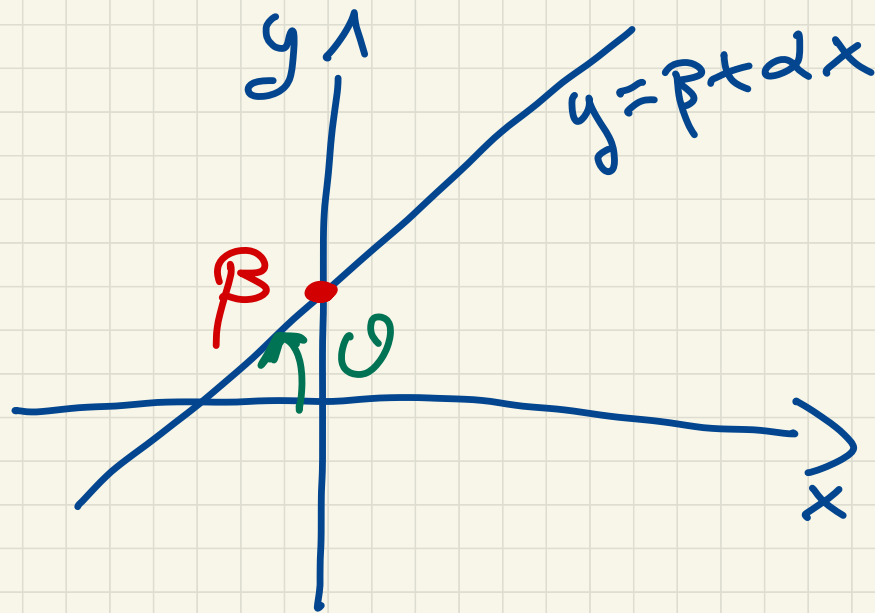
(CHE NON SIA PARALLELA ALL'ASSE
DELLE ORDINATE) È DATA DA

$$y = \beta + \alpha x, \text{ PER } x \in \mathbb{R}$$

I COEFFICIENTI $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ RAPPRESENTANO

IL COEFFICIENTE ANGOLARE (α)

E L'ORDINATA DI INTERSEZIONE (β)

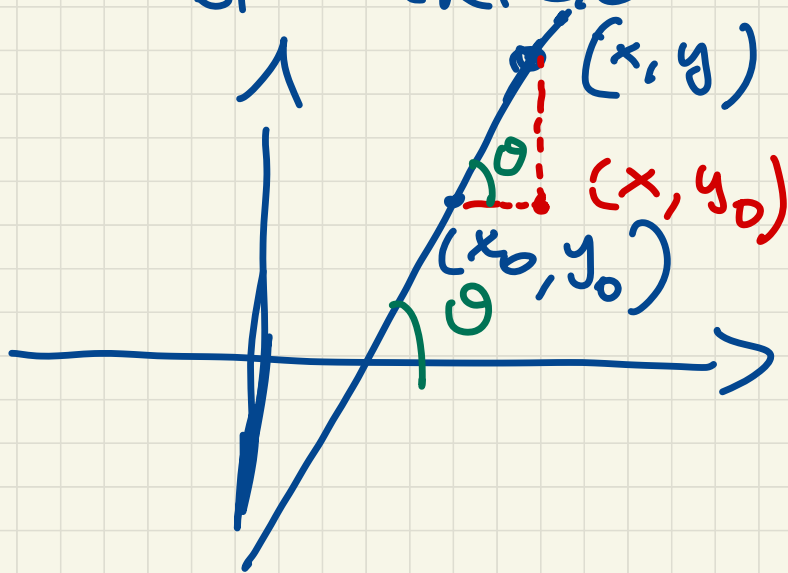


RICORDIAMO CHE VALE LA
RELAZIONE

$$\alpha = \tan \vartheta$$

(PROVATE A DIMOSTRARLO, USANDO LA TRIGONOMETRIA)

NEL CASO IN CUI VOLESSIMO
L'EQUAZIONE DI UNA
GENERICA RETTA PASSANTE
DA (x_0, y_0) , USANDO UN
PO' DI TRIGONOMETRIA SI HA



