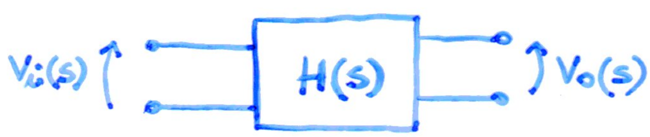
SCELTA DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DI UN FILTRO DIGITALE (APPROSSIMAZIONE)

- Date le specifiche del filtro desiderato, come è possibile determinare una $H(z)$ corrispondente?

PUNTO DI PARTENZA: corrispondente filtro ANALOGICO TEMPO CONTINUO

In particolare

- BUTTERWORTH
- TSCHEBYSCHEFF
- ELLITTICO
- BESSEL



$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

PERDITA (dB)

$$A(\omega) = 20 \log \left| \frac{V_i(j\omega)}{V_o(j\omega)} \right| = 20 \log \frac{1}{|H(j\omega)|}$$

$$= 10 \log L(\omega^2)$$

dove

$$L(\omega^2) = \frac{1}{H(j\omega)\, H(-j\omega)}$$

FUNZIONE DI PERDITA

Prolungamento analitico di $L(\omega^2)$ $\quad (\omega \leftrightarrow s/j \;,\; \omega^2 \leftrightarrow -s^2)$

$$L(-s^2) = \frac{1}{H(s)\; H(-s)} = \frac{D(s)\; D(-s)}{N(s)\; N(-s)}$$

NOTA

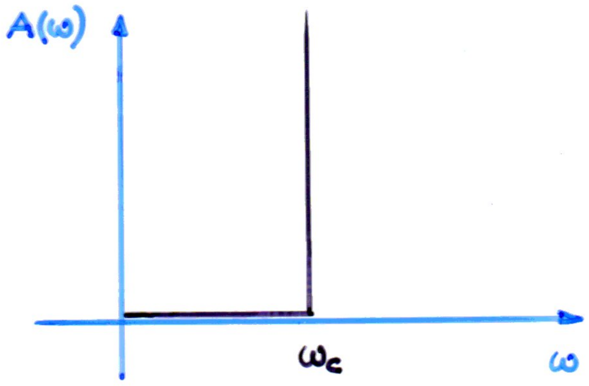
- Gli zeri di $L(-s^2)$ sono i poli (+ gli opposti) di $H(s)$
- I poli di $L(-s^2)$ sono gli zeri (+ gli opposti) di $H(s)$

RITARDO DI GRUPPO

$$\tau = - \frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \quad \text{con} \quad \theta(\omega) = \arg H(j\omega)$$

2) FILTRO PASSABASSO

– Ideale



$[0, \omega_c]$ banda passante, $A(\omega) = 0$ $(H(j\omega) = 1)$

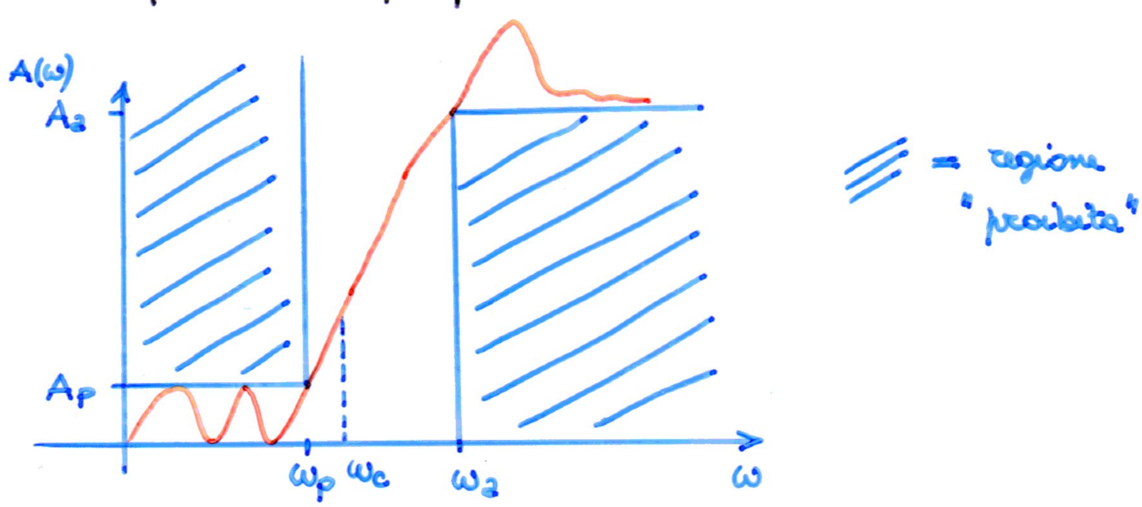
$[\omega_c, \infty)$ banda oscura, $A(\omega) \to \infty$ $(H(j\omega) \to 0)$

ω_c = pulsazione di taglio

– Reale

- La perdita in banda passante NON è $= 0$
- La perdita in banda oscura NON è $\to \infty$
- La transizione b.p. → b.o. è GRADUALE

La caratteristica del filtro è specificata mediante una MASCHERA



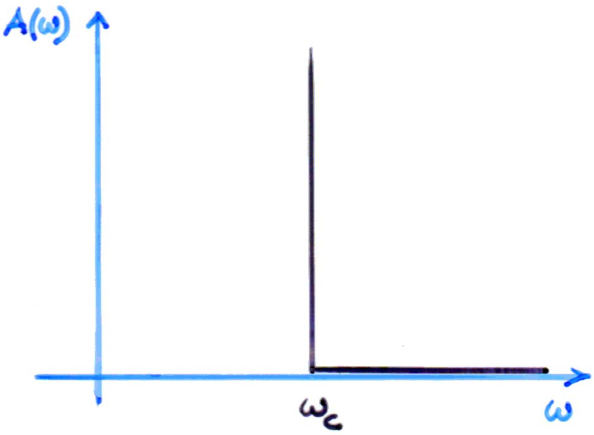
Quindi la perdita del filtro deve essere t.c.

