Analisi Matematica A

– Lezione 16 –

Lorenzo Brasco

20 Novembre 2020

NELLA SCORSA LEZIONE ABBIAMO IMPARATO CHE:

(1) TUTTI GLI ASINTOTICI DEL TABELLONE SI POSSONO RISCRIVERE COME IDENTITÀ ASINTOTICHE, OVVERO

- $\sin x \sim x$ PER $x \to 0$ $\iff$ $\sin x = x + o(x)$ PER $x \to 0$

(VISTO A LEZIONE)

E ANALOGAMENTE (MOSTRATE L'EQUIVALENZA PER CASA)

- $\log(1+x) \sim x$ PER $x \to 0$ $\iff$ $\log(1+x) = x + o(x)$ PER $x \to 0$

- $e^x - 1 \sim x$ PER $x \to 0$ $\iff$ $e^x = 1 + x + o(x)$ PER $x \to 0$

- $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ PER $x \to 0$ $\Longleftrightarrow$ $1-\cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ PER $x \to 0$

- $\tan x \sim x$ PER $x \to 0$ $\Longleftrightarrow$ $\tan x = x + o(x)$ PER $x \to 0$

- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ PER $x \to 0$ $\Longleftrightarrow$ $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ PER $x \to 0$

(2) ... TUTTAVIA, QUESTE INFORMAZIONI POSSONO NON ESSERE ANCORA SUFFICIENTI A TRATTARE TUTTI I LIMITI, ES.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x^2} = ?$$

IV. FUNZIONI CONTINUE

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ SIA $A \subseteq \mathbb{R}$ NON VUOTO. SIA $f : A \to \mathbb{R}$ E x_0 PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A, TALE CHE $x_0 \in A$.

SI DICE CHE f È CONTINUA IN x_0 SE VALE

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

IN ALTRE PAROLE, f È CONTINUA IN x_0 SE:

"$\forall \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ SUCCESSIONE TALE CHE $z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$,

SI HA CHE

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = f(x_0)"$$

DEFINIZIONE SIA $A \subseteq \mathbb{R}$ NON VUOTO.

SI DICE CHE $f : A \to \mathbb{R}$

È CONTINUA SU A SE f

È CONTINUA IN OGNI $x_0 \in A$

CHE SIA PUNTO DI ACCUMULAZIONE.

OSSERVAZIONE 1 TUTTE LE FUNZIONI

ELEMENTARI (POTENZE, LOGARITMI,

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE, ESPONENZIALI)

SONO CONTINUE SUL LORO DOMINIO DI DEFINIZIONE

(ES. $x \longmapsto \log x$ È CONTINUA SU $(0,+\infty)$

$x \longmapsto \frac{1}{x}$ È CONTINUA SU $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

E COSÌ VIA)

2) GRAZIE ALLA DEFINIZIONE DI FUNZIONE CONTINUA E ALL'ALGEBRA DEI LIMITI, SI HA CHE:

- LA SOMMA DI DUE FUNZIONI ~~E~~ CONTINUA È UNA FUNZIONE CONTINUA

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)+g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$= f(x_0) + g(x_0)$$

- IL PRODOTTO DI 2 FUNZIONI CONTINUE È UNA FUNZIONE CONTINUA
- IL RAPPORTO $\frac{f}{g}$ DI 2 FUNZIONI CONTINUE È UNA FUNZIONE TRANNE NEI PUNTI IN CUI g SI ANNULLA
- LA COMPOSIZIONE DI FUNZIONI CONTINUE È ANCH'ESSA CONTINUA

ESERCIZIO SIA $\alpha \in \mathbb{R}$, SI CONSIDERI LA FUNZIONE

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{SE } x \neq 0 \\ \alpha, & \text{SE } x = 0 \end{cases}$$

DIRE PER QUALI α, LA FUNZIONE f È CONTINUA SU TUTTO $\mathbb{R}$.

SOL.

