Analisi Matematica A
– *Lezione 1* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 24 Settembre 2021

Cominciamo con qualche informazione generale sul corso

Docente

Lorenzo Brasco

Email: `lorenzo.brasco@unife.it`

Ufficio: presso *Dipartimento di Matematica e Informatica*
via Machiavelli 35, terzo piano

Figura: Per chi segue a distanza, ecco una mia foto

Struttura del corso

Il corso è costituito di 2 parti

- Analisi Matematica A (primo semestre)
- Analisi Matematica B (secondo semestre)

Multimedialità

- `http://www.unife.it/ing/meccanica/insegnamenti/Analisi_matematica`
- Codice Classroom: `xfmzkl4`
- Canale YouTube (cercate *Lorenzo Brasco Unife*)

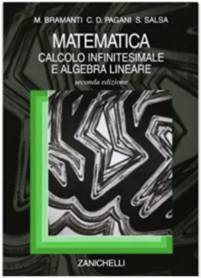
Orari di lezione

Mercoledì e Venerdì alle ore 11 (con inizio alle 11.15), per una durata di 2 ore circa (facciamo una pausa a metà)

Testi consigliati

Come libro di testo

- M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa: *MATEMATICA – Calcolo Infinitesimale ed Algebra Lineare*, Ed. Zanichelli


M. BRAMANTI C. D. PAGANI S. SALSA
MATEMATICA
CALCOLO INFINITESIMALE
E ALGEBRA LINEARE
seconda edizione
ZANICHELLI

Testi consigliati

Come libri di esercizi

Per la parte di Analisi Matematica A

- P. Marcellini, C. Sbordone, *Esercitazioni di Matematica (parte prima & parte seconda)*, Ed. Liguori

Per la parte di Analisi Matematica B

- P. Marcellini, C. Sbordone, *Esercitazioni di Analisi Matematica Due (Vol. I & II)*, Ed. Zanichelli

Altro materiale

Sulla pagina del corso sono presenti

- le dispense della parte di Analisi Matematica A
- le slides delle lezioni di Analisi Matematica A & B
- i testi delle vecchie prove d'esame

Regole d'esame

L'esame si compone di una **parte scritta** ed una **parte orale**

L'esatto svolgimento della prova d'esame, dipende dal fatto se si potranno fare in presenza gli esami, oppure dovremo farli in modalità telematica

Nel caso di **modalità telematica**:

- la prova orale è facoltativa e può farla solo chi ottiene un voto superiore o uguale a 25/30 alla prova scritta
- durante la prova orale, lo studente dovrà rispondere a due domande (una sulla parte A, una sulla parte B), prese dalla lista di domande d'esame che si trova sul sito del corso
- chi, avendone diritto, decide di non svolgere la prova orale, otterrà come voto finale 25/30, indipendentemente dal voto della prova scritta

- la prova scritta consiste di 10 esercizi
- di ognuno dei 10 esercizi, lo studente dovrà dare soltanto la risposta, senza fornire dettagli sul procedimento
- ogni esercizio vale 3 punti in caso di risposta corretta
- c'è la possibilità di dare la prova scritta in due *parziali*:
  - a gennaio/febbraio avete <u>due possibilità</u> per fare lo scritto solo sulla parte A
  - a giugno/luglio avete <u>due possibilità</u> per fare lo scritto solo sulla parte B
- in entrambi i casi, la prova scritta ha la stessa struttura (10 esercizi, ognuno da 3 punti)
- per chi fa i parziali, il voto della prova scritta si calcola facendo la media (arrotondata per eccesso) dei voti dei due parziali (*es.* voto A = 6, voto B = 30, voto TOT = 18)
- bisogna che vi dica però che se uno prende 6 al primo parziale, è altamente improbabile che riesca a prendere 30 al secondo...