- $A(\omega) \leq A_p \qquad \omega \in [0, \omega_p]$
- $A(\omega) \geq A_s \qquad \omega \in [\omega_s, \infty)$

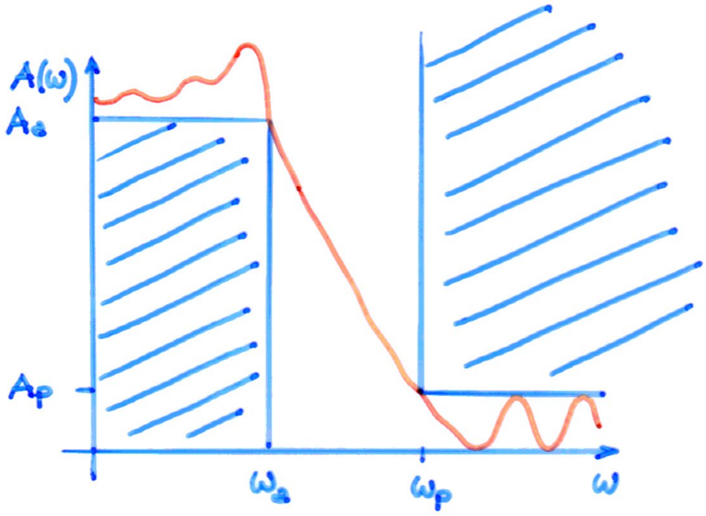
con $\omega_s > \omega_p$

ω_c (per es.) = pulsazione "a 3dB"

b) FILTRO PASSA ALTO

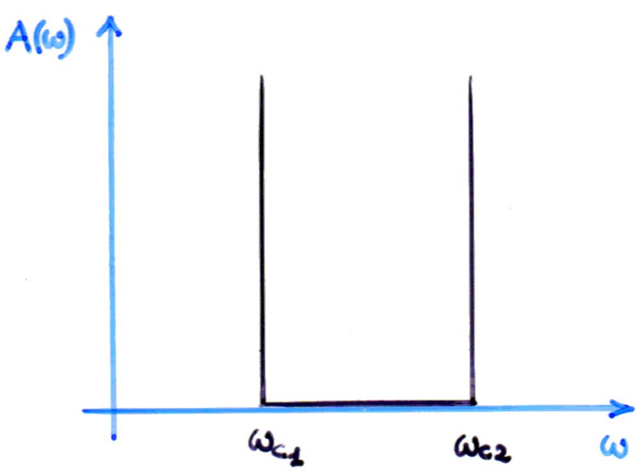


Ideale

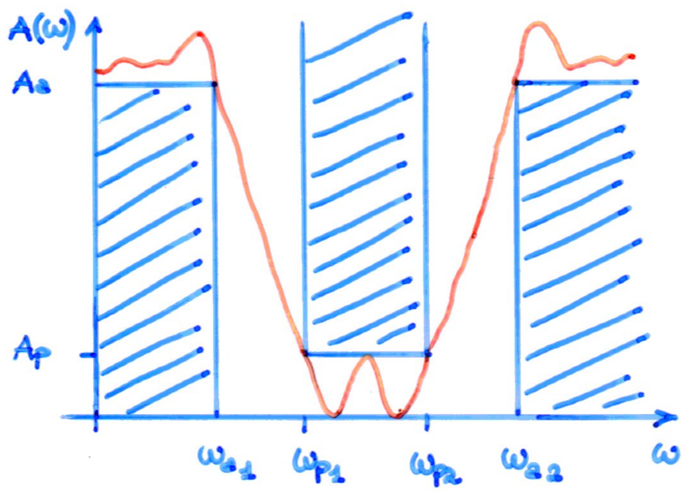


Reale

c) FILTRO PASSA BANDA

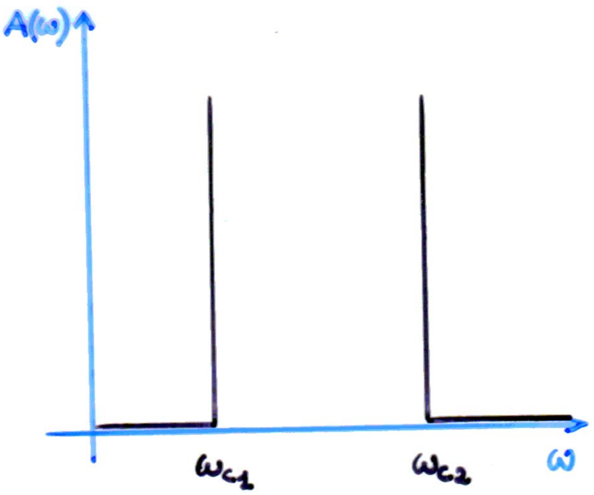


Ideale

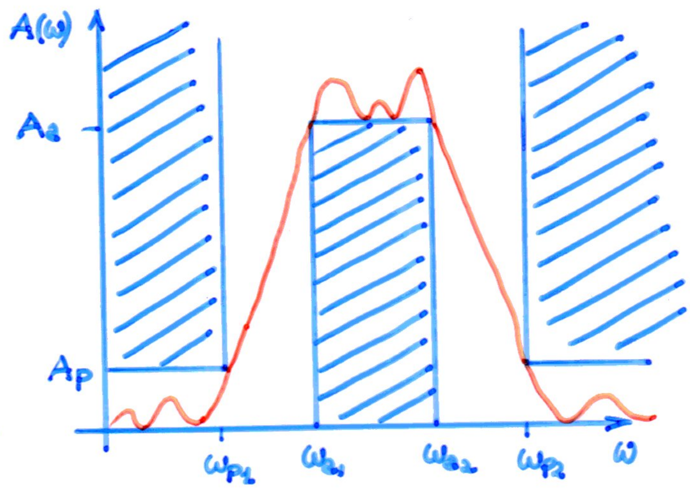


Reale

d) FILTRO ELIMINA BANDA



Ideale



Reale

OSS.

1) $H(s)$ corrisponde ad un filtro REALIZZABILE sse caratterizza una rete el. CAUSALE e STABILE $\Rightarrow$

- funzione RAZIONALE in s
- Grad $(N(s)) \leq$ Grad $(D(s))$
- poli nel semipiano SINISTRO (attenuazione in $L(-s^2)$)

2) Sintesi di filtri PASSA BASSO NORMALIZZATI

- Butterworth : ω_c (3dB) $= 1$ rad/sec
- Tschebyscheff : $\omega_p = 1$ rad/sec
- Bessel : $\tau \to 1$ sec per $\omega \to 0$

• Per ottenere il filtro di interesse si usano TRASFORMAZIONI IN FREQUENZA

APPROSSIMAZIONE ALLA BUTTERWORTH

Si assume

$$L(\omega^2) = B_0 + B_1\omega^2 + \dots + B_n\,\omega^{2n}$$

ove B_i vanno determinati affinché

$$\lim_{\omega \to 0} L(\omega^2) = 1$$ in modo "massimamente piatto"

$$L(x+h) \simeq L(x) + h\,\frac{dL}{dx} + \dots + \frac{h^k}{k!}\,\frac{d^kL}{dx^k}$$

"massimamente piatto" $\Longleftrightarrow$ imponiamo che

- $L(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad B_0 = 1$
- $\left.\dfrac{d^kL}{dx^k}\right|_{x=0} = 0 \quad , \quad k \leq n-1$

