

FILTRI INTEGRATI



- Filtro (elettrico): rete di componenti circuitali (R, L, C, OTA, OP-AMPS, transistori...) che elabora segnali elettrici (solitamente tensioni)
- $y(t)$ e $x(t)$ sono legati dalla legge di elaborazione del filtro; in base al tipo di legge si possono avere

1) Filtri NON LINEARI

$$y(t) = F(x(t), t)$$

Es: elaborazione di immagini mediante RN

2) Filtri LINEARI

$$Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$$

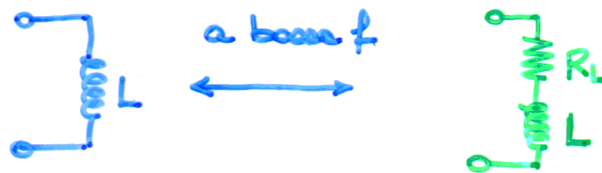
cosa più diffusa, di cui ci occuperemo

Filtro ATTIVO: se presenta componenti attivi nella sua implementazione (transistori, OP-AMP, OTA, ...)

FILTRI ATTIVI O FILTRI PASSIVI ?

- FILTRI PASSIVI per ottenere "buone" caratteristiche è NECESSARIA la presenza di INDUTTORI. ciò comporta alcuni SVANTAGGI :

1) PERDITE



fattore di merito $Q_L = \frac{\omega L}{R}$

ma • Q_L max in pratica ≈ 1000

• $Q_L \propto D^2$ $D =$ dimensione lineare dell'induttore.

\Rightarrow per avere Q_L ELEVATO sono necessarie **DIMENSIONI ELEVATE** (specialmente a basse frequenze ($f \leq 100\text{Hz}$))

2) IRRADIAIMENTO (a f elevate) \Rightarrow **PROBLEMI DI INTERFERENZE ELETTRROMAGNETICHE**

3) **COMPORTEMENTO NON LINEARE** : per avere L elevate è necessario utilizzare nuclei di materiale ferromagnetico \Rightarrow **PROBLEMI DI DISTORSIONE**

NOTA

Al contrario per un condensatore:



$$\text{fattore di merito } Q_c = \frac{\omega C}{G}$$

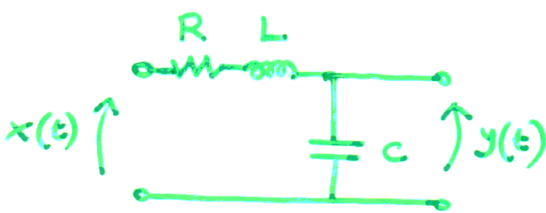
- indipendenti dalle dimensioni \Rightarrow si possono costruire condensatori:

PICCOLI ad elevato Q_c

- per condensatori di impiego pratico Q_c oscilla anche a 10000

4) A causa della presenza di induttori i filtri passivi **NON** possono essere realizzati mediante C.I.

Es.



$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$

$$\text{frequenza di risonanza } f_c = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \Rightarrow$$

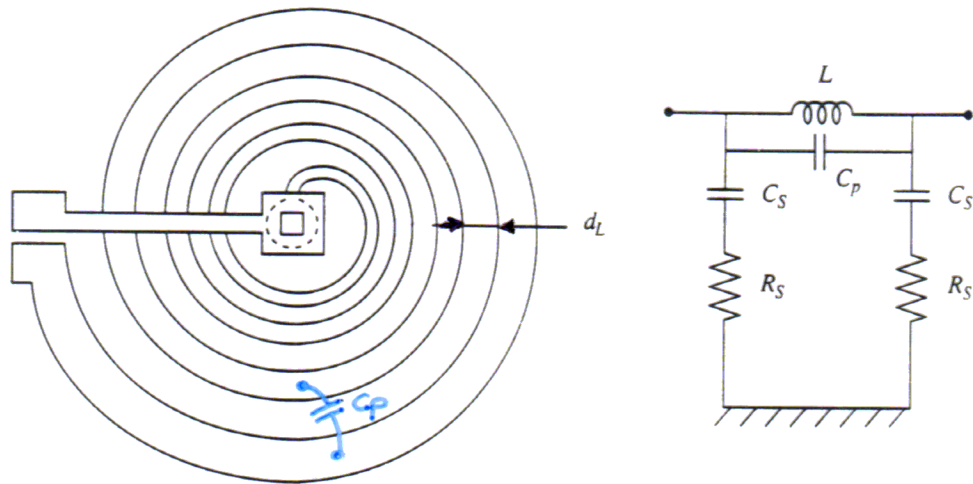
$$L = \frac{1}{(2\pi f_c)^2 C}$$

se $f_c = 1 \text{ MHz}$, $C = 100 \text{ pF}$ (già molto grande) $\Rightarrow L \approx \underline{250 \text{ nH}}$

Questo valore di induttanza non. BEN OLTRE la capacità di integrazione ($\sim nH$)

REALIZZAZIONE DI UN INDUTTORE INTEGRATO

Si utilizza una struttura a SPIRALE (quindi essenzialmente 3-D e NON planare) realizzato mediante la deposizione di un FILM METALLICO SPESSO



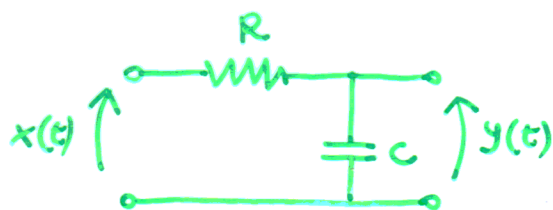
OSS.

- d_L deve essere ^{NON} ~~mantenuto~~ ^{tempo} piccolo per avere BASSA $C_p \Rightarrow Area \uparrow$
- si ottengono induttori con $L \leq 10 nH \Rightarrow$ possono essere impiegati per applicazioni a f elevate ($\geq 500 MHz$)
- C_s, R_s capacità e resistenze parassite verso il substrato \Rightarrow FORTE LIMITAZIONE di Q , $Q_{max} \sim 10$
- Uso di tecnologie particolari (induttori "sospesi")

FILTRI ATTIVI: si ottengono buone caratteristiche SENZA L , ma solo R e C .

NOTA

Una cella R-C è "C.I. - compatibile"



$$f_T = \frac{1}{2\pi RC}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC}$$

allora con $f_T = 1\text{MHz}$, $C = 1\text{pF} \Rightarrow R = \frac{1}{2\pi f_T C} \approx 150\text{k}\Omega$

(fino a $\sim 1\text{MHz}$)

FILTRI INTEGRATI (ANALOGICI)

TEMPO - CONTINUI ($t \in \mathbb{R}^+$)

- RC ATTIVI (OP-AMPS)
- OTA-C (OTA)

TEMPO - DISCRETI ($t_n \in \mathbb{N}$) (A VALORI CAMPIONATI)

- COND. COMMUTATI (SC)
- COMM. DI CORRENTE (SI)

- La scelta del tipo di filtro dipenderà dal tipo di applicazione. (freq. in gioco, presenza di altre parti tempo-discrete ...)

- Non è detto che non possano essere presenti nello stesso sistema di elaborazione. (Es. filtro anti-aliasing di tipo passivo RC in un sistema di tipo SC.)

CARATTERISTICHE

TC

TD (SC)

campo di
impiego

50 Hz \rightarrow 100 MHz

50 Hz \rightarrow 1 MHz

tecnologia

- CMOS
- BIPOL.
- BICMOS

- CMOS
 - BICMOS
- (no Bip: servono buoni
interuttori)

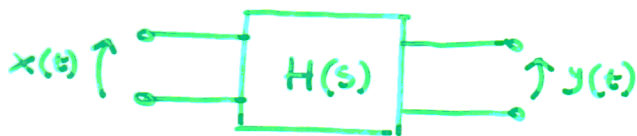
Vantaggi

- sono tempocontinui
(non ci sono pedali
costati dal CAMPIONAMENTO)
(Aliasing)
- si può operare a
 f PIÙ ELEVATE

- migliore PRECISIONE
- minore DERIVA delle
caratteristiche con T,
~~consistenza~~ ma invecchiamento...
- minore Pd

In entrambi i casi è possibile considerare implementazioni
che prevedono anche la presenza di LOGICA DIGITALE sullo
stesso chip (sistema MIXED A/D) (Es: sistema di acquisizione
ed elaborazione dei dati provenienti da un sensore a raggi X)
 \Rightarrow si fanno montaggi nell'utilizzo di OP-AMP CMOS!

FILTRI RC ATTIVI



Per un generico filtro tempocontinuo

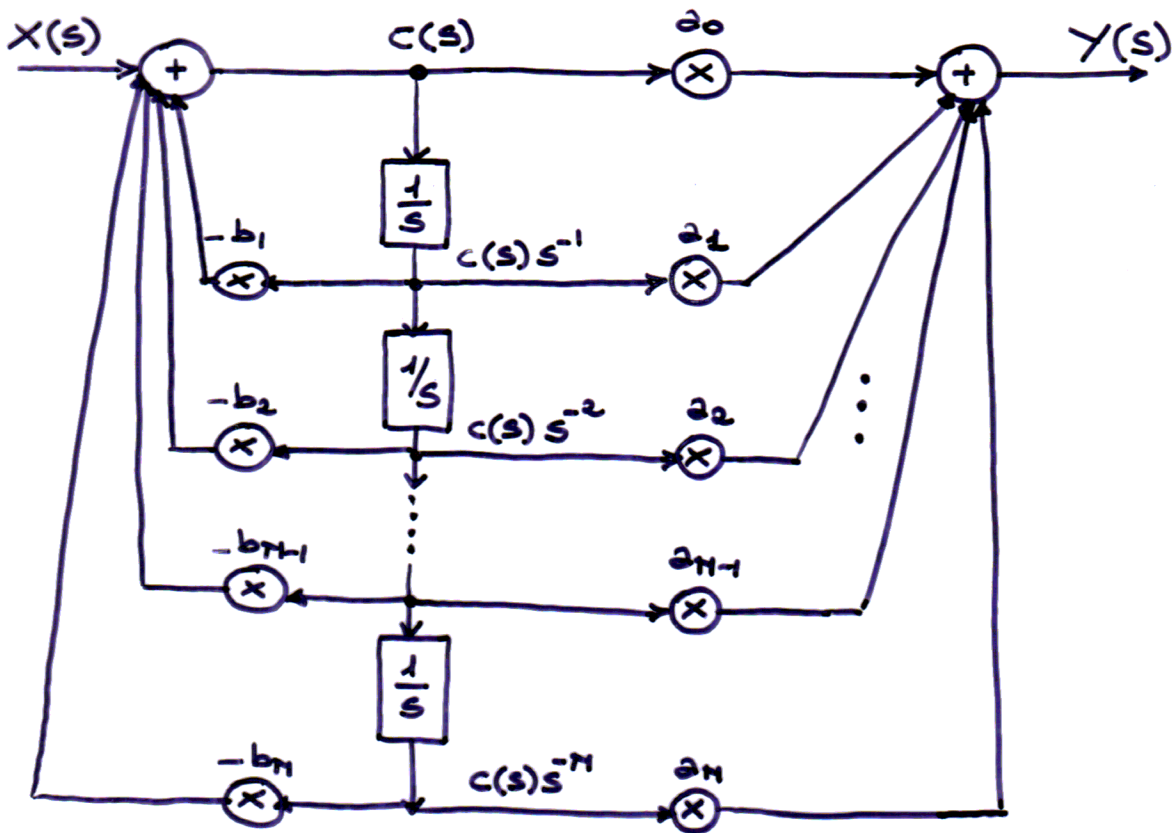
$$H(s) \triangleq \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{i=0}^N d_i s^{N-i}}{s^N + \sum_{i=1}^N b_i s^{N-i}} = \frac{\sum_{i=0}^N d_i s^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i s^{-i}}$$

OSS.

