ANALISI MATEMATICA A

– LEZIONE 15 –

LORENZO BRASCO

18 NOVEMBRE 2020

RIPRENDIAMO COL TABELLONE DEI LIMITI NOTEVOLI

VI $\sin x \sim x$ PER $x \to 0$

OVVERO DOBBIAMO MOSTRARE CHE

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

USEREMO IL SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL SENO + TEOREMA DEI CARABINIERI

OSSERVO INTANTO CHE LA FUNZIONE

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \left(\text{DEFINITA PER } x \neq 0 \right)$$

HA LA PROPRIETÀ CHE

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\cancel{-}\sin x}{\cancel{-}x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$$

SENO È DISPARI

$$\forall x \neq 0 \implies \boxed{\frac{\sin x}{x} \text{ È PARI}}$$

QUINDI IN VIRTÙ DI QUESTA OSSERVAZIONE, PER DIMOSTRARE CHE

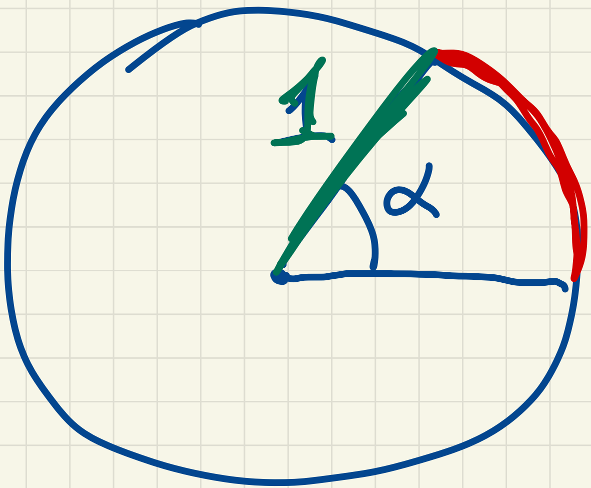
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

MI BASTA DIMOSTRARE CHE

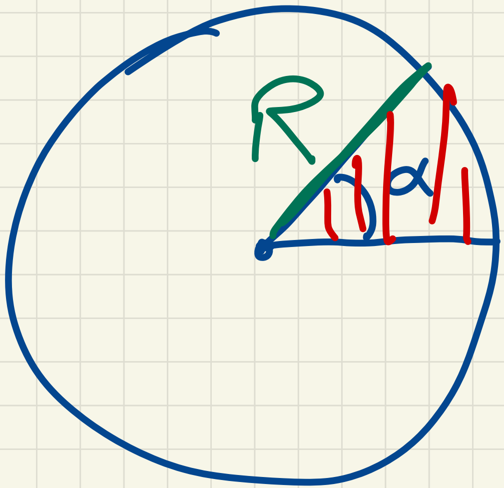
$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

MI SERVIRANNO 2 FATTI GEOMETRICI

1 NOI MISURIAMO GLI ANGOLI IN RADIANTI, CON QUESTA UNITÀ DI MISURA, SE PRENDO UN ANGOLO α COME IN FIGURA, L'ARCO IN ROSSO È LUNGO α.