$k=1 \qquad \left.\dfrac{dL}{d(\omega^2)}\right|_{\omega=0} = B_1 + 2B_2\,\omega^2 + \dots + n\,B_n\,(\omega^2)^{n-1}\Big|_{\omega=0} = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad B_1 = 0$$

analogamente $\quad B_i = 0 \qquad 2 \leq i \leq n-1$

$$\Rightarrow \quad L(\omega^2) = 1 + B_n\,\omega^{2n}$$

$B_n = ?$

si impone la "condizione" di normalizzazione

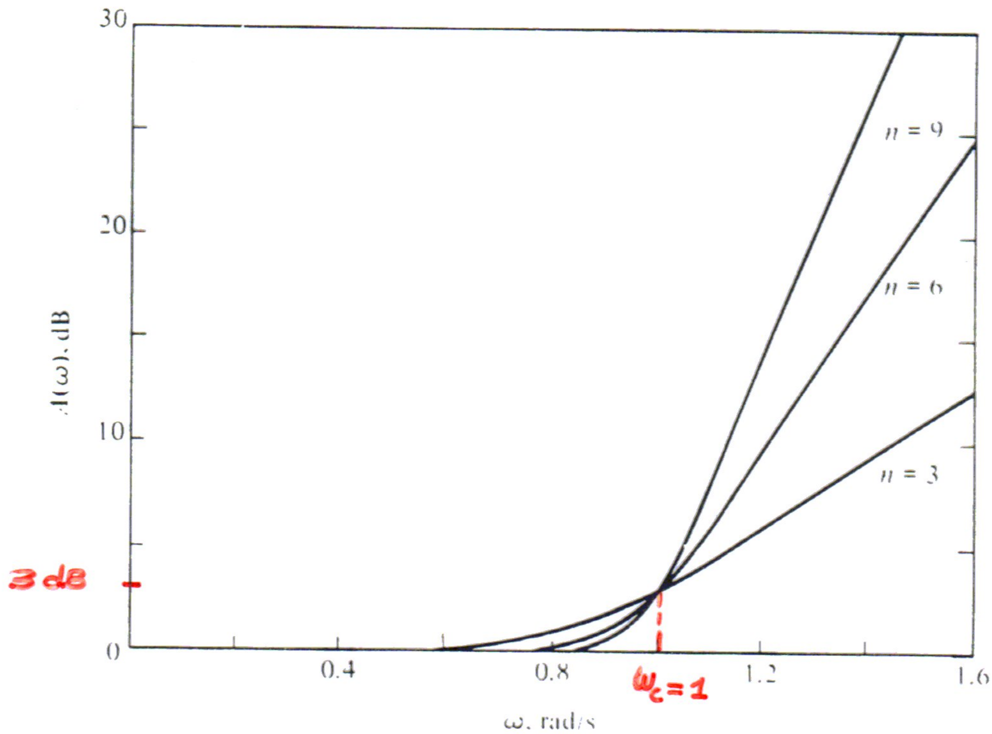
$$\omega_c(3dB) = 1 \text{ rad/sec} \Rightarrow A(1) = 3dB = 10 \log 2$$

$$\Rightarrow \quad L(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad B_n = 1$$

perciò

$$L(\omega^2) = 1 + \omega^{2n}$$

$$A(\omega) = 10 \log \left(1 + \omega^{2n}\right)$$



Funzione di Trasferimento (normalizzata)

$s \leftrightarrow j\omega$, $s^2 \leftrightarrow -\omega^2$

$$L(-s^2) = 1 + (-1)^n s^{2n} = \prod_{k=1}^{2n} (s - s_k)$$

- n pari $\quad 1 + s^{2n} = 0 \Rightarrow s_k = \sqrt[2n]{-1} \Rightarrow$

$$s_k = e^{j\frac{(2k-1)\pi}{2n}} \qquad k = 1, 2, \dots, 2n$$

- n dispari $\quad 1 - s^{2n} = 0 \Rightarrow s_k = \sqrt[2n]{1}$

$$s_k = e^{j\frac{\cancel{2}(k-1)\pi}{\cancel{2}n}} \qquad k = 1, 2, \dots, 2n$$

$|s_k| = 1 \ \forall k \Rightarrow$ i poli di $L(-s^2)$ sono su $|s| = 1$, ma per $H_N(s)$ OCCORRE SCEGLIERE i POLI p_i POSTI NEL SEMIPIANO SINISTRO $(i = 1, \dots, n) \Rightarrow$

$$H_N(s) = \frac{1}{\prod_{1}^{n} i \ (s - p_i)}$$

OSS.

- perdita massimamente piatta, ma per avere
  - passaggio "rapido" b.p. $\rightarrow$ b.o. $(\omega_a \rightarrow \omega_c = 1)$
  - elevata attenuazione in b.o.

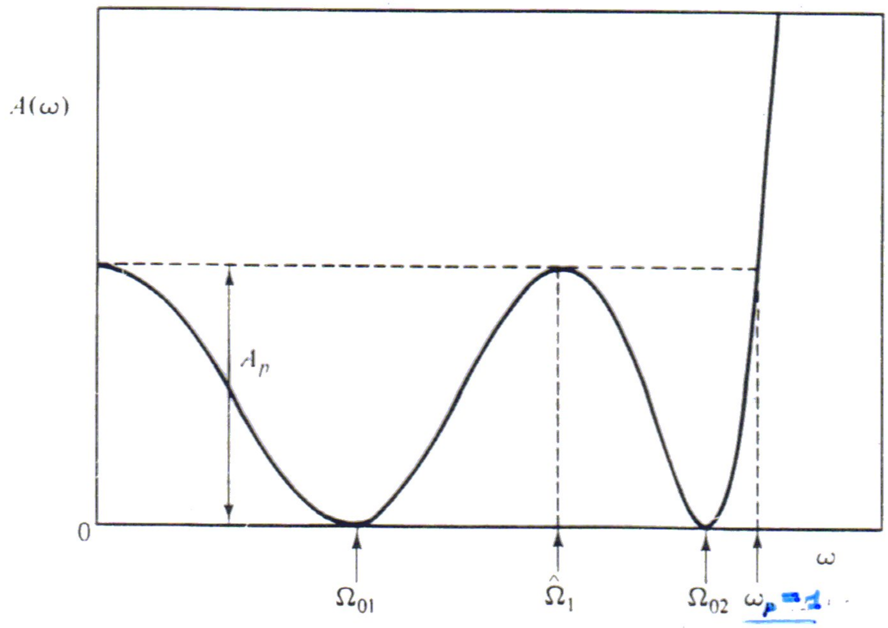
$\Rightarrow$ occorre avere n molto elevato: $n \underset{(\geq)}{=} \dfrac{\log\left(10^{A_a/10} - 1\right)}{2 \log \omega_a}$

APPROSSIMAZIONE ALLA TSCHEBYSCHEFF

- Caratteristica più "bilanciata": $A(\omega)$ in b. p. oscilla tra 0 e A_p, ma il passaggio b.p. → b.o. avviene nel modo "più rapido possibile" (a parità di ordine)

Imponiamo

$$A(\omega) = 10 \log L(\omega^2) = 10 \log \left(1 + \varepsilon^2 F^2(\omega)\right)$$



- $F(\omega)$ t. c. $F(\omega_p) = F(1) = 1$ (condizione di normalizzazione) (1)

ε = costante legata ad A_p (ripple)

$$(1) \Rightarrow \quad A_p = 10 \log (1 + \varepsilon^2) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^2 = \left(10^{A_p/10} - 1\right)$$