DALLA DEFINIZIONE
DI TANGENTE

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \tan \theta$$

OVVERO

$$y - y_0 = \tan \vartheta (x - x_0)$$

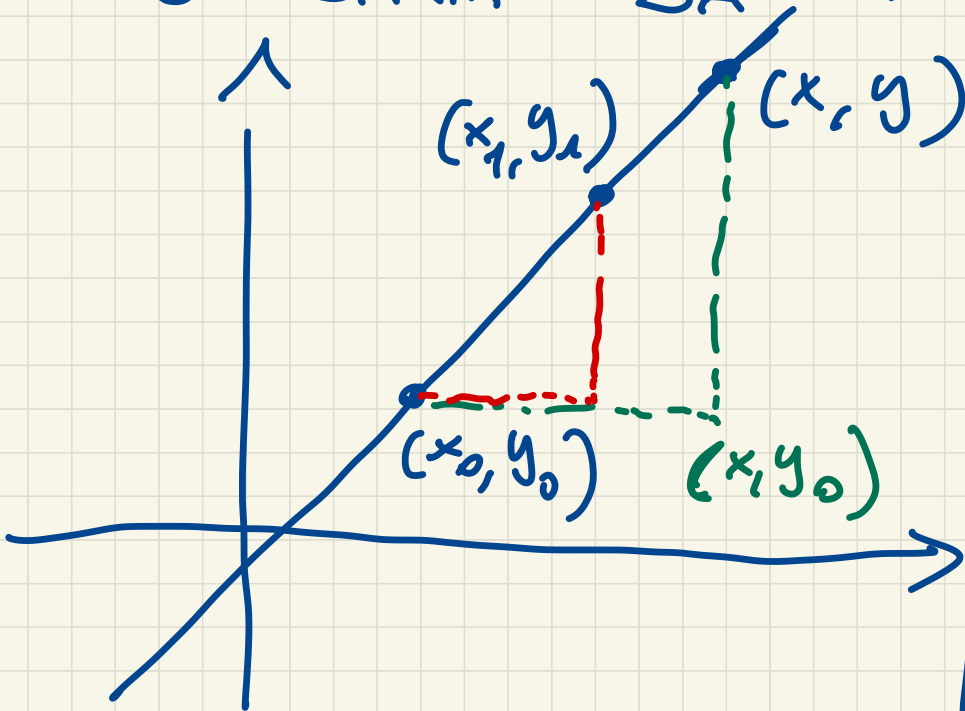
OVVERO PONENDO $\alpha = \tan \vartheta$

$$y = y_0 + \alpha (x - x_0)$$

- INFINE, RICORDIAMO CHE
L'EQUAZIONE DELLA (UNICA!) RETTA

PASSANTE DA 2 PUNTI
ASSEGNATI (x_0, y_0) E (x_1, y_1)

È DATA DA :



1 TRIANGOLI
RETTANGOLI
ROSSO E
VERDE SONO
SIMILI,
QUINDI

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

OVVERO

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

OVVERO

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

NOTATE CHE DAL CONFRONTO
CON LA FORMULA CERCHIATA
IN ROSSO DI PRIMA, ABBIAMO

CHE

$$\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

è

IL COEFFICIENTE ANGOLARE
DELLA RETTA PASSANTE
DA $(x_0, y_0) \in (x_1, y_1)$

DEFINIZIONE SIA $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$
E SIA $x_0 \in (a, b)$. SI DICE
CHE

$$y = f(x_0) + d(x - x_0)$$

È L'EQUAZIONE DELLA RETTA
TANGENTE AL GRAFICO DI f NEL
PUNTO $(x_0, f(x_0))$ SE VALE
LA SEGUENTE IDENTITÀ ASINTOTICA:

$$f(x) = f(x_0) + \alpha (x - x_0) + o((x - x_0))$$

EQUAZIONE
DELLA RETTA

PER
 $x \rightarrow x_0$

COMMENTO LA RETTA TANGENTE

È QUINDI LA RETTA CHE
APPROSSIMA I VALORI DI f VICINO
AD x_0 , A MENO DI UN ERRORE
CHE È TRASCURABILE RISPETTO

ALLA DISTANZA $x - x_0$ DAL
PUNTO "BASE" x_0 .