- In generale il grado del numeratore di $H(s)$ deve essere \leq a quello del denominatore per non avere un sistema ANTICIPATIVO (CONDIZIONE DI FISICA REALIZZABILITA')
- Un filtro (in gen. un sistema dinamico) che presenta una $H(s)$ di questo tipo può essere realizzato (dunque in LINEA DI PRINCIPIO) mediante la connessione opportuna di:
 - i) MULTIPLICATORI (per una costante, quindi, di fatto, AMPLIFICATORI)
 - ii) SOMMATORI
 - iii) INTEGRATORI

Realizzazione in FORMA CANONICA

- n° MINIMO di integratori:



$$c(s) = X(s) - c(s) [b_1 s^{-1} + b_2 s^{-2} + \dots + b_n s^{-n}] \Rightarrow$$

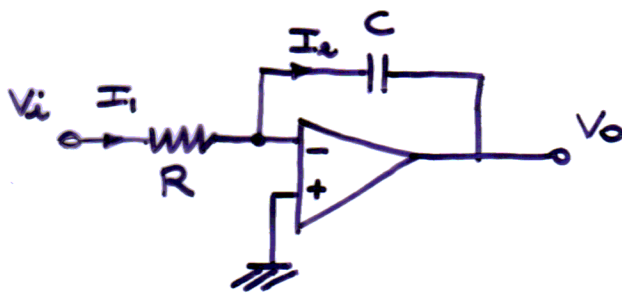
$$c(s) = \frac{X(s)}{1 + \sum_{i=1}^n b_i s^{-i}}$$

$$Y(s) = c(s) [a_0 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2} + \dots + a_n s^{-n}]$$

$$= X(s) \frac{\sum_{i=0}^n a_i s^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n b_i s^{-i}}$$

DIFFERENZA TRA RC e OTA-C: realizzazioni di questi:

"componenti" (integ., mult., sum)



$$\frac{V_i(s)}{R} = -\frac{V_o(s)}{1/sC}$$

- $Z_i = \infty$
- $A_v \rightarrow \infty$ (c.c. virtuale)

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{1}{s\tau}$$

$$\tau = RC$$

(OTA-C : ≠ realizzazione dell'integratore)

PROBLEMA

I coefficienti a_i, b_i in $H(s)$ DIPENDERANNO DAI $\tau_i = R_i C_i$
 \Rightarrow le posizioni di zeri e poli del filtro e quindi le
 sue PRESTAZIONI (ampiezza di banda, selettività ...)

PERCIÒ

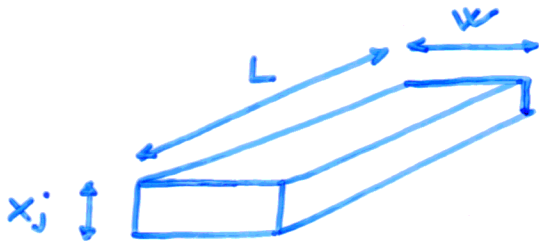
- 1) Per avere un buon controllo sulle prestazioni del filtro è necessario avere un BUON CONTROLLO su R e su C.
- 2) Se si desidera avere anche una BUONA STABILITÀ delle caratteristiche del filtro (con $T, \text{inaccidentalità}, \dots$) tale deve essere anche quello di R e C.

Ma questo è possibile in un C.I. ?

- sì per C
- no per R

REALIZZAZIONE DI R

• Idea base



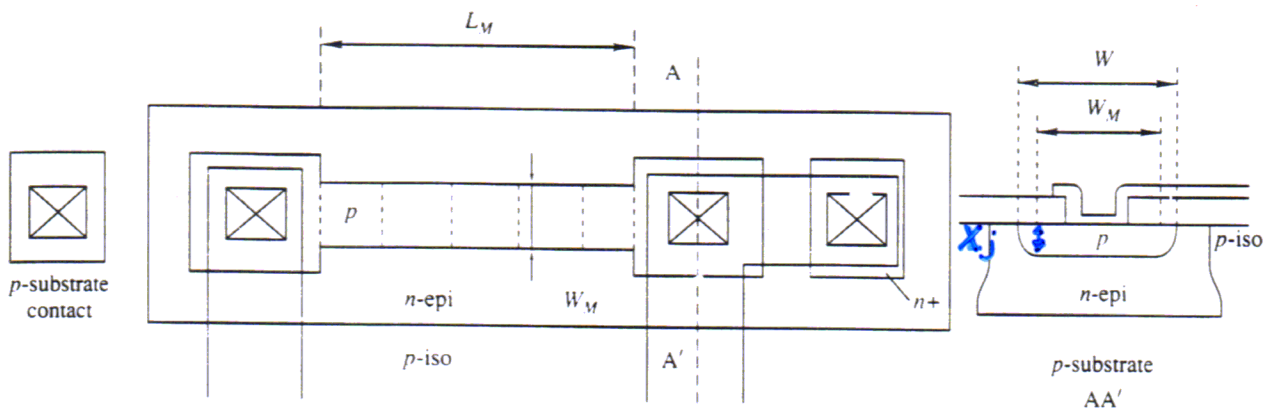
$$R = \rho \frac{L}{S} = \rho \frac{L}{W x_j} = \rho_{\square} \frac{L}{W}$$

ρ_{\square} = resistenza di strato (Ω/\square)
(sheet resistance)

- x_j è fissato dal modo con cui "realizziamo" il resistore.
- L, W sono i PARAMETRI DI PROGETTO.
- Possibilità: diffusioni, piste di Si-poly o di metal, well, ...

Es: tecnologia bydore

diffusione di base $\rho_{\square} = 150 \Omega/\square$



CAUSE DI IMPRECISIONE

1) la resistività della diffusione è nota con una PRECISIONE DEL 10% \Rightarrow un resistore ad elevata precisione è impossibile da realizzare

2) solo la DIMENSIONE DI MASCHERA (W_M) è nota. In realtà $W = W_M + 0.8 X_j$

X_j = profondità di giunzione

Se $W_M \gg X_j$ \Rightarrow $W \approx W_M$. Ma W_M "grande" implica

DIFFICOLTÀ nel realizzare R GRANDI ($R \propto 1/W$)

3) Anche L non è noto e causa della presenza dei CONTATTI.

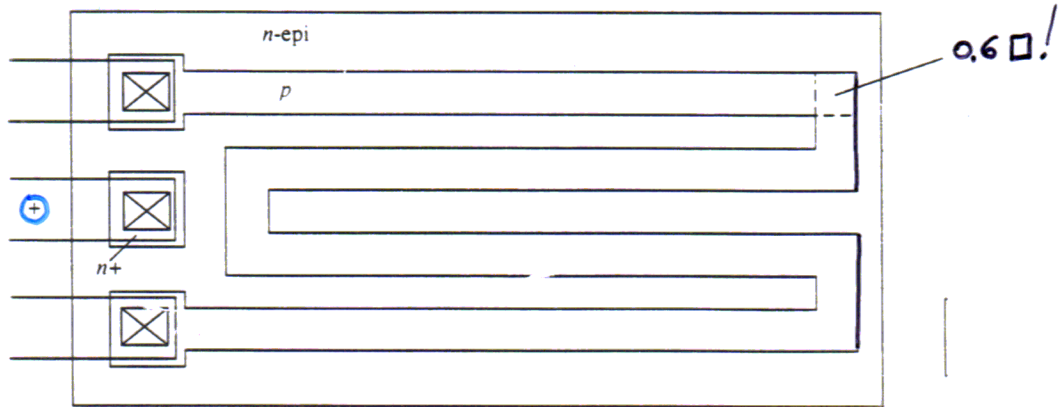
"Regole del pollice": $+ 1/2 \square$ per ciascun contatto

Come realizzare R elevate?

$$\rho_{\square} = 150 \Omega/\square \quad e \quad R = 9K\Omega \Rightarrow 60 \square$$

$$\text{se } W = W_{\min} = 1 \mu\text{m} \Rightarrow L = 60 \mu\text{m} \quad e \quad W \cdot L = 60 \mu\text{m}^2$$

\Rightarrow si utilizza un layout a "serpentina"



OSS.

- 1) Ad ogni angolo si ha un errore addizionale nel calcolo della resistenza. Il flusso di corrente NON È UNIFORME se ne tiene conto stimando il \square d'angolo "come" $0.6 \square$.
- 2) contatto nella regione n-epi, ^{è il ⊕} connesso al potenziale più elevato disponibile, in modo da ottenere l'isolamento necessario

Tecnologia CMOS

In una tecnologia CONVENZIONALE n-well

- diffusioni di S e D
 - Si-poly di gate (molto drogata)
 - Well
- } poco adatte per realizzare R
(ρ_{\square} BASSA, scarsa precisione)

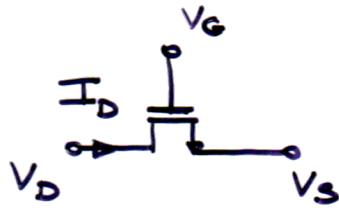
In tecnologia CMOS ANALOGICHE, in più

- 2° livello di Si-poly con ALTA ρ_{\square} e BUONA PRECISIONE

PROCESSO	TIPO	J_D (Ω/\square)	ACC. ASSOLUTA (%)	TC (%/°C)
BIPOLARE	DIFF. BASE	150	10	0.12
	DIFF. EMISSIONE	10	20	0.02
	EPI - LAYER	1K	10	0.3
	ALLUMINIO	50nm	20	0.01
CMOS	S/D DIFF.	20-50	20	0.2
	WELL	2.5K	10	0.3
	POLY GATE	50	20	0.2
	→ POLY RES.	1.5K	1	0.05
	ALLUMINIO	50nm	20	0.01

R-ATTIVO

- Soluzione più semplice: transistor MOS in regione LINEARE



$$V_{DS} \leq V_{GS} - V_T \quad I_D = \beta \left[(V_{GS} - V_T) V_{DS} - \frac{1}{2} V_{DS}^2 \right]$$

se $V_{DS} \ll V_{GS} - V_T \Rightarrow I_D \approx \beta (V_{GS} - V_T) V_{DS}$

$$R_{eq} = \frac{V_{DS}}{I_D} = \frac{L}{\beta' W (V_{GS} - V_T)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{si ottengono tipicamente} \\ R \leq 50 \text{ K}\Omega \end{array} \right)$$

NOTA

In generale occorre tener presente l'effetto body

$$V_T = V_{T0} + \gamma \left(\sqrt{2\phi_F + V_{SB}} - \sqrt{2\phi_F} \right)$$

- dispersione di V_T sul chip ($\Delta R/R \% = 25$)
- variazioni di β' e V_T con T ($TC = 0.5 \% / ^\circ C$)

CONCLUSIONI

- BASSA PRECISIONE (a parità di costo poly-res.)
- TC ELEVATO
- OCCUPAZIONE D'AREA (a parità di costo "altro")

SOLUZIONI

- Fine anni 70': si realizzavano filtri di conde per telecomunicazione in tecnologia IBRIDA; si realizzava parte del circuito su un chip (tipicamente la parte che realizza gli OP-AMPS) che poi veniva connesso ad un circuito realizzato in tecnologia a FILM SOTTILE o a FILM SPESSE su cui venivano realizzati: R e C.