- $F(\omega)$ è UN POLINOMIO ⇒ anche $L(\omega^2)$ e $L(-s^2)$ sono POLINOMI (in ω^2 e s^2) ⇒ $H_N(s)$ avrà SOLO POLI (come nel caso Butterworth)

$$H_N(s) = \frac{H_0}{D(s)}$$

Per ottenere $H_M(s)$:

- Determinare $F(\omega)$
- Determinare $L(\omega^2) \rightarrow L(-s^2)$
- calcolare $H_M(s)$, scegliendo i poli nel semipiano SINISTRO di $L(-s^2)$

DETERMINAZIONE DI $F(\omega)$

- Consideriamo l'esempio precedente per poi generalizzarlo

1) $A(\omega) = 0 \Rightarrow F(\omega) = 0$ per $\omega = \pm \Omega_{01}, \pm \Omega_{02}$

2) $A(\omega) = A_p \Rightarrow F^2(\omega) = 1$ per $\omega = 0, \pm \hat{\Omega}_1, \pm 1 \; (\omega_p)$

3) $A(\omega)$ è max(min) $\Rightarrow \frac{dL(\omega^2)}{d\omega} = 0$ per $\omega = 0, \pm \Omega_{01}, \pm \hat{\Omega}_1, \pm \Omega_{02}$

- da 1) $\Rightarrow$ ($F(\omega)$ è un polinomio)

$$F(\omega) = K_1 \left(\omega^2 - \Omega_{01}^2\right)\left(\omega^2 - \Omega_{02}^2\right) \qquad (0)$$

- da 2) $\Rightarrow$ $1 - F^2(\omega)$ ha zeri in $\omega = 0, \pm \hat{\Omega}_1, \pm 1$, ma

$$\frac{d}{d\omega}\left[1 - F^2(\omega)\right] = -2\,F(\omega)\,\frac{dF(\omega)}{d\omega} = -\frac{1}{\varepsilon^2}\,\frac{dL(\omega^2)}{d\omega} \qquad (*)$$

dato che

$$\underset{\displaystyle \frac{d}{d\omega}\left[1 + \varepsilon^2 F^2(\omega)\right]}{\underset{\downarrow}{\frac{dL(\omega^2)}{d\omega}}} = \varepsilon^2\, 2F(\omega)\,\frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

- da (*) e 3) $\Rightarrow$ in $\omega = 0, \pm \hat{\Omega}_1$ gli zeri sono (almeno) doppi

$$1 - F^2(\omega) = K_2\, \omega^2 \left(\omega^2 - \hat{\Omega}_1^2\right)^2 (\omega^2 - 1) \qquad (**)$$

- da (*)

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2F(\omega)\,\varepsilon^2} \; \frac{dL(\omega^2)}{d\omega}$$

usando 3) e (0) (il rapporto $\frac{dL}{d\omega}(\omega^2)/F(\omega)$ ha zeri in $\omega = 0$ e $\pm\hat{\Omega}_1$)

$$= K_3\, \omega \left(\omega^2 - \hat{\Omega}_1^2\right)$$

quindi

$$\left[\frac{dF(\omega)}{d\omega}\right]^2 = K_3^2\, \omega^2 \left(\omega^2 - \hat{\Omega}_1^2\right)^2 \overset{(**)}{=} \underbrace{\left(-\frac{K_3^2}{K_2}\right)}_{K_4 \,\triangleq} \frac{1 - F^2(\omega)}{1 - \omega^2}$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{K_4}\right)}_{K_5 \,=} \int \frac{dF}{\sqrt{1 - F^2}} = \int \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \omega^2}}$$

la cui soluzione è (per Hp $|\omega| \le 1$ quindi $\arccos\omega$ è definita; idem per F, $F_{max} = 1$!)

$$\underline{K_5 \arccos F + K_6 = \arccos\omega} \triangleq \theta$$

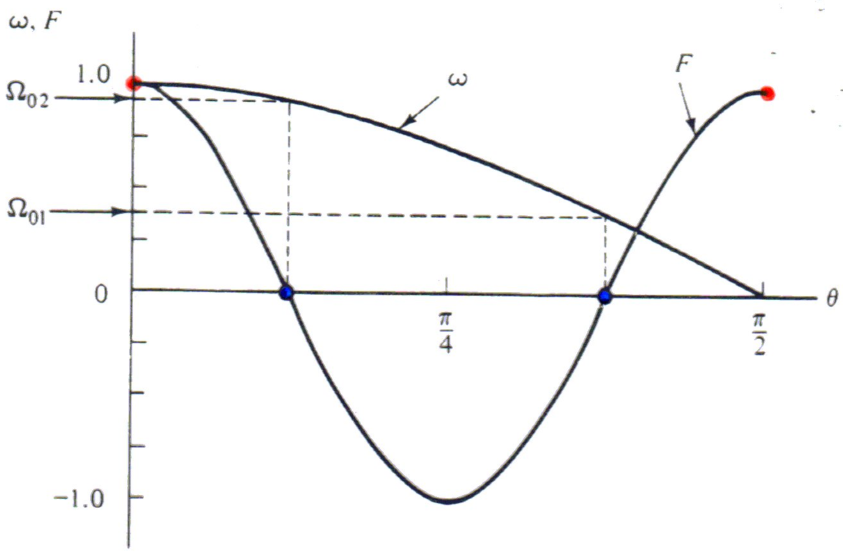
Quindi dato θ si ha
$$\begin{cases} \omega = \cos\theta \\ F = \cos\left(\dfrac{\theta}{K_5} - \dfrac{K_6}{K_5}\right) \end{cases}$$

$K_5, K_6 = ?$

Propr. 1) $\Rightarrow$ essendo $\Omega_{01}, \Omega_{02} < \omega_p = 1$ $\Rightarrow$ gli zeri di $F[\omega(\theta)]$ devono essere in $[0, \pi/2]$ (rispetto a θ) (punti $\bullet$)

Propr. 2) $\Rightarrow$ in particolare $F(\omega) = 1$ per $\omega = 0, 1$ $\Rightarrow$ $\theta = 0, \pi/2$ (punti $\bullet$)

quindi l'andamento di $F(\theta)$ è quello riportato



- $F(0) = \cos\left(-\frac{K_6}{K_5}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad K_6 = 0$

- Il periodo di $F(\theta)$ è $1/4$ di quello di $\omega(\theta)$ cioè $\pi/2$ $\Rightarrow$ ($\cos\theta$ ha periodo 2π $\Rightarrow$ $2\pi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{K_5}$)

$$2\pi K_5 = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad K_5 = 1/4$$

$$\Rightarrow \quad F(\omega) = \cos(4 \arccos \omega) \qquad |\omega| \leq 1$$

Dato che $\quad \cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 \quad$ è

$$\underline{\underline{F(\omega) = 1 - 8\omega^2 + 8\omega^4 = T_4(\omega)}}$$

$T_4(\omega)$ = POLINOMIO DI TSCHEBYSCHEFF DI 1° SPECIE e 4° ORDINE

E per $|\omega| > 1$?