OSSERVO CHE FUORI DALL'ORIGINE

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ È RAPPORTO

DI FUNZIONI CONTINUE SU $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

ED IL DENOMINATORE NON SI

ANNULLA MAI

$\Longrightarrow$ f È CONTINUA SU $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

OSSERVAZIONE PRECEDENTE

PER VERIFICARE LA CONTINUITÀ IN $x=0$, IN BASE ALLA DEFINIZIONE DI FUNZIONE CONTINUA, BISOGNERÀ SCEGLIERE $\alpha \in \mathbb{R}$ IN MODO CHE

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)}$$

OVVERO

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \alpha}$$

RICORDANDO CHE $\frac{\sin x}{x} \to 1$ $(x \to 0)$

ABBIAMO IN CONCLUSIONE CHE

$$\alpha = 1$$

È L'UNICO VALORE DI α PER CUI f

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{SE } x \neq 0 \\ \alpha, & \text{SE } x = 0 \end{cases}$$

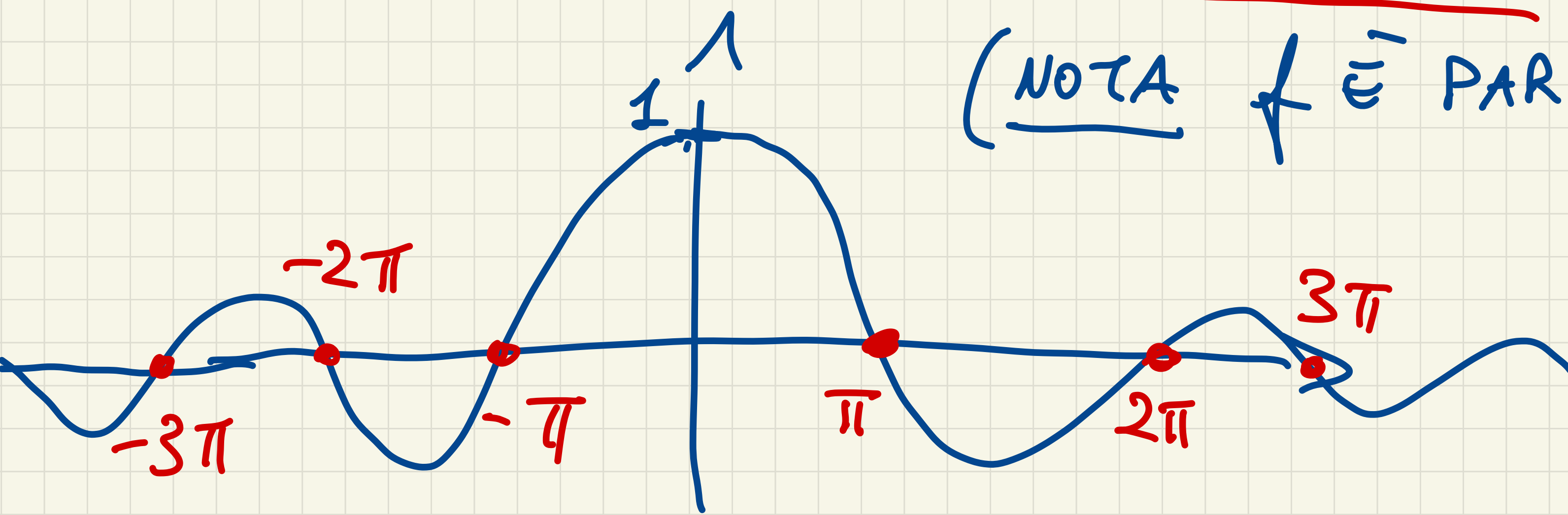
RISULTA CONTINUA ☑

$\boxed{\text{OSS.}}$ LA FUNZIONE

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{SE } x \neq 0 \\ 1, & \text{SE } x = 0 \end{cases}$$

SI CHIAMA SENO CARDINALE

(NOTA f È PARI)



$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ (x CASA)

DIMOSTRARE CHE LA FUNZIONE RETTANGOLO

$$\mathrm{RECT}(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & \text{SE } x \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

È CONTINUA SU $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$,

MA NON È CONTINUA IN $\frac{1}{2}$ E $-\frac{1}{2}$.