Nel caso di **modalità in presenza**:

- la prova orale è obbligatoria e si accede prendendo almeno 18/30 allo scritto
- l'altra differenza è che lo scritto è più lungo
- la prova scritta consiste di una prima parte con 10 esercizi (ognuno vale 2 punti) ed una seconda parte con 2 esercizi lunghi (in cui conta anche lo svolgimento)
- in questa modalità la prima parte dello scritto è **eliminatoria**: se non si totalizza almeno 5 risposte corrette su 10, la seconda parte non viene corretta
- restano valide tutte le regole descritte in precedenza

Alcune raccomandazioni

1. La prima cosa che dovete capire è che "in questo corso ci sono delle cose da capire". In altre parole, il corso NON è costituito di regolette da imparare a memoria, in modo da risolvere in modo meccanico degli esercizi, come se fossero giochi enigmistici....
2. Questo corso è **difficile**, **lungo** e **impegnativo**. Partite quindi subito col piede giusto!
3. Dovremo trattare molti argomenti, in un tempo relativamente stretto. Quindi non aspettatevi lunghe serie di esercizi da fare insieme: a lezione, vi spiegherò le parti di teoria e vi farò qualche esercizio **ben scelto** che metta in luce quello che spiego. I soli esercizi fatti a lezione **sono insufficienti** per avere una buona preparazione finale: sta a voi lavorare in modo autonomo
4. Per dubbi e chiarimenti, sono a disposizione tramite e-mail, durante le lezioni. Avrete inoltre un tutor a disposizione

Capitolo I

“*Strumenti di base*”

I.1 Quantificatori

Fissiamo un po' di notazioni e di linguaggio matematico di base

- il simbolo $\forall$ vuol dire "*per ogni*"
- il simbolo $\exists$ vuol dire "*esiste*"
- il simbolo $\exists!$ vuol dire "*esiste ed è unico*"
- spesso useremo il simbolo ":" per dire "*tale che*"

Inoltre useremo la barra / per negare un simbolo

Esempio

Il simbolo $\nexists$ vuol dire "non esiste"

Vedremo altri esempi di negazione in seguito

I.2 Un po' di logica

In matematica, una *proposizione* $\mathcal{P}$ è un **enunciato di cui si può decidere in modo univoco se esso è vero** (V) **oppure falso** (F)

Esempio 1

"Il professore di questo corso è brutto"

non è una proposizione in senso matematico (per mia fortuna...)

Esempio 2

"Ferrara è una città francese"

è una proposizione in senso matematico, infatti possiamo decidere in modo univoco che essa è F

Esempio – “Matematizzare” una proposizione

Usiamo il simbolo $\mathbb{N}$ per indicare l'insieme dei *numeri naturali* (ne parleremo meglio prossimamente)

Usiamo i simboli introdotti in precedenza per formalizzare in linguaggio matematico la proposizione

$$\mathcal{P} = \text{“ esiste un numero naturale più grande di tutti gli altri''}$$

Possiamo riscrivere $\mathcal{P}$ come segue

$$\mathcal{P} = \text{“}\exists M \in \mathbb{N} \,:\, \forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq M''$$

Beninteso, $\mathcal{P}$ è una proposizione, infatti possiamo dire che $\mathcal{P}$ **è falsa** (sapreste dire perché?)

Definizione (Negazione)

Se $\mathcal{P}$ è una proposizione, si chiama **negazione di** $\mathcal{P}$ la nuova proposizione (simbolo "$\mathrm{non}\,\mathcal{P}$") definita dalla *tavola di verità* seguente

$\mathcal{P}$	$\mathrm{non}\,\mathcal{P}$
V	F
F	V

In parole povere: $\mathrm{non}\,\mathcal{P}$ è la proposizione che è vera se $\mathcal{P}$ è falsa (e viceversa)

Esempio (Negare una proposizione)

Torniamo alla proposizione

$$\mathcal{P} = \text{``}\exists M \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq M''$$

vista in precedenza. Mostriamo che $\mathcal{P}$ è falsa

Ci basta provare che $\mathrm{non}\,\mathcal{P}$ **è vera**. Bisognerà quindi scrivere la negazione di $\mathcal{P}$ e dimostrare che questa nuova proposizione è vera

Neghiamo $\mathcal{P}$:

$$\mathrm{non}\,\mathcal{P} = \text{``}\forall M \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : n > M''$$

Adesso è facile dimostrare che $\mathrm{non}\,\mathcal{P}$ è vera

- scelto un numero $M \in \mathbb{N}$, prendo $n = M + 1$
- esso è ancora un numero di $\mathbb{N}$
- inoltre $M < n$

Quindi $\mathrm{non}\,\mathcal{P}$ è V, ovvero $\mathcal{P}$ è F

Osservazione

L'esempio precedente da un'idea di come negare una proposizione che contenga dei quantificatori, quali $\forall$ e $\exists$.

