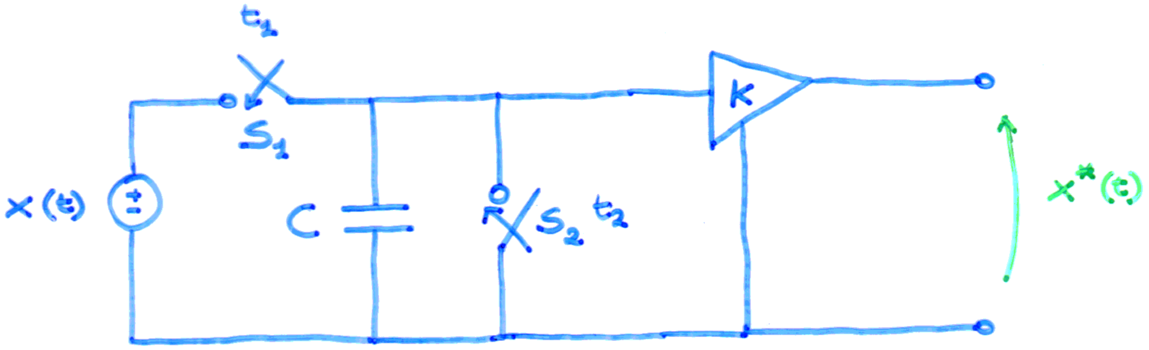
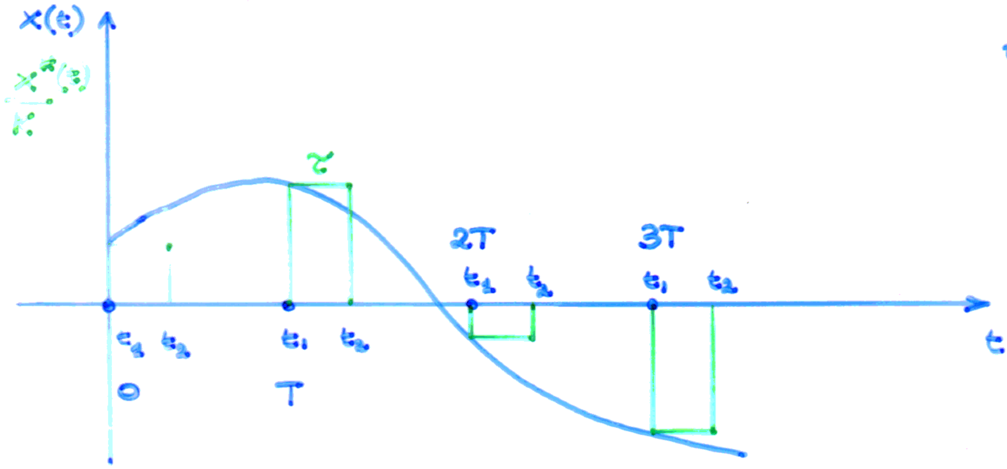
SPETTRO DI UN SEGNALE CAMPIONATO

• Schema di PRINCIPIO di un CAMPIONATORE





$t_2 - t_1 = \tau$

t_1 : S_1 si chiude (per un "istante") $\Rightarrow$ C si carica a $x(nT)$
$(t = nT)$

t_2 : S_2 si chiude (per un "istante") $\Rightarrow$ C si scarica
$(t = nT + \tau)$

$\Rightarrow$ Il generico impulso $x_n(t)$ della sequenza si potrà scrivere come

$$x_n(t) = K\, x(nT) \left[u(t - nT) - u(t - nT - \tau) \right]$$

- Hp (non restrittiva) $x(t) = 0 \quad t < 0 \quad \Rightarrow$

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) =$$

$$= K \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \left[u(t-nT) - u(t-nT-\tau) \right] \qquad (*)$$

- Consideriamo la trasf. di Laplace di ambo i membri della (*)

$$X^*(s) = K \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \left[e^{-snT}/s - e^{-s(nT+\tau)}/s \right]$$

$$= K \, \frac{1-e^{-s\tau}}{s} \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\, e^{-snT}$$

Ma per generare un segnale campionato si assume τ PICCOLO (ho quasi degli "impulsi")
$\Rightarrow$

$$\frac{1-e^{-s\tau}}{s} \simeq \frac{1-(1-s\tau)}{s} = \tau$$

$\Rightarrow$ Hp (di comodo) $K = 1/\tau$ (in questo modo l'area corrispondente a ciascun impulso è $x(nT)$)

$$X^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\, e^{-snT}$$

MA data una sequenza $\{x(nT)\}$ abbiamo definito

$$X(z) = \mathcal{Z}_I\left[x(nT)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\, z^{-n}$$

Dunque le due espressioni coincidono a patto che

$$z = e^{sT}$$

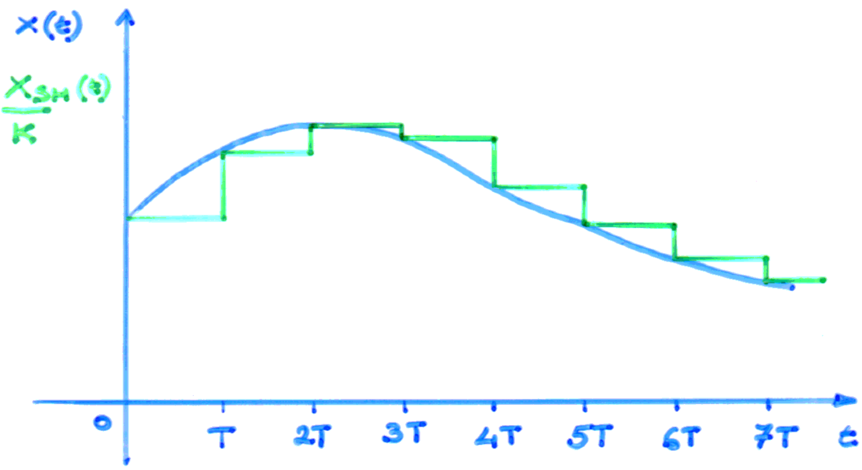
Perciò

La trasformata di Laplace e la Z-trasf. di un segnale campionato COINCIDONO a patto di assumere $z = e^{sT}$

(è un modo alternativo per introdurre la Z-trasf.)

OSS.

Eliminando S_2 si ottiene lo schema di principio di un SAMPLE AND HOLD (l'uscita rimane costante per $nT \leq t \leq (n+1)T$)



Le espressioni di $x_{SH}(t)$ e di $X_{SH}(s)$ sono identiche a prima a parte la posizione $\tau = T \Rightarrow$ (Hp : $K = 1$)

$$x_{SH}(t) = \sum_{0}^{\infty} {}_{n}\, x(nT)\left[u(t-nT) - u(t-nT-T)\right]$$

$$X_{SH}(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s} \sum_{0}^{\infty} {}_{n}\, x(nT)\, e^{-snT}$$

- La $\mathcal{L}$-trasf. di un segnale CAMPIONATO e di un segnale CAMPIONATO e TENUTO differiscono per il fattore $\frac{1-e^{-sT}}{s} \triangleq H_{SH}(s)$

Quindi $X_{SH}(s)$ può essere scritta come UNA FUNZIONE RAZIONALE in z (o una serie di potenze in z) $(z = e^{sT})$, MOLTIPLICATA per $H_{SH}(s)$.

- Se ad un sistema, al cui interno vengono effettuate unicamente operazioni di SOMMA, MOLTIPLICAZIONE PER UNA COSTANTE e RITARDO di T del segnale, viene applicato un segnale $x_{SH}(t)$
$\Rightarrow$ TUTTI I SEGNALI all'interno della rete (compreso quello di uscita) SONO di tipo S/H e la FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$H = \frac{Y_{SH}}{X_{SH}}$$ non contiene il fattore $H_{SH}(s)$

SPETTRO DI UN SEGNALE CAMPIONATO

Data una sequenza $\{x(nT)\}$ e nota la sua z-trasf. $X(z)$, per ottenere il suo spettro $X^*(j\omega)$, BASTA CONSIDERARE LE RELAZIONI CHE LEGANO z-trasf. $\rightarrow$ $\mathcal{L}$-trasf. $\rightarrow$ $\mathcal{F}$-trasf.

$$z = e^{sT} \rightarrow s = j\omega \rightarrow z = e^{j\omega T}$$ → per ottenere lo spettro si considera la z-trasf e si effettua la sostituzione $z = e^{j\omega T}$

Perciò

$$X^*(j\omega) = \sum_{0}^{\infty} x(nT)\, e^{-j\omega nT}$$

OSS.

