Analisi Matematica A

– Lezione 10 –

Lorenzo Brasco

30 Ottobre 2020

ESERCIZIO DIMOSTRARE CHE

(1) $\sqrt{n^2+n} \sim n$ PER $n \to \infty$

(2) PER OGNI $\alpha \neq 0$ E PER OGNI $x \in \mathbb{R}$

$$(n+x)^{\alpha} \sim n^{\alpha} \quad \text{PER } n \to \infty$$

SOL.

(1) DEVO DIMOSTRARE CHE $\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} = 1$

$$\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}$$ È FORMA INDETERMINATA DEL TIPO $\frac{\infty}{\infty}$

COME SI RISOLVE?

$$\frac{\sqrt{n^2+n}}{n} = \frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2}} = \frac{(n^2+n)^{\frac{1}{2}}}{(n^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$n > 0$

$$= \left(\frac{n^2+n}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

OVVERO
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = \sqrt{1+0}$$
$$= 1$$

COME VOLEVO

QUINDI $\sqrt{n^2+\underbrace{n}}\sim n$ PER $n\to\infty$

CONTA MOLTO MENO DI n^2

(OVVERO $n = o(n^2)$ PER $n\to\infty$)

② $(n+x)^\alpha \sim n^\alpha$ PER $n \to \infty$

(CHIUNQUE SIANO $\alpha \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$)

$x \neq 0$

DEVO PROVARE CHE

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+x)^\alpha}{n^\alpha} = 1$$

BASTA OSSERVARE CHE

$$\frac{(n+x)^\alpha}{n^\alpha} = \left(\frac{n+x}{n} \right)^\alpha = \Big(1 + \overbrace{\frac{x}{n}}^{\to 0} \Big)^\alpha$$

OVVERO

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+x)^\alpha}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^\alpha$$

$$= (1+0)^\alpha = 1$$

COME VOLEVO.

QUINDI, CASI PARTICOLARI DI (2):

$$(n+\underbrace{7}_{\text{QUESTO NON CONTA RISPETTO AD } n\to\infty})^{3/2} \sim n^{3/2} \quad \text{SE } n\to\infty$$

$$\sqrt{n-2} = (n-2)^{\frac{1}{2}} \sim \sqrt{n} \quad \text{SE } n \to \infty$$

$\blacksquare$

ESERCIZIO (x CASA)

SIA $\alpha \neq 0$ E a UNA <u>BASE</u>.

DIMOSTRARE CHE

$$\boxed{\log_a (n+\alpha) \sim \log_a n \quad \text{PER } n \to \infty}$$

$\boxed{\text{OSS.}}$ (ALGEBRA DEGLI O-PICCOLI E DEGLI ASINTOTICI)

UN PAIO DI REGOLE

I SE $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

TALI CHE

$$a_n \sim c_n \quad \text{PER } n\to\infty$$

$$b_n = o(c_n) \quad \text{PER } n\to\infty$$

ALLORA $\boxed{a_n + b_n \sim c_n \quad \text{PER } n\to\infty}$

INFATTI

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_n}{c_n}+\frac{b_n}{c_n}\right]$$

$$= 1+0 = 1$$

PERCHÉ

$a_n \sim c_n$

$b_n = o(c_n)$

$\Longrightarrow \quad a_n+b_n \sim c_n \quad$ PER $n\to\infty$

ESEMPIO

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{3n^2+n+7}$$

OSSERVIAMO CHE

$n = o(n^2)$ PERCHÉ $\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} = 0$

QUINDI

$$n^2 - n \underset{\text{I}}{\sim} n^2$$

IN MODO SIMILE

$$n+7 = o(n^2)$$

INFATTI

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+7}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n} + \frac{7}{n^2}\right] = 0$$

QUINDI

$$3n^2 + n + 7 \underset{\mathrm{I}}{\sim} 3n^2$$

OVVERO

$$\frac{n^2-n}{3n^2+n+7} \sim \frac{\cancel{n^2}}{3\cancel{n^2}} = \frac{1}{3}$$

PER $n \to \infty$.

