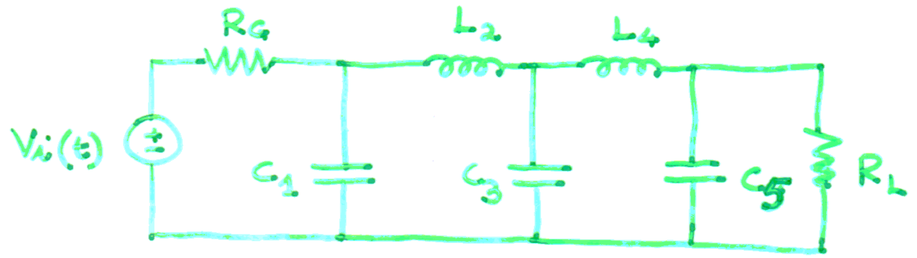
REALIZZAZIONE DI FILTRI A SCALA (MEDIANTE CONDENSATORI COMMUTATI)

- Consideriamo una struttura tipica di un filtro a scala tempocontinuo



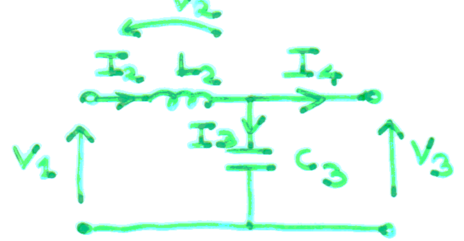
5° ordine

NOTA

Questa è la tipica struttura di un filtro passa basso polinomiale (Butterworth, Tschebyscheff)

PROBLEMA

Sono presenti induttori che NON siamo in grado di implementare in tecnologia planare $\Rightarrow$ è necessario EFFETTUARE UNA MANIPOLAZIONE FORMALE delle variabili di stato in gioco (in particolare delle correnti negli induttori) IN MODO DA DETERMINARE UNA STRUTTURA EQUIVALENTE ad una generica cella LC, EQUIVALENTE NEL SENSO CHE LA RELAZIONE INGRESSO-USCITA DEVE RIMANERE INVARIATA



$$I_2 = \frac{V_2}{sL_2} = \frac{V_1 - V_3}{sL_2}$$

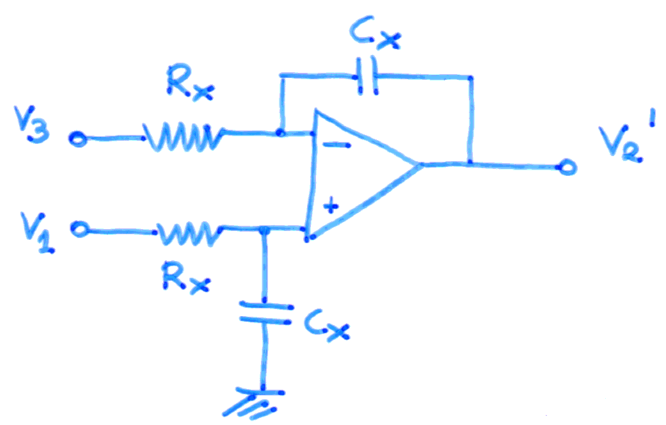
1° PASSO

- TRASFORMAZIONE FORMALE $\quad I_2 \longrightarrow V_2' = R I_2$

$R =$ resistenza ARBITRARIA

$$\Rightarrow \qquad V_2' = \frac{R}{sL_2}(V_1 - V_3) = \frac{1}{s(L_2/R)}(V_1 - V_3) \qquad (*)$$

- La $(*)$ PUÒ ESSERE REALIZZATA MEDIANTE UN CIRCUITO PRIVO DI INDUTTORI (MA CON 1 OP-AMP)



- Applico il principio di sovrapposizione degli effetti:

1) $V_1 = 0 \Rightarrow$ essendo $Z_i \to \infty$ (Hp di op-amp ideale) $V_+ = 0$

$$\Rightarrow V_2' = -\frac{V_3}{sR_xC_x} = -\frac{V_3}{s\tau_x}$$

b) $V_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2' = \left(1 + \dfrac{1/sC_x}{R_x}\right) V_+ = \left(1 + 1/sC_xR_x\right) V_+$

$$V_+ = \frac{1/sC_x}{R_x + 1/sC_x} V_1 = \frac{1}{1 + sC_xR_x} V_1$$

quindi

$$V_2' = \frac{\cancel{1 + sC_xR_x}}{sC_xR_x} \cdot \frac{1}{\cancel{1 + sC_xR_x}} V_1 = \frac{1}{sC_xR_x} V_1$$

Complessivamente

$$V_2' = \frac{1}{sC_xR_x}(V_1 - V_3)$$

<u>Relazione che coincide con la (*) A PATTO che</u>

$$\underline{L_2/R = R_xC_x}$$

con

L_2 = induttanza da simulare

R_x, C_x ARBITRARIE !

<u>2° PASSO</u>

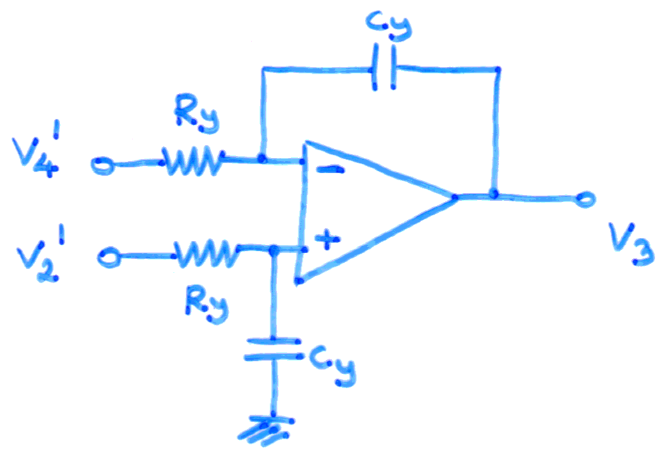
Per ottenere un 2-porte che abbia un comportamento "alle porte" equivalente a quello della cella LC occorre eseguire una trasformazione simile anche per C

$$V_3 = \frac{I_3}{sC_3} = \frac{I_2 - I_4}{sC_3}$$

moltiplico e divido per una resistenza arbitraria $\Rightarrow$

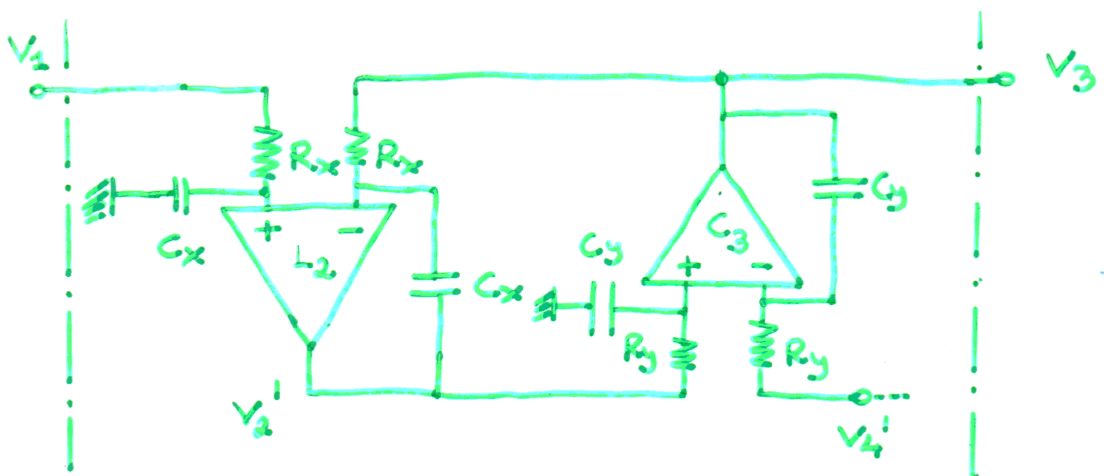
$$V_3 = \frac{RI_2 - RI_4}{sC_3R} = \frac{V_2' - V_4'}{sRC_3} \qquad (**)$$