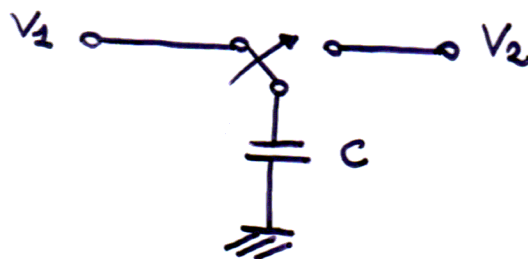
Il valore di R poteva essere TARATO con estrema PRECISIONE mediante laser.

Problemi:

- 1) Aumento dei tempi e dei costi.
- 2) Il problema della stabilità di R con T NON sono stati risolti.

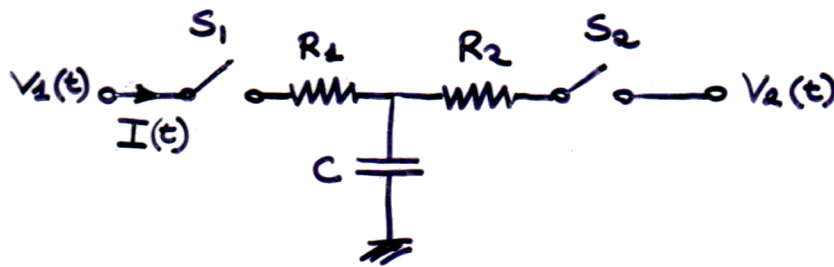
• IDEA INNOVATIVA (CONDENSATORE CONNUTATO)

Si sostituisce al resistore un CONDENSATORE una cui armatura viene fatto CONNUTARE tra 2 morsetti:



FUNZIONAMENTO

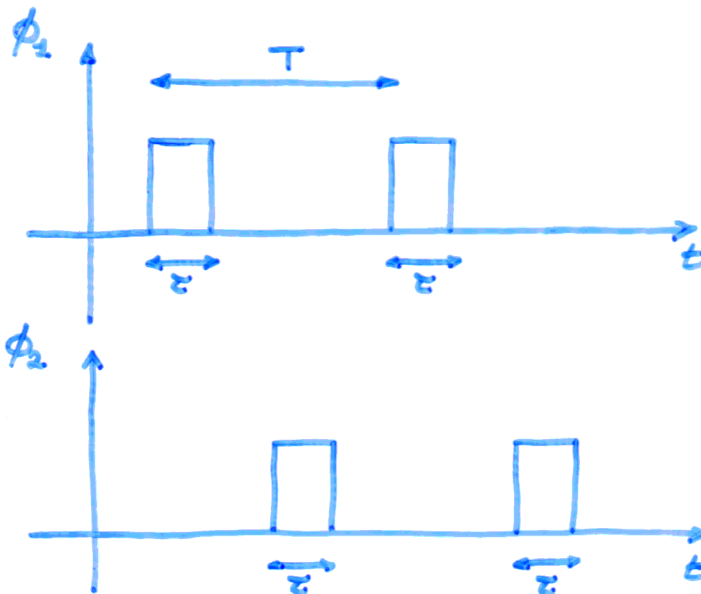
Consideriamo uno schema più realistico



- R_1 e R_2 resistenze parassite degli interruttori (MOS)

HP

1) S_1 e S_2 sono pilotati mediante un segnale di CLOCK a 2 FASI NON SOVRAPPOSTE ($\phi_1(t) \cdot \phi_2(t) = 0 \forall t$)



2) $\tau \gg R_1 C$, $\tau \gg R_2 C \Rightarrow$ si possono considerare ESTINTI in τ I TRANSITORI DI CARICA E SCARICA DI C ($V_1(t)$ e $V_2(t)$ sono a BASSA IMPEDENZA, nel caso molti di OP-AMP)

3) $\frac{1}{T} \gg f_{max}$, $f_{max} = \max \{ B_{V_1(t)}, B_{V_2(t)} \}$ $B =$ ampiezza di banda. È una HP di QUASI STAZIONARIETA' di $V_1(t)$ e $V_2(t)$

⇒ possiamo considerare $V_1(t)$ e $V_2(t)$ COSTANTI in ciascun periodo

• 1 fase

ϕ_2 alto, S_1 chiuso e C si carica a tensione V_1 , immagazzinando una carica.

$$Q_1 = C V_1$$

• 2 fase

ϕ_2 alto, S_2 chiuso e C si porta a tensione V_2 , dunque si carica ($V_2 > V_1$) o si scarica ($V_1 > V_2$) fino a

$$Q_2 = C V_2$$

Quindi in un periodo T ci sarà una VARIAZIONE NETTA DI CARICA su C

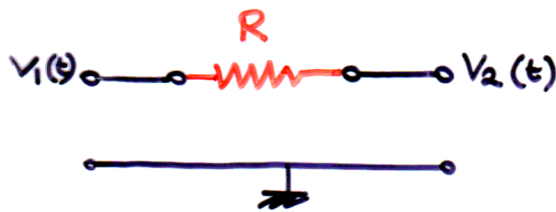
$$\Delta Q = C(V_2 - V_1) = \int_0^T I(t) dt$$

dovuto al passaggio di carica che si È AVUTO DAL MORSETTO 1 al MORSETTO 2. Quindi in un periodo T , dal morsetto 1 al morsetto 2 FLUISCE UNA CORRENTE MEDIA

$$\frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt = \bar{I} = \frac{C}{T} (V_2 - V_1)$$

posto $R = T/C$, si ha $\bar{I} = \frac{V_2 - V_1}{R}$

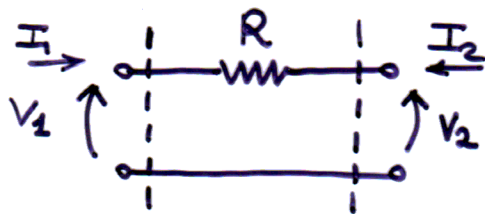
ciò il circuito si comporta **MEDIAMENTE** come un **RESISTORE**
 di resistenza $R = T/c$



OSS.

- 1) $R = T/c$ è una uguaglianza **DIMENSIONALMENTE** corretta
- 2) La similitudine di comportamento è valida anche dal punto di vista "ENERGETICO"

Resistore reale



- potenza entrante alla porta 1: $P_1 = V_1 I_1 = V_1 \cdot \frac{V_1 - V_2}{R}$
- potenza entrante alla porta 2: $P_2 = V_2 I_2 = V_2 \cdot \left(-\frac{V_1 - V_2}{R}\right)$
- potenza totale dissipata nel 2 porte

$$P_d = P_1 + P_2 = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R}$$

Condensatore commutato

- 1 fase, S_2 chiuso

$$P_2 = V_2 \overbrace{C \dot{V}_c}^{I_c}$$

e la corrispondente energia che entra attraverso la porta 1

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^{\infty} P_2 dt \stackrel{\text{Hp 2}}{=} \int_0^{\infty} V_2(t) C \dot{V}_c dt \stackrel{\text{Hp 3}}{=} \\ &= V_2 C [V_c]_0^{\infty} = V_2 C (V_c(\infty) - V_c(0)) \end{aligned}$$

Ma $V_c(0) = V_2$ (l'ultimo interruttore chiuso è S_2) e
per la Hp 2 $V_c(\infty) = V_1$

$$W_1 = C V_2 (V_1 - V_2)$$

- 2 fase, S_2 chiuso

$$W_2 = C V_2 (V_2 - V_1)$$

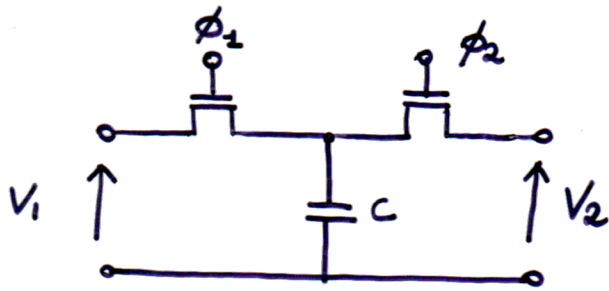
quindi la POTENZA TOTALE MEDIA in un periodo correlata
dal 2-porti è

$$\bar{P} = \frac{W_1 + W_2}{T} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{T/C}$$

⇒ anche in questo caso il condensatore commutato si comporta

MEDIAMENTE DA RESISTORE

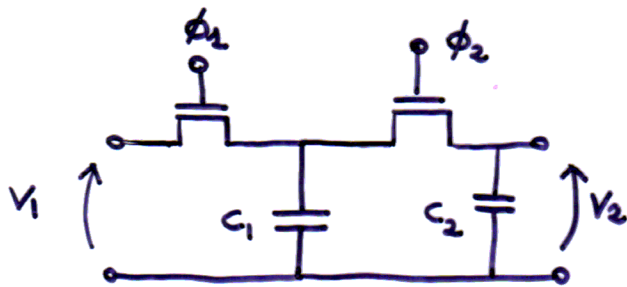
3) Grazie alla Hp 2 questi risultati NON dipendono dai valori di R_1 e R_2 . Questo è importante dato che il loro valore NON è noto con precisione, dato che la "reale" implementazione del circuito è



DOMANDA

Il circuito funziona ancora se inserito in uno schema più complesso?

Es.



porta 2 è APERTA

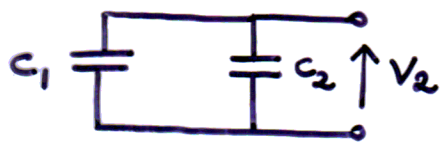
$\phi_2 \quad \phi_2 \quad \phi_1$



- 1 fase, $n-1 \leq t/T \leq n-1/2$, ϕ_1 alto

su C_1 $\rightarrow Q_1 = C_1 V_1 [(n-1)T]$ $Q_2 = C_2 V_2 [(n-1)T]$ \leftarrow su C_2

- 2 fase $n-1/2 \leq t/T \leq n$, ϕ_2 alto. Il circuito diventa



PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA CARICA

$$(C_1 + C_2) V_2(nT) = C_1 V_1((n-1)T) + C_2 V_2((n-1)T) \\ (+ C_1 V_2((n-1)T) - C_1 V_2((n-1)T))$$

$$(C_1 + C_2) [V_2(nT) - V_2((n-1)T)] = C_1 [V_1((n-1)T) - V_2((n-1)T)]$$

$$\frac{V_2(nT) - V_2((n-1)T)}{T} = \frac{C_1}{T(C_1 + C_2)} [V_1((n-1)T) - V_2((n-1)T)]$$

dalle Hp \exists $(\frac{1}{T} \gg f_{max})$ ($T \ll \frac{1}{f_{max}}$ è "piccolo")

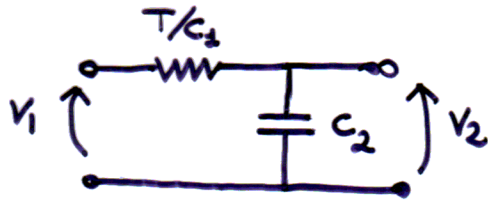
$$\frac{V_2(nT) - V_2((n-1)T)}{T} \approx \frac{dV_2}{dt} \Rightarrow \text{moltiplico per } C_2$$

$$C_2 \frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{R} (V_1 - V_2)$$

con

$$R = T \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

Se poi $C_1 \ll C_2$ è $R \approx T/C_1$ e il circuito è del tutto equivalente a



VANTAGGI

$$1) R = \frac{1}{fC}, \text{ con } C = 1 \text{ H } 100 \text{ pF} \text{ e } f = 100 \text{ kHz}$$