ESEMPIO ① RICORDATE CHE

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{SI POTEVA}$$

RISCRIVERE COME L'IDENTITÀ
ASINTOTICA

$$\sin x = x + o(x) \quad \text{PER } x \rightarrow 0$$

QUESTA È ESATTAMENTE
DELLA FORMA

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x-x_0) + o(x-x_0)$$

PER
 $x \rightarrow x_0$

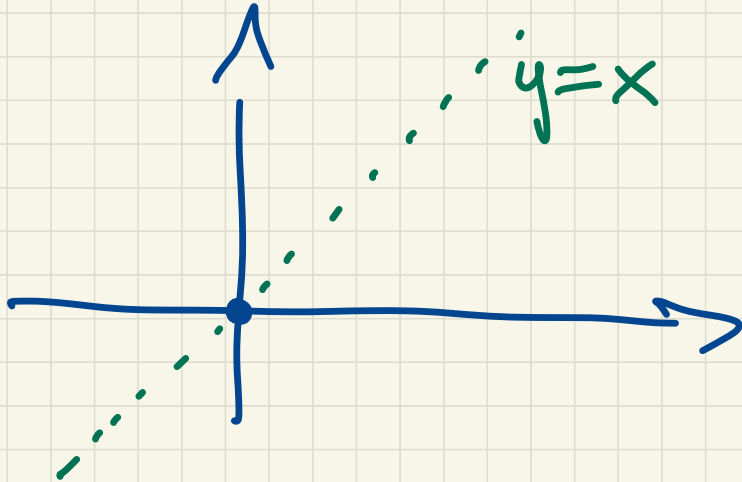
AVENDO SCELTO

- $x_0 = 0$
 - $f(x) = \sin x$
 - $\alpha = 1$
- (OSSERVA CHE
 $\sin(0) = 0$)

ABBIAMO QUINDI CHE

$$y = x$$

È L'EQUAZIONE DELLA RETTA
TANGENTE AL GRAFICO DEL
SENUSO NEL PUNTO $(0, \sin(0)) = (0, 0)$



$$\sin x = \underbrace{x}_{\substack{\text{RETTA} \\ \text{TANGENTE} \\ \text{IN } (0,0)}} + o(x) \quad \text{PER } x \rightarrow 0$$

② IN MODO SIMILE, DA

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad \log(1+x) \sim x$$

PER
 $x \rightarrow 0$

ovvero $\log(1+x) = x + o(x)$

PER
 $x \rightarrow 0$

D'ALTRONDE, $y = x$ È

L'EQUAZIONE DELLA RETTA
TANGENTE AL GRAFICO

DI $f(x) = \log(1+x)$
NEL PUNTO $(0, \log(1+0)) = (0, 0)$

③ AVEVAMO ANCHE VISTO CHE

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \text{ OVVERO}$$

CHE $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ PER $x \rightarrow 0$

DA CUI

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ PER } x \rightarrow 0$$

OSSERVANDO CHE $x^2 = o(x)$
PER $x \rightarrow 0$, ABBIAMO
IN PARTICOLARE

$$\cos x = 1 - \underbrace{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{= o(x)} = 1 + o(x) \quad \text{PER } x \rightarrow 0$$

OVVERO

$y = 1$ È LA RETTA
TANGENTE AL
GRAFICO DEL COSENO
NEL PUNTO $(0, 1)$

OSS. LA DEFINIZIONE DI RETTA
TANGENTE È BEN POSTA,
NEL SENSO CHE LA RETTA
TANGENTE SE ESISTE, ALLORA
ESSA È UNICA

X CASA : DIMOSTRATE QUESTA
AFFERMAZIONE

V.2 IL CONCETTO DI DER VATA

DEFINIZIONE SIA $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$
SI DICE CHE f È DERIVABILE
IN $x_0 \in (a, b)$ SE
ESISTE ED È FINITO

IL LIMITE SEGUENTE

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

IN TAL CASO, CHIAMIAMO TALE LIMITE

DERIVATA DI f IN x_0 $\hat{=}$ USFRESCO

LA NOTAZIONE

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

O ANCHE

$$\frac{d}{dx} f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

IL RAPPORTO

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

PER
 $h \neq 0$

SI CHIAMA RAPPORTO

INCREMENTALE DI f IN x_0

- CHE COSA RAPPRESENTA
IL RAPPORTO INCREMENTALE?