TEOREMA (DEGLI ZERI)

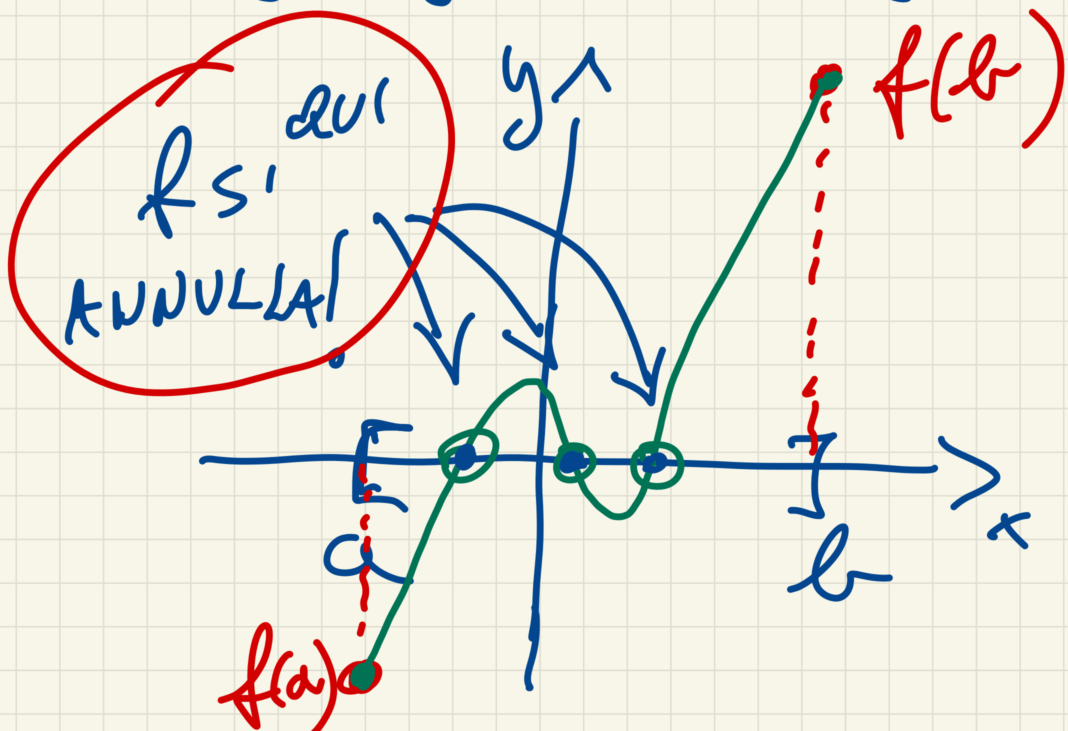
SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA SU $[a,b]$, TALE CHE

$$f(a) < 0 < f(b).$$

ALLORA ESISTE $x_0 \in (a,b)$ TALE CHE $\boxed{f(x_0)=0}$

DIM.

CERCHIAMO INNANZITUTTO DI CAPIRE PERCHÉ QUESTA COSA È VERA

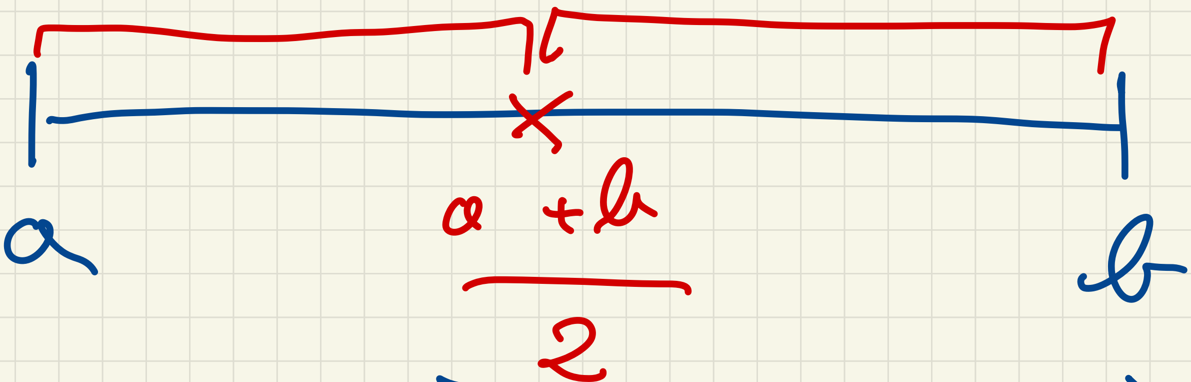


PASSIAMO ALLA DIMOSTRAZIONE RIGOROSA!