ABBIAMO QUINDI CHE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{3n^2+n+7} \bigg/ \frac{1}{3} = 1$$

OVVERO $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{3n^2+n+7} = \frac{1}{3}$

PRIMA, HO USATO ANCHE LA REGOLA SEGUENTE

II SE $a_n \sim c_n$ PER $n \to \infty$

$b_n \sim d_n$ PER $n \to \infty$

ALLORA

$$\boxed{a_n b_n \sim c_n d_n \text{ PER } n \to \infty}$$

INFATTI

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{c_n d_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a_n}{c_n} \cdot \frac{b_n}{d_n} \right]$$

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

COME VOLEVO

III SE $a_n \sim c_n$ E $b_n \sim c_n$

ALLORA $\boxed{a_n + b_n \sim 2 c_n}$ PER $n \to \infty$

INFATTI

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+b_n}{2c_n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_n}{c_n}+\frac{b_n}{c_n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1+1\right] = 1$$

COME VOLEVO.

$\boxed{\text{DOMANDA}}$ SE $a_n \sim c_n$ E $b_n \sim c_n$

ALLORA $a_n + b_n \sim 2c_n$ ....

E COSA POSSO DIRE SU $a_n - b_n \sim$?

QUALCUNO POTREBBE ESSERE TENTATO DI RISPONDERE

$$\boxed{\cancel{a_n - b_n \sim c_n - c_n = 0 \quad \text{PER } n \to \infty}}$$

NO

"PERCHÉ NO?"

LA SCRITTURA

$$a_n - b_n \sim 0 \quad \text{PER } n \to \infty$$

È PRIVA DI SENSO

"PERCHÉ?" PERCHÉ IN BASE ALLA DEFINIZIONE DEL SIMBOLO $\sim$ QUESTO VORREBBE DIRE

$$\frac{a_n - b_n}{0} \longrightarrow 1$$

NON SI PUÒ DIVIDERE PER 0!!

OSSERVAZIONE (EQUIVALENZE ASINTOTICHE, SOMME E DIFFERENZE)

SE $a_n \sim c_n$ E $b_n \sim c_n$

NON POSSO DIRE NIENTE SU

$$a_n - b_n$$

DA UN PUNTO DI VISTA ASINTOTICO, SE NON CHE $\boxed{a_n - b_n = o(c_n) \text{ PER } n \to \infty}$

INFATTI

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a_n}{c_n} - \frac{b_n}{c_n} \right]$$

$$= 1 - 1 = 0$$

COME HO DICHIARATO.

QUINDI IN QUESTE SITUAZIONI SI DOVRÀ <u>FARE MOLTA ATTENZIONE</u>

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ SIA $0 < \alpha < 2$

CALCOLARE

$$\lim_{n \to \infty} \left[\sqrt{n^2 + n^\alpha} - n \right] = ?$$

SOL.

TRATTASI DI FORMA INDETERMINATA

$+\infty - \infty$.

USO UN TRUCCO GIÀ VISTO

NELLA LEZIONE 9

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n^\alpha}-n\right)=$$

$$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n^\alpha}-n\right)\frac{\left(\sqrt{n^2+n^\alpha}+n\right)}{\sqrt{n^2+n^\alpha}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}+n^\alpha-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n^\alpha}+n}$$

$$\left(\text{FORMA } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

SIAMO RIMASTI CON

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{\sqrt{n^2+n^\alpha}+n}$$

IL DENOMINATORE: OSSERVO CHE $0<\alpha<2$, QUINDI

$$n^2+n^\alpha \sim n^2 \quad \text{PER } n\to\infty$$

(VERIFICA $\overset{\mathrm{I}}{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^2+n^\alpha}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left[1+n^{\overset{0>}{\alpha-2}}\right]\to 0$)