2



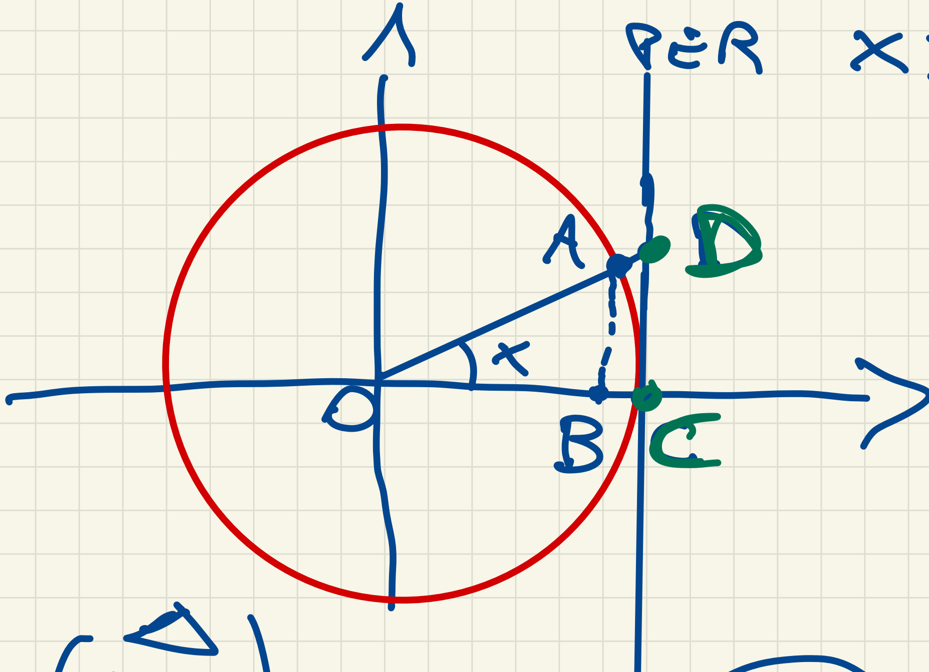
L'AREA DI QUESTO SETTORE CIRCOLARE

È $\boxed{\frac{\alpha}{2} R^2}$

ADESSO, DIMOSTRIAMO CHE

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

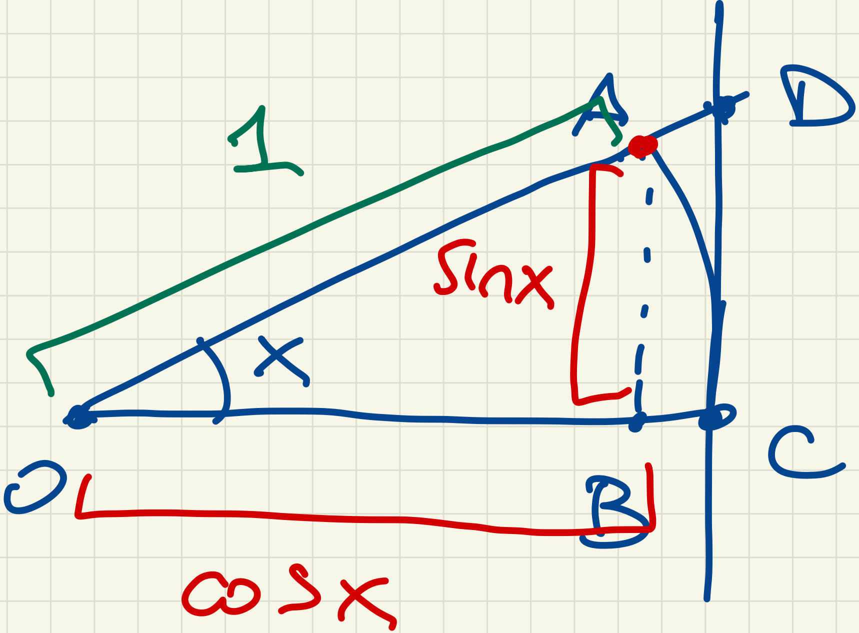
PER $x > 0$ E "PICCOLO"



SI HA

$$\text{AREA}\left(\overset{\triangle}{AOB}\right) \le \text{AREA}\left(\underbrace{\overset{\frown}{ACO}}_{\text{SETTORE CIRCOLARE}}\right) \le \text{AREA}\left(\overset{\triangle}{DOC}\right)$$

CALCOLIAMO QUESTE AREE



$\overline{AB} = \sin x$

$\overline{BO} = \cos x$

$\overline{OC} = 1$

$\overline{DC} = \tan x$

QUINDI

$$\text{AREA}(\overset{\triangle}{AOB}) \leq \text{AREA}(\overset{\frown}{OAC}) \leq \text{AREA}(\overset{\triangle}{DOC})$$

$$\frac{\cos x \sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}, \quad x>0$$

OVVERO MOLTIPLICANDO TUTTO PER 2, PER $x>0$ SI HA

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\cos x \sin x \leq x \leq \tan x$$

MOLTIPLICO LE DISUGUAGLIANZE PRECEDENTI PER $\frac{1}{\sin x} > 0$, PERCHÉ $x>0$

DA CUI OTTENGO

$$\boxed{\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \quad \text{PER } x>0}$$