$\Rightarrow$ la (**) può essere ottenuta mediante

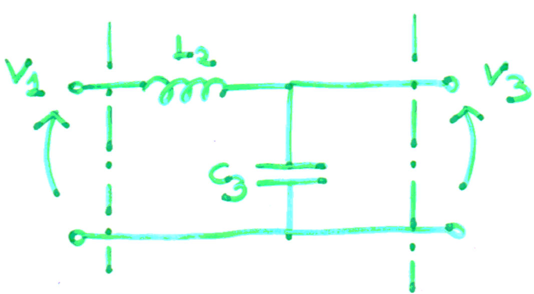


con $R_y C_y = RC_3$

COMPLESSIVAMENTE



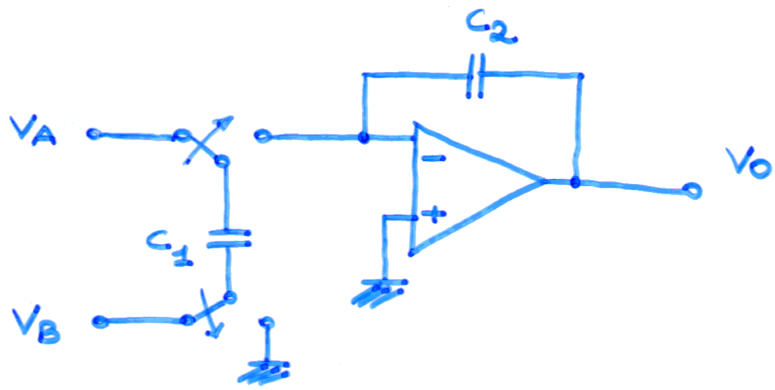
equivale "alle porte" a



Per ottenere una realizzazione a condensatori commutati

DOBBIAMO REALIZZARE UN INTEGRATORE DIFF. A COND.

COMMUTATI :



N.B.: non è la "conversione diretta" dello schema TEMPOCONTINUO

FUNZIONAMENTO

$t = nT \qquad Q_1 = C_1 \left(V_A(nT) - V_B(nT) \right)$

$$Q_2 = C_2 \, V_o(nT)$$

$t = (n+1)T \qquad Q_1 = 0$

$$Q_2 = C_2 \, V_o\left[(n+1)T\right]$$

Applico il principio di conservazione della carica

$$-C_2 V_o\left[(n+1)T\right] = -C_2 V_o(nT) + C_1 \left[V_A(nT) - V_B(nT)\right]$$

