ANALISI MATEMATICA A

- LEZIONE 11 -

LORENZO BRASCO

- 4 NOVEMBRE 2020 -

L'ULTIMA VOLTA ABBIAMO VISTO CHE

1. $n^{\alpha} = o(a^n)$ PER $n \to \infty$ PER OGNI $\alpha > 0$, $a > 1$

2. $a^n = o(n!)$ PER $n \to \infty$ PER OGNI $a > 1$

SI DIMOSTRANO USANDO IL CRITERIO DEL RAPPORTO

DIMOSTRIAMO IL 2 :

DOBBIAMO FAR VEDERE CHE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

CHIAMIAMO $\boxed{a_n = \frac{a^n}{n!}}$ E CALCOLIAMO

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\cancel{n+1}}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\cancel{a^n}}$$

$\boxed{\text{RICORDA}}$ $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{a}{(n+1) \cdot \cancel{n!}} \cancel{n!}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1$$

PERCHÉ ALLORA POSSO USARE IL CRITERIO DEL RAPPORTO E CONCLUDERE CHE

$$a_n = \frac{a^n}{n!} \longrightarrow 0 \quad \text{PER } n \to \infty$$

COME VOLEVO ☒

IN SEGUITO, CI SARÀ UTILE IL SEGUENTE

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (STOLZ-CESÀRO)

SIANO $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ TALI CHE $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ABBIA LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

I $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

II $b_{n+1} > b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

III b_n DIVERGE A $+\infty$

SE ESISTE IL LIMITE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

ALLORA ESISTE ANCHE IL LIMITE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

E I 2 LIMITI COINCIDONO.

$\boxed{\text{OSS}}$ QUESTO TEOREMA A VOLTE SI CHIAMA "DE L'HÔPITAL DISCRETO"

PROVIAMO A METTERLO IN OPERA

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ DIMOSTRARE CHE

$$\log_a n = o(n) \quad \text{PER } n \to \infty$$

PER OGNI BASE a.

SOL.

DEVO DIMOSTRARE CHE

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$$

FORMA INDETERMINATA

$$\frac{\infty}{\infty}$$

PROVIAMO AD USARE STOLZ CESÀRO

CHIAMIAMO

$$a_n = \log_a n \qquad b_n = n$$

$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ SODDISFA LE IPOTESI DI STOLZ-CESÀRO, CHE SONO

I $\quad b_n = n > 0, \quad \forall n \geq 1$

II $\quad b_{n+1} > b_n, \quad \forall n \geq 1$

III $\quad b_n \nearrow +\infty$

INOLTRE ABBIAMO

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a(n+1)-\log_a n}{\cancel{n}+1-\cancel{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\log_a(n+1)-\log_a n\right]$$

(L1)+(L2)
REGOLE
DI CALCOLO
DEI
LOGARITMI

$$=\lim_{n\to\infty}\log_a\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$=\log_a 1=0$$

ALLORA ABBIAMO

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

STOLZ-CESÀRO

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

$$= 0$$

PROPRIO COME VOLEVO!

$\boxed{\text{OSS.}}$ ABBIAMO VISTO CHE

$$\log_a n = o(n) \quad \text{PER } n \to \infty$$

QUINDI A MAGGIOR RAGIONE VALE ANCHE

$$\log_a n = o(n^\alpha) \quad \text{PER } n \to \infty$$

PER OGNI $\boxed{\alpha > 1}$. (INFATTI

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\boxed{\frac{\log_a n}{n}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{n^{\alpha-1}}}}_{\to 0} = 0$$

DOMANDA COSA POSSO DIRE SU $\log_a n$ E n^α CON $0<\alpha<1$?

OVVERO, VARRÀ ANCORA CHE

$$\log_a n = o(n^\alpha) \quad \text{PER } n \to \infty$$

ANCHE PER $0<\alpha<1$?

$\log_a n = o(\sqrt{n})$? OPPURE $\sqrt{n} = o(\log_a n)$?

