# ANALISI MATEMATICA A

## - LEZIONE 13 -

LORENZO BRASCO

11 NOVEMBRE 2020

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO)

SIANO $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ E $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ DUE SUCCESSIONI A TERMINI POSITIVI. SUPPONIAMO CHE

$$b_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{E} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty$$

ALLORA SI HA:

I $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$

II $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty.$

**COMMENTO** L'IPOTESI

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L < +\infty$$

ALLORA QUESTO VUOL DIRE CHE

$$\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[(n \to \infty)]{} L < +\infty$$

QUINDI IN BASE ALLA DEFINIZIONE DI LIMITE

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ T.C.

$$L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon \, , \; \forall n \geq n_\varepsilon$$

IN PARTICOLARE ABBIAMO

$$\frac{a_n}{b_n} < L+\varepsilon \quad , \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

OVVERO (RICORDATE $b_n > 0$)

$$\boxed{a_n < b_n(L+\varepsilon) \quad , \quad \forall n \geq n_\varepsilon}$$

A QUESTO PUNTO, IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO SEGUE DAL CRITERIO DEL CONFRONTO.

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ DETERMINARE IL CARATTERE DELLE 2 SERIE A TERMINI POSITIVI

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} \quad \text{E} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

SOL.

INNANZITUTTO LE 2 SERIE NON POSSONO ESSERE IRREGOLARI QUINDI O CONVERGONO O DIVERGONO.

OSSERVO INOLTRE CHE

$$\underbrace{n^2 + n}_{o(n^2)} \sim n^2 \quad \text{PER} \quad n \to \infty$$

DA CUI OTTENGO

$$\frac{1}{n^2+n} \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{PER} \quad n \to \infty$$

OVVERO SE CHIAMO

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{E} \quad b_n = \frac{1}{n^2+n}$$

SI HA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 < +\infty$$

QUINDI PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

ABBIAMO CHE

(I) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = +\infty$$

$\frac{1}{n^2} = a_n$, $\frac{1}{n^2+n} = b_n$

(II) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} < +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

QUINDI POSSO RIDURMI A STUDIARE IL CARATTERE PER ESEMPIO DI

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$$

OSSERVO CHE

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)}$$

E PROVIAMO A DECOMPORRE QUESTA FRAZIONE

OVVERO CERCHIAMO 2 NUMERI REALI $A, B$ T.C.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow 1 = n(A+B) + A \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases}$$

OVVERO $\boxed{A=1}$ e $\boxed{B=-A=-1}$

IN ALTRE PAROLE

$$\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

QUINDI $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]$

PER DETERMINARE IL CARATTERE DELLA SERIE, STUDIAMO LA SUCCESSIONE DELLE SUE SOMME PARZIALI

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{k} \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right]$$

$$= \underbrace{\left[ 1 - \cancel{\frac{1}{2}} \right]}_{n=1} + \underbrace{\left[ \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \right]}_{n=2} + \underbrace{\left[ \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} \right]}_{n=3} + \ldots$$

$$+ \dots + \underbrace{\left[\cancel{\frac{1}{k-1}} - \cancel{\frac{1}{k}}\right]}_{n=k-1} + \underbrace{\left[\cancel{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k+1}\right]}_{n=k}$$

SI ELIDE COL TERMINE PRECEDENTE

$$= 1 - \frac{1}{k+1}$$

OVVERO

$$\boxed{S_k = 1 - \frac{1}{k+1}}$$

SI HA CHE LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI $\{S_k\}_k$ VERIFICA

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = 1$$

QUINDI LA SERIE

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}}$$ è <u>CONVERGENTE</u> !

SERIE DI MENGOLI

(ESEMPIO DI <u>SERIE TELESCOPICA</u>)

PIÙ IN GENERALE, UNA SERIE TELESCOPICA È DELLA FORMA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \alpha_n - \alpha_{n+1} \right)$$

TORNANDO ALLA NOSTRA SERIE SAPPIAMO ANCHE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2+n} = 1$$

CI RESTA DA DISCUTERE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

MA IN BASE A QUANTO DETTO AD INIZIO ESERCIZIO

$$\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2+n} \quad \text{PER } n \to \infty$$

E

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} < +\infty$$

QUINDI PER IL

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO OTTENGO

CHE ANCHE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{CONVERGE}$$

QUESTO RISPONDE ALLA DOMANDA FINALE DELLA LEZIONE 12

$\boxed{\text{COROLLARIO}}$ SIANO $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ E $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ DUE SUCCESSIONI A TERMINI POSITIVI.

QUESTA È LA VERSIONE DEL CONFRONTO ASINTOTICO CHE USEREMO DI PIÙ

SUPPONIAMO CHE $\boxed{a_n \sim b_n}$ PER $n \to \infty$

ALLORA

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (CRITERIO DELLA RADICE N-ESIMA)

SIA $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ UNA SUCCESSIONE A TERMINI POSITIVI TALE CHE

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$$

ALLORA LA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONVERGE.

SE INVECE

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

ALLORA LA SERIE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$ DIVERGE.