1) Al posto di $X^*(j\omega)$ a volte si utilizza la notazione $X^*(e^{j\omega T})$, dato che ω COMPARE sempre in un esponenziale

2) $X^*(e^{j\omega T})$ è PERIODICA (RISPETTO a ω!) di PERIODO $\frac{2\pi}{T}$

Infatti:

$$\omega \leftarrow \omega + \frac{2\pi}{T} \Rightarrow e^{-j\omega nT} \leftarrow e^{-j(\omega+\frac{2\pi}{T})nT} =$$

$$= e^{-j\omega nT} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi n}}_{=1}$$

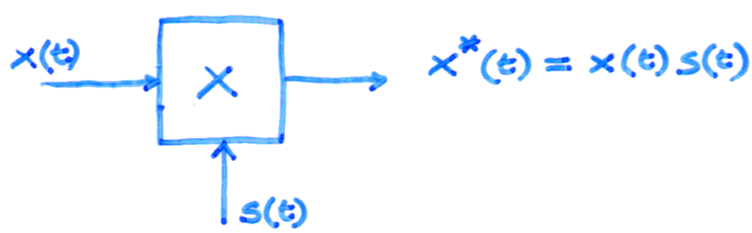
3) È possibile provare che

$$X^*(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\omega - jk\frac{2\pi}{T}\right)$$

essendo $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$. Perciò lo spettro di un segnale campionato è dato DALLA RIPETIZIONE PERIODICA dello spettro del corrispondente segnale tempocontinuo, di periodo $\omega_s = 2\pi/T$

DIM.

Conviene esprimere $x^*(t)$ come uscita di un modulatore a prodotto, con segnale modulante $x(t)$ e portante costituita da un treno di impulsi, cioè



dove

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$s(t)$ è un segnale periodico di periodo T $\Rightarrow$ lo esprimo mediante una serie di $\mathcal{F}$

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{k}\, c_k\, e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

dove

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\, e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\, dt = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t-nT)\, e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}\, dt = \frac{1}{T}$$

$\uparrow$

$\delta(t-nT) = 0$ in $[-T/2, T/2]$ per $n \neq 0$

quindi

$$x^*(t) = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{k}\, x(t)\, e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

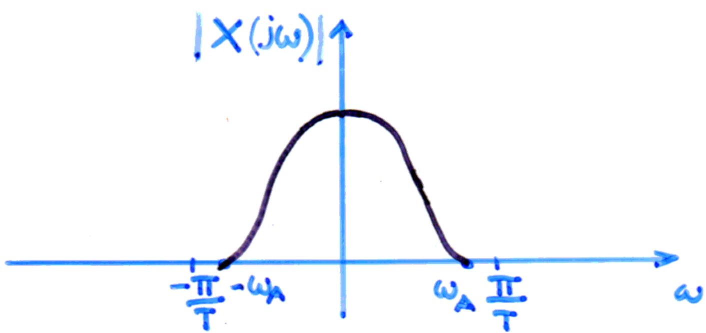
Considero la $\mathcal{F}$-trasformata (prop. di linearità e del "fattore di scala")

$$X^*(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{k}\, X\left(j\omega - jk\frac{2\pi}{T}\right)$$

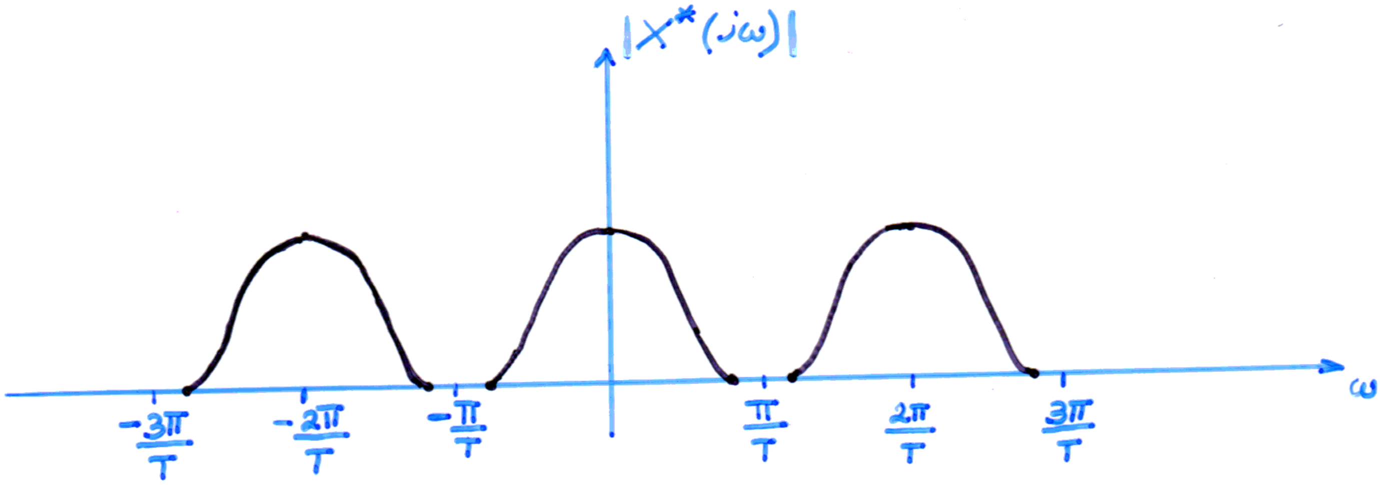
NOTA

La relazione che lega $X^*(e^{j\omega T})$ a $X(j\omega)$ consente di PROVARE il Teorema di Shannon (del campionamento)

- Infatti se $x(t)$ ha uno spettro di ampiezza $\omega_A < \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$



allora lo spettro del segnale $x^*(t)$, da esso ottenuto mediante una operazione di campionamento con PERIODO T, è



Quindi i vari "lobi" che formano la ripetizione periodica NON SI SOVRAPPONGONO $\Rightarrow$ è POSSIBILE da $x^*(t)$ RECUPERARE IL SEGNALE TEMPOCONTINUO DI PARTENZA $x(t)$ usando

$$x^*(t) \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow x(t)$$

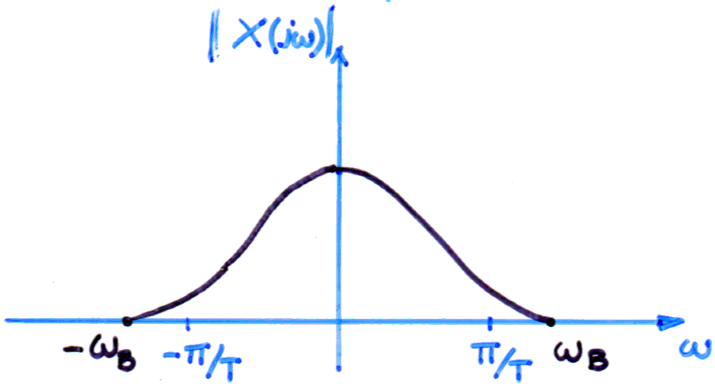
(filtro di SMOOTHING)

