University of Ferrara
- EX LABORE FRUCTUS -

Department of Engineering Ferrara

Il fenomeno sonoro

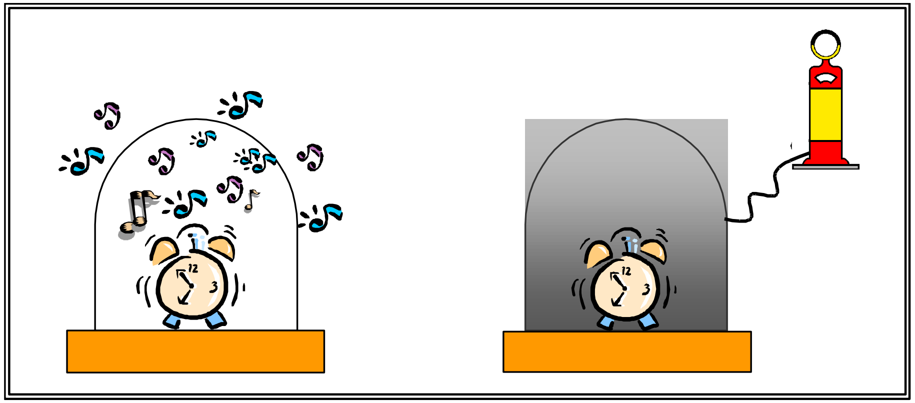
Francesco Pompoli

Introduzione

ACUSTICA: campo della scienza che tratta della generazione, della propagazione e della ricezione di onde in mezzi elastici, siano essi gassosi, liquidi o solidi.

Il corso si occuperà delle onde sonore (udibili dall'uomo), ma l'acustica si occupa in generale anche di INFRASUONI e ULTRASUONI, che non sono udibili ma che fisicamente sono fenomeni analoghi a quelli delle onde sonore