$\Rightarrow R = 10 \text{ H } 0.1 \text{ M}\Omega \Rightarrow$ si possono facilmente realizzare. RESISTENZE ELEVATE

$$2) \varepsilon_i = R_i C_i = \frac{1}{f} \left[\frac{C_i}{C_{i'}} \right] \Rightarrow \text{le caratteristiche del}$$

filtra dipendono da

- f di CLOCK : estremamente STABILE e PRECISA se ottenuta da un oscillatore al quarzo.
- del RAPPORTO di 2 capacità che presenta ECCELLENTI CARATTERISTICHE DI STABILITÀ e PRECISIONE (dipendenza dalla PRECISIONE del processo FOTOLITOGRAFICO)

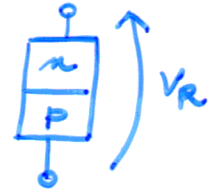
REALIZZAZIONE DI C

• Tecnologia bipolare

Si utilizza tipicamente la capacità della giunzione B-C, che però è poco accurata e fortemente dipendente dalla tensione applicata;

(La capacità di una giunzione pn in polarizzazione inversa è (per unità d'area)

$$C_j = \frac{C_{j0}}{\sqrt{1 + V_R/\phi_0}}$$



$$C_{j0} = \sqrt{\frac{\epsilon_s q N}{2 \phi_0}} \quad \text{con} \quad \frac{1}{N} = \frac{1}{N_a} + \frac{1}{N_d} \quad \phi_0 = \frac{kT}{q} \ln \frac{N A N_0}{n_i^2}$$

- NON SI RIESCONO A REALIZZARE BUONI CONDENSATORI

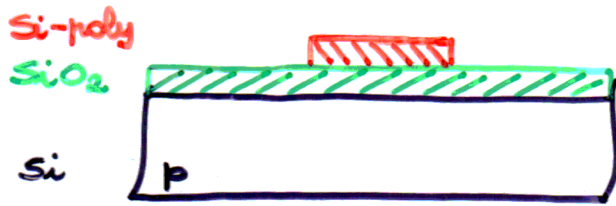
• Tecnologia CMOS

In questo caso si possono realizzare BUONI CONDENSATORI, ma sono necessari DUE LIVELLI DI Si-POLY (o uno di metal e uno di Si-poly).

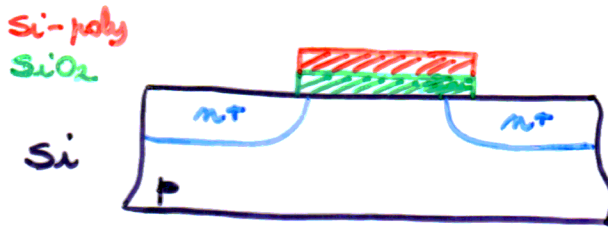
Con 1 livello di Si-poly si realizzano condensatori NON LINEARI (condensatori MOS). Infatti...

A causa del fatto che la deposizione dello strato di Si-poly di gate precede la realizzazione delle diffusioni di S e D NON è possibile avere una REGIONE MOLTO DROGATA, un OSSIDO SOTTILE e del Si-POLY sopra.

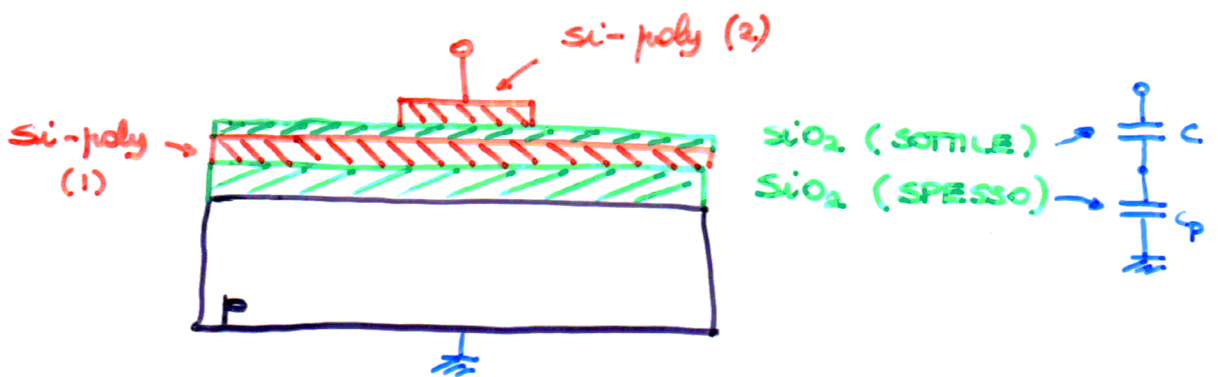
Nel processo di realizzazione di un transistor MOS infatti:



Attacco SiO₂ USANDO IL Si-POLY come MASCHERA per
Diffusione di S e D



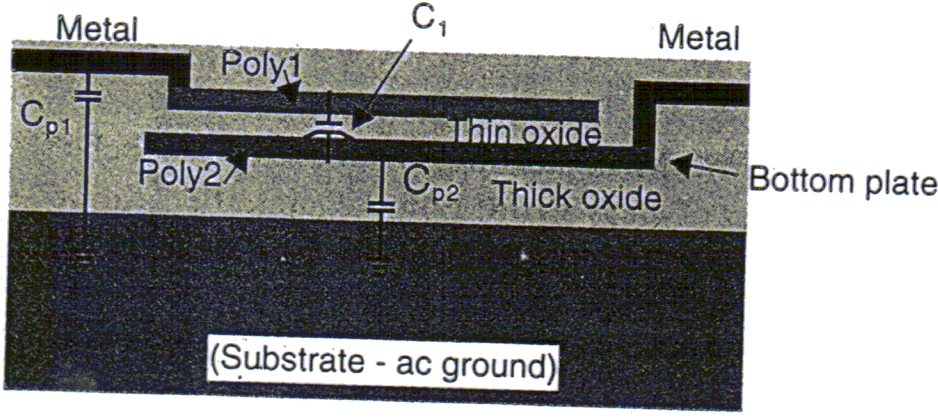
• STRUTTURA DI UN CONDENSATORE



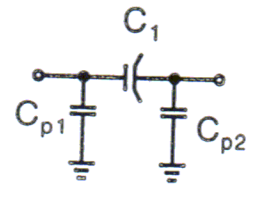
$$C = \epsilon_{ox} \epsilon_0 \frac{W \cdot L}{t_{ox}}$$

PROCESSO	TIPO	C (nF/cm ²)	ACC. ASSOLUTA (%)	Tc (%/°C)
BIPOLARE	C _{BC}	16	10	0.02
	C _{EB}	50	10	0.02
	C _{CS}	8	20	0.01
CMOS	C _{M, POLY}	12	10	0.002
	C _{POLY, POLY}	56	2	0.002

C_{POLY, POLY} : ottima ACCURATEZZA, prestazioni INDIPENDENTE da T



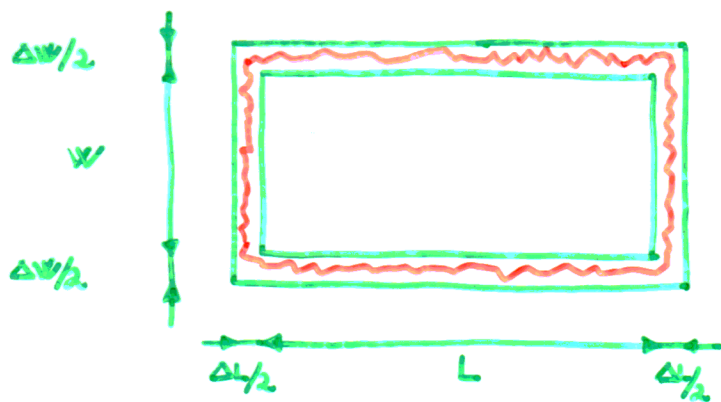
Cross section
(a)



Equivalent circuit
(b)

CAUSE DI IMPRECISSIONE

1) Variazioni RANDOM dei bordi (litografia)



L e W sono soggetti ad una variazione RANDOM pari a ΔL e ΔW . Quindi essendo $C = \epsilon \frac{W/L}{tox} \Rightarrow$ ("differenziale" anche i numeri)

$$\Delta C = \frac{\epsilon}{tox} (\Delta W L + W \Delta L)$$

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta W}{W} + \frac{\Delta L}{L}$$

- È noto che se X e Y sono v.e. st statisticamente indipendenti con varianze

$$\sigma_x^2 \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[x])^2 P_x(x) dx = E[x^2] - E^2[x]$$

e $\sigma_y^2 \Rightarrow$ se $Z = aX + bY$ allora

$$\sigma_Z^2 = a^2 \sigma_x^2 + b^2 \sigma_y^2$$

HP $\sigma_{\Delta W} = \sigma_{\Delta L} \Rightarrow \sigma_{\Delta C} = ?$

$\Delta W, \Delta L$ statisticamente INDIPENDENTI

$$\sigma_{\Delta C}^2 = \frac{C^2}{W^2} \sigma_{\Delta W}^2 + \frac{C^2}{L^2} \sigma_{\Delta L}^2 \Rightarrow \text{HP: } \Delta W = \Delta L$$

$$\sigma_{\Delta C} = C \sigma_{\Delta L} \sqrt{\frac{1}{W^2} + \frac{1}{L^2}}$$

però essendo C (e quindi $W \cdot L$) FISSATO, l'errore relativo

$$\frac{\sigma_{\Delta C}}{C} \text{ è minimo per } \underline{W=L}; \quad \left. \frac{\sigma_{\Delta C}}{C} \right|_{\min} = \sqrt{2} \frac{\sigma_{\Delta L}}{L}$$

PERCIO

L'ERRORE RELATIVO MINIMO DI CAPACITÀ DOVUTO A VARIAZIONI
RANDOM DEI BORDI SI HA PER CONDENSATORI QUADRATI

(ovvio: minimizzare il perimetro a porta d'area)

OSS.