QUINDI

$$\sqrt{n^2+n^\alpha} \sim \sqrt{n^2} = n \quad \text{PER } n \to \infty$$

DA CUI INFINE

$$\underbrace{\sqrt{n^2+n^\alpha}}_{\sim n} + \underbrace{n}_{\sim n} \underset{\text{VI}}{\sim} n+n = 2n$$

IN CONCLUSIONE, ABBIAMO

$$\sqrt{n^2+n^\alpha}-n = \frac{n^\alpha}{\sqrt{n^2+n^\alpha}+n}$$

$$\sim \frac{n^\alpha}{2n} \quad \text{PER } n \to \infty$$

$$= \frac{n^{\alpha-1}}{2} \quad \text{PER } n \to \infty$$

IN ALTRE PAROLE

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n^\alpha}-n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-1}}{2}$$

- $\alpha-1>0$
- $\alpha-1=0$
- $\alpha-1<0$

$$=\begin{cases} +\infty\,, & \text{se } 2>\alpha>1 \\ \dfrac{1}{2}\,, & \text{se } \alpha=1 \\ 0\,, & \text{se } 0\leq\alpha<1 \end{cases}$$

QUINDI

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n^\alpha}-n\right)=\begin{cases}+\infty, & \text{SE } 1<\alpha<2\\ \frac{1}{2}, & \text{SE } \alpha=1\\ 0, & \text{SE } 0<\alpha<1\end{cases}$$

OSSERVATE CHE

$\sqrt{n^2+n^\alpha} \sim n$ QUINDI

NELLA SITUAZIONE

$a_n - b_n$ CON $a_n \sim c_n \sim b_n$

NON POSSO DARE REGOLE GENERALI!

L'ESEMPIO PRECEDENTE MI DICE CHE "PUÒ SUCCEDERE DI TUTTO".

III.4 CRITERI DI CONVERGENZA PER SUCCESSIONI

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (CRITERIO DEL CONFRONTO)

SIANO $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ E $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. SUPPONIAMO CHE

(i) $\exists\, k \in \mathbb{N}$ T.C.

$$\underbrace{a_n}_{\text{"CARABINIERI"}} \leq \overbrace{b_n} \leq \underbrace{c_n} \,, \quad \forall n \geq k$$

(ii) a_n E c_n NON SONO IRREGOLARI E

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n .$$

ALLORA SI HA ANCHE

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n .$$

<u>DIM</u>.

SUPPONIAMO PER SEMPLICITÀ CHE

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L \in \mathbb{R}$$

QUESTO VUOL DIRE CHE:

1 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ TALE CHE

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon, \quad \forall n \geq \underline{n_\varepsilon}$$

2 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ TALE CHE

$$L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon, \quad \forall n \geq \underline{k_\varepsilon}$$

PER POTER UTILIZZARE 1 E 2 IN CONTEMPORANEA

CHIAMO $m_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, k_\varepsilon\}$

ALLORA PER OGNI $\boxed{n \geq m_\varepsilon}$

SI HA

$$\underbrace{L-\varepsilon < a_n} < L+\varepsilon \quad \text{E} \quad L-\varepsilon < \underbrace{c_n < L+\varepsilon}$$

MI RICORDO ADESSO CHE

$$\boxed{a_n \leq} \, b_n \boxed{\leq c_n} \quad , \quad \forall n$$

QUINDI ABBIAMO DIMOSTRATO CHE:

VALE CHE

$$L-\varepsilon < b_n < L+\varepsilon, \ \forall n \geq m_\varepsilon$$

OVVERO CHE

"$\forall \varepsilon > 0, \ \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ TALE CHE

$$|b_n - L| < \varepsilon, \ \forall n \geq m_\varepsilon"$$

MA QUESTA È LA DEFINIZIONE DI

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L \quad \boxtimes$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ DIRE SE

$$a_n = \sqrt[n]{2^n + n}$$ È CONVERGENTE.