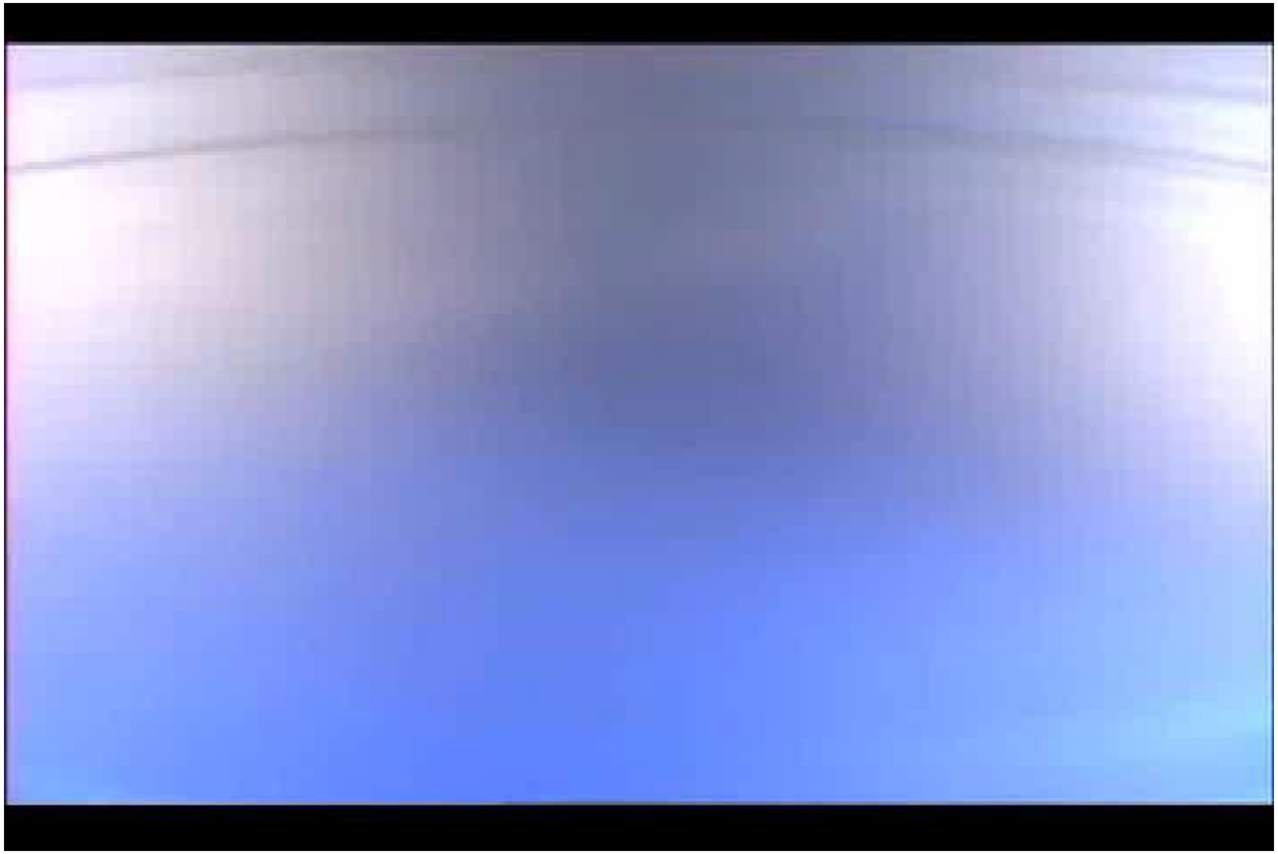
Il fenomeno sonoro



- Il fenomeno sonoro è caratterizzato dalla propagazione di energia meccanica dovuta al rapido succedersi di compressioni ed espansioni di un mezzo elastico;
- tale energia, che ha origine in una sorgente sonora, si propaga nel mezzo stesso attraverso onde con velocità finita;
- perché il fenomeno nasca e si propaghi occorre dunque che esistano sia una “sorgente” che un “mezzo elastico” attraverso il quale la perturbazione si muova;
- la presenza del mezzo elastico è indispensabile perché si possa parlare di propagazione del fenomeno sonoro: il suono non si propaga nel vuoto.

Il fenomeno sonoro

Department of Engineering Ferrara



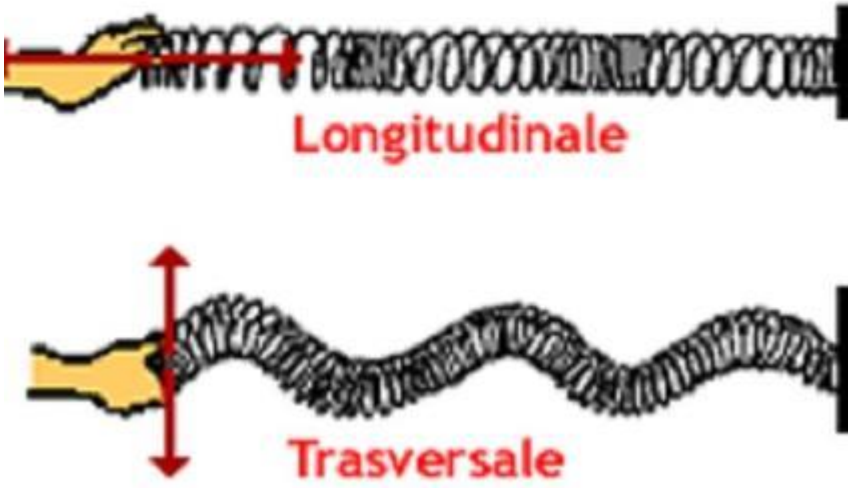
Una analogia molto utilizzata (perché visibile) è quella delle onde provocate da un oggetto su una superficie d’acqua

Il fenomeno sonoro

Department of Engineering Ferrara

Il mezzo nel quale si propaga l'onda deve possedere ELASTICITA' ed INERZIA:
Elasticità: quando una particella del mezzo viene spostata dalla posizione di riposo, si genera una forza interna che tende a riportarla in quella configurazione (forze intermolecolari)
Inerzia: la particella possiede massa e quindi trasferisce quantità di moto alle particelle adiacenti

- La propagazione può avvenire in:
- MEZZI FLUIDI o GASSOSI: si propagano solo onde longitudinali (assente la resistenza elastica a deformazione a taglio)
- MEZZI SOLIDI: si propagano due categorie di onde: di compressione (o longitudinali) oppure di taglio (o trasversali)