Considerazioni simili si applicano anche AL RAPPORTO DI
CAPACITÀ

$$C_1 = \frac{\epsilon}{\text{tox}} W_1 \cdot L_1 \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{\epsilon}{\text{tox}} W_2 \cdot L_2$$

$$\alpha = \frac{C_1}{C_2} > 1$$

Differenziando si ha

$$\Delta \alpha = \frac{\Delta C_1}{C_2} - \frac{C_1}{C_2^2} \Delta C_2$$

$$\text{e} \quad \frac{\Delta \alpha}{\alpha} = \frac{\Delta C_1}{C_1} - \frac{\Delta C_2}{C_2}$$

ma

$$\frac{\Delta C_{1(2)}}{C_{1(2)}} = \frac{\Delta W_1(2)}{W_1(2)} + \frac{\Delta L_1(2)}{L_1(2)}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta \alpha}{\alpha} = \frac{\Delta W_1}{W_1} + \frac{\Delta L_1}{L_1} - \frac{\Delta W_2}{W_2} - \frac{\Delta L_2}{L_2} \quad (\text{Hp v.i.z. stat. indipendenti.})$$

e

$$\sigma_{\Delta \alpha}^2 = \left(\frac{\alpha}{W_1}\right)^2 \sigma_{\Delta W_1}^2 + \left(\frac{\alpha}{L_1}\right)^2 \sigma_{\Delta L_1}^2 + \left(\frac{\alpha}{W_2}\right)^2 \sigma_{\Delta W_2}^2 + \left(\frac{\alpha}{L_2}\right)^2 \sigma_{\Delta L_2}^2$$

$$\text{Hp } \sigma_{\Delta W_1} = \sigma_{\Delta L_1} = \sigma_{\Delta W_2} = \sigma_{\Delta L_2} \triangleq \sigma_{\Delta L} \Rightarrow$$

Errore relativo su α

$$\frac{\sigma_{\Delta \alpha}}{\alpha} = \sigma_{\Delta L} \sqrt{\frac{1}{W_1^2} + \frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{W_2^2} + \frac{1}{L_2^2}}$$

Fissato $W_1 L_1$ e $W_2 L_2 = W_1 L_1 / \alpha \Rightarrow \frac{\sigma_{\Delta \alpha}}{\alpha}$ è MINIMO PER

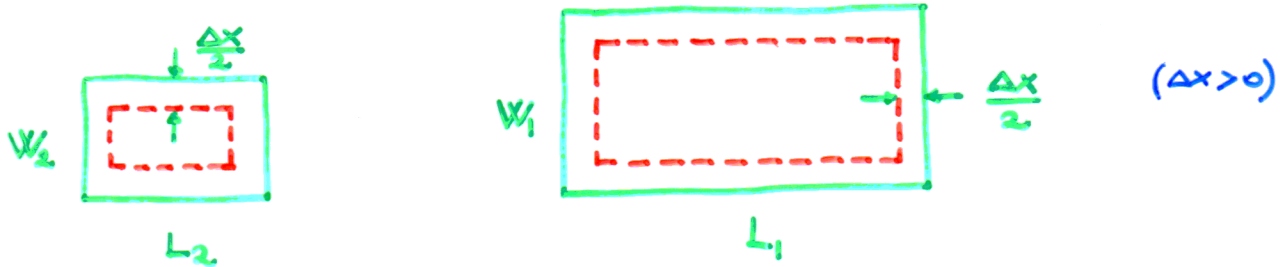
$$W_1 = L_1 = \sqrt{\alpha} L_2 = \sqrt{\alpha} W_2 \triangleq L$$

e

$$\left(\frac{\sigma_{\Delta \alpha}}{\alpha}\right)_{\min} = \frac{\sqrt{2} \sigma_{\Delta L}}{L} \sqrt{1 + \alpha}$$

2) ERRORE di "UNDERCUT", dovuto all' "ATTACCO" incontrollato degli elettrodi del conduttore LUNGO IL SUO PERIMETRO

Tale errore NON può essere compensato per il conduttore singolo, MA IL RAPPORTO DI CAPACITÀ PUÒ ESSERNE RESO INDIPENDENTE



Il rapporto tra le aree NOMINALE ϵ'

$$\alpha_A = \frac{W_1 L_1}{W_2 L_2}$$

ma a causa dell' errore di undercut si può avere

eff = effettivo

$$\alpha_A^{eff} = \frac{(W_2 - \Delta x)(L_1 - \Delta x)}{(W_1 - \Delta x)(L_2 - \Delta x)} \cong \frac{W_1^{eff} \cdot L_1^{eff}}{W_2^{eff} \cdot L_2^{eff}}$$

grado di libertà: il RAPPORTO TRA I PERIMETRI ϵ'
ARBITRARIO

$$\alpha_p = \frac{W_1 + L_1}{W_2 + L_2}$$

Hp Δx PICCOLO ($\Delta x \ll L_1, W_1, L_2, W_2$) \Rightarrow

CONSIDERO LO SVILUPPO IN SERIE DI α_A^{eff} .

$$\alpha_A^{\text{eff.}} = \alpha_A + \left. \frac{d\alpha_A^{\text{eff.}}}{d(\Delta x)} \right|_0 \Delta x + O(\Delta x^2)$$

ma

$$\left. \frac{d\alpha_A^{\text{eff.}}}{d(\Delta x)} \right|_0 = - \frac{(w_1^{\text{eff.}} + L_1^{\text{eff.}}) w_2^{\text{eff.}} \cdot L_2^{\text{eff.}} - (w_2^{\text{eff.}} + L_2^{\text{eff.}}) w_1^{\text{eff.}} \cdot L_1^{\text{eff.}}}{(w_2^{\text{eff.}} \cdot L_2^{\text{eff.}})^2} =$$

$$= - \frac{\overbrace{\alpha_p(w_2 + L_2)} (w_1 + L_1) w_2 L_2 - \overbrace{\alpha_A w_2 L_2} (w_2 + L_2) w_1 L_1}{(w_2 L_2)^2} =$$

$$= - \frac{\cancel{(w_2 L_2)} (w_2 + L_2) (\alpha_p - \alpha_A)}{(w_2 L_2)^2}$$

↑ $w_i^{\text{eff.}} = w_i$
 $L_i^{\text{eff.}} = L_i$
($i=1,2$)

quindi scegliendo

$$\boxed{\alpha_p = \alpha_A}$$

← TRA LE GRANDEZZE
NOMINALI!

si ha $\left. \frac{d\alpha_A^{\text{eff.}}}{d(\Delta x)} \right|_0 = 0$ e $\underline{\alpha_A^{\text{eff.}} \approx \alpha_A}$ a meno di $O(\Delta x^2)$

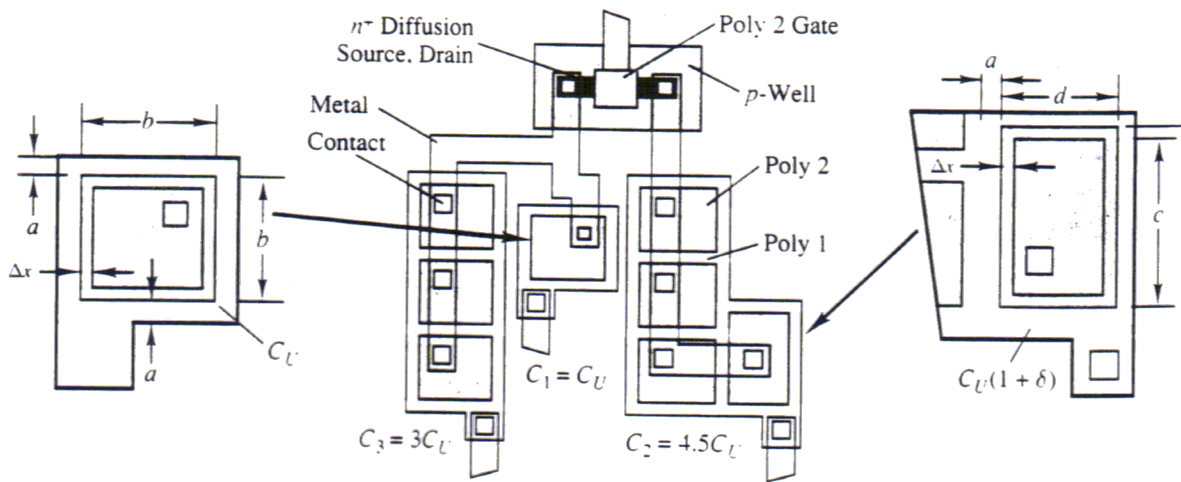
con una COMPENSAZIONE AL 1° ORDINE DELL'ERRORE
DI UNDERCUT.

Di queste problematiche si tiene conto mediante una opportuna

STRATEGIA DI LAYOUT

STRATEGIA DI LAYOUT

Si vogliono realizzare 3 capacità C_1, C_2, C_3



Hp C_1 è la capacità più piccola che otteniamo come capacità unitaria C_U . Realizzazione con 2 livelli di Si-poly

dimensioni: poly-2 $b \times b$
poly-1 $(b+a) \times (b+a)$

2: minima sovrapposizione tra poly-1 e poly-2 fissato dalla tecnologia (regole di layout)

2 CASI

1) $C_2/C_1 = K$ INTERO ($K=3$)

Il layout è realizzato REPLICANDO 3 C_U e CONNETTENDOLE in // . In questo modo $\alpha_A = \alpha_P = 3$

quindi l'errore di undercut è COMPENSATO per quanto riguarda il rapporto, e dato che C_3 è composto da capacità QUADRATE, è MINIMIZZATO anche l'errore dovuto a non linearità random dei bordi.

$$2) C_2/C_1 = K + \delta \quad \text{con } K \in \mathbb{N} \text{ e } \delta \in \mathbb{R}, \text{ così}$$

rapporto NON intero ($K + \delta = 4.5$)

In questo caso il layout è realizzato replicando $K-1$ volte C_0 e dimensionando opportunamente una capacità di valore $(1+\delta)C_0$ che poi sono connesse in //.

Per ottenere la COMPENSAZIONE dell'errore di undercut occorre che

$$\frac{P_{1+\delta}}{P_0} = \frac{c+d}{2b} = 1+\delta$$

$$\frac{A_{1+\delta}}{A_0} = \frac{c \cdot d}{b^2} = 1+\delta$$

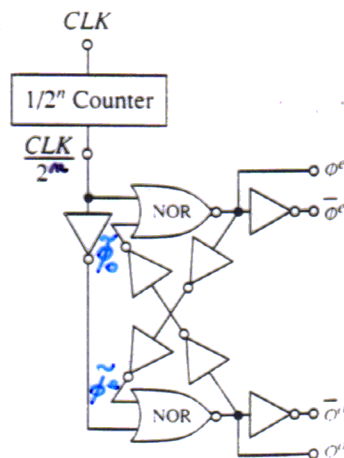
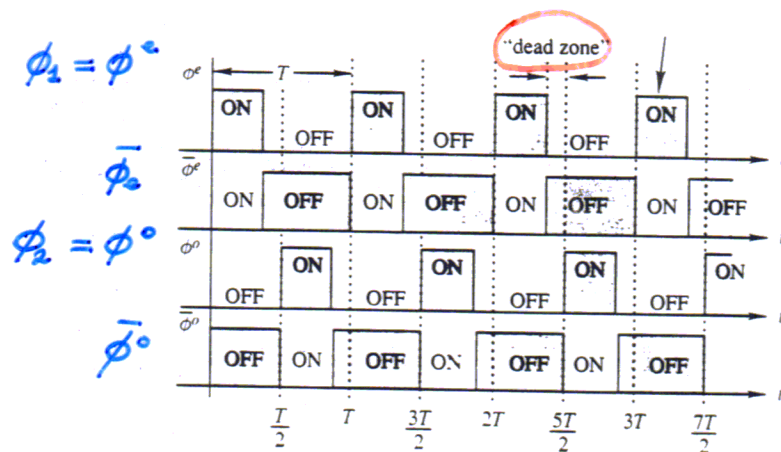
da cui si ricava

$$c = b \left(1 + \delta + \sqrt{\delta^2 + \delta} \right) \quad d = b \left(1 + \delta - \sqrt{\delta^2 + \delta} \right)$$

CONCLUSIONE

È POSSIBILE FISSARE UN RAPPORTO DI CAPACITÀ CON PRECISIONE MOLTO BUONA. INOLTRE IL RAPPORTO È PRATICAMENTE INDIPENDENTE DA VARIAZIONI DI T

REALIZZAZIONE DEI SEGNALI DI CLOCK



$$\phi^e = \overline{\frac{CLK}{2^n} + \phi^o} = \frac{CLK}{2^n} \cdot \phi^o$$

$$\phi^o = \overline{\frac{CLK}{2^n} + \phi^e} = \frac{CLK}{2^n} \cdot \phi^e$$

OSS.