Def (generale) POLINOMIO DI TSCHEBYSCHEFF

$$\cos[(n+1)\theta] + \cos[(n-1)\theta] = 2\cos\theta\cos n\theta$$

$n=0 \qquad \cancel{2}\cos\theta = \cancel{2}\cos\theta$

$n=1 \qquad \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\vdots$

$n=m \qquad \cos[(m+1)\theta] = 2\cos\theta\cos m\theta - \cos[(m-1)\theta]$

$\vdots$

Mediante questa formula ricorsiva si può esprimere $\cos n\theta$ come polinomio in $\cos\theta$, cioè

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta) \qquad (*)$$

$T_n(\omega)$ polinomio di Tschebyscheff di 1° specie e ordine n

È soluzione della equazione RICORSIVA

$$T_1(\omega) = \omega$$

$$T_2(\omega) = 2\omega^2 - 1$$

$$\vdots$$

$$T_{m+1}(\omega) = 2\omega T_m(\omega) - T_{m-1}(\omega)$$

$$\vdots$$

- Se $|\omega| \leq 1$ si ha $\theta = \arccos\omega$ (θ reale) e (da $(*)$)

$$\underline{T_n(\omega) = \cos(n \arccos\omega)}$$

cioè la generalizzazione della formula precedente

(N.B. $|\omega| \leq 1 \Rightarrow |T_n(\omega)| \leq 1$ e $A(\omega) \leq A_p$ per $\omega < \underset{1}{\overset{\shortparallel}{\omega_p}}$!)

- Se $|\omega|>1$ conviene porre $\theta = j\alpha$ quindi

$$\omega = \cos\theta = \cos j\alpha = \frac{e^{j(j\alpha)} + e^{-j(j\alpha)}}{2} = \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2} =$$

$$= \cosh\alpha$$

da cui $\alpha = \operatorname{arccosh}\omega$

$$\Rightarrow \quad T_n(\omega) = \cos(n\theta) = \cos(jn\alpha) = \cosh(n\alpha)$$

$$\underline{= \cosh(n \operatorname{arccosh}\omega)}$$

Globalmente

$$L(\omega^2) = \begin{cases} 1+\varepsilon^2\cos^2(n\arccos\omega) & |\omega|\leq 1 \\ 1+\varepsilon^2\cosh^2(n\operatorname{arccosh}\omega) & |\omega|>1 \end{cases}$$

OSS.

1) $$A(0) = \begin{cases} 10\log_{10}(1+\varepsilon^2) = A_p & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

dato che $$T_n(0) = \cos\left[n\left(\pi/2 + k\pi\right)\right] = \begin{cases} \pm 1 & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

2) - $|\omega| \leq 1$ è $|T_n(\omega)| \leq 1$ $\Rightarrow$

in banda passante $A(\omega) \leq A_p$

- $|\omega| > 1$ $T_n(\omega)$ è una FUNZIONE CRESCENTE

$\Rightarrow$ per soddisfare le specifiche del filtro in banda oscura

occorre che $A(\omega_s) = A_s$ (come nel caso di approssimazione alla Butterworth)

e questo DETERMINA L'ORDINE DEL FILTRO; infatti:

$$10 \log_{10} \left(1 + \varepsilon^2 \cosh^2 (n \operatorname{arccosh} \omega_s)\right) = A_s$$

$$\cosh^2 (n \operatorname{arccosh} \omega_s) = \frac{10^{A_s/10} - 1}{\varepsilon^2}$$

$$n \underset{(7)}{=} \frac{\operatorname{arccosh}\left(\sqrt{\dfrac{10^{A_s/10} - 1}{10^{A_p/10} - 1}}\right)}{\operatorname{arccosh} \omega_s}$$

3) $T_n(\omega)$ è il polinomio che, se reso MONICO, è quello che ha MASSIMA PENDENZA per $|\omega| = 1$, rispetto a tutti i polinomi di ugual grado $\Rightarrow$

a parità di ORDINE DEL FILTRO la transizione b.p. $\rightarrow$ b.o. avviene "più rapidamente" rispetto ad un filtro di Butterworth

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO NORMALIZZATA

$L(\omega^2) \rightarrow L(-s^2)$

prolungamento analitico di $L(\omega^2)$ $\quad (s \leftrightarrow j\omega, \ \omega^2 \leftrightarrow -s^2)$

$$L(-s^2) = 1 + \varepsilon^2 \cosh^2\left[n \operatorname{arccosh}\left(\frac{s}{j}\right)\right]$$

Per avere i poli di $H_N(s)$ occorre determinare gli zeri di $L(-s^2)$

Sia $s = \sigma + j\omega$ uno zero di $L(-s^2)$ $\Rightarrow$

posto $\quad \operatorname{arccosh}(\overset{s/j}{\overbrace{-j\sigma+\omega}}) = u + jv \qquad (A)$

$L(-s^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cosh^2\left[n(u+jv)\right] = -\dfrac{1}{\varepsilon^2} \quad \Rightarrow$

$$\cosh\left[n(u+jv)\right] = \pm \frac{j}{\varepsilon} \qquad (B)$$

$(A) \Rightarrow \quad -j\sigma + \omega = \cosh u \cos v + j \sinh u \sin v \quad \Rightarrow$

$$\omega = \cosh u \cos v \qquad \sigma = -\sinh u \sin v$$

$(B) \Rightarrow \quad \cosh nu \cos nv + j \sinh nu \sin nv = \pm j/\varepsilon \quad \Rightarrow$

$$\begin{cases} \cosh nu \cos nv = 0 & (1) \\ \sinh nu \sin nv = \pm \dfrac{1}{\varepsilon} & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \quad (\cosh x \neq 0 \ \forall x) \qquad \cos n\vartheta = 0$

$$\vartheta = (2k-1)\frac{\pi}{2n} \qquad k = 1, 2, \dots, 2n$$

e per questi valori $\sin n\vartheta = \pm 1$

$(2) \Rightarrow \quad \sinh nu = \pm \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad (\sinh x$ è dispari$)$

$$u = \pm \frac{1}{n} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

quindi sostituendo nelle espressioni di ω e σ $\Rightarrow$ ($\cosh x$ è pari)

$$\begin{cases} \sigma_k = \pm \sinh\left(\frac{1}{n} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \sin (2k-1)\frac{\pi}{2n} \\ \omega_k = \cosh\left(\frac{1}{n} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \cos (2k-1)\frac{\pi}{2n} \end{cases}$$