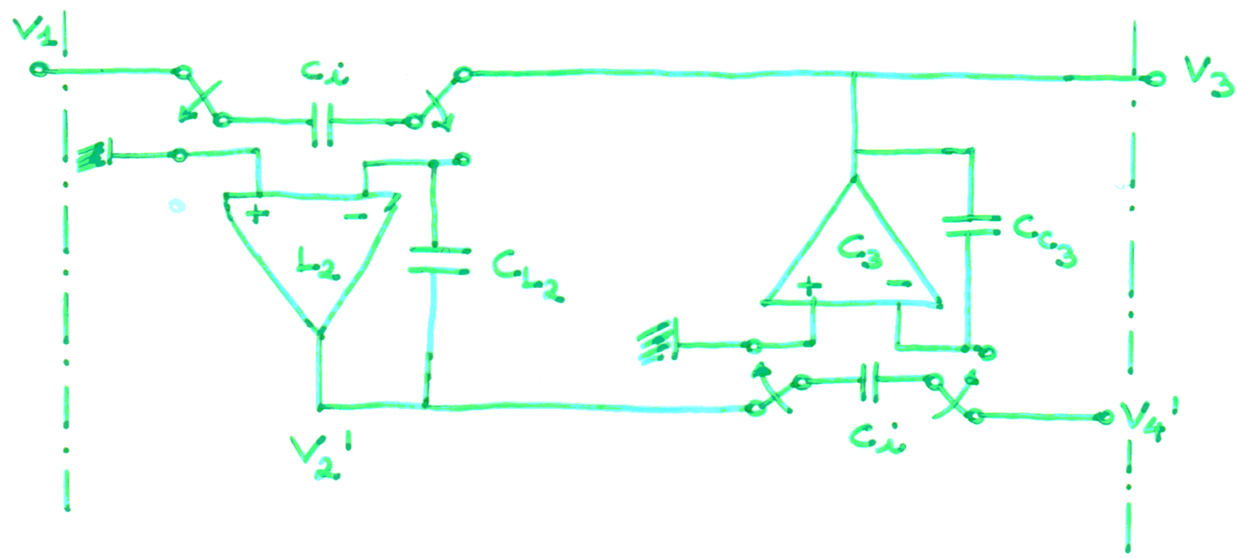
Uso la Z-trasf.

$$-C_2 \left[V_o(z) z - V_o(z)\right] = C_1 \left[V_A(z) - V_B(z)\right]$$

$$H(z) = \frac{V_o(z)}{V_A(z) - V_B(z)} = -\frac{C_1}{C_2} \frac{1}{z-1}$$

Quindi abbiamo un integratore differenziale di "tipo" Eulero forward.

- La realizzazione della generica cella LC a condensatori commutati diventa



OSS.

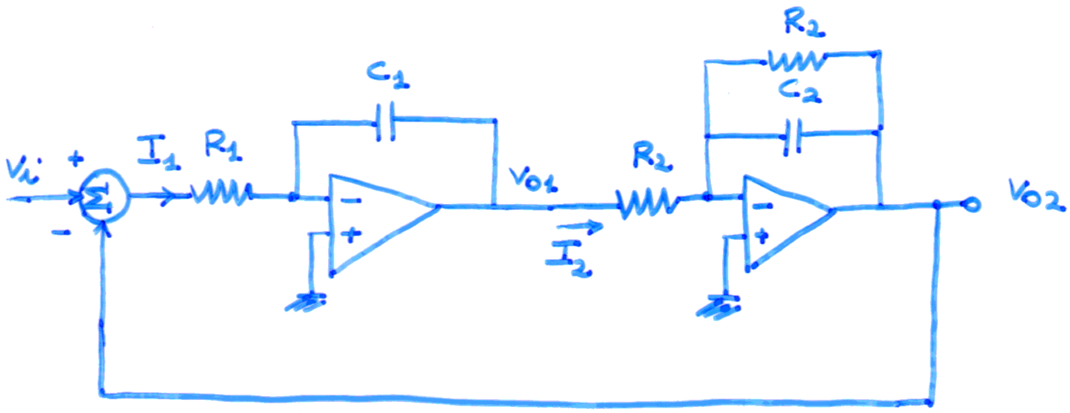
In generale il modo di realizzare filtri LADDER (a scala) non è unico. Vi sono gradi di libertà che occorrerà sfruttare per ottimizzare il progetto. In particolare occorre sempre tener presente che

1) Minore è il n° di op-amp, minore sarà il CONSUMO e l'area occupata

2) A parte i nodi soggetti a commutazioni (per i quali ciò non sarà ovviamente possibile) conviene connettere quanti nodi possibile a MASSA, MASSA VIRTUALE o, in generale, A TENSIONI COSTANTI per evitare PROBLEMI DI ACCOPPIAMENTO