- È fondamentale che $\phi^e(t)$ (fase pari) e $\phi^o(t)$ (fase dispari) NON SIANO MAI ATTIVE CONTEMPORANEAMENTE (il circuito "soffoca" invece fasi in cui $\phi^e = \phi^o = 0$) \Rightarrow le si genera a partire dallo stesso clock come indicato
- A volte è opportuno usare anche $\bar{\phi}^e$ e $\bar{\phi}^o$
- Per ragionare possiamo PENSARLE con duty cycle = 50%
- **ABBIAMO A CHE FARE CON SISTEMI ANALOGICI TEMPO-DISCRETI (a valori CAMPIONATI) \rightarrow SERVONO STRUMENTI "MATEMATICI" ADATTI**

FILTRI DIGITALI (A VALORI CAMPIONATI)

Sistema dinamico ANALOGICO TEMPORALMENTE DISCRETO

$x(nT)$, sequenza di ingresso, $n \in \mathbb{Z}$

$y(nT)$, sequenza di uscita, $n \in \mathbb{Z}$



$$y(nT) = R[x(nT)] \quad R = \text{legge di elaborazione}$$

3 CARATTERISTICHE :

1) TEMPO INVARIANTE

Una qualsunque eccitazione produrrà sempre lo stesso effetto indipendentemente dall'istante di applicazione.

$$\forall x(nT) \quad R[x(nT - kT)] = y(nT - kT)$$

2) CAUSALE (NON ANTICIPATIVO)

La risposta del filtro ad un dato istante non dipende dall'ingresso applicato in ISTANTI SUCCESSIVI.

$$R[x_1(nT)] = R[x_2(nT)] \quad n \leq k$$

per $\forall x_1(nT), x_2(nT)$ t.c.

$$\begin{cases} x_1(nT) = x_2(nT) & n \leq K \\ x_1(nT) \neq x_2(nT) & n > K \end{cases}$$

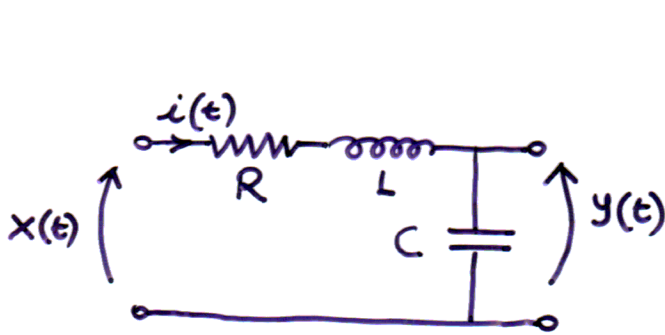
3) LINEARE

Alla c.l. di segnali di ingresso corrisponde la c.l. dei corrispondenti segnali di uscita

$$\forall \alpha \quad R[\alpha x(nT)] = \alpha R[x(nT)]$$

$$\forall x_1(nT), x_2(nT) \quad R[x_1(nT) + x_2(nT)] = R[x_1(nT)] + R[x_2(nT)]$$

CARATTERIZZAZIONE DEI FILTRI DIGITALI



$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = x(t)$$
$$y(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

- Filtri analogici **TEMPOCONTINUI** sono descritti tramite equazioni **INTEGRO-DIFFERENZIALI**.
- I Filtri analogici **TEMPODISCRETI** sono descritti mediante equazioni alle **DIFFERENZE FINITE**

• FILTRI NONRICORRENTI (FIR)

La risposta del filtro all'istante nT si può esprimere come funzione dei soli ingressi

$$y(nT) = R \left\{ \dots, x(nT-T), x(nT), x(nT+T), \dots \right\}$$

Per filtri lineari e tempo-invarianti:

$$y(nT) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_i x(nT - iT) \quad a_i \in \mathbb{R}$$

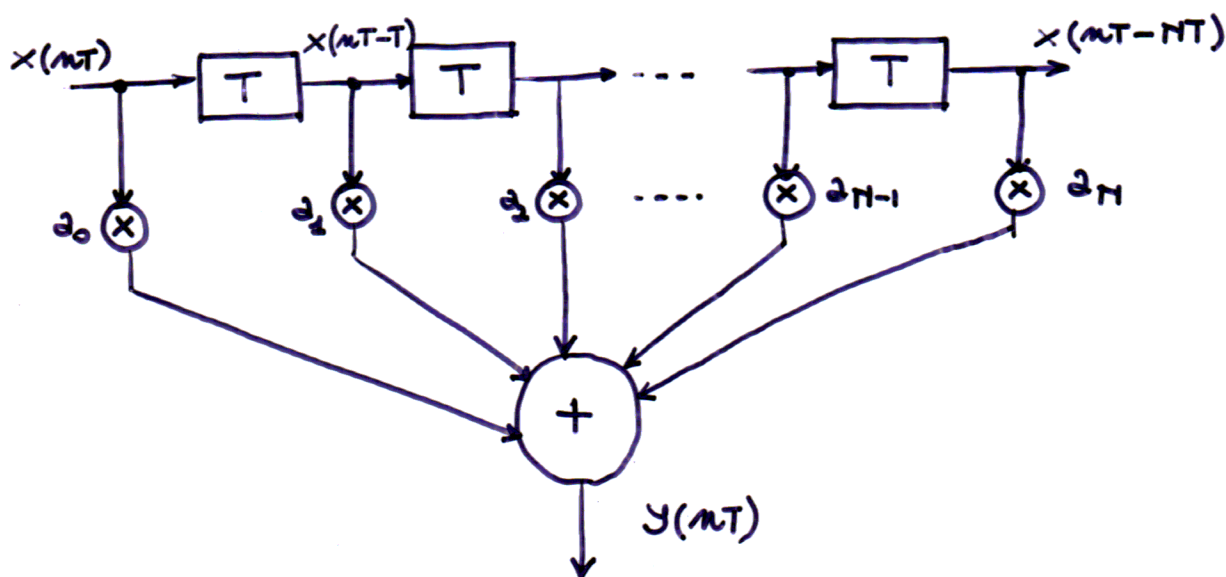
imponendo la "causalità" del filtro ($a_i = 0 \quad i < 0$)

$$y(nT) = \sum_{0}^{\infty} a_i x(nT - iT)$$

assumiamo $a_i = 0 \quad i > N$ (N è detto ORDINE DEL FILTRO)

$$y(nT) = \sum_{0}^N a_i x(nT - iT)$$

Realizzazione



OSS.

$$s(nT) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n>0 \end{cases} \Rightarrow y(nT) = h(nT) = a_n \rightarrow$$

$$0 \leq n \leq N$$

così si ha la successione degli: a_n in uscita.

che giustifica la denominazione di filtro FIR

FILTRI RICORRENTI (IIR)

La risposta del filtro all'istante nT dipende anche dai valori dell'uscita in istanti precedenti.

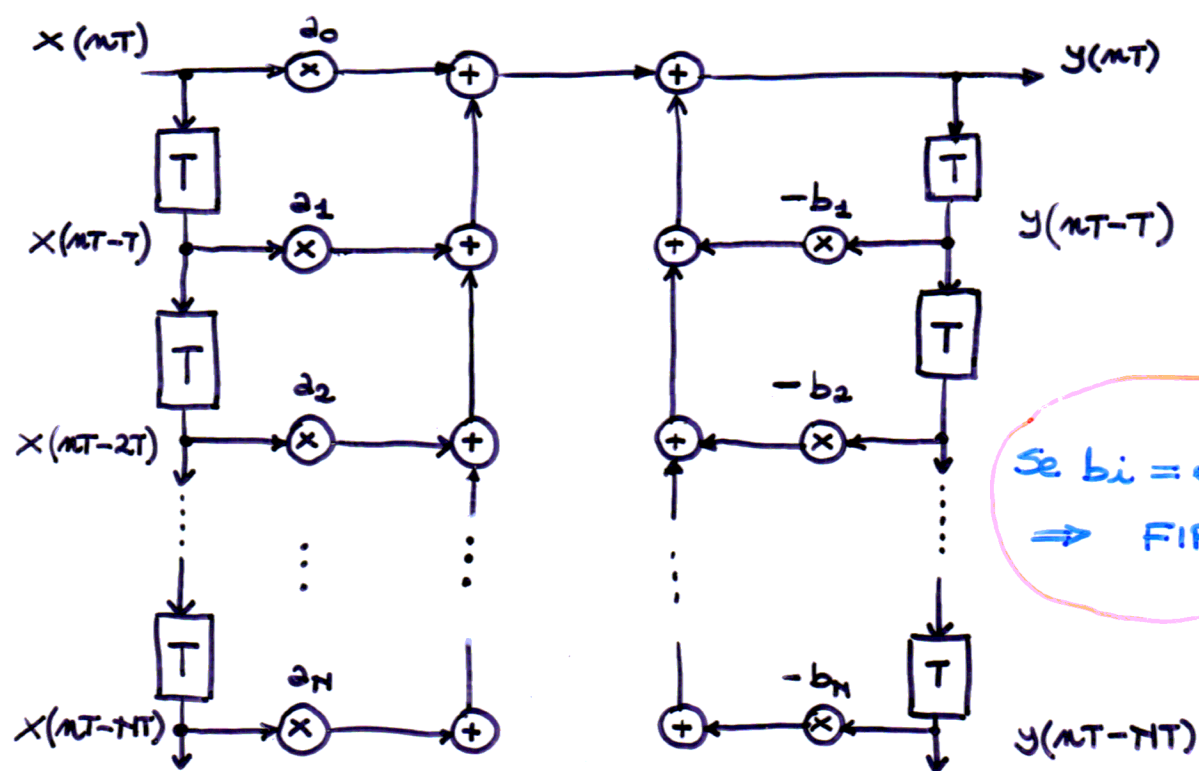
Per un filtro lin., t.i., cos.

↑ ⇒ la 2° sommatoria parte da 1

$$y(nT) = \sum_{i=0}^N a_i x(nT-iT) - \sum_{i=1}^N b_i y(nT-iT)$$

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$

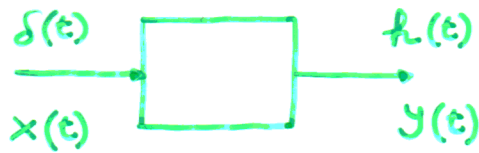
Realizzazione (non canonica)



Se $b_i = 0 \forall i$
⇒ FIR

RISPOSTA AD UN SEGNALE ARBITRARIO

- filtro tempo-continuo (lin., t.i., cons.)