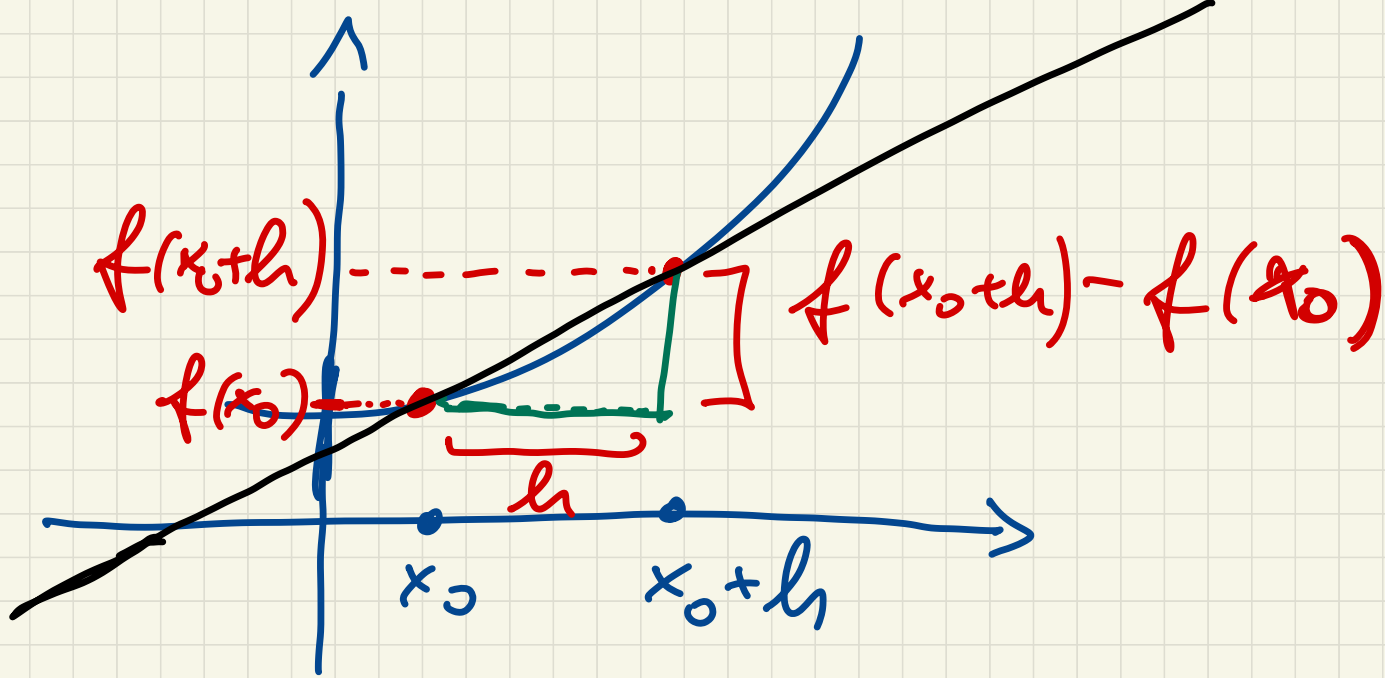
OSS. (INTERPRETAZIONE GEOMETRICA)