REALIZZAZIONE DI UNA CELLA DEL 2° ORDINE A COND. COMMUTATI

- Consideriamo il seguente filtro attivo del 2° ordine



Funzione di Trasferimento

Hp : op-amp ideali ($A_v \to \infty$, $Z_i \to \infty$, c.c. virtuale)

$$I_1 = \frac{V_i - V_{o2}}{R_1} = I_{C_1} = -\frac{V_{o1}}{1/sC_1} \Rightarrow \frac{V_i - V_{o2}}{R_1} = -V_{o1}\, sC_1$$

$$I_2 = \frac{V_{o1}}{R_2} = I_{Z_2} = -\frac{V_{o2}}{Z_2} \qquad \text{con } Z_2 = R_2 /\!/ \frac{1}{sC_2} = \frac{R_2}{1+sC_2R_2}$$

posto $\tau_1 = R_1C_1$, $\tau_2 = R_2C_2$

$$\frac{V_{o1}}{\cancel{R_2}} = -\frac{V_{o2}}{\cancel{R_2}}(1+s\tau_2) \qquad (1)$$

$$\frac{V_i - V_{o2}}{\cancel{R_1}} = -\frac{V_{o1}}{\cancel{R_1}}\, s\tau_1 \qquad (2)$$

Ricavo V_{o1} da (1) e lo sostituisco in (2)

$$\frac{V_i - V_{o2}}{s\tau_1} = + V_{o2}(1 + s\tau_2) \Rightarrow V_{o2}(1 + s^2\tau_1\tau_2 + s\tau_1) = V_i$$

da cui

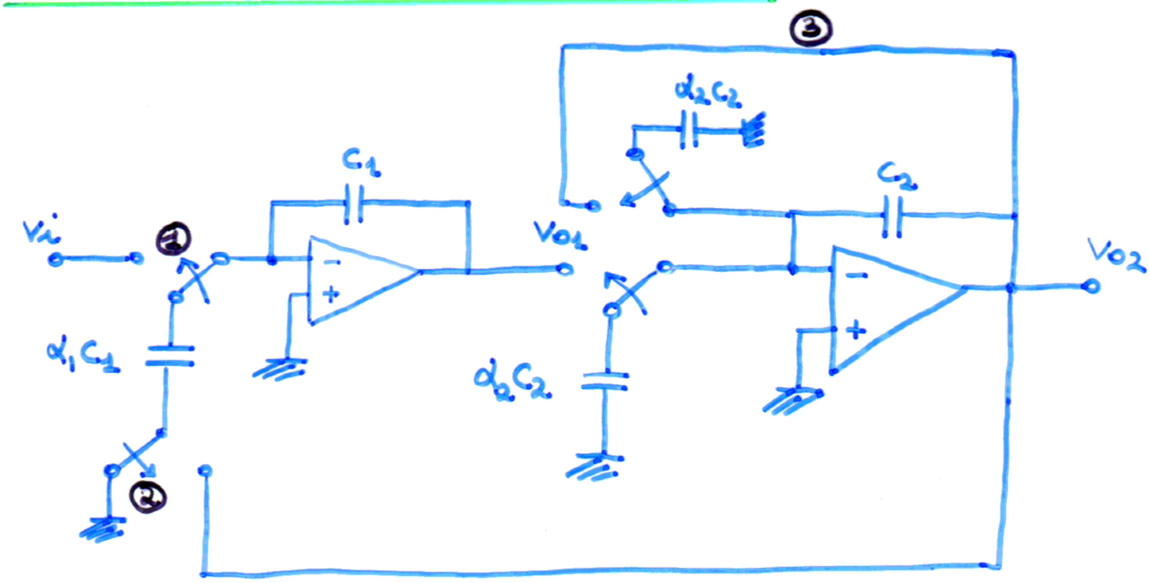
$$H(s) = \frac{V_{o2}}{V_i} = \frac{1}{1 + s\tau_1 + s^2\tau_1\tau_2}$$

$$\frac{V_{o1}}{V_i} = -\frac{1 + s\tau_2}{1 + s\tau_1 + s^2\tau_1\tau_2}$$

OSS.