IDEA È BISEZIONARE L'INTERVALLO $[a, b]$ IN "SUCCESSIONE" ED USARE L'ASSIOMA DI CONTINUITÀ DEI NUMERI REALI

(V. LEZIONE 3)

ENTRIAMO UN PO' PIÙ NEI DETTAGLI:



DIVIDO $[a, b]$ IN 2 METÀ TRAMITE IL PUNTO MEDIO

$$\frac{a+b}{2}$$

ABBIAMO 2 POSSIBILITÀ:

I SI HA $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$

IN TAL CASO LA DIMOSTRAZIONE È FINITA

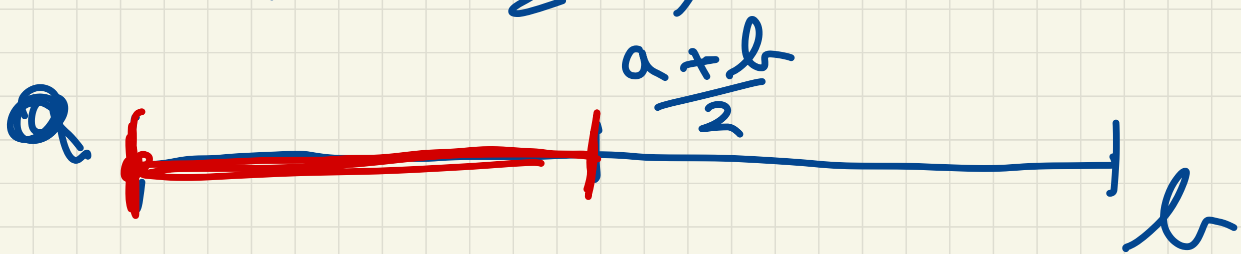
II SI HA $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$,

QUINDI IN TAL CASO POSSO AVERE $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ OPPURE

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0 .$$

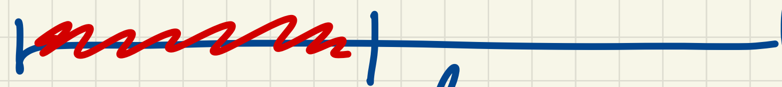
SUPPONIAMO PER ESEMPIO CHE SI VERIFICHI LA SECONDA, CIOÈ

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$$



PRIMO PASSO

$\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ $\quad \cdot f(b)$



$a_0 = a$ $\qquad \frac{a+b}{2}$ $\qquad b = b_0$

$f(a) \cdot$

SECONDO PASSO

$\frac{a_1+b_2}{2}$

$a_0 = a_1$ $\qquad b_1 = \frac{a+b}{2}$

DI NUOVO, HO LE STESSE 2 POSSIBILITÀ

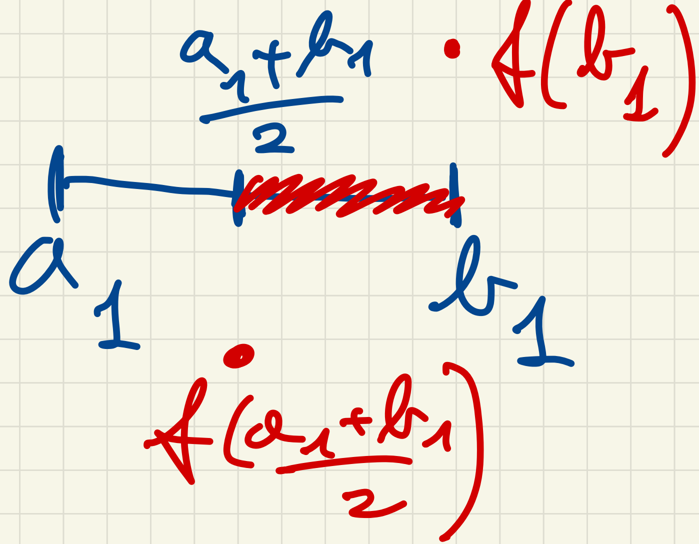
(I) $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0 \Rightarrow$ FINE DIMOSTRAZIONE