OSSERVANDO CHE

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

QUINDI ANCHE $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$

ABBIAMO

$$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

$$1$$

PER $x \to 0^+$

DAL TEOREMA DEI CARABINIERI, SI HA DUNQUE CHE

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$$

E QUINDI

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} = 1$$

$\blacksquare$

VII $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ PER $x \to 0$

RICORDIAMO LA FORMULA DI BISEZIONE PER IL SENO

$$\boxed{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{2}}$$

ABBIAMO DUNQUE

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{\cancel{x}}{2}\right)^2}{\cancel{x^2}} = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

COME VOLEVO

$\sin t \sim t$ PER $t \to 0$

DA CUI

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \sim \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

QUINDI VII È CONSEGUENZA DI VI + BISEZIONE $\square$

VIII $\tan x \sim x$ PER $x \to 0$

INFATTI

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1}$$

VI

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

$\blacksquare$

IX $\arctan x \sim x$ PER $x \to 0$

INFATTI

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{\arctan(\tan t)}{\tan t}$$

CAMBIO

$x = \tan t$

$\arctan x = t$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t}{\tan t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\underbrace{\frac{\tan t}{t}}_{\to 1}} \overset{\text{VIII}}{=} 1$$

COME VOLEVO

X $\arcsin x \sim x$ PER $x \to 0$

INFATTI

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} \underset{x = \sin t}{=} \lim_{t \to 0} \frac{t}{\sin t} \overset{\text{VI}}{=} 1$$

XI $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ PER $x \to 0$

(PER OGNI $\alpha \neq 0$)

RICORDIAMOCI DEL "TRUCCO"

$$\boxed{A = e^{\log A}} \quad \text{PER } A > 0$$

ALLORA POSSIAMO SCRIVERE

$$(1+x)^\alpha - 1 = e^{\log(1+x)^\alpha} - 1$$

$$= e^{\alpha \log(1+x)} - 1$$

(L2)

DOPO DI CHE MI RICORDO CHE

$$\boxed{e^t - 1 \sim t \quad \text{PER } t \to 0}$$

V

USO QUESTA COSA CON

$$t = \alpha \log(1+x) \to 0 \text{ PER } x \to 0$$

QUINDI $\boxed{\text{PER } x \to 0}$

$$(1+x)^{\alpha}-1 = e^{\alpha \log(1+x)} - 1$$

$$\sim \alpha \log(1+x)$$

$\cancel{\text{IV}}$ $\sim$ αx PER $x \to 0$

<u>ESEMPIO</u> $\sqrt{1+x} - 1 = (1+x)^{\frac{1}{2}} - 1$

$\cancel{\text{XI}}$ $\sim$ $\frac{x}{2}$ PER $x \to 0$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ CALCOLARE IL LIMITE SEGUENTE

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\log(1+2x^2)}$$

SOL.

È UNA FORMA INDETERMINATA DEL TIPO $\frac{0}{0}$

RICORDIAMOCI CHE

V $e^t - 1 \sim t$ SE $t \to 0$

DA CUI, PRENDO $t = x^2 \to 0$

SI HA

$$e^{x^2} - 1 \sim x^2 \quad \text{PER } x \to 0$$

IV $\log(1+t) \sim t$ PER $t \to 0$

SE QUINDI $t = 2x^2$, SI HA

$\log(1+2x^2) \sim 2x^2$ PER $x \to 0$

QUINDI' IN DEFINITIVA

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\log(1+2x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ $\lim_{x \to +\infty} x \log\left(\frac{x+5}{x-1}\right)$

SOL:

FORMA INDETERMINATA $\infty \cdot 0$

OSSERVO CHE

$$\log \frac{x+5}{x-1} = \log\left(\frac{x-1+6}{x-1}\right)$$

$$= \log\left(1 + \frac{6}{x-1}\right)$$

RICORDIAMO CHE

$$\log(1+t) \sim t \quad \text{SE } t \to 0$$

LO USO CON

$$\boxed{t = \frac{6}{x-1}} \longrightarrow 0$$

PER $x \to +\infty$

QUINDI

$$\log\left(\frac{x+5}{x-1}\right) = \log\left(1+\frac{6}{x-1}\right) \sim \frac{6}{x-1}$$

PER $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} x \log\left(\frac{x+5}{x-1}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \, \frac{6}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{x-1}$$

$$= 6 \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ (x CASA)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin^2(2x)}{\sin(x^3)}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ CALCOLARE IL LIMITE SEGUENTE

$$\lim_{x\to +\infty} x e^{\sin x}$$

SOL.