$\boxed{\text{OSS.}}$ NON SI PUÒ DIRE NIENTE NEL CASO IN CUI

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

QUESTO CRITERIO NON SI APPLICA.

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (CRITERIO DEL RAPPORTO PER LE SERIE)

SIA $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ UNA SUCCESSIONE A TERMINI POSITIVI TALE CHE

$a_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$ E $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$

ALLORA LA SERIE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$ CONVERGE

SE INVECE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

ALLORA LA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ DIVERGE.

$\boxed{\text{OSS.}}$ DI NUOVO, IL CRITERIO È INUTILIZZABILE NEL CASO IN CUI

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

**ESERCIZIO** (SERIE ARMONICA GENERALIZZATA)

DETERMINARE IL CARATTERE DI

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{CON } \alpha > 0.$$

SOL.

ABBIAMO GIÀ VISTO 2 CASI PARTICOLARI

- $\alpha = 1 \implies$ DIVERGENTE
- $\alpha = 2 \implies$ CONVERGENTE

IN PARTICOLARE ALLORA SI HA:

- SE $0 < \alpha < 1$, ABBIAMO CHE

$$n^{\alpha} = o(n) \quad \text{PER } n \to \infty$$

DA CUI

$$\boxed{\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) \quad \text{PER } n \to \infty}$$

IN PARTICOLARE SE $a_n = \frac{1}{n}$ $b_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$

ALLORA $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 < +\infty$

E DAL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO ABBIAMO QUINDI CHE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n} = +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^{\alpha}}}_{b_n} = +\infty$$

QUINDI

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{DIVERGE PER OGNI } 0<\alpha\leq 1}$$

- SE $\alpha > 2$, SI HA

$$n^2 = o(n^\alpha) \quad \text{PER } n\to\infty$$

DA CUI

$$\frac{1}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{PER } n\to\infty$$

OVVERO SE

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha} \quad E \quad b_n = \frac{1}{n^2}$$

SI HA $(\alpha > 2)$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 < +\infty$$

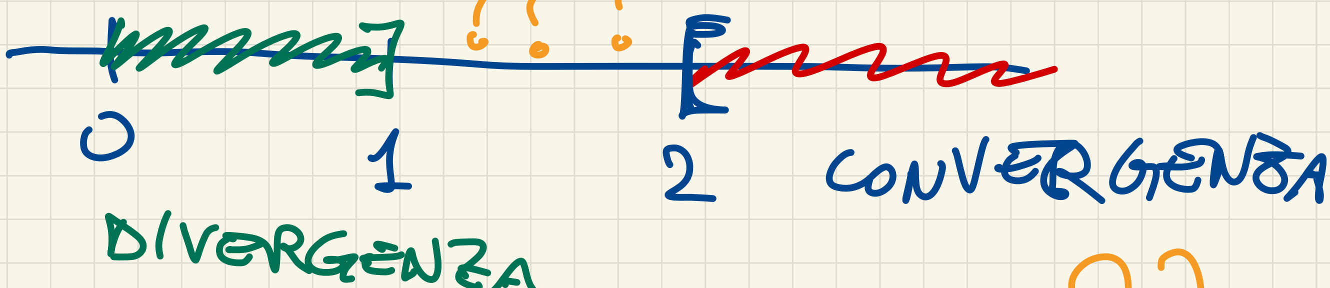
E DAL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO SI HA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{b_n} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^\alpha}}_{a_n} < +\infty$$

QUINDI

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$ CONVERGE PER OGNI $\alpha \geq 2$

???




E PER $1 < \alpha < 2$ ??

CONTINUA....

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ DISCUTERE IL CARATTERE DELLE SERIE SEGUENTI

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}\right)$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\frac{999}{1000}\right)^n$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$

SOL.

OSSERVIAMO CHE SI TRATTA DI 3 SERIE A TERMINI POSITIVI: PER LE 2) E 3) È OVVIO, PER LA 1) BASTA OSSERVARE CHE

$$n^3 \geq n \, , \quad \forall n \geq 1$$

DA CUI $\dfrac{1}{n^3} \leq \dfrac{1}{n} \, , \quad \forall n \geq 1$

OVVERO $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3} \geq 0 \, , \forall n \geq 1$

QUINDI SICURAMENTE LE 3 SERIE NON SONO IRREGOLARI

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \right)$$

OSSERVIAMO CHE

$$n = o(n^3) \quad \text{PER } n \to \infty$$

E QUINDI

$$\frac{1}{n^3} = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{PER } n \to \infty$$

QUINDI

PER $n \to \infty$

$$a_n = \frac{1}{n} - \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{= o\left(\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{1}{n} = b_n$$

MA LA SERIE $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{b_n}$ DIVERGE

QUINDI PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO ANCHE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right) \text{ DIVERGE}$$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(\frac{999}{1000}\right)^n$

SE NON CI FOSSE IL TERMINE $n^2$, OVVERO SE AVESSIMO

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{999}{1000}\right)^n$ CONVERGE

(SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE $0 < a = \frac{999}{1000} < 1$)