con

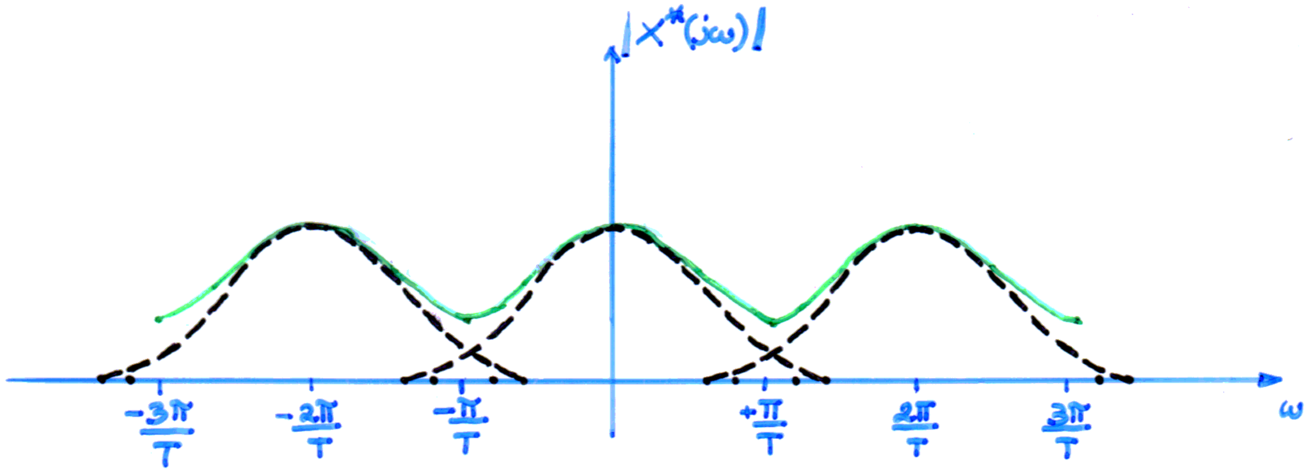
$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \pi/T \\ 0 & |\omega| > \pi/T \end{cases}$$

(si filtra il solo "lobo centrale" in $|X^*(j\omega)|$)

- se, invece, $x(t)$ ha uno spettro di ampiezza $\underline{\underline{\omega_B > \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}}}$



lo spettro di $x^*(t)$ diventa



in questo caso le "code" OLTRE ω_B di $X(j\omega)$ si SOVRAPPONGONO nel formare $X^*(j\omega)$ $\Longrightarrow$ l'andamento di $X^*(j\omega)$ alla pulsazione ω dipende dall'andamento di $X(j\omega)$ a DIVERSE PULSAZIONI: si parla di ALIASING o FOLDING (distorsione non lineare)

In questo caso NON è possibile recuperare $x(t)$ da $x^*(t)$ mediante il filtro di smoothing

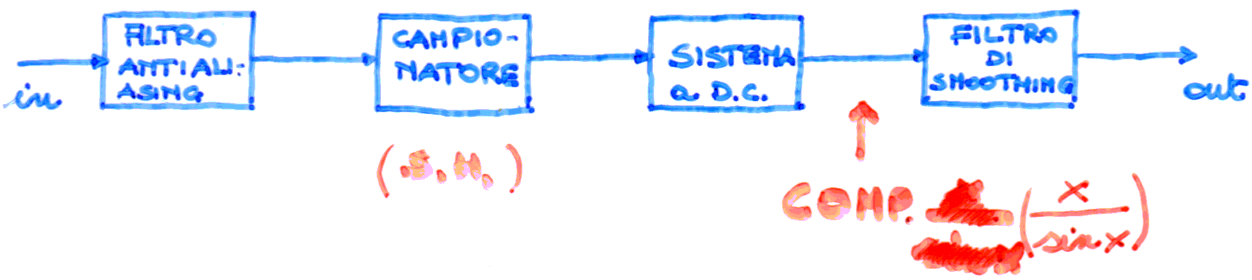
QUINDI

Se $f_s = \frac{1}{T} \geq 2 f_A = 2 \cdot \left(\frac{\omega_A}{2\pi}\right)$ è possibile recuperare da un segnale campionato il corrispondente segnale tempo-continuo, così L'OPERAZIONE DI CAMPIONAMENTO NON ALTERA IL CONTENUTO INFORMATIVO DEL SEGNALE (Teor. di Shannon)

OSS.

Nella pratica si garantisce che il teor. di Shannon sia rispettato fissando una f_s opportunamente alta, ma anche RIDUCENDO L'AMPIEZZA DI BANDA DEL SEGNALE ELABORATO f_A, mediante un FILTRO ANTIALIASING (tipico impiego per un filtro "continuo")

- Lo schema di un sistema di elaborazione (per es. un filtro) "a valori campionati" con ingresso e uscita tempocontinui sarà quindi dato da



PROGETTO DI UN FILTRO DIGITALE DAL CORRISPONDENTE PROTOTIPO ANALOGICO

Supponiamo di aver determinato (mediante le procedure di approssimazione viste) la funzione di trasferimento del filtro analogico che soddisfa le specifiche imposte cioè

Hp) $H_a(s)$ è NOTO $\Rightarrow$ $H_D(z)$ corrispondente ?

Soluzione

occorre determinare una trasformazione opportuna

$$s = f(z)$$

in modo che

$$H_D(z) = H_a(s)\Big|_{s=f(z)} = H_a(f(z))$$

Problema

- come è fatta $f(z)$?
- a quali proprietà deve soddisfare? Come è possibile determinarla?

Proprietà di $f(z)$

1) $H_a(s)$ ed $H_D(z)$ sono funzioni RAZIONALI in s e z rispettivamente

$\Rightarrow$ $f(z)$ DEVE ESSERE RAZIONALE in z

2) $H_a(j\omega)$ è stato progettato in modo da possedere alcune desiderabili caratteristiche (selettività). Si vuole che tali caratteristiche SIANO PRESENTI anche nella RISPOSTA in frequenza del CORRISPONDENTE filtro digitale $H_D(e^{j\Omega T})$

$\Rightarrow$ $s = f(z)$ deve trasformare l'asse Imm. $s = j\omega$ nella circonferenza unitaria $z = e^{j\Omega T}$ ($\Rightarrow$ si ha corrispondenza tra le 2 risposte in frequenza)

3) $H_a(s)$ deve corrispondere ad un sistema STABILE $\Leftrightarrow$

$$Re(s_i) < 0 \qquad s_i = \text{poli di } H_a(s).$$

Si vuole che ANCHE $H_D(z)$ sia STABILE $\Rightarrow$ I poli z_i di $H_D(z)$ determinabili come

$$s_i = f(z_i)$$

DEVONO ESSERE ALL'INTERNO DELLA CIRCONFERENZA UNITARIA

Riassumendo

$s = f(z)$ deve trasformare il SEMIPIANO SINISTRO nel piano s nella regione posta all'interno della circonferenza unitaria.

Inoltre

1) $f(z)$ deve essere una funzione razionale di z

2) per $|z| = 1$, $f(z)$ deve essere PURAMENTE IMMAGINARIO;

viceversa, se $s = f(z)$ è IMMAGINARIO, si deve avere $|z| = 1$

3) Per $|z| < 1$ la parte reale di $s_e = f(z)$ deve essere NEGATIVA; viceversa se $\mathrm{Re}\, s < 0$, il corrispondente valore di z deve essere t.c. $|z| < 1$

Determinazione di $f(z)$

- Metodo sistematico basato SU TECNICHE DI INTEGRAZIONE NUMERICA.