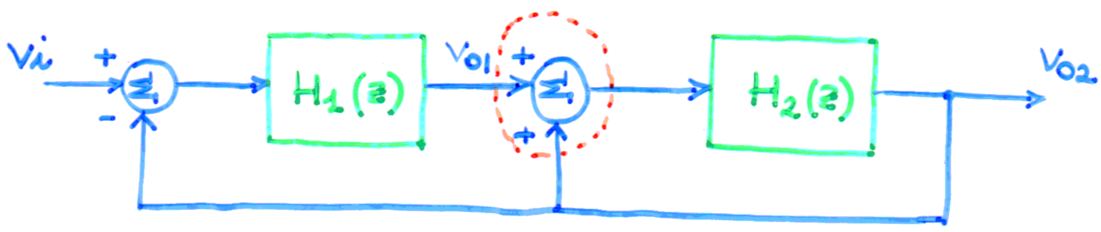
Rispetto ad una realizzazione di un filtro tempocontinuo in forma canonica, con circuiti di questo tipo si ha il vantaggio di NON dover realizzare molti sommatori e moltiplicatori per una costante (con conseguente SEMPLIFICAZIONE del circuito)

Realizzazione a condensatori commutati:



N.B. La differenza tra i segnali V_{o2} e V_i in ingresso viene effettuata PILOTANDO gli interruttori IN CONTROFASE (① e ②)

Per determinare la funzione di trasferimento complessiva conviene considerare uno schema a blocchi equivalente



- Il sommatore è quello che tiene conto della retroazione dovuta alla resistenza R_2 (in // a C_2) nello schema iniziale, cioè la ③ dello schema precedente.

• In questa schematizzazione $H_1(z)$ e $H_2(z)$ sono le funzioni di trasferimento di semplici integratori (tipo "eulero forward")

$$H_1(z) = -\frac{\alpha_1}{z-1} \qquad H_2(z) = -\frac{\alpha_2}{z-1}$$

• $H(z) = \dfrac{V_{o2}}{V_i}$?

$$V_{o2} = H_2\,(V_{o1} + V_{o2}) \Rightarrow V_{o2}\,(1 - H_2) = H_2 V_{o1} \quad (\circ)$$

$$V_{o1} = H_1\,(V_i - V_{o2}) = H_1\left(V_i - \frac{H_2}{1-H_2} V_{o1}\right) \Rightarrow$$

$$V_{o1}\left(\frac{1}{H_1} + \frac{H_2}{1-H_2}\right) = V_i$$ ⇒ sostituisco le espressioni di H_1 e H_2

$$V_i = \left(-\frac{z-1}{\alpha_1} - \frac{\frac{\alpha_2}{z-1}}{1+\frac{\alpha_2}{z-1}} \right) V_{o1} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{V_{o1}}{V_i} = \frac{\alpha_1\left[(1-\alpha_2)-z\right]}{z^2-(2-\alpha_2)z+(1+\alpha_1\alpha_2-\alpha_2)}$$

che sostituito nella (0) permette di ottenere

$$\underline{H(z) = \frac{V_{o2}}{V_i} = \frac{\alpha_2\alpha_1}{z^2-(2-\alpha_2)z+(1+\alpha_1\alpha_2-\alpha_2)}}$$

OSS.

α_1 e α_2 sono i GRADI DI LIBERTÀ che si hanno a disposizione per ottenere le prestazioni desiderate per il filtro. Tipicamente si fissano

f_0 = frequenza "naturale"

Q = selettività del filtro

che potranno essere determinati come funzioni di α_1 e α_2 cioè

$$f_0 = f_0(\alpha_1, \alpha_2)$$
$$Q = Q(\alpha_1, \alpha_2) \quad \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = \alpha_1(f_0, Q)$$
$$\alpha_2 = \alpha_2(f_0, Q)$$