(II) $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\neq 0$,

QUINDI O $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)>0$

OPPURE $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)<0$

SUPPONIAMO PER ESEMPIO CHE VALGA LA SECONDA



PROCEDENDO IN MODO ITERATIVO, COSTRUIAMO UNA SUCCESSIONE DI INTERVALLI CHIUSI

$$[a_n, b_n]$$

OGNUNO CONTENUTO IN UNA METÀ DEL PRECEDENTE E TALI CHE:

I) O ESISTE $k \in \mathbb{N}$ TALE CHE

$$f(a_k) = 0 \quad \text{OPPURE} \quad f(b_k) = 0$$

II) OPPURE

$$f(a_n) < 0 < f(b_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

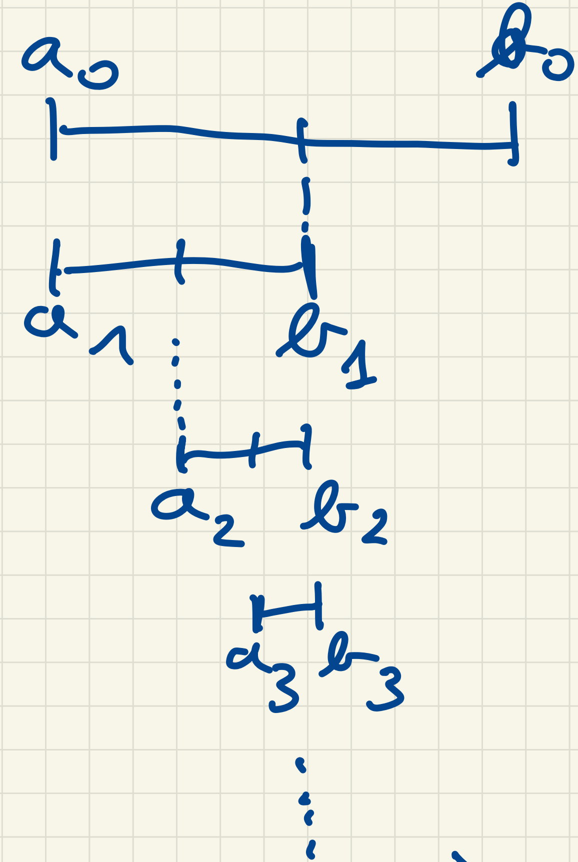
NEL CASO II,

USANDO L'ASSIOMA DI CONTINUITÀ DEI NUMERI REALI CI ASSICURA CHE

$$\exists\, x_0 \in [a,b]$$

TALE CHE

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x_0\}$$



E COSÌ VIA

PER COSTRUZIONE, QUESTO VUOL DIRE CHE

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \quad \underline{\underline{E}} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = x_0$$

USANDO LA CONTINUITÀ DI f,

ABBIAMO ALLORA CHE

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0) \quad \underline{\underline{E}}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x_0)$$

D'ALTRA PARTE, ABBIAMO DETTO CHE

$$f(a_n) < 0, \quad \forall n \in A$$

ALLORA DALLA PERMANENZA DEL SEGNO "SOFT" SI HA

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0}$$

ANALOGAMENTE

$$f(b_n) > 0, \forall n \in A \implies \boxed{\lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0}$$