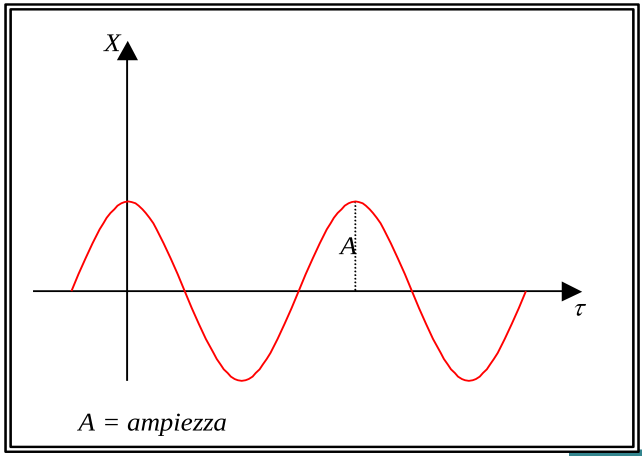


Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

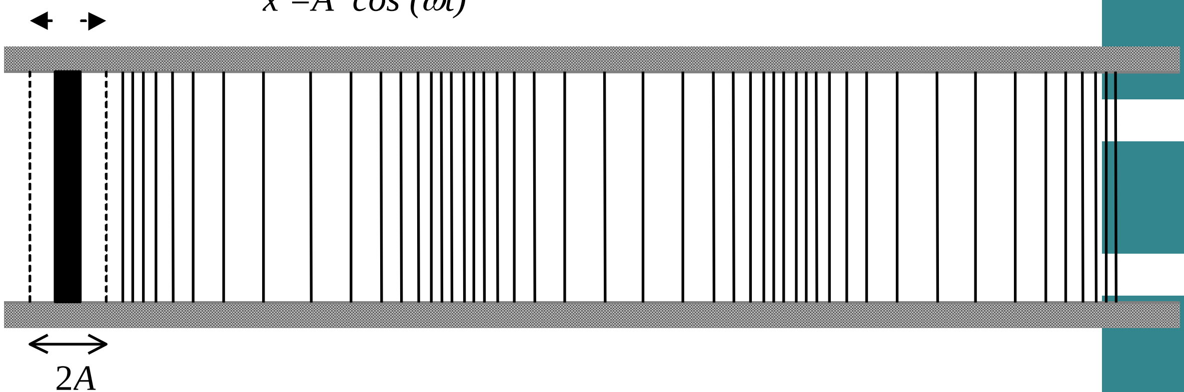
IL MOTO DELLE PARTICELLE

Esempio di sorgente sonora:
superficie piana che si muove di moto armonico semplice ad una estremità di un condotto di lunghezza infinita nel quale si trova un mezzo elastico in quiete

- Il moto del pistone mette in movimento le particelle aderenti alla superficie dello stesso; le particelle a loro volta trasferiscono l'energia alle particelle adiacenti e così via fino a che si origina la propagazione dell'onda sonora. Le caratteristiche di elasticità del mezzo determinano un ritardo nella propagazione che dipende dal mezzo stesso.



$$x = A\ \cos(\omega t)$$



IL MOTO DELLE PARTICELLE

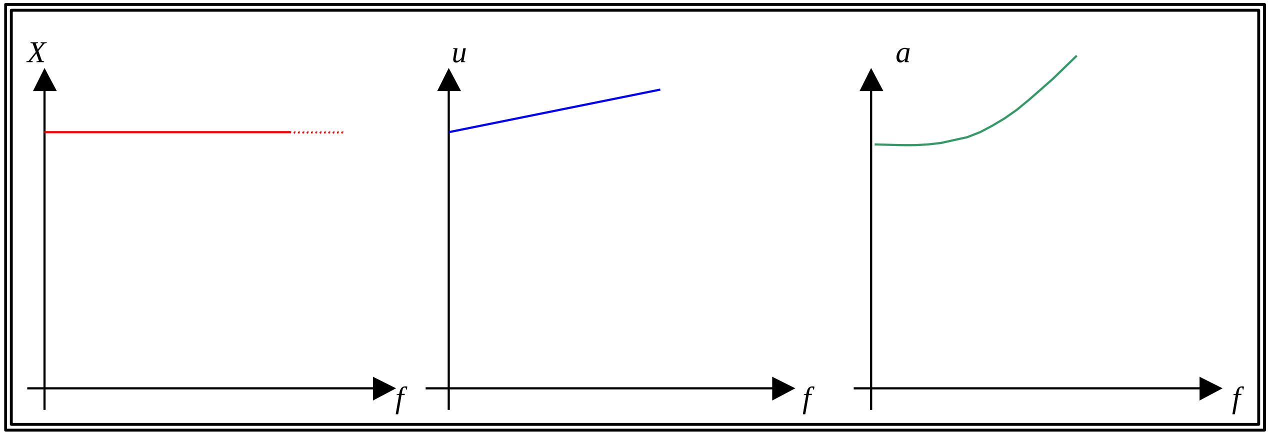
Indicando con x, u ed a i moduli di spostamento, velocità e accelerazione della superficie del pistone, si possono scrivere le seguenti relazioni per il moto armonico semplice:

spostamento: $x(t) = A \cdot \cos(\omega t)$

velocità: $u(t) = dx/dt = -\omega A \cdot \mathrm{sen}(\omega t)$

accelerazione: $a(t) = du/dt = -\omega^2 A \cdot \cos(\omega t)$

dove A rappresenta il valore dello spostamento massimo della superficie del pistone dalla posizione iniziale di quiete, ω la velocità angolare.



Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

IL MOTO DELLE PARTICELLE

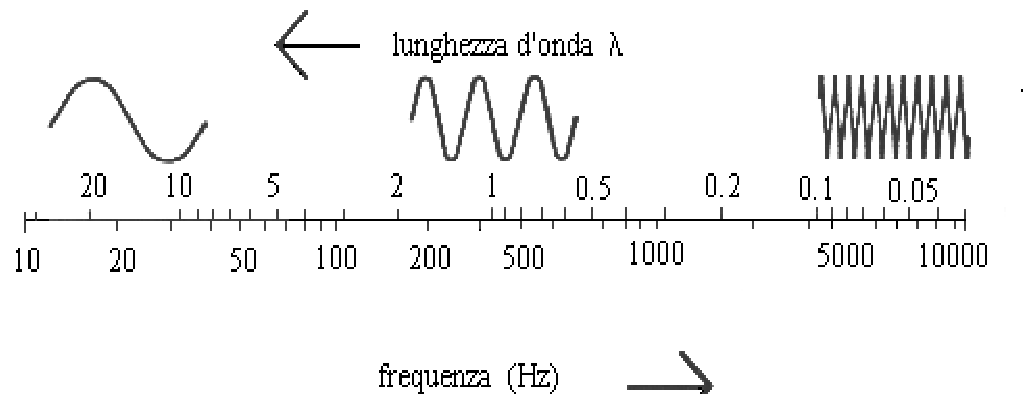
frequenza: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ [Hz]

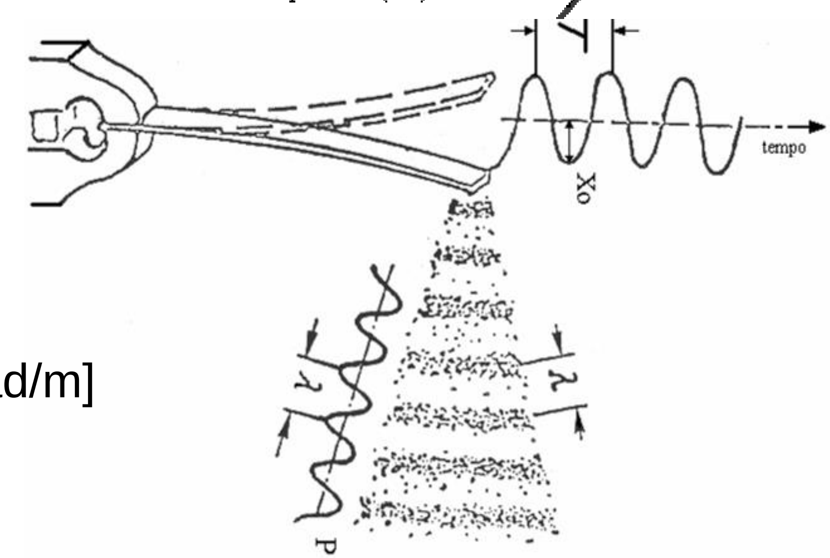
periodo: $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ [s]

lunghezza d'onda: $\lambda = \frac{c}{f}$ $\lambda = cT$ [m]

pulsazione: $\omega = 2\pi f$ [rad/s]

numero d'onda angolare: $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ [rad/m]





Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Scopo:
trovare una relazione fra le grandezze che descrivono il fenomeno sonoro: pressione (p), velocità delle particelle (u), densità (ρ) e temperatura (T).

(Jean Le Rond D'Alembert, 1717-1783, grande matematico e filosofo francese)

Per lo studio delle onde acustiche si considerano le seguenti leggi:
- la legge di Newton o equazione del moto;
- il principio di conservazione della massa o equazione di continuità;
- l'equazione di stato dei gas perfetti o equazione del mezzo.