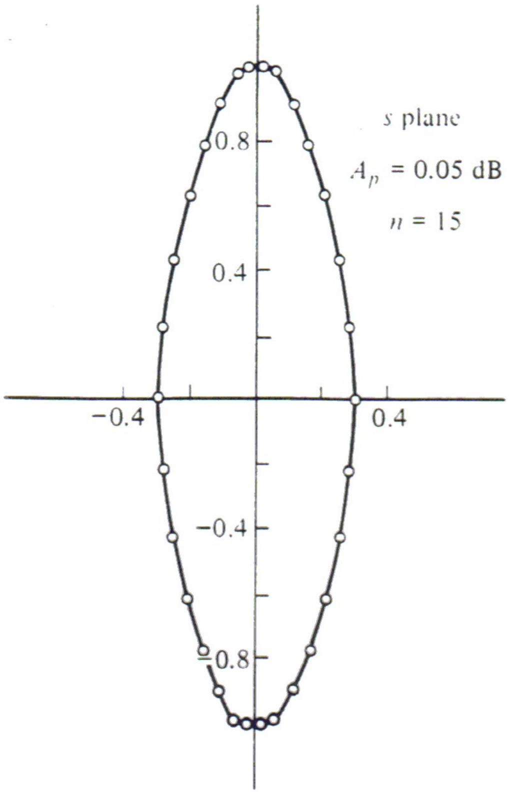
Dove sono situati questi zeri nel piano s ?

$$\frac{\sigma_k}{\sinh u} = \pm \sin (2k-1)\frac{\pi}{2n}$$

$$\frac{\omega_k}{\cosh u} = \cos (2k-1)\frac{\pi}{2n}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\sigma_k^2}{\sinh^2 u} + \frac{\omega_k^2}{\cosh^2 u} = 1$$

Eq di un ellisse di semiassi $\cosh u > \sinh u$



$p_i \quad i = 1, \dots, n$ zeri di $L(-s^2)$ nel semipiano SINISTRO

$\Longrightarrow$

$$H_N(s) = \frac{H_0}{\prod_1^n i\,(s - p_i)}$$

dove H_0 dipende dal fatto che n sia pari o dispari; infatti:

$$A(0) = \begin{cases} A_p & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$\Downarrow \quad A(0) = 10 \log L(0) = 10 \log \left(1 + \varepsilon^2 T_n(0)\right)$

$$L(0) = \begin{cases} 1 + \varepsilon^2 & n \text{ pari} \\ 1 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

quindi

$$|H_N(0)| = \frac{1}{\sqrt{L(0)}} = \begin{cases} 10^{-A_p/20} & n \text{ pari} \\ 1 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad H_0 = \begin{cases} \prod_1^n i\,(-p_i) & n \text{ dispari} \\ 10^{-A_p/20} \prod_1^n i\,(-p_i) & n \text{ pari} \end{cases}$$

OSS.

Fissato l'ordine del filtro n, POSSIAMO SCEGLIERE A_p (ε) PICCOLI QUANTO VOGLIAMO:

non si hanno limitazioni a priori (come nel filtro alla Butterworth), ma il prezzo è una MINORE attenuazione in banda passante o una MINORE PENDENZA di $A(\omega)$ nel passaggio b. p. → b. a

$$n = \frac{\operatorname{arccosh}\left(\dfrac{\sqrt{10^{A_a/10} - 1}}{\sqrt{10^{A_p/10} - 1}}\right)}{\operatorname{arccosh} \omega_a}$$

fissato n se $A_p \downarrow \Rightarrow$ o $A_a \downarrow$ o $\omega_a \uparrow$

APPROSSIMAZIONE ALLA BESSEL (cenni)

Consideriamo il filtro con funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{B_0}{\sum_{i=0}^{n} B_i s^i} \qquad \text{con} \qquad B_i = \frac{(2n-i)!}{2^{n-i}\, i!\,(n-i)!}$$

cioè

$$H(s) = \frac{B_0}{s^n B(1/s)} \qquad (o)$$

dove $B(s)$ = polinomio di Bessel e

$s^n B(1/s)$ ha zeri nel solo SEMIPIANO SINISTRO

(stabilità garantita!)

$B\left(\frac{1}{j\omega}\right)$ può essere espresso in termini di funzioni di Bessel

$$B\left(\frac{1}{j\omega}\right) = \frac{1}{j^n}\sqrt{\frac{\pi\omega}{2}}\left[(-1)^n J_{-\nu}(\omega) - j\, J_{\nu}(\omega)\right] e^{j\omega} \qquad (oo)$$

con $\nu = n + 1/2$

dove $J_\nu(\omega)$ = funzione di Bessel di ordine ν

$$= \omega^\nu \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i\, \omega^{2i}}{2^{2i+\nu}\, i!\, \Gamma(\nu+i+1)}$$

Γ = funzione gamma di Eulero

da (o) e (oo) $\Rightarrow$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{2B_0^2}{\pi\,\omega^{2n+1}\left[J_{-\nu}^2(\omega) + J_\nu^2(\omega)\right]}$$

mentre

$$\theta(\omega) = \arg H(j\omega) = -\omega + \operatorname{tang}^{-1}\frac{(-1)^n J_\nu(\omega)}{J_{-\nu}(\omega)}$$

e il ritardo di gruppo è

$$\tau = -\frac{d\theta}{d\omega} = 1 - \frac{(-1)^n\left[J_{-\nu} J_\nu' - J_\nu J_{-\nu}'\right]}{J_{-\nu}^2(\omega) + J_\nu^2(\omega)}$$

Sfruttando le proprietà delle funzioni di Bessel si può provare che

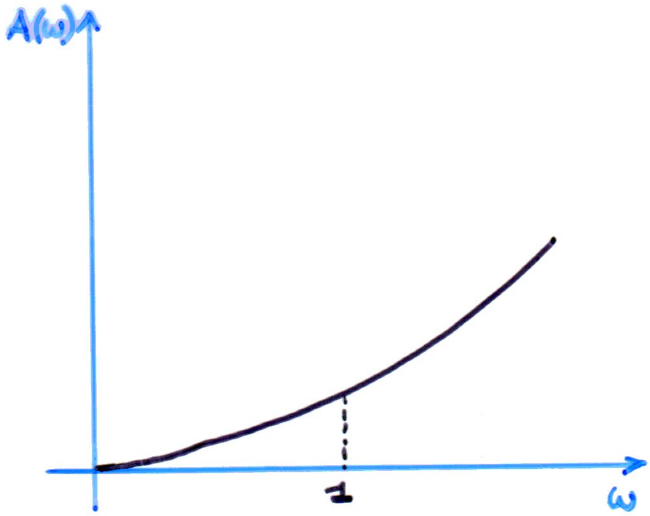
$$|H(j\omega)|^2 = 1 - \frac{\omega^2}{2n-1} + \frac{2(n-1)\,\omega^4}{(2n-1)^2(2n-3)} + \cdots$$

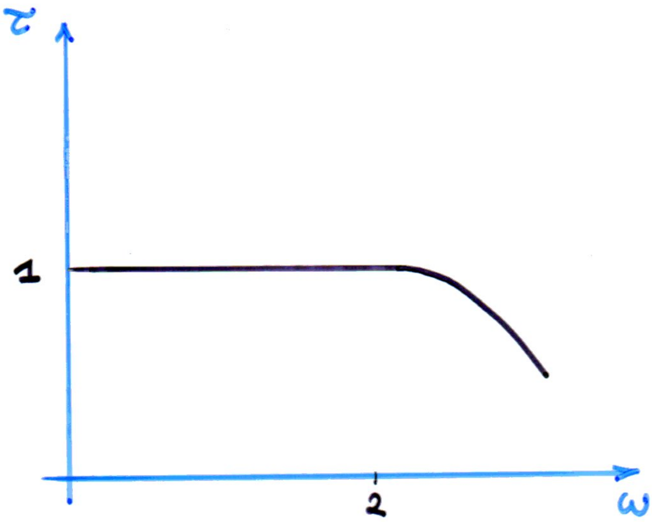
$$\tau = 1 - \frac{\omega^{2n}}{B_0^2}\,|H(j\omega)|^2$$