Per esempio, annotiamoci qua sotto due regole :

- $\forall$ diventa $\exists$;
- $\exists$ diventa $\forall$

Date due proposizioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, se ne può costruire una terza, usando un *connettivo logico*

Vediamo i principali esempi

Definizione (Congiunzione)

Si chiama **congiunzione di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$** la nuova proposizione (simbolo "$\mathcal{P}\,\mathrm{e}\,\mathcal{Q}$") definita dalla tavola di verità seguente

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

In parole povere: $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ è la proposizione che **è vera soltanto se entrambe $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono vere** (e falsa in tutti gli altri casi)

Definizione (Disgiunzione)

Si chiama **disgiunzione di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$** la proposizione (simbolo "$\mathcal{P} \text{ o } \mathcal{Q}$") definita dalla seguente tavola di verità

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

In parole povere: $\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$ è la proposizione che **è vera se almeno una tra $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ è vera** (e falsa se entrambe $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ lo sono)

Osservazione (Connettivi e negazione)

Abbiamo che vale

$$\text{non}(\mathcal{P} \,\text{o}\, \mathcal{Q}) = (\text{non}\, \mathcal{P})\,\text{e}\,(\text{non}\, \mathcal{Q})$$

e che

$$\text{non}(\mathcal{P} \,\text{e}\, \mathcal{Q}) = (\text{non}\, \mathcal{P})\,\text{o}\,(\text{non}\, \mathcal{Q})$$

È sufficiente fare le tavole di verità corrispondenti

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\text{non}\,\mathcal{P}$	$\text{non}\,\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$	$\text{non}(\mathcal{P}\,\text{o}\,\mathcal{Q})$	$(\text{non}\,\mathcal{P})\,\text{e}\,(\text{non}\,\mathcal{Q})$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Le ultime due colonne coincidono, quindi

$$\text{non}(\mathcal{P} \,\text{o}\, \mathcal{Q}) \qquad \text{e} \qquad (\text{non}\, \mathcal{P})\,\text{e}\,(\text{non}\, \mathcal{Q})$$

hanno la stessa tavola di verità, quindi coincidono (*per casa*: provate l'altra relazione)

Esercizio

Si scrivano le negazioni delle seguenti proposizioni

1. *La partita di calcio è alle ore 20 e la guarderò*
2. *La partita di calcio è alle ore 20 oppure non la guarderò*
3. *La SPAL giocherà in serie B nella stagione 2021/2022 e Colombo segnerà almeno 10 reti*

Soluzione

Si tratta sicuramente di un esercizio un po' stupido, ma ci da comunque l'occasione di verificare se abbiamo capito alcune cose di base.

Ci permette anche di allenare la mente a fare un po' di schematizzazione matematica

1. dobbiamo negare una congiunzione $\mathcal{P} \,\mathrm{e}\, \mathcal{Q}$ dove

$$\mathcal{P} = \text{“la partita di calcio è alle ore 20''}$$

$$\mathcal{Q} = \text{“guarderò la partita di calcio''}$$

In base a quanto visto nell'Osservazione precedente, sappiamo che

$$\mathrm{non}(\mathcal{P} \,\mathrm{e}\, \mathcal{Q}) = (\mathrm{non}\mathcal{P}) \,\mathrm{o}\, (\mathrm{non}\mathcal{Q})$$

Inoltre abbiamo che

$$\mathrm{non}\mathcal{P} = \text{“la partita di calcio non è alle ore 20''}$$

$$\mathrm{non}\mathcal{Q} = \text{“non guarderò la partita di calcio''}$$

In definitiva, abbiamo che la negazione di

La partita di calcio è alle ore 20 **e** *la guarderò*

è data da

La partita di calcio non è alle ore 20 **oppure** *non la guarderò*

2. dobbiamo adesso negare una disgiunzione $\mathcal{P}\,\mathrm{o}\,\mathcal{Q}$ dove

$$\mathcal{P} = \text{“la partita di calcio è alle ore 20''}$$

$$\mathcal{Q} = \text{“non guarderò la partita di calcio''}$$

In base a quanto visto nell'Osservazione precedente, sappiamo che

$$\mathrm{non}(\mathcal{P}\,\mathrm{o}\,\mathcal{Q}) = (\mathrm{non}\mathcal{P})\,\mathrm{e}\,(\mathrm{non}\mathcal{Q})$$