- Un filtro (in generale un sistema dinamico) di funzione di trasf. $H_a(s)$ può essere equivalentemente descritto NEL DOMINIO dei tempi da un SISTEMA di N (= ordine del filtro) equazioni differenziali LINEARI del 1° ordine dette EQ. DI STATO

$$(o) \qquad \frac{d x_i(t)}{dt} = g_i(t) \qquad i = 1, \dots, N$$

ove $x_i(t)$ = variabili di stato

$g_i(t)$ = funzioni LINEARI delle $x_i(t)$ (e del segnale di ingresso)

$\Rightarrow$ L-trasformo ambo i membri di (o)

$$s X_i(s) = G_i(s) \qquad i = 1, \dots, N$$

(ho assunto $x_i(0) = 0$)

- Deriviamo equazioni analoghe per un FILTRO DIGITALE (in generale per un sistema dinamico tempo-discreto e analogico)

Il sistema è descritto da una equazione alle DIFFERENZE FINITE ⇒ da (o)

voglio caratteristiche "identiche" a (o) ⇒ "stesse" equazioni di stato

$$\int_{nT-T}^{nT} \frac{dx_i(t)}{dt}\,dt = x_i(nT) - x_i(nT-T)$$

$$(**) \qquad = \int_{nT-T}^{nT} g_i(t)\,dt \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

Quindi:

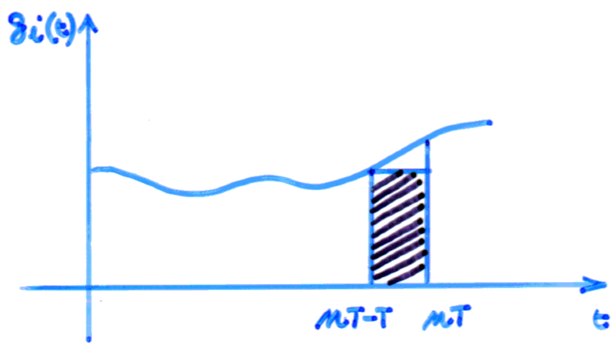
- il primo membro della (**) ha l'equazione alle differenze che volevo
- devo approssimare "opportunamente" il 2° membro ⇒ SI UTILIZZA UN ALGORITMO DI INTEGRAZIONE NUMERICA

4 POSSIBILI SCELTE:

1) EULERO FORWARD ←
2) EULERO BACKWARD
3) TRASF. BILINEARE ←
4) TRASF. LDI (Lossless Discrete Integrator)

EULERO FORWARD

$$\int_{nT-T}^{nT} g_i(t)\,dt \simeq T\,g_i(nT-T)$$



Si approssima l'integrale mediante l'AREA DEL RETTANGOLO ≡,
si fa cioè la Hp che per

$$nT-T \leq t \leq nT \qquad g_i(t) \cong g_i(nT-T) \quad \text{costante}$$

$\Rightarrow$ la (**) diventa

$$x_i(nT) - x_i(nT-T) = T\, g_i(nT-T)$$

Applico la Z-trasf.

$$X_i(z) - z^{-1} X_i(z) = T z^{-1} G_i(z)$$

$$\frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}} X_i(z) = G_i(z) \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{z-1}{T} X_i(z) = G_i(z) \qquad i = 1, \dots, N$$

che, comparato con la "corrispondente" espressione analogica $sX_i(s) = G_i(s)$
fornisce

$$\underline{s = f(z) = \frac{z-1}{T}}$$

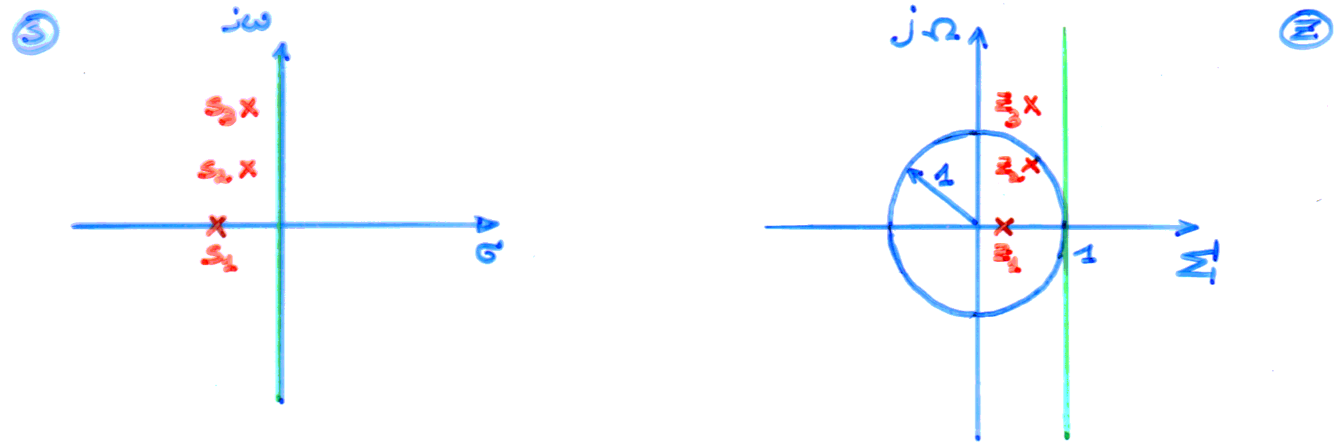
Ma la $f(z)$ verifica le proprietà 1) - 3) ?

1) $f(z)$ è un polinomio in z $\Rightarrow$ ok!

2) $s = \dfrac{z-1}{T}$ $\Rightarrow$ $z = sT + 1$ perciò per $s = j\omega$ è

$$z = 1 + j\omega T$$

$\Rightarrow$ $|z| = 1 \iff \omega = 0$!! L'asse Im nel piano s NON
si trasforma in $|z| = 1$



L'asse Im del piano s si "mappa" sulla retta $\Sigma_1 = 1$ nel piano z. Quindi la condizione 2) è VERIFICATO SOLO CON ROZZA APPROSSIMAZIONE quando

$$|\omega T| \ll 1 \quad \Rightarrow \quad |z| \simeq 1$$

3) NON è detto che poli di $H_a(s)$ nel semipiano sinistro CORRISPONDANO a poli di $H_D(z)$ entro $|z|=1$ (Es. $z_3 \leftrightarrow s_3$) Quindi la stabilità di $H_D(z)$ NON è assicurata a priori dalla stabilità di $H_a(s)$

OSS.

Anche se tutti i poli di $H_a(s)$ vengono trasformati in poli di $H_D(z)$ situati all'interno di $|z|=1$, si hanno 2 effetti che DETERIORANO la risposta del filtro digitale rispetto al corrispondente filtro analogico:

1) I poli DOMINANTI di $H_a(s)$ (quelli + vicini all'asse Im) vengono trasformati in poli MOLTO VICINI a $|z|=1$

$\Rightarrow$ si ha un effetto di "PICCO" nella curva di risposta

2) Gli zeri (di trasmissione) di $H_a(s)$ si trovano sull'asse $j\omega$

$\Rightarrow$ quelli di $H_D(z)$ NON si troveranno su $|z|=1$ $\Rightarrow$

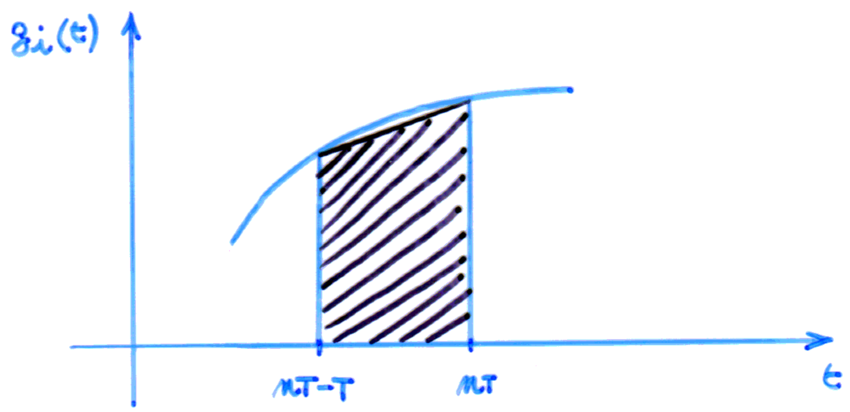
$H_D(e^{j\Omega T})$ NON sarà $=0$ DOVE DOVREBBE $\Rightarrow$

la risposta IN BANDA OSCURA SARÀ DETERIORATA

TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$\int_{nT-T}^{nT} g_i(t)\,dt \simeq \frac{T}{2}\left[g_i(nT-T) + g_i(nT)\right]$$

che graficamente corrisponde a



Si approssima l'integrale mediante l'area ▨, cioè l'area del trapezio con base minore $g_i(nT-T)$, base maggiore $g_i(nT)$ ed altezza T

Perciò dalla (**)

$$x_i(nT) - x_i(nT-T) = T/2\left[g_i(nT-T) + g_i(nT)\right]$$

$\Rightarrow$ usando la Z-trasf.

$$X_i(z) - z^{-1} X_i(z) = T/2 \left[G_i(z) z^{-1} + G_i(z) \right]$$

$$\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} X_i(z) = G_i(z) \qquad \Longrightarrow$$

$$\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} X_i(z) = G_i(z) \qquad i = 1, \ldots, M$$

Confrontando la precedente espressione con la $sX_i(s) = G_i(s) \Longrightarrow$

$$\underline{s = f(z) = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}$$

(che è proprio una funzione bilineare !)