PERCIÒ

- $\omega \to 0$ è $|H(j\omega)| \to 1$ e $\tau \to 1$
- $\left.\dfrac{d^k\tau}{d(\omega^2)^k}\right|_{\omega=0} = 0 \qquad 1 \leq k \leq n-1 \Rightarrow$ esiste un range $0 \leq \omega \leq \omega_p$ con $\tau \simeq 1$ costante

• $\omega \to \infty \quad |H(j\omega)| \to 0 \Rightarrow$ comportamento p. basso





Il filtro presenta

- RITARDO DI GRUPPO approx. costante in un certo range di freq.
- RISPOSTA IN AMPIEZZA di tipo p. basso POCO SELETTIVA

$\Rightarrow$ si utilizza quando è importante AVERE ELEVATA LINEARITÀ DELLA RISPOSTA DI FASE

TRASFORMAZIONI DI FREQUENZA

- Si vuole "denormalizzare" la caratteristica del filtro cioè passare dalla f. di trasferimento di un filtro p. basso con $\omega_c = 1$, a quella di un filtro
  - passa basso con $\omega_c \neq 1$
  - passa alto
  - passa - banda
  - elimina banda

per ottenere questo risultato si esegue una opportuna TRASFORMAZIONE DI VARIABILI

1) PASSA BASSO (NORM.) $\rightarrow$ PASSA BASSO (NON NORM.)

$H_N(s)$ noto

Consideriamo una trasformazione del piano s al piano $\bar{s}$

$$s = \lambda \bar{s} \qquad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Proprietà

- L'asse $\underline{Im \text{ di } s}$ è "mappato" nell'asse $\underline{Im \text{ di } \bar{s}}$

$$\begin{aligned} s &= j\omega \\ \bar{s} &= j\bar{\omega} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad j\omega = \lambda j\bar{\omega} \quad \Rightarrow \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{\lambda}$$

$\Rightarrow$ al variare di ω lungo l'asse Im del piano s, $\bar{\omega}$ descrive l'asse Im del piano $\bar{s}$

- L'origine in s si trasforma nell'origine di $\bar{s}$ (e così il punto all'∞)

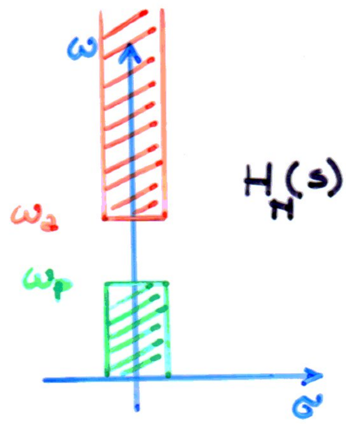
- $\omega = \omega_p \longrightarrow \bar{\omega} = \omega_p/\lambda$, $\omega = \omega_a \longrightarrow \bar{\omega} = \omega_a/\lambda$

  $\omega = \omega_c = 1 \longrightarrow \bar{\omega} = 1/\lambda$

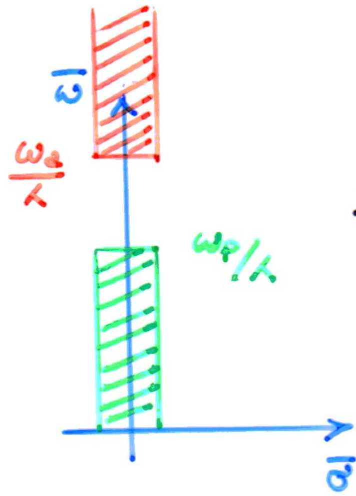
- $[0, \omega_p] \longrightarrow [0, \omega_p/\lambda]$

  $[\omega_a, \infty) \longrightarrow [\omega_a/\lambda ; \infty)$

(s)



$H_N(s)$



($\bar{s}$)

$H_{PB}(\bar{s}) = H_N(s)\Big|_{s=\lambda\bar{s}}$

2) PASSA BASSO $\longrightarrow$ PASSA ALTO

$s \to \bar{s}$ con $s = \dfrac{\lambda}{\bar{s}}$ $\lambda \in \mathbb{R}^+$

Proprietà:

- l'asse Im di s viene trasformato nell'asse Im di $\bar{s}$

$s = j\omega$

$\bar{s} = j\bar{\omega}$ $\Rightarrow$ $j\omega = \dfrac{\lambda}{j\bar{\omega}}$ $\Rightarrow$ $\bar{\omega} = -\dfrac{\lambda}{\omega}$

quindi rispetto a prima l'origine è "mappata" nel punto all'∞ così

$\omega \to 0^{+(-)}$ $\bar{\omega} \to -(+)\infty$

- Limiti di banda (consideriamo anche il semiasse negativo)

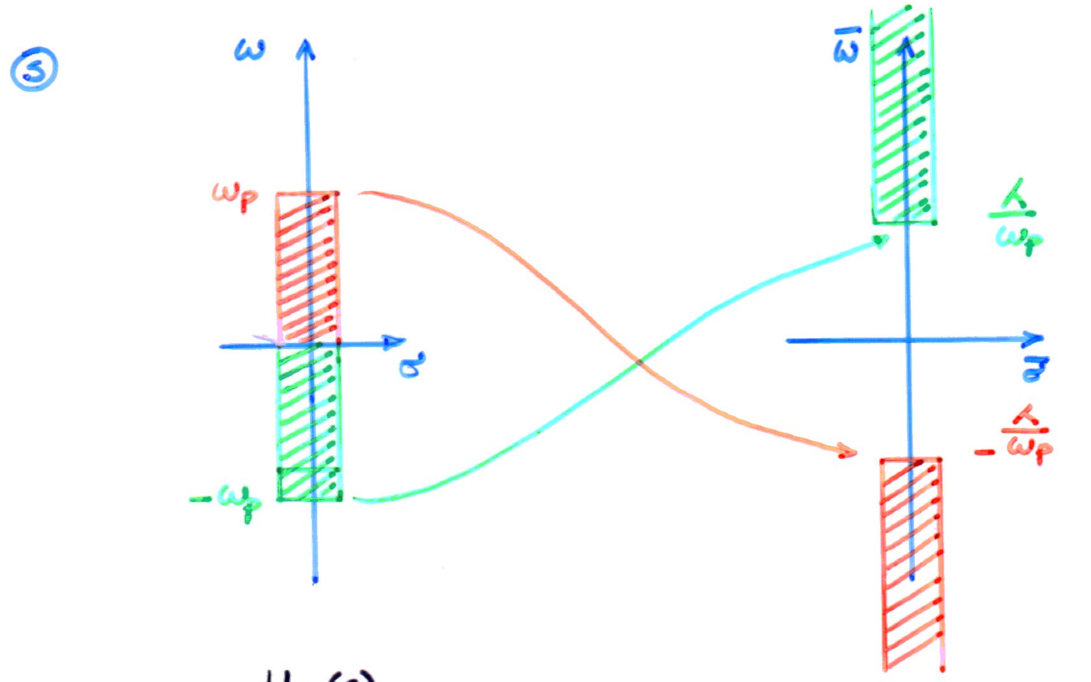
$[-\omega_p, \omega_p]$ banda passante

$\omega = \pm\omega_p \longrightarrow \bar{\omega} = \mp \frac{\lambda}{\omega_p}$