Inoltre abbiamo che

$$\mathrm{non}\mathcal{P} = \text{“la partita di calcio non è alle ore 20''}$$

$$\mathrm{non}\mathcal{Q} = \text{“guarderò la partita di calcio''}$$

In definitiva, abbiamo che la negazione di

La partita di calcio è alle ore 20 **oppure** *non la guarderò*

è data da

La partita di calcio non è alle ore 20 **e** *la guarderò*

3. provateci *per casa*: in caso di dubbi, potete scrivermi oppure approfittare del *tutorato* (che dovrebbero essere il Giovedì))

Definizione (Implicazione)

La proposizione "$\mathcal{P}$ *implica* $\mathcal{Q}$" (simbolo "$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$") è per definizione la proposizione "$\mathcal{Q}\,\text{o}\,(\mathrm{non}\,\mathcal{P})$"

Essa è definita quindi tramite la tavola di verità seguente

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	non $\mathcal{P}$	$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

In particolare, si vede che

se $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ è V e $\mathcal{P}$ è anch'essa V

allora necessariamente anche $\mathcal{Q}$ deve esserlo. Si dice allora che

- "*$\mathcal{P}$ vera è una condizione sufficiente perché $\mathcal{Q}$ sia vera*"
- "*$\mathcal{Q}$ vera è una condizione necessaria perché $\mathcal{P}$ sia vera*"

Osservazione *"Cosa sono i Teoremi?"*

Il concetto di "implicazione" è **fondamentale** per il nostro corso

Tutti i Teoremi ed i risultati che enunceremo, saranno delle proposizioni della forma

$$\boxed{\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}}$$

dove

$$\mathcal{P} = \text{“ipotesi del Teorema''}$$

$$\mathcal{Q} = \text{“tesi del Teorema''}$$

In tali casi, dimostrare un Teorema vorrà dire

"dimostrare che $\quad \mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q} \quad$ è vera"

ovvero dovremo dimostrare che se le ipotesi sono V, allora necessariamente la tesi deve essere V

Esempio

Consideriamo le due proposizioni

$$\mathcal{P} = \text{“la mia macchina è una Ferrari}''$$

$$\mathcal{Q} = \text{“la mia macchina è italiana}''$$

Dal momento che le Ferrari sono macchine italiane, si vede subito che se $\mathcal{P}$ è vera, allora anche $\mathcal{Q}$ è vera. Abbiamo dunque che l'implicazione

$$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q} \qquad \text{è} \qquad V$$

Al contrario, una vettura può essere italiana, senza necessariamente essere una Ferrari. Quindi l'implicazione

$$\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P} \qquad \text{è} \;\; F$$

Esercizio

Date due proposizioni $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$, si dimostri che

$$\text{“}\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}\text{''} \quad \textit{coincide con} \quad \text{“non } \mathcal{Q} \Longrightarrow \text{non } \mathcal{P}\text{''}$$

Soluzione

- Usando la definizione di implicazione, si ha che

$$\text{“non } \mathcal{Q} \Longrightarrow \text{non } \mathcal{P}\text{''} \quad \text{coincide con} \quad \text{“non } \mathcal{P} \text{ o non (non } \mathcal{Q})\text{''}$$

- ovviamente

$$\text{non (non } \mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$$

- quindi

$$\text{“non } \mathcal{Q} \Longrightarrow \text{non } \mathcal{P}\text{''} \ \text{ coincide con } \ \text{“}\mathcal{Q} \text{ o non } \mathcal{P}\text{''}$$

- ma quest'ultima è proprio la definizione di

$$\text{“}\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}\text{''}$$

L'esercizio precedente ha una conseguenza che vale la pena di annotare

Osservazione importante

Per dimostrare che

$$\text{“}\mathcal{P} \textit{ implica } \mathcal{Q}\text{” è V}$$

si può equivalentemente mostrare che

$$\text{“}\mathrm{non}\,\mathcal{Q} \textit{ implica } \mathrm{non}\,\mathcal{P}\text{” è V}$$

Vediamo subito un esempio importante che sfrutta questa osservazione

Esempio (Una proprietà dei numeri naturali)

Consideriamo la seguente proposizione

$$\text{“}\textit{se } n \in \mathbb{N} \textit{ è tale che } n^2 \textit{ è pari, allora } n \textit{ è pari}\text{”}.$$