Per gli scopi prefissati si possono considerare le seguenti ipotesi:
- fluido omogeneo e isotropo;
- aria come gas perfetto;
- comportamento elastico (validità legge di Hooke);
- assenza di fenomeni dissipativi e di forze esterne;
- oscillazioni di pressione e densità piccole rispetto alle condizioni di equilibrio;
- fluido mediamente fermo.

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

In ogni istante ed in ogni punto il campo di pressione, il campo di velocità e la densità del gas possono essere scritti aggiungendo ai valori che tali grandezze fisiche avevano in condizioni di equilibrio prima del passaggio dell'onda la variazione provocata dal fenomeno acustico.

$$\begin{cases} p'(x,y,z,t) = p_0 + p(x,y,z,t) \\ v'(x,y,z,t) = v_0 + v(x,y,z,t) \\ u'(x,y,z,t) = u_0 + u(x,y,z,t) \end{cases}$$

Si noti che, essendo i valori di equilibrio dei valori costanti, per l'ipotesi di piccole variazioni rispetto alle condizioni di equilibrio, si può scrivere:

$$\begin{cases} dp' = dp \cong p' - p_0 = p(x,y,z,t) \\ dv' = dv \cong v' - v_0 = v(x,y,z,t) \\ du' = du \cong u' - u_0 = u(x,y,z,t) \end{cases}$$

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Department of Engineering Ferrara

Poiché le variazioni di pressione prodotte nel gas dall'onda sonora avvengono in generale in maniera estremamente rapida, si possono trascurare gli scambi di calore tra volumetti di gas adiacenti considerando di fatto la trasformazione subita dal gas come <u>adiabatica</u>.

Se il mezzo che permette la propagazione del fenomeno sonoro può essere considerato un gas perfetto si può scrivere che:

$$pv^{\gamma} = cost \quad \text{o anche} \quad p\rho^{-\gamma} = cost \qquad con \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

e quindi:

$$pv^{\gamma} = p_0 v_0^{\gamma} \quad \text{o anche} \quad p\rho^{-\gamma} = p_0 \rho_0^{-\gamma}$$

differenziando rispetto allo stato iniziale di equilibrio, si ottiene:

Piccole variazioni

$$\frac{\partial p}{p_0} = -\gamma \frac{dv}{v_0} = \gamma \frac{d\rho}{\rho_0} \Rightarrow \frac{p(x,y,z,t)}{p_0} = -\gamma \frac{v(x,y,z,t)}{v_0} = \gamma \frac{\rho(x,y,z,t)}{\rho_0}$$

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Derivando rispetto al tempo entrambi i termini si ha, dunque, **l'equazione del mezzo**:

$$\boxed{\frac{1}{p_0}\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\gamma}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}} \qquad \textit{oppure} \qquad \frac{1}{p_0}\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\gamma}{v_0}\frac{\partial v}{\partial t}$$

in cui si è fatto uso dell'ipotesi che le grandezze fisiche riferite allo stato iniziale di equilibrio risultino delle costanti.

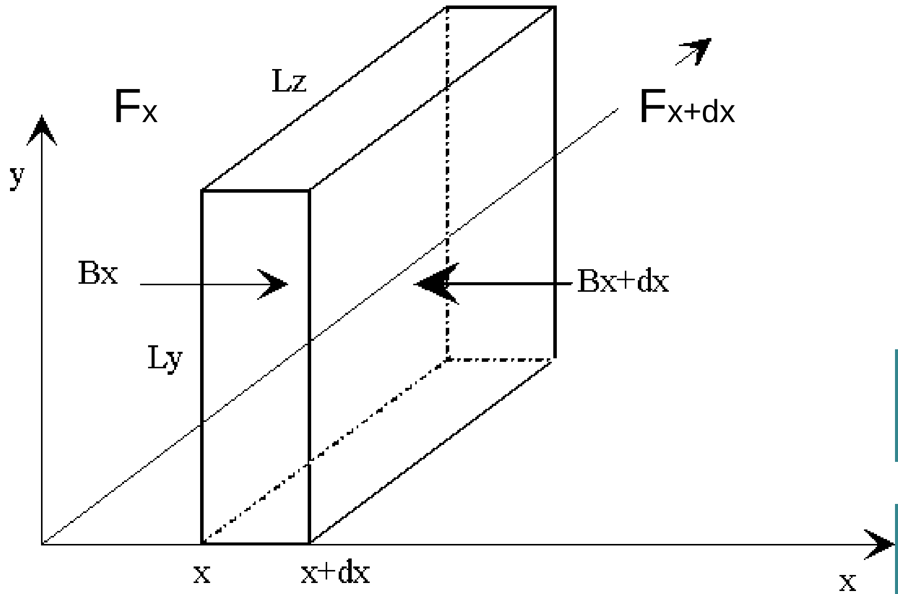
Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Si consideri un volumetto dxL_yL_z; il volumetto è riempito di gas ed è soggetto ad un onda acustica piana che si propaga in direzione x.