SI VEDE CHE LA QUANTITÀ

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

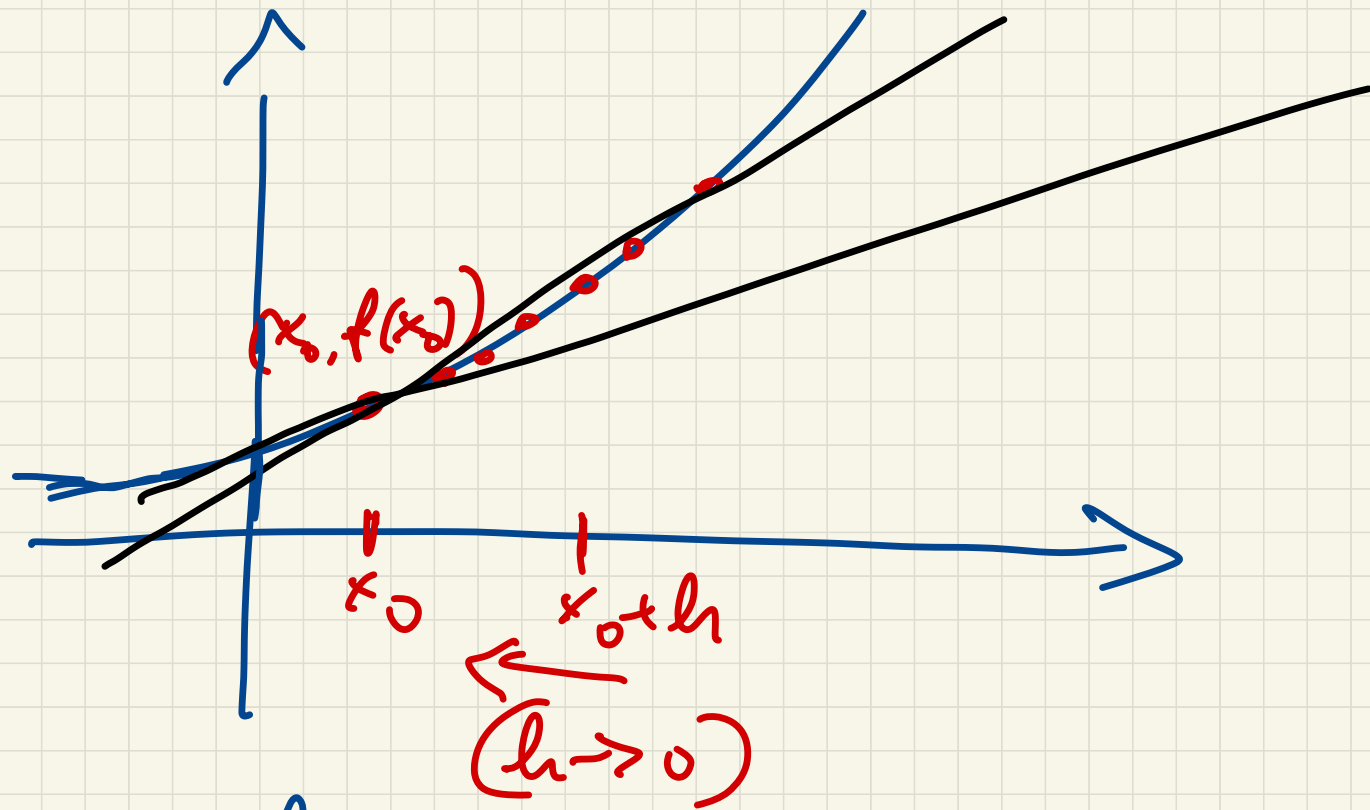
RAPPRESENTA IL COEFFICIENTE
ANGOLARE DELLA RETTA CHE
PASSA DAI 2 PUNTI

$$(x_0, f(x_0)) \text{ E } (x_0 + h, f(x_0 + h))$$



INFATTI, RICORDIAMOCI (V. SEZIONE)
 CHE QUESTA RETTA HA EQUAZIONE¹

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} (x - x_0)$$



QUANDO h TENDE A 0, SE
LA FUNZIONE f È DERIVABILE IN x_0

IN BASE AL DISEGNO, INTUISCO
CHE QUESTA RETTA
"TENDA" A DIVENTARE
TANGENTE AL GRAFICO DI
 f IN $(x_0, f(x_0))$ ED È
DATA DA

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} (x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

QUESTO ARGOMENTO CI
SUGGERISCE CHE

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

DOVREBBE ESSERE L'EQUAZIONE

DELLA RETTA TANGENTE

E CHE $f'(x_0)$ DOVREBBE

ESSERE IL COEFFICIENTE
DI TALE RETTA

L'INTUIZIONE PRECEDENTE
È CORRETTA, SI HA INFATTI
IL SEGUENTE

TEOREMA ("DERIVATA VS. TANGENTE")

SIA $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ E SIA $x_0 \in (a, b)$

ALLORA

" f AMMETTE RETTA TANGENTE AL
SUO GRAFICO IN $(x_0, f(x_0))$ "

$\Leftrightarrow$ " f È DERIVABILE IN x_0 "

INOLTRE, IN TAL CASO SI HA

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{+ o((x-x_0)) \text{ per } x \rightarrow x_0}$$

È LA RETTA

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

RAPPRESENTA LA RETTA TANGENTE
AL GRAFICO IN $(x_0, f(x_0))$.

DIM. DIMOSTRO SEPARATAMENTE
LE 2 IMPLICAZIONI

$\Rightarrow$ ASSUMO QUINDI CHE f
AMMETTA RETTA TANGENTE.