IN CONCLUSIONE, SI HA

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

PERMANENZA DEL SEGNO

CONTINUITÀ DI f

MA ANCHE

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x_0)$$

PERMANENZA DEL SEGNO

CONTINUITÀ DI f

IN DEFINITIVA

$$f(x_0) \leq 0 \quad \text{E} \quad f(x_0) \geq 0$$

DA CUI

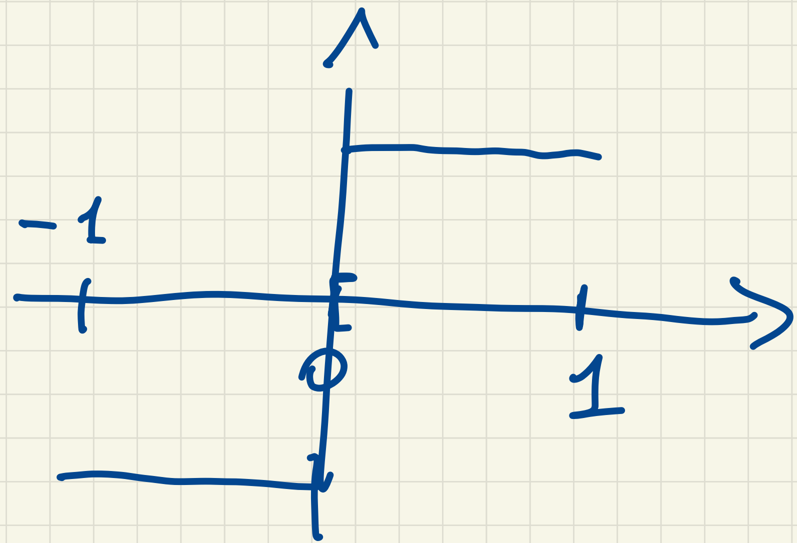
$$f(x_0) = 0$$

$\boxed{\text{OSS.}}$ SE f NON È CONTINUA, IL TEOREMA PRECEDENTE È FALSO. INFATTI, LA FUNZIONE

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x \in [0,1] \\ -1, & \text{SE } x \in [-1,0) \end{cases}$$

$f: [-1,1] \to \mathbb{R}$

TALE CHE



$f(-1) < 0$

$f(1) > 0$

MA f <u>NON</u> SI ANNULLA MAI IN $[-1,1]$

OSSERVATE CHE f NON SODDISFA L'IPOTESI DI CONTINUITÀ, RICHIESTA DAL TEOREMA DEGLI ZERI

$\boxed{\text{OSS.}}$ (TEOREMA DEGLI ZERI PIÙ GENERALE)

IL TEOREMA DEGLI ZERI CONTINUA A VALERE NELLA SEGUENTE FORMA PIÙ GENERALE

"SIA $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ CONTINUA SU (a,b), TALE CHE

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) < 0 < \lim_{x\to b^-} f(x)}$$

ALLORA ESISTE $x_0 \in (a,b)$ TALE CHE

$$f(x_0) = 0"$$

(L'IPOTESI CERCHIATA IN ROSSO RIMPIAZZA $f(a) < 0 < f(b)$)

IN QUESTA FORMA, IL TEOREMA VALE ANCHE CON $a = -\infty$ OPPURE $b = +\infty$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (DEI VALORI INTERMEDI)

SIA $I \subseteq \mathbb{R}$ UN INTERVALLO E SIA $f: I \to \mathbb{R}$ CONTINUA SU I. ALLORA f ASSUME TUTTI I VALORI COMPRESI TRA $\boxed{\inf_{x \in I} f(x)}$ E $\boxed{\sup_{x \in I} f(x)}$.

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ SIA P UN POLINOMIO DI GRADO DISPARI, NELLA VARIABILE REALE x.

DIMOSTRARE CHE

$$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

È SURIETTIVA.

SOL.

PICCOLO RICHIAMO: PER DIMOSTRARE CHE P È

SURIETTIVA, DEVO FAR VEDERE CHE

"$\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists$ ALMENO UNA SOLUZIONE $x \in \mathbb{R}$

DELL'EQUAZIONE

$$y = P(x)$$ "

INTANTO OSSERVO CHE SE P HA GRADO DISPARI VUOL DIRE CHE SI ~~SE~~CRIVE COME

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

CON $n \in \mathbb{N}$ DISPARI (PER SEMPLICITÀ $a_n > 0$)

OSSERVIAMO CHE

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} [\underbrace{a_n x^n + o(x^n)}_{\sim a_n x^n}]$$