ESERCIZIO CALCOLARE

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \,.$$

SOL.

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$$

FORMA DETERMINATA

$$\infty^0$$

OSSERVO CHE

$$n^{\frac{1}{n}} = 2^{\log_2 n^{\frac{1}{n}}}$$

RICORDA

$$x = a^{\log_a x}$$

$$n^{\frac{1}{n}} = 2^{\log_2 n^{\frac{1}{n}}} \underset{(L2)}{=} 2^{\frac{1}{n} \cdot \log_2 n}$$

$$= 2^{\frac{\log_2 n}{n}}$$

MA IN BASE ALL'ESERCIZIO PRECEDENTE, SAPPIAMO CHE

$$\frac{\log_2 n}{n} \xrightarrow[(n \to \infty)]{} 0$$

QUINDI

$$n^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{\log_2 n}{n}} \longrightarrow 2^0 = 1$$

OVVERO

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1 .$$ ■

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ (x CASA)

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^7 + 1}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ DIMOSTRARE CHE

$$n = o(\log_a(n!)) \quad \text{PER } n \to \infty$$

PER OGNI BASE a.

SOL.

DOBBIAMO FAR VEDERE CHE

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\log_a(n!)} = 0$$

FORMA INDETERMINATA $\frac{\infty}{\infty}$

È DEL TIPO $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$

CON

$a_n = n$ E $b_n = \log_a(n!)$

VOGLIO PROVARE AD USARE STOLZ-CESÀRO, OSSERVO CHE

$\boxed{\text{CASO } a>1}$

I $b_n > 0$, $\forall n \geq 2$

II $b_{n+1} > b_n$, $\forall n \geq 2$

III $b_n \nearrow +\infty$

INOLTRE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\log_a (n+1)! - \log_a n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log_a \frac{(n+1)!}{n!}} =$$

(L1) + (L2)

$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\log_a \frac{(n+1) \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\log_a (n+1)} = \underline{0}$$

$\longrightarrow +\infty$

OVVERO APPLICANDO STOLZ-CESÀRO POSSIAMO DIRE

$(a > 1)$ SI HA

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\log_a(n!)} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

$$\overset{S-C}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

$$= 0$$

PROPRIO COME VOLEVO!

PER IL CASO $0 < a < 1$

BASTA OSSERVARE CHE

$$\log_a(n!) = \log_a\left(\frac{1}{a}\right)^{\log_{\frac{1}{a}} n!}$$

$$\overset{(L2)}{=} \log_{\frac{1}{a}}(n!) \log_a\left(\frac{1}{a}\right)$$

$\frac{1}{a} > 1$

$$= -\log_{\frac{1}{a}}(n!)$$

ALLORA SE $0 < a < 1$

$$\frac{n}{\log_a(n!)} = -\frac{n}{\log_{\frac{1}{a}}(n!)} \longrightarrow 0$$

PER IL CASO PRECEDENTE PERCHÉ

$\frac{1}{a} > 1$.

$\blacksquare$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ (DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI)

DIMOSTRARE CHE PER OGNI $x \geq -1$ E PER OGNI $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\boxed{(1+x)^n \geq 1+nx} \quad (B)$$

SOL.

PROVIAMOLO PER INDUZIONE

- PASSO 1 : VERIFICARE CHE

(B) È VERA PER $n = 1$.

$$(1+x)^1 = 1+x$$

TERMINE DI SINISTRA

MENTRE

$$1 + 1 \cdot x = 1 + x$$

TERMINE DI DESTRA

$\Rightarrow$ QUINDI (B) È VERA PER $n=1$

- PASSO 2 (PASSO INDUTTIVO)

SUPPONIAMO CHE VALGA

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$ IPOTESI INDUTTIVA

DEVO DIMOSTRARE CHE QUESTO IMPLICA LA (B) AL PASSO $n+1$, CIOÈ

$$\boxed{(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x} \; ?$$

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}_{\geq 1+nx}\,\overbrace{(1+x)}^{>0}$$

IPOTESI INDUTTIVA

$$\geq (1+nx)(1+x)$$

$$= 1+nx+x+nx^2$$

$$= 1+(n+1)x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$

$$\geq 1+(n+1)x$$

COME VOLEVO!