IN BASE ALLA DEFINIZIONE,

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + o((x - x_0))$$

PER $x \rightarrow x_0$

IN PARTICOLARE, DALL'IDENTITÀ
PRECEDENTE OTTENGONO

$$f(x) - f(x_0) = \alpha(x - x_0) + o((x - x_0))$$

E POI DIVIDO PER $x - x_0$,

DA CUI

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha + \frac{o((x - x_0))}{x - x_0}$$

PRENDENDO $x = x_0 + h$ IN QUESTA
FORMULA

DA CUI QUINDI

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \alpha + \frac{o(h)}{h}$$

PER $h \rightarrow 0$

PER DEFINIZIONE DI O-PICCOLO,
SI HA

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$$

QUESTO DIMOSTRA CHE

ESISTE IL LIMITE DEL
RAPPORTO INCREMENTALE

DI f IN x_0 E VALE

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \alpha$$
$$+ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h}$$

QUINDI $\textcircled{f}$ $\in$ DERIVABILE IN $x_0 = \alpha$

$$\textcircled{\text{II}} \quad f'(x_0) = \alpha$$

INSERENDO QUESTA INFORMAZIONE
NELLE IPOTESI INIZIALE

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

PER $x \rightarrow x_0$

SI HA

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

PER $x \rightarrow x_0$

COME VOLEVO.

⇐ SUPPONIAMO ADESSO CHE
 f SIA DERIVABILE IN x_0 .

QUESTO VUOL DIRE CHE
ESISTE ED È FINITO IL
LIMITE

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

QUESTO LO POSSO RISCRIVERE
COME

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + o(1)$$

PER $h \rightarrow 0$

OVVERO, MOLTIPLICANDO PER h ,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h o(1)$$

PER $h \rightarrow 0$

DA CUI ANCHE

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(1)h \quad \text{PER } h \rightarrow 0$$

ADesso

- CHIAMO $x = x_0 + h$ (quindi $h = x - x_0$)
- OSSERVO CHE
 $h \cdot o(1) = o(h)$ PER $h \rightarrow 0$
IN BASE ALLA DEFINIZIONE DI O-PICCOLA

QUINDI L'IDENTITÀ ASINTOTICA
PRECEDENTE SI RISCRIVE

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{PER} \\ x \rightarrow x_0$$

OUVERO, IN BASE ALLA
DEFINIZIONE DI RETTA TANGENTE,
HO DIMOSTRATO CHE f
AMMETTE RETTA TANGENTE AL SUO

GRAFICO IN $(x_0, f(x_0))$.

COME VOLEVO



PROPOSIZIONE SIA $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

E SIA $x_0 \in (a, b)$. SI HA

" f È DERIVABILE"
IN x_0 $\Rightarrow$

" f È
CONTINUA
IN x_0 ".

DIM.

SIA f DERIVABILE IN x_0 .

IN BASE AL TEOREMA

"DERIVATA VS. TANGENTE"

SI HA QUINDI

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0))$$

per $x \rightarrow x_0$

IN PARTICOLARE, PASSANDO AL
LIMITE PER $x \rightarrow x_0$, AVRÒ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0)$$

$$+ \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0)(x - x_0)$$

$$+ \lim_{x \rightarrow x_0} o(x - x_0)$$

$$= f(x_0)$$

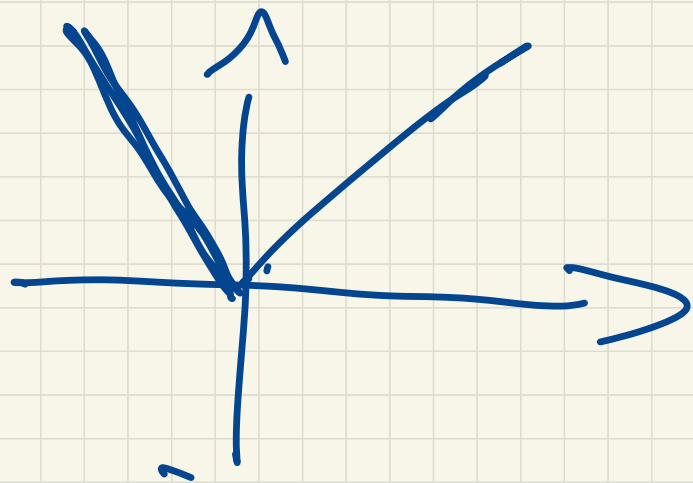
VANNO
A
ZERO

OVVERO f È CONTINUA IN x_0 ,
IN BASE ALLA DEFINIZIONE. 