PERCHÉ

$x = o(x^n)$ PER $x \to +\infty$

$x^2 = o(x^n)$ .... E COSÌ VIA

$= +\infty$

OVVERO P È ILLIMITATA SUPERIORMENTE

$$\Rightarrow \boxed{\sup_{x \in \mathbb{R}} P(x) = +\infty}$$

SIMILMENTE,

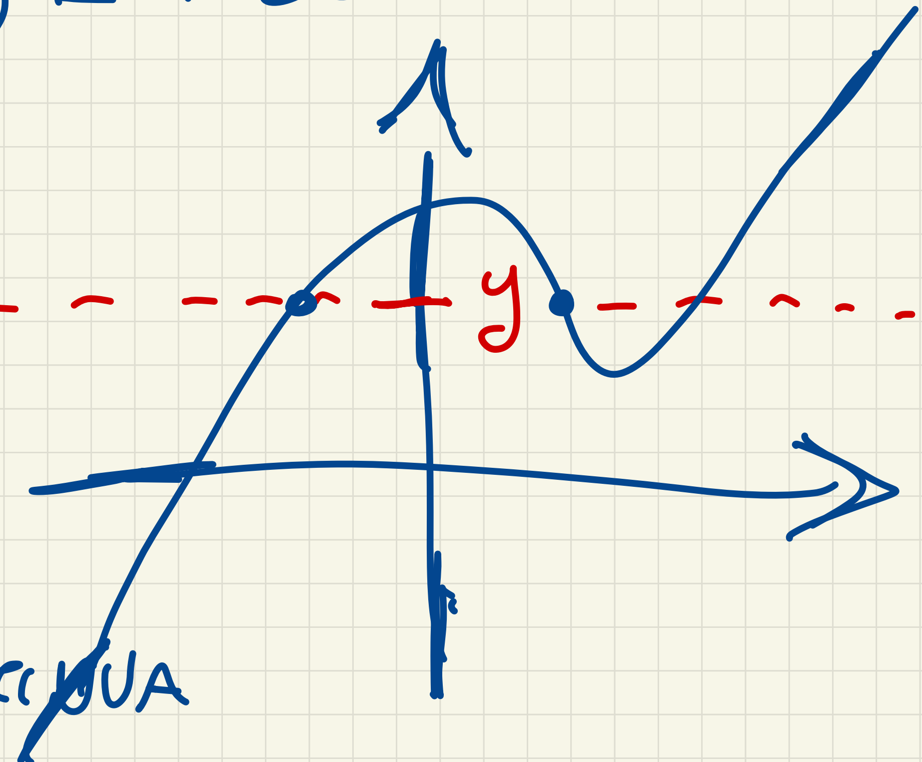
$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} \left[a_n x^n + o(x^n) \right]$$

$= -\infty$ PERCHÉ n È DISPARI

QUINDI P È ANCHE ILLIMITATA INFERIORMENTE

$$\Rightarrow \inf_{x \in \mathbb{R}} P(x) = -\infty$$

ALLORA, DAL MOMENTO CHE UN POLINOMIO È UNA FUNZIONE CONTINUA



DAL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI, ABBIAMO CHE L'IMMAGINE DI P È DATA DA

$$\left(\inf_{x\in\mathbb{R}} P(x), \sup_{x\in\mathbb{R}} P(x)\right) = (-\infty, +\infty)$$

$$= \mathbb{R}$$

QUINDI

$$\forall y \in \mathbb{R}, \ \exists x \in \mathbb{R} \text{ T.C. } P(x) = y \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ (x CASA)

DIMOSTRARE CHE LA FUNZIONE

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

HA COME IMMAGINE $[0, +\infty)$.

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (DI WEIERSTRASS)

SIA $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA.

ALLORA f AMMETTE MASSIMO E MINIMO SU $[a, b]$, OVVERO

$\exists\, x_M \in [a, b]$ E $x_m \in [a, b]$

TALE CHE

$$f(x_M) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

$$f(x_m) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

INOLTRE, SE CHIAMIAMO

$$M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

ABBIAMO CHE L'IMMAGINE DI f È DATA

$$f([a,b]) = [m, M].$$

$\boxed{\text{OSS.}}$ IL RISULTATO PRECEDENTE NON È PIÙ VERO SE L'INTERVALLO SU CUI È DEFINITA f NON È CHIUSO E LIMITATO, OPPURE SE f NON È CONTINUA.

AD ESEMPIO, LA FUNZIONE $f(x) = x$ È CONTINUA SU $(0,1)$ MA NON AMMETTE MASSIMO E MINIMO SU $(0,1)$