Supponiamo di voler dimostrare che questa proposizione è vera

Osserviamo che scrivendo

$$\mathcal{P} = \text{“}n^2 \text{ è pari”} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{Q} = \text{“}n \text{ è pari”},$$

la proposizione iniziale è della forma

$$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$$

Per dimostrare che questa è vera, per l'*Osservazione importante* possiamo in modo equivalente dimostrare che

$$\text{non}\, \mathcal{Q} \Longrightarrow \text{non}\, \mathcal{P} \qquad \text{è} \qquad V$$

In altre parole, se osserviamo che

$$\mathrm{non}\,\mathcal{P} = \text{“}n^2 \text{ è dispari”} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{non}\,\mathcal{Q} = \text{“}n \text{ è dispari”},$$

dimostrare la proposizione iniziale equivale a dimostrare

“se $n \in \mathbb{N}$ è dispari, allora n^2 è dispari”

Dimostriamo questa implicazione:

- sia n un numero dispari
- esso si scriverà nella forma

$$n = 2\,k + 1, \qquad \text{per un certo } k \in \mathbb{N}$$

- facciamo il quadrato

$$n^2 = 4\,k^2 + 4\,k + 1$$

- si osservi che $4\,k^2$ è divisibile per 2, quindi pari
- ugualmente $4\,k$ è divisibile per 2, quindi pari

- la loro somma $4\,k^2 + 4\,k$ è quindi anch'essa pari
- abbiamo allora

$$n^2 = \underbrace{4\,k^2 + 4\,k}_{\text{pari}} + 1$$

- a causa di quel "$+1$" abbiamo quindi che n^2 è il successivo di un numero pari
- in conclusione n^2 è dispari, come volevamo!

Definizione (Equivalenza)

La proposizione "*$\mathcal{P}$ è equivalente a $\mathcal{Q}$*" (simbolo "$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$") coincide per definizione con la proposizione

$$\text{“}\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q} \text{ e } \mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}\text{”}$$

Essa è dunque definita dalla seguente tavola di verità

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$	$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

In particolare, se $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ è vera, si dice allora che $\mathcal{P}$ è vera se e soltanto se $\mathcal{Q}$ è vera, oppure che

"*$\mathcal{P}$ è una condizione necessaria e sufficiente per $\mathcal{Q}$*"

Esempio (Equivalenza)

Siano le due proposizioni

$$\mathcal{P} = \text{“un quadrato ha area 1 } m^2\text{''}$$

e

$$\mathcal{Q} = \text{“un quadrato ha il lato lungo 1 } m\text{''}$$

Possiamo dire che

$$\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$$

grazie alla formula che ci da l'area del quadrato in funzione della lunghezza del lato

Memento

Fate sempre **attenzione** ad utilizzare il simbolo di doppia implicazione “$\Longleftrightarrow$” in modo corretto

Diamo l'esempio di un errore tipico nell'utilizzo di "$\Longleftrightarrow$"

Almeno il 67 % di voi commetterà questo errore durante questo corso, talvolta con esiti fatali sull'esito del proprio esame

Esempio (Un errore tipico)

Risolviamo il seguente esercizio (molto semplice)

trovare tutte le soluzioni x dell'equazione

$$x^2 = 1$$

Può succedere che uno studente un po' distratto abbia voglia di scrivere

$$\text{``}x^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1''$$

e di concluderne quindi che $x = 1$ è l'unica soluzione

Secondo voi è corretto?

NO

Questo non è corretto!

La sola implicazione che è vera è la seguente

$$\text{“}x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 1\text{”}$$

perché $x^2 = x \cdot x$ e $1 \cdot 1 = 1$

Questo non permette di completare l'esercizio (stiamo perdendo la soluzione $x = -1$)

La soluzione corretta dell'esercizio iniziale è

$$\text{“}x^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1 \text{ oppure } x = -1\text{”}$$

Infatti anche $(-1)^2 = 1$

I.3 Numeri naturali

L'insieme dei numeri naturali è denotato con la lettera $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ sono i numeri che si usano di solito per contare, ovvero

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

In termini più rigorosi, $\mathbb{N}$ si descrive con gli **assiomi di Peano**:

1. 0 è un numero naturale, ovvero $0 \in \mathbb{N}$;
2. il successivo di un naturale è anch'esso un naturale, ovvero
$$n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad n + 1 \in \mathbb{N}$$
3. 0 non è il successivo di nessuno numero naturale;
4. numeri naturali diversi hanno successivi diversi, ovvero
$$n \neq m \quad \Longrightarrow \quad n + 1 \neq m + 1$$
5. se A è un insieme di numeri naturali che contiene 0 ed il successivo di ogni suo numero, allora $A = \mathbb{N}$