$\leftarrow$ dati f_0 e Q desiderati si determinano α_1 e α_2 corrispondenti

Ovviamente i casi critici sono quelli per cui

$$\alpha_i >> 1 \quad o \quad \alpha_i << 1$$

in quanto

$$\alpha_i >> 1 \implies A_{(\text{cond. comm.})} >> A_{(\text{cond. retroaz.})}$$

$$\alpha_i << 1 \implies A\,(\text{cond. retr.}) >> A\,(\text{cond. comm.})$$

$\implies$ Elevata occupazione di area! (il condensatore più piccolo è quello base gli altri sono realizzati mettendo in parallelo vari "condensatori base")

- Un altro fattore importante è la SENSIBILITÀ di f_0 e Q al variare dei parametri α_1 e α_2

Def

Considero n grandezze $x_1, x_2, \dots, x_n$ funzioni di m parametri $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ cioè

$$x_i = x_i(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Si definisce SENSIBILITÀ della grandezza x_i rispetto al parametro β_j la quantità

$$S_{\beta_i}^{x_i} = \left| \frac{\dfrac{\partial x_i}{\partial \beta_i}}{x_i / \beta_j} \right|$$

Nel caso in esame si possono calcolare 4 diverse sensibilità

$$S_{\alpha_1}^{f_0},\quad S_{\alpha_2}^{f_0},\quad S_{\alpha_1}^{Q},\quad S_{\alpha_2}^{Q}$$

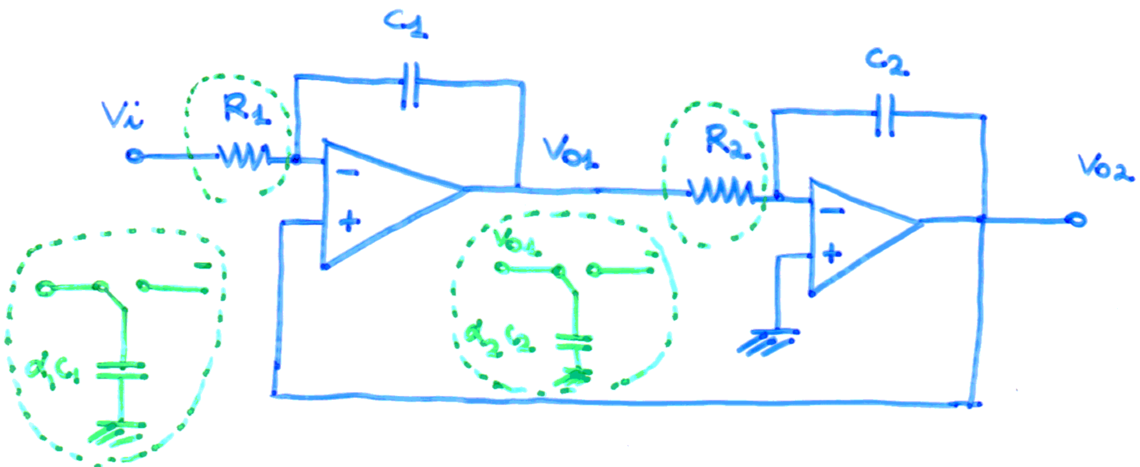
Il problema è che

$$S_{\alpha_1}^{Q} = 2\pi \frac{f_0}{f_c} Q$$

$\Rightarrow$ fissati f_0 e f_c, se si vuole avere elevata selettività ($Q \gg$)

si ha anche UNA ELEVATA SENSIBILITÀ $S_{\alpha_1}^{Q}$

SOLUZIONE : si cambia schema



Con considerazioni analoghe alle precedenti si ottiene

$$\frac{V_{o2}}{V_i} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{z^2 - (2 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2)z + (1 - \alpha_2)}$$