$f(z)$ verifica le proprietà 1) - 3) ?

1) è una funzione razionale in z (ok)

2) Da $s = f(z)$ ricaviamo z :

$$s(z+1) = 2/T (z-1) \Rightarrow \left(\frac{2}{T} - s\right) z = \frac{2}{T} + s$$

quindi

$$z = \frac{2/T + s}{2/T - s}$$

$$s = \sigma + j\omega \quad e \quad z = r e^{j\theta}$$

$$r = |z| = \left| \frac{2/T + \sigma + j\omega}{2/T - \sigma - j\omega} \right| = \left[\frac{(2/T + \sigma)^2 + \omega^2}{(2/T - \sigma)^2 + \omega^2} \right]^{1/2} \qquad (A)$$

$$\theta = \arg z = tg^{-1} \frac{\omega}{2/T + \sigma} - tg^{-1} \frac{-\omega}{2/T - \sigma} = tg^{-1} \frac{\omega}{2/T + \sigma} + tg^{-1} \frac{\omega}{2/T - \sigma} \qquad (B)$$

Dalla (A)

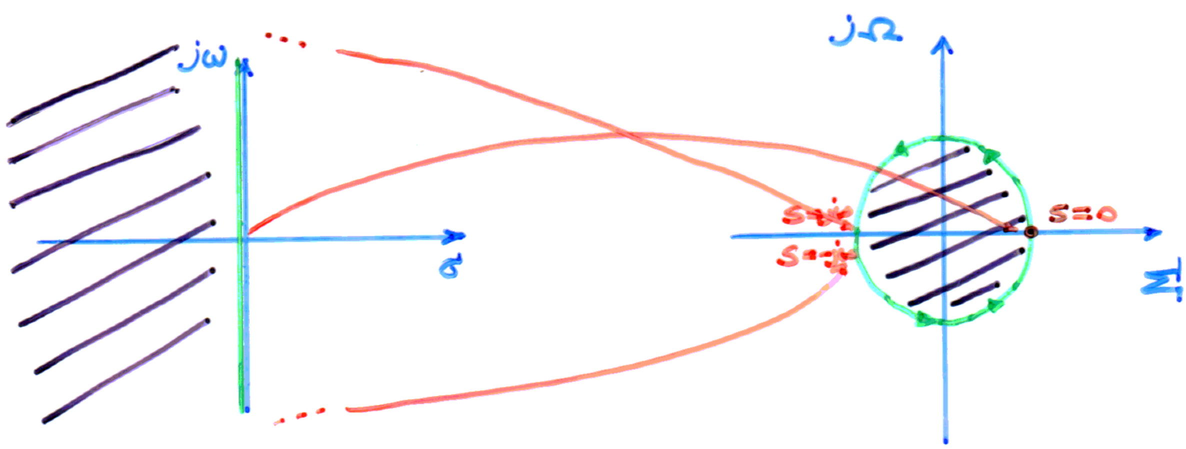
i) $\sigma > 0 \Rightarrow r > 1$ Il semipiano DESTRO di s è 'MAPPATO' nella regione ESTERNA a $|z| = 1$

ii) $\sigma = 0 \Rightarrow r = 1$ L'asse Im del piano s viene TRASFORMATO NELLA CIRCONFERENZA $|z| = 1$

$\Rightarrow$ la propr. 2) è SODDISFATTA

iii) $\sigma < 0 \Rightarrow r < 1$ Il semipiano SINISTRO di s viene trasformato nella regione INTERNA a $|z| = 1$ $\Rightarrow$ la STABILITÀ di $H_D(z)$ deriva immediatamente da quella di $H_a(s)$

$\Rightarrow$ la propr. 3) è SODDISFATTA



Dalla (B) per $\sigma = 0$ $(\Rightarrow r = 1)$ $\Rightarrow$ $\theta = 2\, tg^{-1} \frac{\omega T}{2}$

i) $\omega = 0 \Rightarrow \theta = 0$: L'origine del piano s viene trasformata nel punto $(1, 0)$

ii) $\omega \to \infty \Rightarrow \theta \to \pi$: Il SEMIASSE POSITIVO di $s = j\omega$ viene trasformato NELLA SEMICIRCONFERENZA SUPERIORE di $|z| = 1$

iii) $\omega \to -\infty \Rightarrow \theta \to -\pi$ Il SEMIASSE NEGATIVO di $s = j\omega$ viene trasformato nella SEMICIRCONFERENZA INFERIORE di $|z| = 1$

OSS.

a) Dalla proprietà 2) si ha che massimo e minimo di $|H_a(j\omega)|$ si conservano nel passaggio a $|H_D(e^{j\Omega T})|$. Inoltre se

$$M_1 \leq |H_a(j\omega)| \leq M_2 \qquad \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$$

allora

$$\dot{M}_1 \leq |H_D(e^{j\Omega T})| \leq \dot{M}_2 \qquad \Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_2$$

quindi banda passante e banda oscura del filtro analogico vengono trasformati in banda passante e oscura del filtro digitale corrispondente (non si hanno effetti di "deterioramento" come nel caso del metodo Eulero forward)

b) Problema dell' EFFETTO DI WARPING ("incurvamenti")

In base alla proprietà 2) $s = j\omega \leftrightarrow z = e^{j\Omega T}$. Ma dalla (B) con $\sigma = 0$ $\left(\theta = \arg z = \Omega T = 2\, tg^{-1} \frac{\omega T}{2}\right)$

$$\frac{\Omega T}{2} = tg^{-1} \frac{\omega T}{2} \qquad (*)$$

$$\frac{\omega T}{2} = tg \frac{\Omega T}{2}$$

dalla (*) si ha •) $\omega = 0 \Rightarrow \Omega = 0, \pm \frac{2\pi}{T}, \pm \frac{4\pi}{T}, \dots$

••) $\omega \to \infty \Rightarrow$

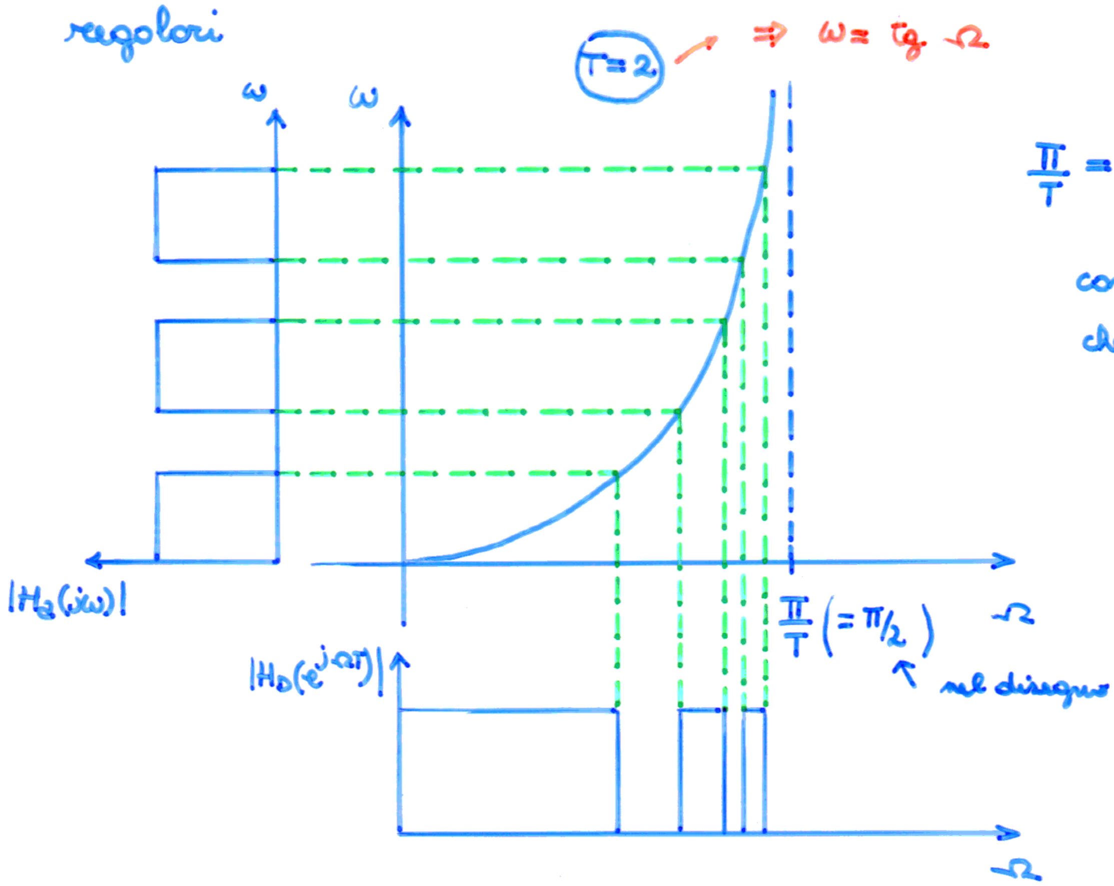
•••) per $\frac{\Omega T}{2}$ "piccolo" è $\frac{\Omega T}{2} \simeq \frac{\omega T}{2}$