$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau = x(t) * h(t)$$

- Una relazione analogica vale anche per un FILTRO DIGITALE ?

$$\forall \text{ segnale } x(nT) \stackrel{\text{def. } \delta(nT)}{=} \sum_{-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(nT - kT)$$

allora
$$y(nT) = R[x(nT)] \stackrel{\text{lin.}}{=} \sum_{-\infty}^{\infty} x(kT) R[\delta(nT - kT)]$$

$$\stackrel{\text{t.i.}}{=} \sum_{-\infty}^{\infty} x(kT) h(nT - kT)$$

$$\stackrel{\text{cons.}}{=} \sum_{-\infty}^n x(kT) h(nT - kT)$$

quindi

$$y(nT) = \sum_{0}^n h(kT) x(nT - kT) \triangleq h(nT) * x(nT)$$

OSS: se $x(nT) = 0$ per $n < 0$

$$y(nT) = \sum_{0}^n x(kT) h(nT - kT)$$

analogica al caso tempo-continuo

STABILITÀ

- Filtri ATTIVI (per un filtro passivo assieme non ci sono problemi)
- più definizioni possibili (i.l. - u.l.)

Def.: un filtro digitale è STABILE SSE ad ogni INGRESSO LIMITATO corrisponde una USCITA LIMITATA

$$\forall x(nT) \text{ t.c. } |x(nT)| < \infty \quad \forall n$$

⇓

$$y(nT) = R[x(nT)] \text{ è t.c. } |y(nT)| < \infty \quad \forall n$$

- Per un filtro lin., c.i., cons.

$$|y(nT)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h(kT)| \cdot |x(nT - kT)|$$

quindi se

$$|x(nT)| \leq M < \infty \quad \forall n \Rightarrow |y(nT)| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} |h(kT)|$$

perciò C.S. per la stabilità

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(kT)| < \infty$$

ma questa è anche C.N.

Infatti: scegliendo

$$x(nT - kT) = \begin{cases} M & \text{se } h(kT) > 0 \\ -M & \text{se } h(kT) < 0 \end{cases}$$

si ha

$$y(nT) = |y(nT)| = M \sum_{k=0}^{\infty} |h(kT)|$$

Perciò C.N.S. per la stabilità di un filtro digitale
(lin., t.i., cov.)

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(kT)| < \infty$$

TRASFORMATA Z

- Nel caso di filtri tempo-continui, l'impiego delle trasformate (Laplace, Fourier) consente di passare da eq. integro-differenziali a eq. ALGEBRICHE (nel dominio delle TRASFORMATE)

1) Trasf. di Laplace

$x(t)$ con $x(t)=0$ per $t < 0$, continuo q.o., $|x(t)| \leq M e^{\alpha t}$

$$X(s) \triangleq \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad s = \sigma + j\omega \in \mathcal{L}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} X(s) e^{st} ds$$

$\sigma = \text{Re}(s) >$ della parte reale di tutti i poli di $X(s)$

(regione di definizione della
autotrasformata)

PROPRIETA'

$$\mathcal{L} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] = sX(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t x(\tau) d\tau \right] = \frac{X(s)}{s}$$

$$\mathcal{L} \left[x_1(t) * x_2(t) \right] = X_1(s) \cdot X_2(s)$$

Applico la \mathcal{L} -trasf. ad ambo i membri della eq. integro-diff. che descrive il comportamento del filtro RLC

$$RI(s) + L(sI(s) - i(0)) + \frac{1}{sC} I(s) = X(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

da cui si può definire la funzione di trasferimento ($i(0)=0$)

$$H(s) \triangleq \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 Lc + sRc + 1} \rightarrow \text{stabilità del filtro}$$

2) Trasf. di Fourier

$$x(t) \in L^1(-\infty, \infty)$$

$$X(j\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

OSS.

- Dalle formule di anti-trasformazione: la \mathcal{F} -trasf. può essere considerata una restrizione della \mathcal{L} -trasf. per $\left. \begin{array}{l} s = j\omega \\ \Rightarrow \sigma = 0 \end{array} \right\}$ cioè dell'asse immaginario
- $x(t)$ può essere interpretata come la "somma" pesata di esponenziali complessi $e^{j\omega t}$, con "pesi" $X(j\omega)/2\pi$

$$X(j\omega) = M(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

è detto SPETTRO di $x(t)$.

$M(\omega)$ SPETTRO DI AMPIEZZA

$\varphi(\omega)$ SPETTRO DI FASE

- Valgono proprietà analoghe a quelle della L -trasf.

$$\mathcal{F} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] = j\omega X(j\omega)$$

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right] = \frac{X(j\omega)}{j\omega}$$

$$\mathcal{F} [x_1(t) * x_2(t)] = X_1(j\omega) X_2(j\omega)$$

quindi la risposta in frequenza del filtro RLC diventa

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$$

OSS.

- Si possono definire relazioni simili anche per i filtri digitali?
- Possiamo definire una risposta in frequenza?
- Che relazione esiste tra la trasformata di un segnale tempo-discreto e quella del "corrispondente" segnale tempo-continuo?

L'analisi dei filtri digitali si basa sull'utilizzo della trasformata Z che consente di passare da una descrizione in termini di equazioni alle differenze finite (nel dominio dei tempi) ad una in termini di **EQUAZIONI ALGEBRICHE** (nel dominio della trasformata)

Def: TRASFORMATA Z

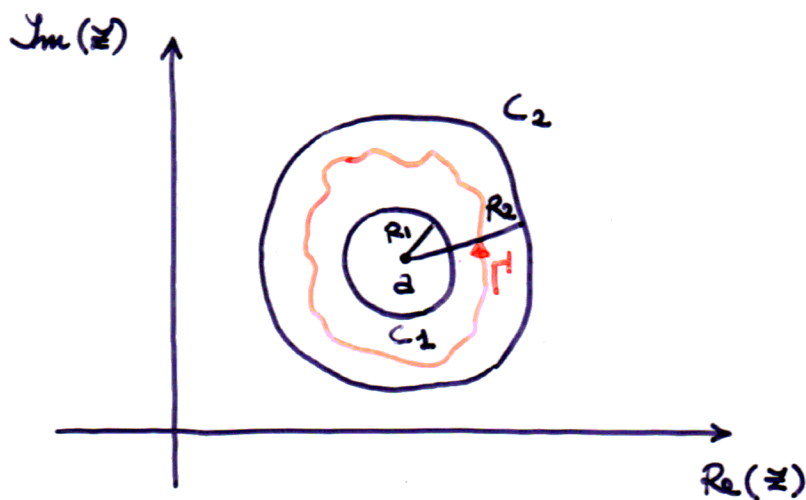
Si definisce **TRASFORMATA Z BILATERA** del segnale tempo-discreto $x(nT)$, la funzione $X(z)$ di variabile complessa data da

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(nT)] \triangleq \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT) z^{-n} \quad (1)$$

per tutti i valori di $z \in \mathbb{C}$ per cui la serie CONVERGE

• Teor. di Laurent

$G(z)$ analitica su C_1 e C_2 e nell'anello tra C_1 e C_2



Allora $G(z)$ può essere sviluppato in SERIE DI POTENZE
BILATERA (serie di Laurent) in tale anello

$$G(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n (z-a)^{-n} \quad (2)$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G(z) (z-a)^{n-1} dz \quad (3)$$

OSS.

- La serie converge nell'anello APERTO ottenuto $R_1 \downarrow$ e $R_2 \uparrow$ finché NON SI INCONTRA un punto di SINGOLARITÀ di $G(z)$ (anello di convergenza)
- Nell'anello di convergenza la serie di Laurent è UNICA (però $G(z)$ può avere sviluppi \neq per anelli di convergenza \neq attorno ad a)

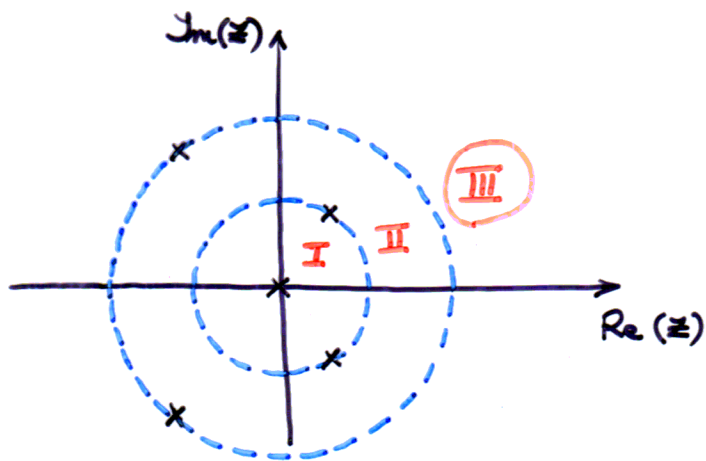
Confronto (1) e (2) \Rightarrow la (1) costituisce uno sviluppo in serie di Laurent di $X(z)$ attorno all'origine. Dunque la trasformata X è definita nell'anello di convergenza: ma quale?

Per convenzione si considera

$$R_1 \leq |z| \leq R_2 = \infty$$

con $C_1(R_1)$ t.c. racchiude tutti i poli di $X(z)$

Es.



Dalla (3) si ricava la FORMULA DI ANTITRASFORMAZIONE

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz$$

ove Γ è una \forall curva chiusa che contiene al suo interno
TUTTI I POLI DI $X(z) z^{n-1}$ (è una definizione operativa.)

PROPRIETÀ DELLA Z-TRASF.

1) Linearità

$$X(z) = Z[x(nT)], \quad Y(z) = Z[y(nT)]$$

$\forall a, b$

$$Z[ax(nT) + by(nT)] = aX(z) + bY(z)$$

2) Traslazione

$$Z[x(nT + kT)] = z^{-k} X(z)$$

dim.

$$Z[x(nT + kT)] = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT + kT) z^{-n} =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} x(iT) z^{-(i-k)} = z^k \sum_{-\infty}^{\infty} x(iT) z^{-i}$$

3) Variatione di scala

$$\forall w \in \mathbb{C} \quad \mathcal{Z}[w^{-n} x(nT)] = X(wz)$$

dim.

$$\mathcal{Z}[w^{-n} x(nT)] = \sum_{-\infty}^{\infty} w^{-n} x(nT) (wz)^{-n} = X(wz)$$

4) Derivazione complessa

$$\mathcal{Z}[nT x(nT)] = -Tz \frac{dX(z)}{dz}$$

dim.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[nT x(nT)] &= \sum_{-\infty}^{\infty} nT x(nT) z^{-n} = \\ &= -Tz \sum_{-\infty}^{\infty} n x(nT) (-n) z^{-n-1} = \\ &= -Tz \sum_{-\infty}^{\infty} n x(nT) \frac{d}{dz} (z^{-n}) \quad \text{derivata serie} = \\ &= -Tz \frac{d}{dz} \left[\sum_{-\infty}^{\infty} n x(nT) z^{-n} \right] \end{aligned}$$

5) Trasf. della convoluzione

$$\mathcal{Z}[x(nT) * y(nT)] = X(z)Y(z)$$

dim.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) y(nT-kT) \right] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(kT) y(nT-kT) z^{-n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT-kT) z^{-(n-k)} = X(z) Y(z) \end{aligned}$$

Ex.

$$\bullet \delta(nT) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad \mathcal{Z}[\delta(nT)] = 1$$

$$\bullet u(nT) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}[u(nT)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(nT) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1}$$

$$\bullet k u(nT-T); \quad \mathcal{Z}[k u(nT-T)] = k z^{-1} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{k}{z-1}$$

$$\begin{aligned} \bullet u(nT) \sin \omega nT; \quad \mathcal{Z} \left[u(nT) \frac{e^{j\omega nT} - e^{-j\omega nT}}{2j} \right] &= \\ &= \frac{1}{2j} \mathcal{Z} \left[u(nT) e^{j\omega nT} \right] - \frac{1}{2j} \mathcal{Z} \left[u(nT) e^{-j\omega nT} \right] = \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \right] = \\ &= \frac{1}{2j} \frac{z (e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})}{z^2 - 2z \left(\frac{e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}}{2} \right) + 1} = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \end{aligned}$$