IL PROBLEMA PRINCIPALE ADESSO È CHE $\nexists \lim_{x \to +\infty} \sin x$ E

DI CONSEGUENZA

$$\nexists \lim_{x \to +\infty} e^{\sin x}$$

SAREMMO TENTATI DI DIRE CHE $\nexists \lim_{x \to +\infty} x e^{\sin x}$ ....

INVECE IL LIMITE ESISTE!

OSSERVIAMO CHE

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

ALLORA USANDO LA MONOTONIA DELL'ESPONENZIALE, SI HA

$$\frac{1}{e} = e^{-1} \leq e^{\sin x} \leq e^{1} = e \; , \forall x \in \mathbb{R}$$

DA CUI MOLTIPLICANDO TUTTO PER $x > 0$ OTTENGO...

$$\frac{x}{e} \leq x e^{\sin x} \leq x e, \quad \forall x > 0$$

PER $x \to +\infty$

$+\infty$

QUINDI PER IL TEOREMA DEI CARABINIERI SI HA

$$\lim_{x \to +\infty} x e^{\sin x} = +\infty \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ CALCOLARE

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log x \qquad \left(\text{CON } \alpha > 0\right)$$

<u>SOL</u>.

- IL LIMITE SI FA SOLO DA DESTRA PERCHÉ $\log x$ È BEN DEFINITO SOLTANTO PER $x > 0$
- FORMA INDETERMINATA $0 \cdot \infty$

USIAMO LA "MAGIA" DEL LOGARITMO

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x^\alpha}}$$

$$= \lim_{y\to +\infty} \frac{\log \frac{1}{y}}{y^\alpha}$$

CAMBIO

$\frac{1}{x} = y$

OVVERO

$x = \frac{1}{y}$

$$= \lim_{y\to +\infty} \frac{\log(y^{-1})}{y^\alpha}$$

$$\overset{(L2)}{=} \lim_{y \to +\infty} -\frac{\log y}{y^\alpha}$$

$= 0$ PERCHÉ PER LA GERARCHIA DI INFINITI (V. CAPITOLO II) ABBIAMO VISTO CHE ☒

$$\log y = o(y^\alpha) \quad \text{PER } y \to +\infty$$

PER OGNI $\alpha > 0$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ (X CASA)

CALCOLARE $\lim_{x \to 0^+} x^x$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ CALCOLARE

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{e^{\sin^4 x}-1}$$

SOL.

FORMA INDETERMINATA $\frac{0}{0}$

COMINCIAMO A METTERE IN CAMPO UN PO' DI EQUIVALENZE ASINTOTICHE PRESE DAL TABELLONE:

VII $1-\cos t \sim \frac{t^2}{2}$ PER $t \to 0$

USANDOLO CON $t = x^2 \to 0$

SI OTTIENE

$$\boxed{1-\cos(x^2) \sim \frac{(x^2)^2}{2} = \frac{x^4}{2}}$$ PER $x \to 0$

V $e^t - 1 \sim t$ PER $t \to 0$

LO USO CON

$t = \sin^4 x \to 0$ (PERCHÉ $x \to 0$)

QUINDI

$e^{\sin^4 x} - 1 \sim \sin^4 x \sim x^4$ PER $x \to 0$

VI

QUINDI IN DEFINITIVA

$$\frac{1-\cos(x^2)}{e^{\sin^4 x}-1} \sim \frac{\cancel{x^4}/2}{\cancel{x^4}} = \frac{1}{2}$$

PER $x \to 0$

OVVERO

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{e^{\sin^4 x}-1} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ CALCOLARE

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\log(1+x)) - e^{x^2}}{\arctan(\log(1+x^2))}$$

SOL.

- FORMA INDETERMINATA DEL TIPO $\frac{0}{0}$
- COME PRIMA, USO GLI ASINTOTICI

DEL TABELLONE:

SCRIVO

$$\cos(\log(1+x)) - e^{x^2}$$

$$= \underbrace{\left[\cos(\log(1+x)) - 1\right]} + \left[\underbrace{1 - e^{x^2}}\right]$$

E MI RICORDO CHE

VII $\quad 1-\cos t \sim \frac{t^2}{2}$ PER $t \to 0$

CHE USATA CON

$$t = \log(1+x) \longrightarrow 0$$

PER $x \to 0$

MI DARÀ

$$\cos(\log(1+x)) - 1 \sim -\frac{(\log(1+x))^2}{2}$$

(PER $x \to 0$.)