cioè per BASSE FREQUENZE $(\Omega \simeq 0)$ la relazione tra ω e Ω è LINEARE. In generale l'asse ω è "MAPPATO" negli intervalli finiti: $-\frac{\pi}{T} \leq \Omega \leq \pi/T$, $\frac{\pi}{T} \leq \Omega \leq \frac{3\pi}{T}$, ...

$\Rightarrow$ la scala di frequenza in Ω è COMPRESSA rispetto a quella in ω

Consideriamo l'effetto sulla RISPOSTA di AMPIEZZA del filtro (si ha un effetto di distorsione sulla risposta in fase, ma col presente metodo SI PUÒ FARE POCO PER OVVIARE all'inconveniente)

Hp) Consideriamo un ipotetico filtro analogico passa-banda con un numero di bande passanti centrate ad intervalli regolari



$\frac{\pi}{T}$ = metà della pulsazione di campion. (max pulsazione che ha senso considerare)

Il filtro digitale corrispondente presenta LO STESSO NUMERO DI BANDE PASSANTI, ma la frequenza di centrobanda e l'ampiezza delle bande a freq. elevate TENDE A RIDURSI IN MODO NON PROP. ad Ω (effetto di Warping)

SOLUZIONE

- Si effettua una operazione preliminare di PREDISTORSIONE (PREWARPING):

Dato che un filtro digitale, ricavato da un filtro analogico con ω_p ed ω_s confini di b. p. e b.o., ha le pulsazioni corrispondenti pari a

$$\Omega_p = \frac{2}{T} tg^{-1} \frac{\omega_p T}{2} \qquad (\text{Warping})$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T} tg^{-1} \frac{\omega_s T}{2}$$

$\Rightarrow$ per ottenere un filtro digitale caratterizzato da

$$\tilde{\Omega}_p \quad e \quad \tilde{\Omega}_s \quad (\text{desiderate})$$

basta considerare un filtro analogico di partenza caratterizzato da

$$\tilde{\omega}_p = \frac{2}{T} tg \frac{\tilde{\Omega}_p T}{2} \qquad (\text{prewarping})$$

$$\tilde{\omega}_s = \frac{2}{T} tg \frac{\tilde{\Omega}_s T}{2}$$

NOTA

- Le specifiche sulle attenuazioni (A_p, A_s) NON risentono del WARPING

Esempio:

Si vuole sintetizzare un filtro digitale passabasso caratterizzato da

$A_p = 0{,}5$ dB $\qquad f_p = 350$ KHz

$A_s = 25$ dB $\qquad f_s = 470$ KHz

1° PASSO : Prewarping $\quad (f_{CL} = 2$ MHz$)$

$$\tilde{f}_p = \frac{f_{CL}}{\pi} \, tg \, \frac{\pi f_p}{f_{CL}} \simeq 390 \text{ KHz}$$

$$\tilde{f}_s = \frac{f_{CL}}{\pi} \, tg \, \frac{\pi f_s}{f_{CL}} \simeq 580 \text{ KHz}$$

(N.B. le specifiche su A_p ed A_s RIMANGONO le stesse!)

2° PASSO : considero il filtro NORMALIZZATO opportuno

- considero una approssimazione alla Tschebyscheff

$$f_p^N = 1/2\pi \quad \Rightarrow \underbrace{(2\pi f_s^N)}_{\omega_s^N} = \frac{(2\pi \tilde{f}_s)}{(2\pi \tilde{f}_p)} \simeq 1.485$$

3° PASSO : sintesi del filtro NORMALIZZATO

A_p : ottengo il "ripple" in banda passante

$$\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} \simeq 0{,}35$$

$A_s + \omega_s^N$: determino l'ordine del filtro

$$n \geqslant \frac{\operatorname{arccosh} \frac{\sqrt{10^{A_s/10} - 1}}{\varepsilon}}{\operatorname{arccosh} \omega_s^N} = 4.87 \Rightarrow n = 5$$

4° PASSO : determinazione dei poli a $Re < 0$. Sfruttando le formule note si ottiene (N.B. gli zeri di $L(-s^2)$ sono $2n$!)

$$p_1 = -0.112 + j\,1.012 \qquad p_4 = p_2^*$$

$$p_2 = -0.293 + j\,0.625 \qquad p_5 = p_1^*$$

$$p_3 = -0.362$$

5° PASSO : determinazione di $H_a^N(s) = \dfrac{H_0}{\prod_1^5 i\,(s - p_i)}$

dove, essendo n dispari, $H_0 = \prod_1^5 i\,(-p_i)$

6° PASSO : trasformazione di frequenza p.b. norm. $\rightarrow$ p.b. non norm.

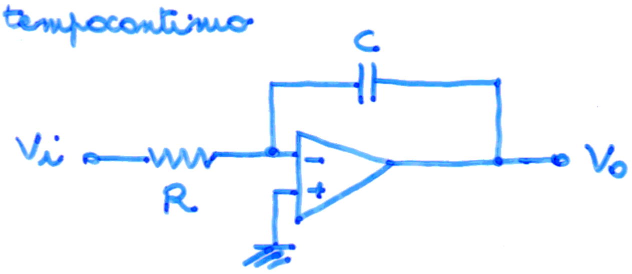
$$H_a^N(s) \rightarrow H_a(s)$$

7° PASSO : determinazione di

$$H_D(z) = H_a(s)\Big|_{s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

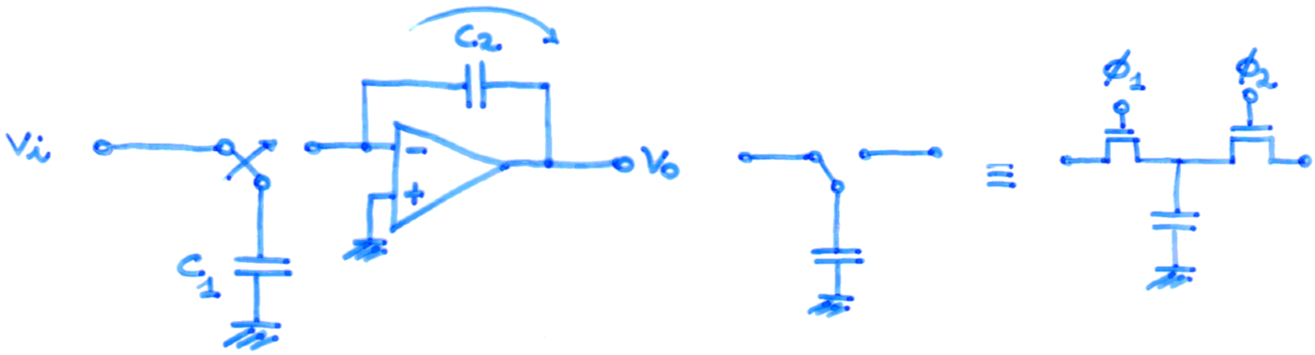
RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN INTEGRATORE A COND. COMMUTATI