↑ contains scalar

Table 2.1 Standard z transforms

$f(nT)$	$F(z)$
$\delta(nT)$	1
$u(nT)$	$\frac{z}{z-1}$
$u(nT-T)K$	$\frac{K}{z-1}$
$u(nT)Kw^n$	$\frac{Kz}{z-w}$
$u(nT-T)Kw^{n-1}$	$\frac{K}{z-w}$
$u(nT)e^{-anT}$	$\frac{z}{z-e^{-zT}}$
$r(nT)$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$u(nT) \sin \omega nT$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$u(nT) \cos \omega nT$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$u(nT)e^{-anT} \sin \omega nT$	$\frac{ze^{-zT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-zT} \cos \omega T + e^{-2zT}}$
$u(nT)e^{-anT} \cos \omega nT$	$\frac{z(z - e^{-zT} \cos \omega T)}{z^2 - 2ze^{-zT} \cos \omega T + e^{-2zT}}$

Z-TRASF. UNILATERA

Per analogia rispetto alla L -trasf. si definisce

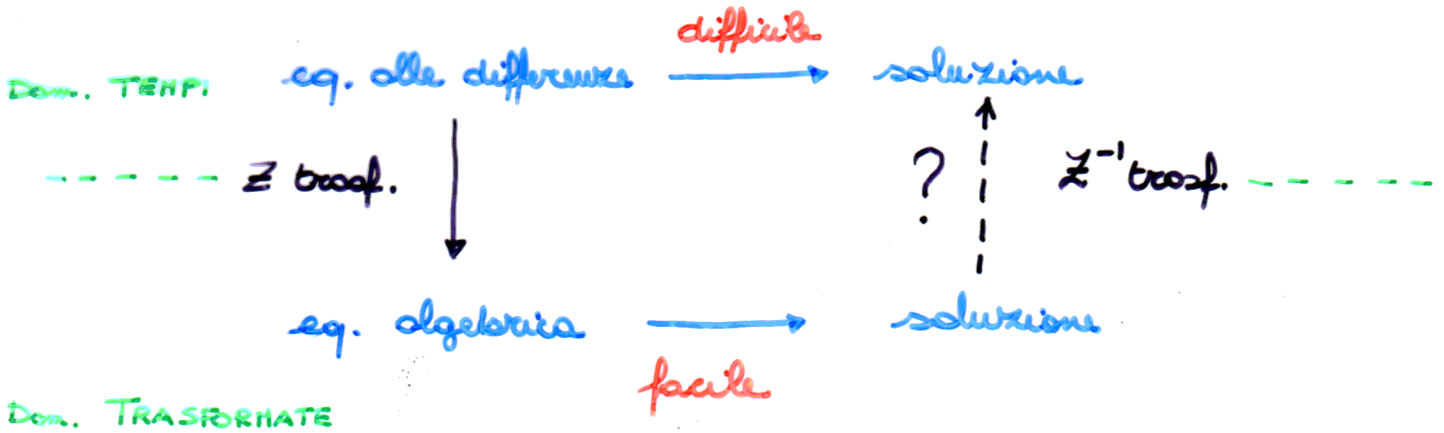
$$X_I(z) = Z_I(x(nT)) = \sum_0^{\infty} x(nT) z^{-n}$$

OSS.

- Le due trasformate coincidono se $x(nT) = 0$ per $n < 0$
- Le proprietà della trasf. bilatera valgono anche per quella unilatera a parte quella di traslazione per $K > 0$

$$Z_I[x(nT+KT)] = z^K \left[X_I(z) - \sum_0^{K-1} x(nT) z^{-n} \right]$$

CALCOLO DELLA TRASF. INVERSA



- Sfruttando i risultati del teorema di Laurent

$$x(nT) = z^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz$$

ove Γ è una \forall curva chiusa che racchiude al suo interno
TUTTI I POLI di $X(z) z^{n-1}$.

Ma come si può calcolare l'integrale? Sfruttando il teorema dei residui

Posto

$$X(z) z^{n-1} = \frac{N(z)}{\prod_{i=1}^K (z - p_i)^{m_i}} \quad m_i = \text{moltiplicità}$$

allora

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz = \sum_{i=1}^K \underset{z=p_i}{\text{Res}} [X(z) z^{n-1}]$$

dove

$$\operatorname{Res}_{z=p_i} [X(z) z^{m-1}] = \frac{1}{(m_i-1)!} \lim_{z \rightarrow p_i} \frac{d^{m_i-1}}{dz^{m_i-1}} [(z-p_i)^{m_i} X(z) z^{m-1}]$$

Es.

$$X(z) = \frac{1}{2(z-1)(z+1/2)}$$

per $n \leq 0$ $X(z) z^{n-1}$ ha un polo nell'origine, quindi ho 2
 casi $n \leq 0$ e $n > 0$

$n = 0$

$$\begin{aligned} x(0) &= \operatorname{Res}_{z=0} [X(z)/z] + \operatorname{Res}_{z=1} [X(z)/z] + \operatorname{Res}_{z=-1/2} [X(z)/z] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2(z-1)(z+1/2)} + \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2z(z+1/2)} + \lim_{z \rightarrow -1/2} \frac{1}{2z(z-1)} \\ &= -1 + 1/3 + 2/3 = 0 \end{aligned}$$

$n < 0$ analogamente $x(nT) = 0$

$n > 0$

$$\begin{aligned} x(nT) &= \operatorname{Res}_{z=1} [X(z) z^{n-1}] + \operatorname{Res}_{z=-1/2} [X(z) z^{n-1}] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{n-1}}{2(z+1/2)} + \lim_{z \rightarrow -1/2} \frac{z^{n-1}}{2(z-1)} = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} (-1/2)^{n-1} \end{aligned}$$

dato da $x(nT) = 0$ $n \leq 0$!

globalmente $x(nT) = u(nT-T) \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3} (-1/2)^{n-1} \right]$

OSS.

Dato che lo sviluppo in serie di Laurent (fissato l'anello di convergenza) è UNICO \Rightarrow l'antitrasformata \tilde{x} è UNICA \Rightarrow possiamo sfruttare ALTRI METODI per determinarla

Es. (decomposizione in fratti semplici)

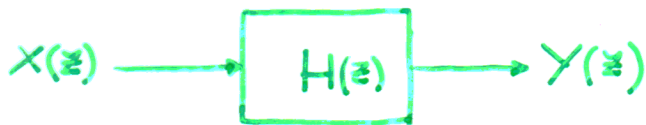
$$X(z) = \frac{z}{(z-1/2)(z-1/4)} = \frac{A}{z-1/2} + \frac{B}{z-1/4}$$

$$\Leftrightarrow A=2, \quad B=-1$$

quindi $X(z) = \frac{2}{z-1/2} - \frac{1}{z-1/4} \Rightarrow$

$$x(nT) = 2u(nT-T) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - u(nT-T) \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DI UN FILTRO DIGITALE



$$H(z) \triangleq \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Sappiamo che se $h(nT) = \mathcal{R}[\delta(nT)]$ si ha

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{nT} h(kT) x(nT - kT)$$

Applicando la transf. z ad ambo i membri si ha

$$Y(z) = H(z) X(z) \quad \text{e} \quad H(z) = \mathcal{Z}[h(nT)]$$

- FILTRO FIR (lin., t.i., caus.)

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{nT} a_i x(nT - iT) \Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{nT} a_i z^{nT - iT}}{z^{nT}}$$

n poli coincidenti in $z=0$

- FILTRO IIR (lin., t.i., caus.)

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{nT} a_i x(nT - iT) - \sum_{i=1}^{nT} b_i y(nT - iT)$$

da cui

$$Y(z) = \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} X(z) - \sum_{i=1}^N b_i z^{-i} Y(z)$$

e quindi

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}{z^{-N} + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}}$$

N zeri (event. coincidenti) e N poli (event. coincidenti)

NOTA

- Dalla condizione di causalità si ha che $\text{Gr}[\text{Num}(H(z))] \leq \text{Gr}[\text{Den}(H(z))]$. Questa è la condizione di FISICA REALIZZABILITÀ

- La funzione di trasferimento di un filtro digitale è una funzione complessa razionale a coefficienti reali

STABILITÀ

Domanda: la c.n.s. per la stabilità di un filtro dig. (l.i., t.i., cov.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)| < \infty$$

può essere espressa in modo equivalente in termini di proprietà di $H(z) = Z[h(nT)]$?

H_p: (di convenienza) poli di $H(z)$ semplici

$$H(z) = \frac{N(z)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)} \quad p_i = \tau_i e^{j\psi_i}$$

mediante la formula di antitrasformazione si ha

$$h(nT) = Z^{-1}[H(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} H(z) z^{n-1} dz$$

$$\underline{n=0} \quad h(0) = \operatorname{Res}_{z=0} \left[\frac{H(z)}{z} \right] + \sum_{i=1}^N \operatorname{Res}_{z=p_i} \left[\frac{H(z)}{z} \right]$$

$$\underline{n>0} \quad h(nT) = \sum_{i=1}^N \operatorname{Res}_{z=p_i} [H(z) z^{n-1}] = \sum_{i=1}^N \operatorname{Res}_{z=p_i} [H(z)] p_i^{n-1}$$

Hp: esiste τ_m t.c. $\tau_i \leq \tau_m < 1 \quad i = 1, \dots, N \Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)| = |h(0)| + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^N \operatorname{Res}_{z=p_i} [H(z)] \tau_i^{n-1} e^{j(n-1)\psi_i} \right|$$

$$\leq |h(0)| + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^N \left| \operatorname{Res}_{z=p_i} [H(z)] \right| \tau_i^{n-1}$$

$H(z)$ è analitica nell'intorno di $z=0$ e $z=p_i \quad i=1, \dots, N$

$\Rightarrow h(0)$ e tutti i residui sono FINITI

$$\left| \operatorname{Res}_{z=p_i} [H(z)] \right| \leq R_m \quad i = 1, \dots, N$$

perciò scambiando le sommatorie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)| \leq |h(0)| + \prod R_m \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \zeta_m^{n-1}}_{\text{serie geometrica di ragione } \zeta_m < 1} < \infty$$

serie geometrica
di ragione $\zeta_m < 1$

Quindi la condizione $|p_i| < 1 \quad i=1, \dots, M$ è C.S. per la stabilità.

Facciamo vedere che essa è anche C.N.. Supponiamo che per es p_k si trovi sul o di fuori della circonferenza $|z|=1$. Allora per $n \rightarrow \infty$

$$h(nT) \sim \operatorname{Res}_{z=p_k} [H(z)] \zeta_k^{n-1} e^{j(n-1)\omega_k}$$

dato che $\zeta_i^{n-1} \rightarrow 0 \quad i \neq k$. Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)| \sim \lim_{Q \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^Q \left| \operatorname{Res}_{z=p_k} [H(z)] \right| \zeta_k^{n-1} \rightarrow \infty$$

e il filtro è instabile.

QUINDI

C.N.S. per la stabilità di un filtro digitale è che tutti i poli di $H(z)$ si trovino ALL'INTERNO DI $|z|=1$