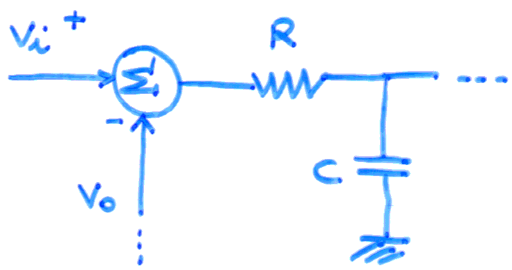
$$\frac{V_{o2}}{V_{o1}} = -\frac{\alpha}{z-1} \quad \text{(semplice integratore)}$$

VANTAGGIO : in questa soluzione $S^{Q}_{\alpha_1}$ è INDIPENDENTE da Q

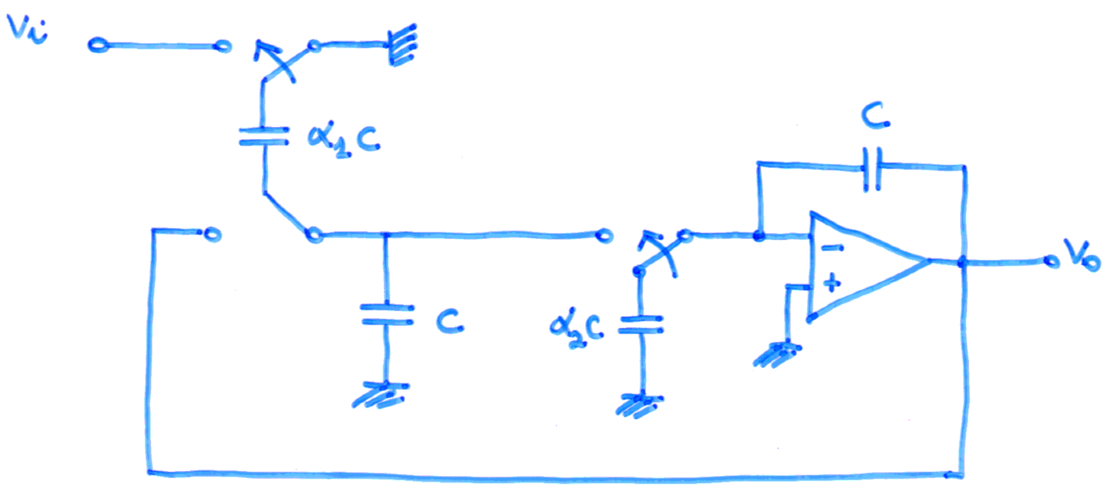
SVANTAGGIO : per avere Q elevati è necessario avere $\alpha_i \gg$ ⇒ elevata occupazione di area

Se si hanno problemi di occupazione d'area (e se ne vuole risparmiare anche a discapito delle prestazioni) si può considerare una soluzione che fa uso DI UN SOLO OP-AMP

In pratica : si sostituisce un integratore con una CELLA RC ⇒ lo stadio di ingresso viene così sostituito con



- Implementazione complessiva a condensatori commutati:



La cui funzione di trasferimento risulta

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{K \alpha_1 \alpha_2}{z^2 - z(K+1) + K(1+\alpha_1\alpha_2)}$$

con $K = \dfrac{1}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)}$

OSSERVAZIONI (generali)

1) Per evitare problemi di aliasing occorre avere f_c ELEVATA.
Però se $f_c \uparrow$ a parità di $\tau_i = R_i C_i$ con $R_i = \dfrac{1}{C_i^R f_c}$
$\Rightarrow \tau_i = \alpha_i / f_c \Rightarrow \alpha_i \uparrow \Rightarrow$ AUMENTA LA OCCUPAZIONE D'AREA

2) In generale è $S \propto \dfrac{1}{f_c} \Rightarrow$ se $f_c \uparrow$ $S \downarrow \Rightarrow$
ho BASSE SENSIBILITÀ operando a frequenze elevate

3) Tutta l'analisi che abbiamo compiuto è stata fatta nella Hp di considerare OP-AMP ideali, mentre in realtà:

- A_v è finito
- SR finito
- problemi di rumore

4) Accoppiamento di clock (tecniche di compensazione classiche: uso del transistore dummy)