L'onda acustica mette in vibrazione le particelle del gas facendole oscillare intorno alla loro posizione di equilibrio.

Nel volumetto si avranno delle zone in cui le particelle tenderanno ad addensarsi (con conseguente aumento locale della densità) ed altre in cui le particelle tenderanno a rarefarsi.

- Il fenomeno acustico fa variare il valore assunto dalle diverse grandezze fisiche di interesse;
- Avendo ipotizzato che l'onda viaggi nel mezzo in direzione x è possibile trascurare le variazioni che si producono in direzione y e z (caso monodimensionale).



Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Se si considerano le forze che agiscono sul volumetto di gas in direzione x (direzione in cui si ha variazione di pressione nel gas per effetto dell'onda acustica) e si applica la legge di Newton si ottiene che:

$$M\frac{\partial u}{\partial t} = F_x - F_{x+dx} = pL_yL_z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)L_yL_z = -\frac{\partial p}{\partial x}dxL_yL_z$$

Ricordando la definizione di densità di un mezzo si può porre:

$$\rho_0 = \frac{M}{dxL_yL_z}$$

e, quindi, sostituendo si ottiene **l'equazione del moto:**

$$\boxed{\rho_0\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}}$$

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Se la massa M contenuta nel volumetto V (dxL_yL_z) rimane costante (principio di conservazione della massa), la variazione nel tempo del volume specifico del gas, v, è semplicemente uguale alla variazione subita nel tempo dal volume V in esame. Le variazioni di volume dV dipendono dalla differenza di spostamenti delle particelle sulle due facce del volumetto di controllo.

Considerando uno spostamento ξ_x della prima faccia e uno spostamento $\xi_x + \frac{\partial \xi_x}{\partial x} dx$ sulla seconda faccia si ha:

$$dV = \left(\xi_x + \frac{\partial \xi_x}{\partial x} dx - \xi_x \right) L_y L_z = \frac{\partial \xi_x}{\partial x} dx L_y L_z$$

Derivando rispetto al tempo si ha:

$$\frac{\partial (dV)}{\partial t} = dx L_y L_z \frac{\partial u}{\partial x}$$

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

- Essendo dV=dv/M = v/M per le ipotesi viste precedentemente si può scrivere

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial x}$$

- o anche

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}$$

- che rappresenta **l'equazione di conservazione della massa.**
- Allo stesso risultato si può giungere considerando che la variazione di volume è proporzionale alla differenza di velocità esistente tra le pareti ortogonali alla direzione x in cui si propaga il fenomeno acustico:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{L_y L_z}{M}\left[u_{x+dx} - u_x\right] = \frac{L_y L_z}{M}\left[\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right) - u\right] = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial x}$$

- da cui si ricava **l'equazione di conservazione della massa:**

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}}$$

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Combinando le eq. del moto e di conservazione della massa si ottiene che:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\gamma p_0 \frac{\partial u}{\partial x}$$

Se si derivano entrambi i membri rispetto al tempo si ottiene che:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\gamma p_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$$

Nella eq. sono presenti due incognite: il campo di velocità ed il campo di pressione. Si osservi, però, che la derivata mista della velocità può essere eliminata ricorrendo all'equazione del moto, derivando entrambi i membri rispetto ad x; in questo modo si ricava che:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Per l'intercambiabilità dell'ordine di derivazione si può ottenere un'equazione in cui figura come unica incognita il campo di pressione:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Ponendo:

$$c^2 = \frac{\gamma\, p_0}{\rho_0}$$

si ottiene **l'equazione di D'Alembert** (detta anche **equazione delle onde**) per suoni che si propagano in un mezzo omogeneo assimilabile ad un gas perfetto:

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}}$$

oppure

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}}$$

Tale eq. è stata ricavata per un sistema monodimensionale (**onda piana**).

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

La costante c che abbiamo definito: $c = \sqrt{\dfrac{\gamma\, p_0}{\rho_0}}$

rappresenta la velocità di propagazione dell'onda sonora nel fluido, ed è una costante dipendente dal fluido e dalle sue proprietà termodinamiche.