III.5 LA COSTANTE DI NEPERO e

IN QUESTA SEZIONE VOGLIAMO STUDIARE LA SUCCESSIONE

$$\boxed{a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \forall n \geq 1}$$

OSSERVIAMO INNANZITUTTO CHE PER $n \to \infty$ SI TRATTA DI UNA FORMA INDETERMINATA 1^{∞}

$$\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = ?$$

$\boxed{\text{PROPOSIZIONE}}$ LA SUCCESSIONE

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \forall n \geq 1$$

È CONVERGENTE. INOLTRE IL SUO LIMITE È UN NUMERO REALE APPARTENENTE ALL'INTERVALLO

$$(2, 4).$$

DIM.

DIMOSTRIAMO INNANZITUTTO CHE È CONVERGENTE.

OSSERVIAMO CHE IL CRITERIO DELLA RADICE NON SI PUÒ APPLICARE, PERCHÉ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

FA PROPRIO 1! NON SI PUÒ DIRE NIENTE.

NON È CHE LA SUCCESSIONE È MONOTONA CRESCENTE PER CASO?

SE LA RISPOSTA È $\underline{\text{SÌ}}$, ALLORA SO CHE $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\underline{\text{NON}}$ È IRREGOLARE.

VEDIAMO SE È VERO CHE È CRESCENTE:

$$a_{n+1} \geq a_n \Longleftrightarrow \underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{?}$$

$$\forall n \geq 1$$

UN PO' DI PAZIENZA:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} \overset{?}{\geq} 1}$$

USIAMO UN PO' DI ALGEBRA

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \boxed{\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2} \right)^n \left(1+\frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \boxed{\left(1-\frac{1}{(n+1)^2} \right)^n} \left(1+\frac{1}{n+1} \right)$$

$\geq$

BERNOULLI
CON $x = -\frac{1}{(n+1)^2}$

$\boxed{\text{RICORDA}}$
$(1+x)^n \geq 1+nx$

$$\geq \left(1 + n \cdot \left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{n}{(n+1)^2} - \frac{n}{(n+1)^3}$$

$$= 1 + \frac{(n+1)^2 - n(n+1) - n}{(n+1)^3} =$$

$$= 1 + \frac{\cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1 - \cancel{n^2} - \cancel{n} - \cancel{n}}{(n+1)^3}$$

$$= 1 + \frac{1}{(n+1)^3}$$

RICAPITOLANDO ABBIAMO CHE

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} \geq 1 + \frac{1}{(n+1)^3} \boxed{> 1}$$

COME VOLEVAMO!

QUINDI $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ È MONOTONA CRESCENTE E PER IL TEOREMA SULLE SUCCESSIONI MONOTONE, POSSIAMO DIRE CHE ESSA AMMETTE LIMITE!

DOBBIAMO ESCLUDERE CHE SIA DIVERGENTE.

PER FAR VEDERE CHE NON È DIVERGENTE, INTRODUCIAMO LA NUOVA SUCCESSIONE

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\underline{n+1}}$$

SI VEDE SUBITO CHE

$$\boxed{a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq 1.}$$

SI PUÒ DIMOSTRARE IN MODO SIMILE A PRIMA CHE

b_n È DECRESCENTE (X CASA)

- $a_n \leq b_n$ E $b_n \searrow$

ABBIAMO ALLORA CHE

PERCHÉ MONOTONI CRESCENTE

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geq 1} a_n$$

$$\leq \sup_{n\geq 1} b_n = b_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 = 4$$

INOLTRE SICCOME a_n ERA CRESCENTE, ABBIAMO CHE

MONOTONA CRESCENTE

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geq 1} a_n$$

$$\geq a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1$$

$$= 2$$

IN CONCLUSIONE

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ È CONVERGENTE

E INOLTRE

$$2 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq 4$$

IN REALTÀ, CON UN PO' DI ATTENZIONE, SI POSSONO ESCLUDERE GLI ESTREMI.