• Int. tempocontinuo



$$H(j\omega) = -\frac{1}{j\omega\tau} \qquad \tau = RC$$

• mediante condensatore commutato possiamo sostituire ("mediamente") R



ϕ_1, ϕ_2 tensioni di clock A FASI NON SOVRAPPOSTE

Funzione di Trasferimento

$t = nT \quad (\phi_1 = 1, \phi_2 = 0) \qquad Q_1(nT) = C_1 V_i(nT)$

$\qquad Q_2(nT) = C_2 V_o(nT)$

$t = (n+1)T \quad (\phi_1 = 0, \phi_2 = 1) \qquad Q_1[(n+1)T] = 0$

$\qquad Q_2[(n+1)T] = C_2 V_o[(n+1)T]$

Applico il principio di conservazione della carica al NODO ⊖

$$-C_2 V_o[(n+1)T] = -C_2 V_o(nT) + C_1 V_i(nT)$$

$$V_o[(n+1)T] - V_o(nT) = -\frac{C_1}{C_2} V_i(nT)$$

Applico la Z-trasf

$$V_o(z)\,(z-1) = -\frac{C_1}{C_2} V_i(z) \quad \Rightarrow$$

$$H(z) = \frac{V_o(z)}{V_i(z)} = -\frac{C_1}{C_2}\,\frac{1}{z-1}$$

Quindi (a parte fattori di scala) $H(z)$ si può PENSARE OTTENUTA da $H(s) = \frac{1}{s}$ MEDIANTE UNA TRASFORMAZIONE DI TIPO Eulero forward

$$s = \frac{z-1}{T}$$

Risposta in Frequenza

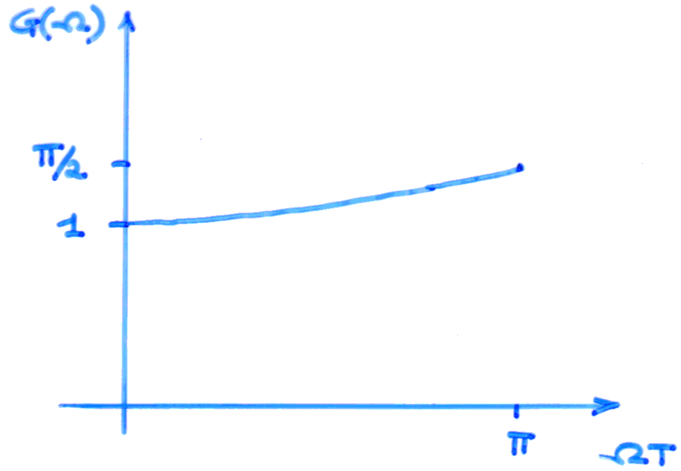
$$H(e^{j\Omega T}) = -\frac{C_1}{C_2}\,\frac{1}{e^{j\Omega T}-1} = -\frac{C_1}{C_2}\,\frac{e^{-j\Omega T/2}}{e^{j\Omega T/2}-e^{-j\Omega T/2}}$$

$$= -\frac{C_1}{C_2}\,\frac{e^{-j\Omega T/2}}{2j \sin\frac{\Omega T}{2}} = -\frac{C_1}{C_2}\,\frac{\Omega T}{2}\,\frac{1}{j\Omega T}\,\frac{e^{-j\Omega T/2}}{\sin \Omega T/2}$$

$$= \underbrace{-\frac{C_1}{C_2} f_c}_{\text{costante}} \underbrace{\left(\frac{1}{j\Omega}\right)}_{\text{risposta int. ideale}} \underbrace{\frac{\Omega T/2}{\sin \Omega T/2}}_{= G(\Omega)} \cdot \underbrace{e^{-j\Omega T/2}}_{\text{FATTORE DI DISTORSIONE DI FASE}}$$

$G(\Omega)$ FATTORE DI DISTORSIONE DI AMPIEZZA

Effetto della distorsione di ampiezza



al solito lo senso considero $\Omega \leq \frac{\pi}{T}$

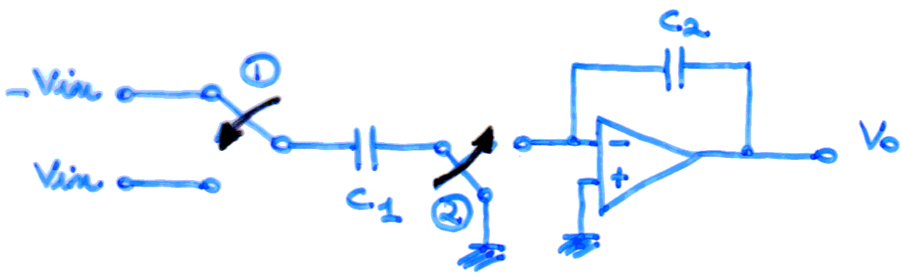
Per $\Omega \simeq 0$ l'effetto è trascurabile, per $\Omega \uparrow$ questo fattore provoca un aumento della risposta di ampiezza.

Soluzione: Aumento opportunamente $f_c \Rightarrow T \downarrow$ in modo da avere $\Omega T \simeq 0$ anche per Ω relativamente grande $\Rightarrow$ posso risolvere il problema della distorsione d'ampiezza

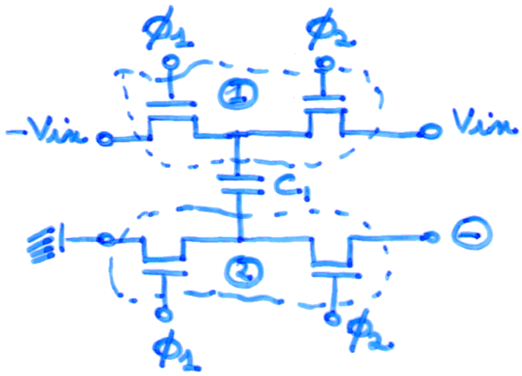
NOTA

Il problema della distorsione di FASE è, PER QUESTO TIPO DI INTEGRATORE, IRRISOLUBILE!

RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN INT. "BILINEARE"



- interruttori abilitati in CONTROFASE cioè



Funzione di Trasferimento

$t = nT \quad (\phi_1 = 1, \phi_2 = 0) \qquad Q_1(nT) = -C_1 V_{in}(nT)$

$Q_2(nT) = C_2 V_o(nT)$

$t = (n+1)T \quad (\phi_1 = 0, \phi_2 = 1) \qquad Q_1[(n+1)T] = +C_1 V_{in}[(n+1)T]$

$Q_2[(n+1)T] = C_2 V_o[(n+1)T]$

- Applico il principio di conservazione della carica al nodo ⊖

$$-C_1 V_{in}[(n+1)T] - C_2 V_o[(n+1)T] = C_1 V_{in}(nT) - C_2 V_o(nT)$$

$$C_1 \left\{ V_{in}[(n+1)T] + V_{in}(nT) \right\} = -C_2 \left\{ V_o[(n+1)T] - V_o(nT) \right\}$$