SE SÌ, CALCOLARNE IL LIMITE.

SOL.

FORMA INDETERMINATA

$$\infty^0$$

COME SI RISOLVE?

POTREMMO SOSPETTARE

CHE $2^n + n \sim 2^n$?

E QUINDI $\sqrt[n]{2^n+n} \sim \sqrt[n]{2^n} = 2$

"FORSE" LA SUCCESSIONE CONVERGE

A 2 ... QUESTA PERO' NON È

UNA DIMOSTRAZIONE.

PROVIAMO AD USARE IL CRITERIO

DEL CONFRONTO

$$\underbrace{?}_{a_n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{2^n+n}}_{b_n} \leq \underbrace{?}_{c_n}$$

PER TROVARE I 2 "CARABINIERI" a_n E b_n OSSERVO CHE

$$2^n+n \geq 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

QUINDI

$$\sqrt[n]{2^n+n} \geq \sqrt[n]{2^n} = \boxed{2 = a_n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

CI MANCA IL CARABINIERE DA DESTRA: USANDO CHE

$$n \leq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

($\underline{\underline{\text{SI}}}$: DIMOSTRATELO PER CASA USANDO IL PRINCIPIO DI INDUZIONE)

ABBIAMO

$$\sqrt[n]{2^n+n} \leq \sqrt[n]{2^n+2^n} = \sqrt[n]{2\cdot 2^n} = 2^{(n+1)\frac{1}{n}}$$

$$= 2^{1+\frac{1}{n}} = \boxed{2 \cdot 2^{\frac{1}{n}} = c_n}$$

QUINDI

RICAPITOLANDO

$$\underset{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 2}}{2} \leq \underbrace{\sqrt[n]{2^n + n}}_{b_n} \leq 2 \cdot 2^{\frac{1}{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$n \to \infty$

$\Rightarrow$ PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO

SI HA

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+n} = 2 \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{PROPOSIZIONE}}$ ("INFINITESIMA VS. LIMITATA")

SIANO $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

TALI CHE

(i) $a_n = o(1)$ PER $n\to\infty$

(ii) b_n È LIMITATA

ALLORA

$$a_n b_n = o(1) \text{ PER } n \to \infty$$

(**NOTA BENE**: $a_n = o(1)$ PER $n \to \infty$

IN BASE ALLA DEFINIZIONE, VUOL DIRE

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$
)

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sin n$

OSSERVO CHE

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

MENTRE b_n È IRREGOLARE

(PROVATE A DIMOSTRARLO....)

<u>PERÒ</u> $-1 \leq b_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

PER LE PROPRIETÀ DEL SENO

QUINDI

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

"INFINITESIMA VS. LIMITATA"

SI PUÒ FARE ANCHE COL CRITERIO DEL CONFRONTO PERCHÉ

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$0 \leftarrow -\frac{1}{n}$ $\qquad \frac{1}{n} \to 0$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (SUCCESSIONI MONOTONE)

SIA $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ SUCCESSIONE MONOTONA. ALLORA <u>NON È</u> IRREGOLARE, OVVERO ESSA È CONVERGENTE O DIVERGENTE.

INOLTRE, VALE

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \begin{cases} \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n, & \text{SE } a_n \uparrow \\ \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n, & \text{SE } a_n \downarrow \end{cases}$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ TROVARE sup E inf DELL' INSIEME

$$E = \left\{ \frac{n-1}{n+1} \; : \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

OSSERVO CHE MI STANNO CHIEDENDO

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \quad \text{E} \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

DOVE $\boxed{a_n = \frac{n-1}{n+1}}$

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} = \frac{n+1-1-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$$

È MONOTONA CRESCENTE

QUINDI

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = a_0 = -1 = \min_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$$

TEOREMA PRECEDENTE

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (CRITERIO DELLA RADICE n-ESIMA)

SIA $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ SUCCESSIONE TALE CHE:

(i) $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.