Per aria ad esempio, a t=0°C e p_0=1atm (1.0133x10^5 Pa), si ha: ρ_0=1.292 kg/m3 e γ=1.402 e pertanto c_0=331,6 m/s

Essendo per un gas perfetto: $\dfrac{p_0}{\rho_0} = MRT$

Con M massa molare ed R costante dei gas perfetti, si trova che *c* dipende soltanto dalla temperatura assoluta:

$$c = c_0 \sqrt{\frac{T}{273.16}}$$

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Department of Engineering Ferrara

Nell'intorno delle condizioni ambientali tipiche dell'ambiente esterno l'espressione si può approssimare a:

$$c=331.6+0.6*T_c$$

Temperatura T_c [°C]	Velocità del suono c [m/s]
-10	325
0	331
10	337
20	343
30	349
40	355

Dove T_c è espressa in gradi centigradi.
Ad esempio, a 20°C si ottiene c=331.6+12=343.6 m/s

Per i liquidi l'espressione viene scritta in funzione del modulo di elasticità isotermico K_t e l'espressione diventa:

$$c=\sqrt{\frac{\gamma K_t}{\rho_0}}$$

Ad esempio, per acqua distillata a 20°C alla pressione atmosferica si ha:
ρ_0=998 kg/m^3 e γ=1.004 Kt=2.18x10^-9 kgs^2/m e pertanto c=1481 m/s

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Con un procedimento del tutto analogo è possibile estendere tale equazione a mezzi tridimensionali:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 p$$

dove è stato introdotto l'operatore differenziale del secondo ordine ∇^2 detto *Laplaciano.* L'espressione del Laplaciano varia a seconda del sistema di coordinate adottato; per un sistema tridimensionale descritto in coordinate cartesiane (*x*,*y*,*z*) si ha che:

$$\nabla^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]$$

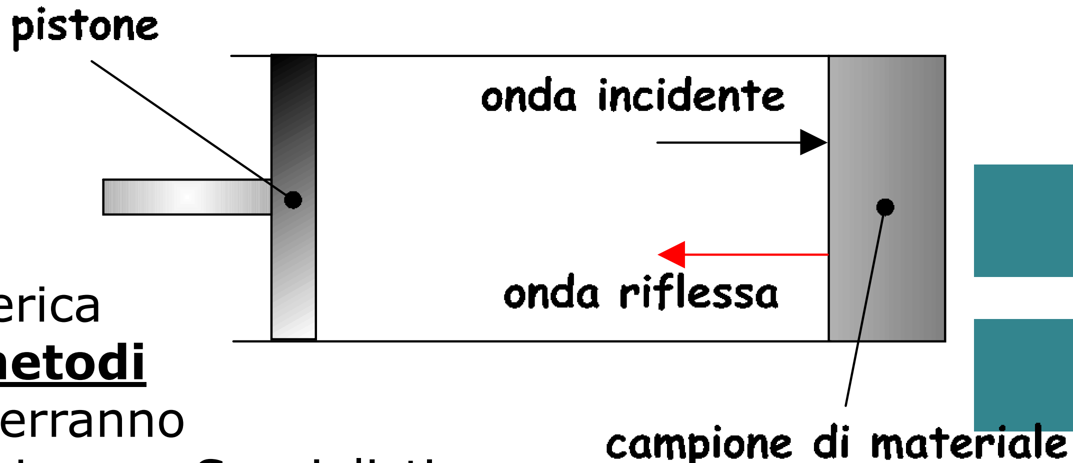
Se si considera la propagazione di onde sferiche generate da sorgenti puntiformi omnidirezionali conviene esprimere la relazione in coordinate sferiche:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}$$

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

<u>L'equazione D'Alembert</u> data la sua complessità, nella pratica si integra solo in tre casi:

- *onda piana progressiva*, è quell'onda che si sviluppa dentro il tubo di lunghezza indefinita quando il fluido al suo interno viene sollecitato da un pistone che si muove di moto armonico;
- *onda sferica progressiva*, generata da una sorgente sonora di forma sferica che irradia in ogni direzione il suono;
- *onda piana stazionaria*, è l'onda generata in un tubo di lunghezza finita con terminazione chiusa per effetto di un pistone che comprime il fluido



Per problemi geometricamente complessi esistono metodi di risoluzione numerica dell'equazione, chiamati <u>**metodi agli elementi finiti**</u> che verranno affrontati in un corso della Laurea Specialistica.