IL RISULTATO PRECEDENTE
NON VALE AL CONTRARIO,
CIOÈ ESISTONO FUNZIONI,
CHE NON SONO DERIVABILI.

ESEMPIO LA FUNZIONE

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



È CONTINUA SU $\mathbb{R}$,
DERIVABILE SU
 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, MA NON

È DERIVABILE IN $x=0$

INFATTI, PROVIAMO A CALCOLARE
IL RAPPORTO INCREMENTALE
NELL'ORIGINE

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} \stackrel{(\equiv)}{=} \frac{|h| - 0}{h} = \frac{|h|}{h}$$

DEFINIZIONE

$$\Delta f(x) = |x|$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{se } h > 0 \\ -1, & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

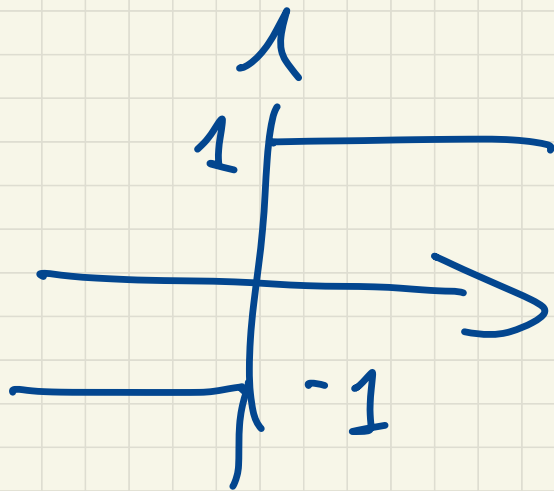
MA LA FUNZIONE

$$h \mapsto \begin{cases} 1, & \text{se } h > 0 \\ -1, & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

NON AMMETTE

LIMITE

PER $h \rightarrow 0$!



ESEMPIO (FUNZIONI COSTANTI)

$$f(x) = c, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

È DERIVABILE SU TUTTO $\mathbb{R}$,

INFATTI

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{c} - \cancel{c}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

$$\in f'(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO (POTENZE NATURALI)

① $f(x) = x$ È DERIVABILE
SU TUTTO $\mathbb{R}$,

CON DERIVATA DATA DA

$$f'(x) = 1$$

VERIFICA:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{(x+h)} - \cancel{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

OK!

② $f(x) = x^2$ $\in$ DERIVABILE
SU TUTTO $\mathbb{R}$

$$\text{CON } f'(x) = 2x$$

$$\text{VERIFIKA: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} [2x + h] = 2x \quad \underline{\text{OK!}}$$

⑤ $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$,
 $n \geq 2$

DERIVABILE SU TUTTO

$\mathbb{R}$, con

$$f'(x) = n x^{n-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{VERIFICA: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h}$$



BINOMIO
DI
NEWTON

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^n} + \underbrace{n x^{n-1} h}_{o(h)} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \underbrace{x^{n-k} h^k}_{o(h)}}{h}$$

~~$- x^n$~~

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{n x^{n-1} h + o(h)}{h} = n x^{n-1}$$

COME
VOLEVO

ESEMPIO LA FUNZIONE

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

DEFINITA DA

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{PER } x \neq 0$$

È DERIVABILE SU $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

CON DERIVATA

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

VERIFICA: X CASA!

V.3

REGOLE DI
DERIVAZIONE

IN QUANTO SEGUE, INDICO CON
 I E J DUE INTERVALLI
APERTI DI $\mathbb{R}$

(D1) DERIVATA DELLA SOMMA

SIANO $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ DUE
FUNZIONI DERIVABILI IN $x_0 \in I$.
LA LORO SOMMA È UNA FUNZIONE
DERIVABILE IN x_0 E SI HA

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

DIM. (X CASA)

(D2) DERIVATA DEL PRODOTTO

SIANO $f, g: I \rightarrow J$ DERIVABILI
 IN $x_0 \in I$. IL LORO
 PRODOTTO È DERIVABILE IN
 x_0 E VALE

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

DM.

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} g(x_0+h) \right. \\
&\quad \left. + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} f(x_0) \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} g(x_0+h) \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\
&\quad + \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}
\end{aligned}$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} g(x_0) f'(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$

HO USATO ANCHE CHE
g ERA DERIVABILE E
QUINDI CONTINUA.