IV $\sim -\frac{x^2}{2}$ PER $x \to 0$

OVVERO

$$\cos(\log(1+x)) - 1 \sim -\frac{x^2}{2} \quad \text{PER } x \to 0$$

- PER TRATTARE $1-e^{x^2}$

USO INVECE

V $\quad e^t - 1 \sim t \quad$ SE $t \to 0$

CON $t = x^2$ DA CUI OTTENGO

$$1-e^{x^2} \sim -x^2 \quad \text{PER } x \to 0$$

QUINDI IL NOSTRO NUMERATORE INIZIALE È ASINTOTICO A

$$\cos(\log(1+x)) - e^{x^2}$$

$$= \left[\cos(\log(1+x)) - 1\right] + \left[1 - e^{x^2}\right]$$

$$\sim -\frac{x^2}{2} + \left(-x^2\right) = -\frac{3}{2}x^2$$

PER $x \to 0$

OCCUPIAMOCI ADESSO DEL DENOMINATORE:

MI RICORDO

IX $\arctan t \sim t$ PER $t \to 0$

CHE USO CON

$$t = \log(1+x^2) \longrightarrow 0$$

PER $x \to 0$

CHE QUINDI MI DA

$$\arctan(\log(1+x^2)) \sim \log(1+x^2)$$

PER $x \to 0$

ADESSO POSSO ULTERIORMENTE USARE

$$\log(1+x^2) \sim x^2 \quad \text{SE } x \to 0$$

QUINDI IN DEFINITIVA

$$\arctan(\log(1+x^2)) \sim \log(1+x^2) \sim x^2 \quad \text{SE } x \to 0$$

CONCLUSIONE

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\log(1+x)) - e^{x^2}}{\arctan(\log(1+x^2))}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{3}{2}\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}$$

(PER GLI ASINTOTICI VISTI FIN'ORA)

$$= -\frac{3}{2}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ CALCOLARE

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x}$$

SOL.

OSSERVO CHE SI TRATTA DI UNA FORMA INDETERMINATA DEL TIPO $\frac{0}{0}$.

AVREI VOGLIA DI PROCEDERE COME PRIMA:

$\sin x \sim x$ PER $x \to 0$

QUINDI POTREI DIRE CHE

$x - \sin x \sim x - x \to 0$ PER $x \to 0$

ARGH!! NO

?!

RICORDATEVI CHE DIRE CHE $f(x) \sim 0$ PER $x \to 0$

NON HA SENSO.

RIPARTIAMO DA CAPO:

$\sin x \sim x$ PER $x \to 0$

OVVERO

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$ OVVERO

$$\frac{\sin x}{x} = 1 + \text{"QUALCOSA CHE TENDE A 0"}$$

(PER x VICINO A 0)

OVVERO RICORDANDO LA DEFINIZIONE DI O-PICCOLO

$$\frac{\sin x}{x} = 1 + o(1)$$

PER $x \to 0$

DA CUI MOLTIPLICANDO PER x AMBO I MEMBRI HO

$$\boxed{\sin x = x + x \cdot o(1) \quad \text{PER } x \to 0}$$

INFINE OSSERVO CHE

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} \cdot o(1)}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0} o(1) = 0$$

OVVERO $\boxed{x \cdot o(1) = o(x)}$

IN CONCLUSIONE

$$\boxed{\sin x = x + o(x) \quad \text{PER } x \to 0}$$

QUESTA ADESSO È UNA IDENTITÀ ASINTOTICA

QUINDI POSSO DIRE CHE

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - (\cancel{x} + o(x))}{x}$$

$= 0$ GRAZIE ALLA DEFINIZIONE DI O-PICCOLO!

ESERCIZIO

CALCOLARE

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$$

SOL.

"HO CAPITO! FACCIO COME PRIMA!"

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}-(\cancel{x}+o(x))}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{o(x)}{x}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to\infty}$$

?!

??

L'INFORMAZIONE

$$\sin x = x + o(x) \quad \text{PER } x \to 0$$

NON È ABBASTANZA PER IL CALCOLO DI $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2}$ .....

CONTINUA