L'assioma (5) è utile per un tipo particolare di dimostrazioni, dette per induzione

Supponiamo di avere una proposizione $\mathcal{P}(n)$ che dipende da un indice $n \in \mathbb{N}$ e di voler dimostrare che

$$\mathcal{P}(n) \text{ è V per ogni } n \in \mathbb{N}$$

In questi casi, possiamo usare il seguente

Principio di induzione

Se una proposizione $\mathcal{P}(n)$

- è vera per $n = 0$
- e se, supposta vera per un certo $n \in \mathbb{N}$, risulta vera anche per $n + 1$

allora $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni n

Le dimostrazioni che sfruttano il *principio di induzione*, si compongono quindi di **2 passi**

PASSO 1: BASE DELL'INDUZIONE. Si dimostra che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per $n = 0$, ovvero si dimostra che $\mathcal{P}(0)$ è vera.

PASSO 2: PASSO INDUTTIVO. Si dimostra che l'implicazione

$$\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

è vera

Se si verificano questi due passi, allora utilizzando la struttura *ricorsiva* di $\mathbb{N}$ (in particolare l'assioma 5. di Peano), il Principio di Induzione assicura che $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni n

Vediamo tra un attimo un esempio di applicazione del *Principio di induzione*

Prima però ci serve il seguente

Il simbolo di sommatoria

Supponiamo di avere n numeri

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

Se vogliamo sommarli tutti, utilizzeremo la notazione compatta

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Si legge anche **sommatoria per** k **che va da** 1 **a** n **degli** a_k

Esercizio

Sia n un numero naturale diverso da 0. Si dimostri che la somma dei primi n numeri naturali è data da

$$\frac{n\,(n+1)}{2}$$

In altre parole, si dimostri che vale la formula

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Soluzione

Per ogni $n \geq 1$ definiamo la proposizione dipendente da n

$$\mathcal{P}(n) = \text{“}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}\text{''},$$

Dobbiamo dimostrare che $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$

- procediamo usando il *Principio di induzione*
- PASSO 1: BASE DELL'INDUZIONE. Consideriamo la proposizione per $n = 1$, ovvero $\mathcal{P}(1)$
- dobbiamo verificare che $\mathcal{P}(1)$ è vera
- dalla definizione generale di $\mathcal{P}(n)$, questo vuol dire che dobbiamo verificare che

  $$\mathcal{P}(1) = \text{“} \sum_{k=1}^{1} k = \frac{1\,(1+1)}{2} \text{”}$$

  è vera
- dalla definizione del simbolo di sommatoria

  $$\sum_{k=1}^{1} k = 1$$

  ovvero questa sommatoria contiene un solo elemento (perché il valore iniziale $k = 1$ coincide con quello finale $k = 1$)

- d'altra parte
$$\frac{1\,(1+1)}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$$
- quindi
$$\mathcal{P}(1) = \text{“}\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1\,(1+1)}{2}\text{”}$$
è vera
- PASSO 1: OK!
- PASSO 2: PASSO INDUTTIVO. Si deve dimostrare che l'implicazione
$$\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1),$$
è vera
- supponiamo quindi che per un certo $n \in \mathbb{N}$, valga che
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2} \qquad \textit{ipotesi induttiva}$$

- dobbiamo dimostrare che, usando questa ipotesi, deve valere anche

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

- osserviamo che la sommatoria a sinistra possiamo riscriverla come

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k} + (n+1)$$

ovvero abbiamo esplicitato l'ultimo termine della sommatoria

- cosa ci abbiamo guadagnato? Beh noi stiamo supponendo che valga (*ipotesi induttiva*)

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

- ...abbiamo allora

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

  grazie all'ipotesi induttiva!

- non ci resta che scrivere meglio l'ultimo termine

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

- abbiamo quindi dimostrato che, assumendo vera $\mathcal{P}(n)$, si ha

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

  ovvero anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera!

- PASSO 2: OK!

- possiamo usare il *Principio di induzione* e concludere che $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$

Esercizio (per casa)

Sia n *un numero naturale diverso da* 0. *Si dimostri che*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}$$

Esercizio (per casa)

Sia n *un numero naturale diverso da* 0. *Si dimostri che*

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$$