ALLORA SI HA

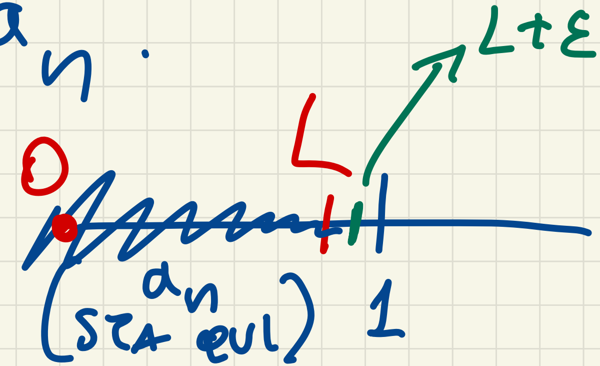
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

DIM. (CENNO)

CHIAMO $L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$.

SO CHE

$$L < 1.$$



IN BASE ALLA DEFINIZIONE DI LIMITE, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ T.C.

$$L-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \underbrace{L+\varepsilon}_{\text{VOGLIO QUESTO } < 1}, \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

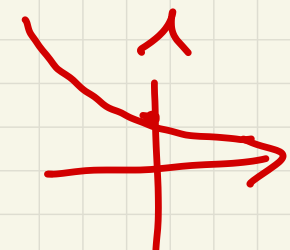
ALLORA

DA

$$\sqrt[n]{a_n} < L+\varepsilon \, , \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

ABBIAMO ANCHE CHE (ELEVANDO ALLA n)

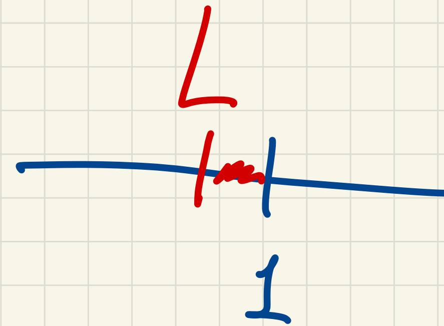
$$\underbrace{0 \leq}_{\text{PER (i)}} a_n < \underbrace{(L+\varepsilon)^n}_{\substack{\text{ESPONENZIALE} \\ \text{CON } L+\varepsilon < 1}} \, , \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$



QUINDI

$$0 \le a_n < (L+\varepsilon)^n, \quad \forall n \ge n_\varepsilon$$

$$0 \to 0, \qquad (L+\varepsilon)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$



CONCLUDO COL "CRITERIO DEL CONFRONTO" ☑

$\boxed{\text{OSS.}}$ SE $L = 1$, LA DIMOSTRAZIONE NON FUNZIONA

ED IL RISULTATO NON VALE.

SE INVECE

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1,$$

ALLORA POSSO DIRE CHE

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (CRITERIO DEL RAPPORTO)

SIA $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ UNA SUCCESSIONE TALE CHE

(i) $a_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

ALLORA SI HA

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ DIMOSTRARE CHE

(1) $n^\alpha = o(a^n)$ PER $n \to \infty$

PER OGNI $\alpha > 0$, $a > 1$

(2) $a^n = o(n!)$ PER $n \to \infty$

PER OGNI $a > 1$.

<u>SOL</u>.

1 DEVO DIMOSTRARE CHE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$$

USO IL <u>CRITERIO DEL RAPPORTO</u> CON

$$a_n = \frac{n^\alpha}{a^n}$$

DEVO CALCOLARE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{a^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{a^n}}{n^\alpha}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)}_{\to 1}^\alpha$$

$$= \frac{1}{a} < 1$$

CRITERIO DEL RAPPORTO

$(a > 1)$

$\Longrightarrow$ OTTENGO CHE $a_n \to 0$ COME VOLEVO