$\blacksquare$

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ (COSTANTE DI NEPERO)

SI CHIAMA COSTANTE DI NEPERO

IL NUMERO, INDICATO CON LA LETTERA e, DEFINITO DA

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$\boxed{\text{OSS.}}$ (UN ASINTOTICO IMPORTANTE)

SCEGLIAMO e COME BASE DEL LOGARITMO ED USIAMO LA NOTAZIONE

$$\log x = \log_e x$$

(CIOÈ SE OMETTO DI SCRIVERE LA BASE, VUOL DIRE CHE STO CONSIDERANDO LA BASE e)

ALLORA VALE $\boxed{\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \text{ SE } n \to \infty}$

INFATTI

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\stackrel{(L2)}{=} \lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

COSTANTE e

$$= \log e = 1$$

LA BASE È e

COME VOLEVO

E RISPETTO AD UN'ALTRA BASE?

$$\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log_a e \cdot \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\sim \frac{\log_a e}{n}$$

PER $n \to \infty$

- ARMATI DI QUESTO ASINTOTICO, POSSIAMO RISPONDERE ALLA

DOMANDA DI PRIMA:

CHE RELAZIONE C'È TRA $\sqrt{n}$ E $\log n$?

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ DIMOSTRARE CHE

$$\log n = o(\sqrt{n}) \quad \text{PER } n \to \infty$$

<u>SOL</u>.

DEVO FAR VEDERE CHE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0 .$$

PROVO A USARE DI NUOVO STOLZ-CESÀRO CON

$a_n = \log n$ E $b_n = \sqrt{n}$

OSSERVO CHE b_n È POSITIVA, ST. CRESCENTE E DIVERGENTE A $+\infty$, COME RICHIESTO DA STOLZ-CESÀRO

INOLTRE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)-\log n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log \frac{n+1}{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

ASINTOTICO IMPORTANTE

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\cancel{n}+1-\cancel{n}}$$

$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}} = 0$$

QUINDI IN CONCLUSIONE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

$$\text{S-C} \; = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = 0 \qquad \blacksquare$$

OSS. PIÙ IN GENERALE, SI PUÒ DIMOSTRARE CHE

$$\boxed{\log n = o(n^\alpha), \quad \text{PER } n \to \infty}$$

PER OGNI $\alpha > 0$.

ESERCIZIO CALCOLARE

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}.$$

SOL.

USO IL SOLITO "TRUCCO"

$$\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e^{\log \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}}$$

$$\overset{(L2)}{=} e^{\frac{1}{n} \log \frac{n^n}{n!}}$$

MI CONCENTRO SUL CALCOLO DEL LIMITE DELL' ESPONENTE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{n^n}{n!}$$

QUESTO È DELLA FORMA $\frac{a_n}{b_n}$ CON

$a_n = \log \frac{n^n}{n!}$ E $b_n = n$

VOGLIO USARE STOLZ-CESÀRO

DEVO CALCOLARE QUINDI

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\log \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} - \log \frac{n^n}{n!} \right]$$

$$\underset{(L2)+(L1)}{=} \lim_{n\to\infty} \log \left[\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \right]$$

$$(n+1)! = (n+1)\cdot n!$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log \left[\frac{(n+1)^{n+\cancel{1}}}{\cancel{(n+1)}\cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n} \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \log \boxed{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

DEFINISCE e !!

$$= \log e = 1$$

QUINDI PER STOLZ-CESÀRO

ABBIAMO ANCHE

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \frac{n^n}{n!} = 1$$

DA CUI IN CONCLUSIONE

$$\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e^{\frac{1}{n}\log\frac{n^n}{n!}} \to e$$

$\to 1$

OVVERO

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e \quad \blacksquare$$