e $[0, \omega_p] \longrightarrow \left(-\infty, -\frac{\lambda}{\omega_p}\right]$

così

$[-\omega_p, 0] \longrightarrow \left[\frac{\lambda}{\omega_p}, +\infty\right)$



$$H_{PA}(\bar{s}) = H_N(s)\Big|_{s=\frac{\lambda}{\bar{s}}}$$

3) PASSA BASSO → PASSA BANDA

$s \to \bar{s}$ $\qquad s = \frac{1}{B}\left(\bar{s} + \frac{\omega_0^2}{\bar{s}}\right) \qquad \omega_0, B \in \mathbb{R}^+$

Proprietà

- L'asse Im del piano s si trasforma nell'asse Im del piano $\bar{s}$

$s = j\omega$

$\bar{s} = j\bar{\omega}$

$$\Rightarrow \quad j\omega = \frac{1}{B}\left(j\bar{\omega} + \frac{\omega_0^2}{j\bar{\omega}}\right) = \frac{j}{B}\left(\bar{\omega} - \frac{\omega_0^2}{\bar{\omega}}\right)$$

$$\omega = \frac{1}{B}\left(\bar{\omega} - \frac{\omega_0^2}{\bar{\omega}}\right) \qquad (+)$$

- origine del piano $s \longrightarrow$?

Invertiamo la (+)

$$B\omega = \bar{\omega} - \frac{\omega_0^2}{\bar{\omega}} \Rightarrow \bar{\omega}^2 - B\omega\bar{\omega} - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\bar{\omega} = \frac{B\omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2}$$

perciò

$$\omega = 0 \longrightarrow \bar{\omega} = \pm\,\omega_0$$

- Limiti di banda

$[-\omega_p, \omega_p]$: banda passante

$$\omega = \pm\,\omega_p \longrightarrow \bar{\omega}_p = \begin{cases} \dfrac{B\omega_p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{B\omega_p}{2}\right)^2 + \omega_0^2} & \omega = \omega_p \\ -\dfrac{B\omega_p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{B\omega_p}{2}\right)^2 + \omega_0^2} & \omega = -\omega_p \end{cases}$$

posto

$$\bar{\omega}_{p_1} = \frac{B\omega_p}{2} + \sqrt{\cdots} \qquad \bar{\omega}_{p_2} = -\frac{B\omega_p}{2} + \sqrt{\cdots}$$

$$\Rightarrow \bar{\omega}_{p_1} > \bar{\omega}_{p_2}$$

si ha

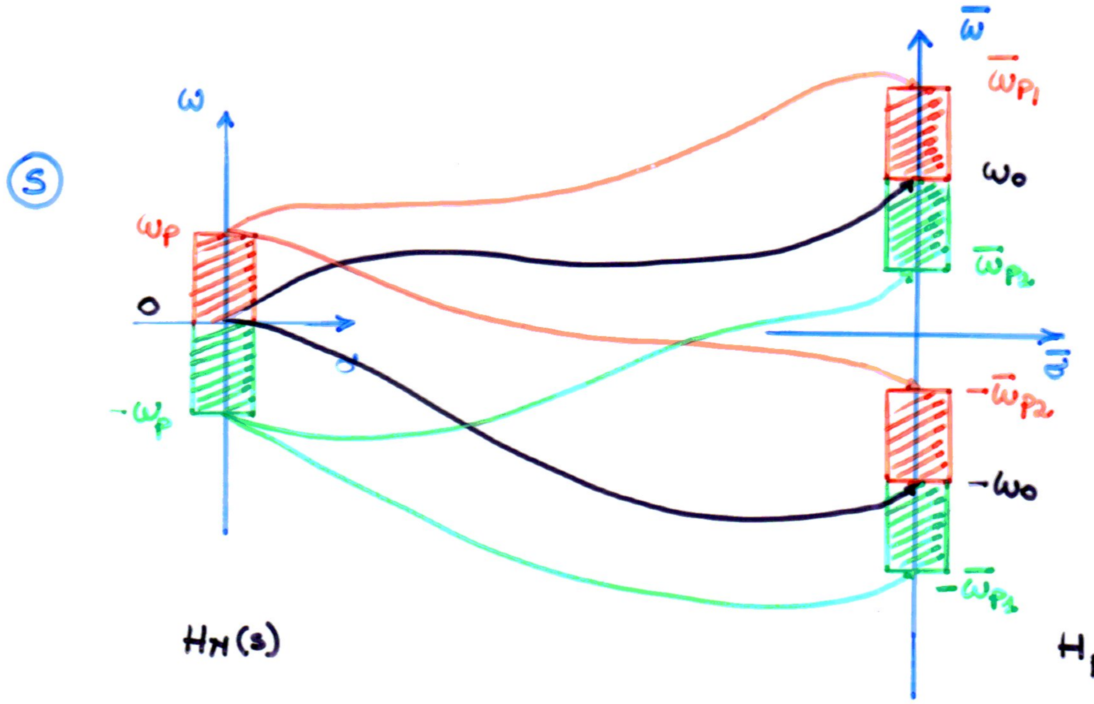
$$\omega = \omega_p \longrightarrow \bar{\omega} = \begin{cases} \bar{\omega}_{p_1} \\ -\bar{\omega}_{p_2} \end{cases}$$

$$\omega = -\omega_p \longrightarrow \bar{\omega} = \begin{cases} +\bar{\omega}_{p_2} \\ -\bar{\omega}_{p_1} \end{cases}$$

e sugli intervalli

$$[0, \omega_p] \longrightarrow \begin{matrix} [\omega_0, \bar{\omega}_{p_1}] \\ [-\omega_0, -\bar{\omega}_{p_2}] \end{matrix}$$

$$[-\omega_p, 0] \longrightarrow \begin{matrix} [\bar{\omega}_{p_2}, \omega_0] \\ [-\bar{\omega}_{p_1}, -\bar{\omega}_0] \end{matrix}$$



$$H_{PB_A}(\bar{s}) = H_N(s)\Big|_{s=\frac{1}{B}(\dots)}$$

4) PASSA BASSO $\rightarrow$ ELIMINA BANDA

$$s \rightarrow \bar{s} \qquad s = \frac{B\bar{s}}{\omega_0^2 + \bar{s}^2} \qquad \omega_0, B \in \mathbb{R}^+$$