SFORTUNATAMENTE ABBIAMO IL TERMINE $n^2$ A COMPLICARE LE COSE....

$$a_n = n^2 \left(\frac{999}{1000}\right)^n$$

PROVIAMO AD APPLICARE IL CRITERIO DELLA RADICE N-ESIMA

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 \cdot \overbrace{\frac{999}{1000}}^{<1}}$$

$$= \frac{999}{1000} \cdot \lim_{n \to \infty} n^{\frac{2}{n}}$$

RICORDA

$$\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

$$= \frac{999}{1000} \lim_{n \to \infty} \big(\underbrace{n^{\frac{1}{n}}}_{\to 1}\big)^2$$

$$= \frac{999}{1000} \cdot 1^2 = \frac{999}{1000} < 1$$

QUINDI DAL CRITERIO DELLA RADICE n-ESIMA OTTENGO CHE

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(\frac{999}{1000}\right)^n$$ È ANCORA CONVERGENTE

3) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{e^n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

QUESTO È SIMILE A PRIMA

STAVOLTA PROVO AD USARE IL CRITERIO DEL RAPPORTO

$$a_n = n \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} \cdot \frac{e^n}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \frac{\cancel{e^n}}{e^{\cancel{n+1}}}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

QUINDI DAL CRITERIO DEL RAPPORTO OTTENGO CHE

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{e^n}$$ È CONVERGENTE

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ (x CASA)

SIA $\alpha > 0$, SI DIMOSTRI CHE LA SERIE

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{\alpha n}}{n!}$$

RICORDA

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$$

È CONVERGENTE PER $0 < \alpha < 1$, DIVERGENTE PER $\alpha \geq 1$.

**TEOREMA** (CRITERIO DI CONDENSAZIONE DI CAUCHY)

SIA $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ SIA UNA SUCCESSIONE A TERMINI POSITIVI, TALE CHE

$$\boxed{a_{n+1} \leq a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ALLORA

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ CONVERGE} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ CONVERGE}$$

(LA SERIE A DESTRA SI CHIAMA SERIE CONDENSATA)

DIM. (CENNO DI DIMOSTRAZIONE)

DO UN'IDEA DELL'IMPLICAZIONE

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ CONVERGE} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ CONVERGE}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \overbrace{a_1}^{a_{2^0}} + \overbrace{a_2 + a_3}^{\leq 2a_2} + \overbrace{a_4 + a_5 + a_6 + a_7}^{\leq 4a_4}$$

$$+ \underbrace{a_8 + a_9 + a_{10} + \dots + a_{15}}_{\leq 8a_8} + a_{16} + \dots$$

OVVERO IN ALTRE PAROLE

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots\dots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} < +\infty$$

PER IPOTESI

PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO, OTTENGO CHE

ANCHE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ (SERIE ARMONICA GENERALIZZATA
.... REPRISE!)

DISCUTERE IL

CARATTERE DELLA SERIE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{PER} \quad \alpha > 0 .$$

SOL.

ABBIAMO GIÀ VISTO CHE

- PER $\alpha \leq 1 \Rightarrow$ DIVERGE
- PER $\alpha \geq 2 \Rightarrow$ CONVERGE

RESTA IL CASO $1 < \alpha < 2$.

$a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ È DECRESCENTE.

I CRITERI DELLA RADICE n-ESIMA E DEL RAPPORTO FALLISCONO

PROVIAMO COL CRITERIO DI CONDENSAZIONE DI CAUCHY

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{CON} \quad 1 < \alpha < 2$$

PASSIAMO ALLA SERIE CONDENSATA

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \, 2^{-\alpha n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-\alpha n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(1-\alpha)}$$

$$= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^n}$$

SERIE GEOMETRICA!!

DI RAGIONE

$$q = 2^{1-\alpha}$$

DAL MOMENTO CHE $1<\alpha<2$, ALLORA $1-\alpha<0$, SI HA $\boxed{2^{1-\alpha}<1}$

QUINDI LA SERIE CONDENSATA CONVERGE $\Longrightarrow$ CONVERGE

(C.C. CAUCHY)

ANCHE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{CON } 1 < \alpha < 2.$$

<u>CONCLUSIONE</u> $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ CONVERGE

$\Longleftrightarrow \alpha > 1$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ (x CASA)

DETERMINARE IL CARATTERE DELLA SERIE

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$$

PER $\alpha > 0$.

(<u>SUGG.</u> CONDENSAZIONE ...)

# III.8 CRITERI DI CONVERGENZA PER SERIE A TERMINI DI SEGNO VARIABILE

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (CRITERIO DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA)

SIA $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ UNA SUCCESSIONE A TERMINI DI SEGNO QUALUNQUE.

SE LA SERIE DEI VALORI ASSOLUTI

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \quad \text{CONVERGE}$$

ALLORA CONVERGE ANCHE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (CRITERIO DI LEIBNIZ)

SIA $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ UNA SUCCESSIONE

TALE CHE:

I $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

II $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

III $a_n = o(1)$ PER $n \to \infty$

ALLORA LA SERIE

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

CONVERGE.