- Applico la Z-trasf

$$V_{in}(z)\,(z+1) = -\frac{C_2}{C_1}\,V_o(z)\,(z-1) \Rightarrow$$

$$H(z) = \frac{V_o(z)}{V_{in}(z)} = -\frac{C_1}{C_2}\,\frac{z+1}{z-1}$$

Quindi (a parte fattori di scala) $H(z)$ si può pensare ottenuta da $H(s) = 1/s$ MEDIANTE UNA TRASF. BILINEARE

$$s = \frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}$$

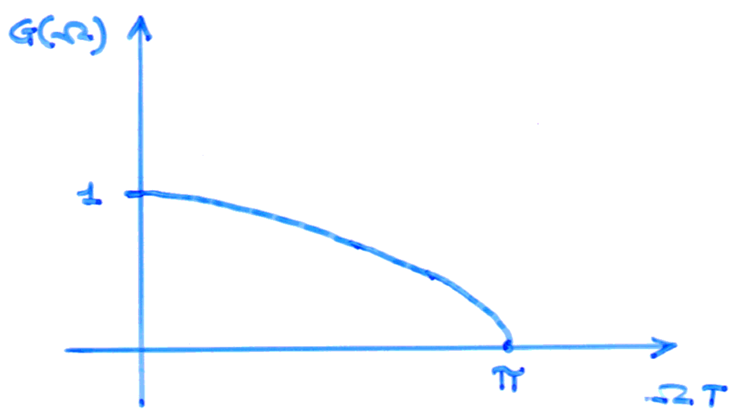
Risposta in Frequenza

$$H(e^{j\Omega T}) = -\frac{C_1}{C_2}\,\frac{e^{j\Omega T}+1}{e^{j\Omega T}-1} = -\frac{C_1}{C_2}\,\frac{e^{j\Omega T/2}+e^{-j\Omega T/2}}{e^{j\Omega T/2}-e^{-j\Omega T/2}}$$

$$= -\frac{C_1}{C_2}\,\frac{\cancel{2}\cos \Omega T/2}{\cancel{2}j\sin \Omega T/2} = \underbrace{-\frac{C_1}{C_2}\cdot 2f_c}_{\text{cost.}}\left(\frac{1}{j\Omega}\right)\underbrace{\frac{\Omega T/2}{\mathrm{tg}\,\Omega T/2}}_{G(\Omega)}$$

Quindi

1) Ho ancora un fattore di distorsione di ampiezza.

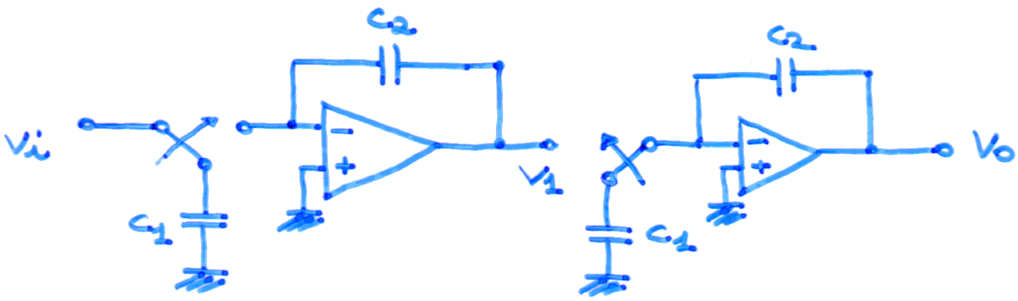


posso risolvere il problema in modo analogo al caso precedente

2) NON ho più DISTORSIONE DI FASE

Il prezzo è generare ogni volta $V_{in}(nT)$ e $-V_{in}(nT)$ (può essere pesante)

ALTRA SOLUZIONE (a livello di sistema)



grazie allo "sfasamento" tra i 2 interruttori, in una sola fase ottengo SIA l'integrazione sul 1° stadio che la memorizzazione della carica sulla capacità C_1 del 2° stadio $\Rightarrow$ "guadagno" un semiperiodo

- Con considerazioni analoghe alle precedenti si può ottenere per IL SINGOLO STADIO

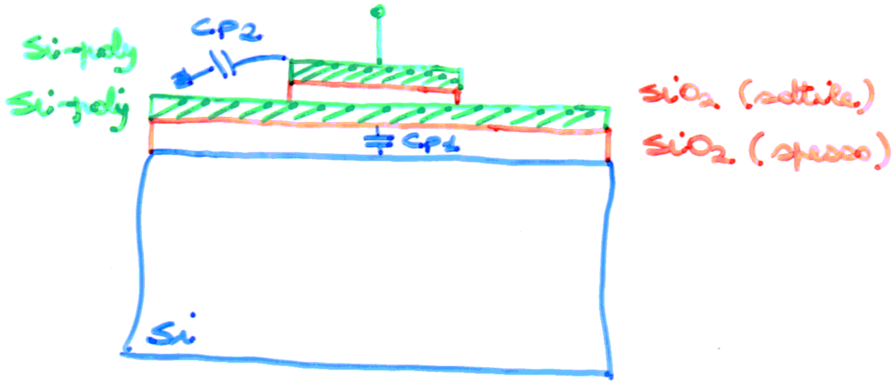
$$H(z) = -\frac{C_1}{C_2}\,\frac{z^{-1/2}}{1-z^{-1}}$$

e

$$H(e^{j\Omega T}) = -2f_c\,\frac{C_1}{C_2}\cdot\left(\frac{1}{j\Omega}\right)\frac{\Omega T/2}{\sin \Omega T/2}$$

INFLUENZA DELLE CAPACITÀ PARASSITE

• Struttura di un condensatore integrato (2 liv di si-poly)

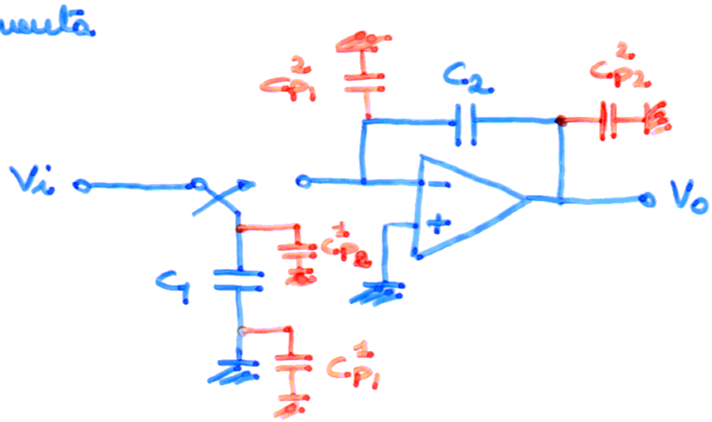


C_{p1} = capacità parassita tra l'armatura inferiore e il substrato

C_{p2} = capacità parassita tra l'armatura superiore ed altre piste, capacità ... (presenti sul chip)

Tipicamente $C_{p1} \gg C_{p2}$ (che dipende da effetti di bordo)

• Tenendo conto delle capacità parassite, lo schema dell'integratore diventa



C_{p2}^2 è connessa ad un nodo a bassa impedenza $\Rightarrow$ praticamente NON CONTA

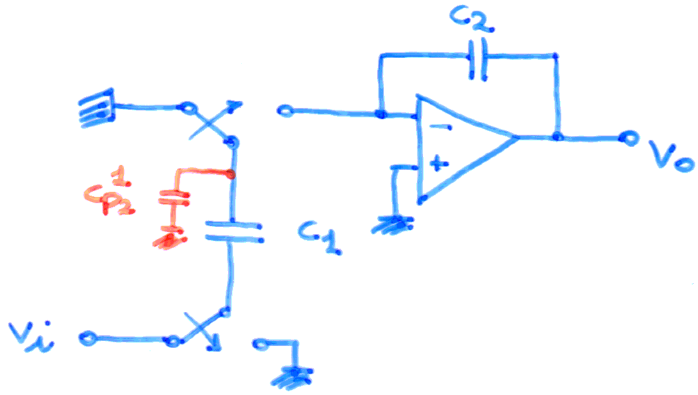
C_{p1}^2 è connessa tra MASSA e MASSA VIRTUALE $\Rightarrow$ non viene mai caricata né scaricata $\Rightarrow$ NON CONTA.

C_{P1}^{1} ha entrambe le armature a massa $\Rightarrow$ NON CONTA

L'unica capacità che conta è C_{P2}^{1} che va in // a C_1.

Di fatto non è molto fastidiosa dato che di solito $C_1 >> C_{P2}$.

Nel caso in cui C_1 fosse particolarmente piccola $\Rightarrow$ si può adottare una struttura di integratore (NON INVERTENTE) che NON RISENTE DELLA INFLUENZA DELLE CAPACITÀ PARASSITE



C_{P2}^{1} è connesso tra massa e massa virtuale $\Rightarrow$ NON CONTA

- Applicando considerazioni simili a quelle viste in precedenza si ha

$$H(z) = \frac{V_o(z)}{V_i(z)} = \frac{C_1}{C_2} \frac{1}{z-1}$$