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Department of Engineering Ferrara

Soluzione dell'equazione di *D'Alembert* – Onde Piane

Risolvere tale equazione vuole dire essere in grado di ricostruire l'andamento del campo di pressione *p(x,t)* nel mezzo perturbato dal fenomeno acustico. E' facile provare che una soluzione è data da:

$$p(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$

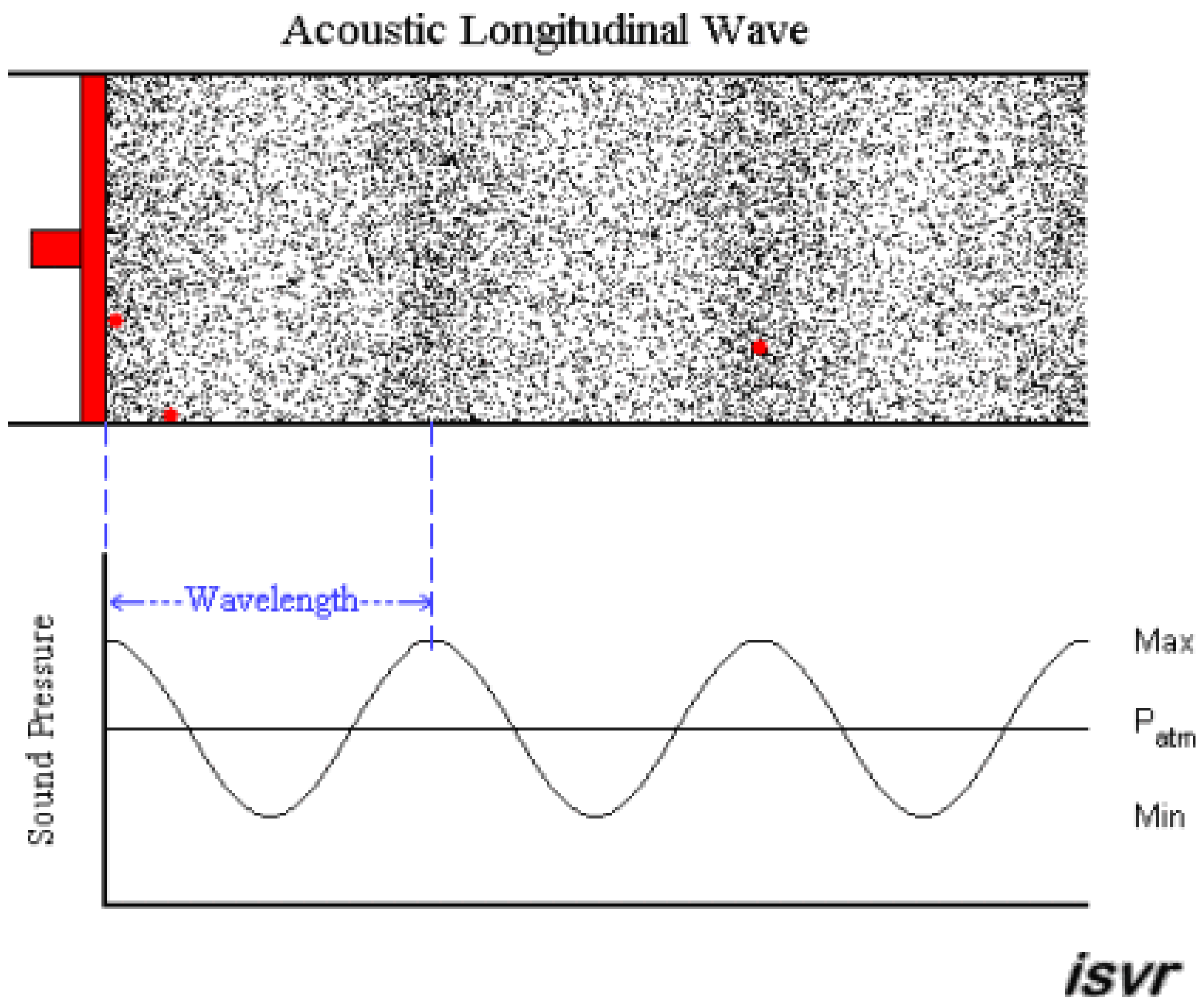
Cioè da un campo oscillante con oscillazioni periodiche di frequenza pari a

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

che si propaga in direzione *x* con velocità *c*.
Il fattore *k* è detto numero d'onda e se si definisce come lunghezza d'onda (λ) la distanza percorsa dalla perturbazione in un periodo $T=f^{-1}$ allora si può esprimere il numero d'onda come:

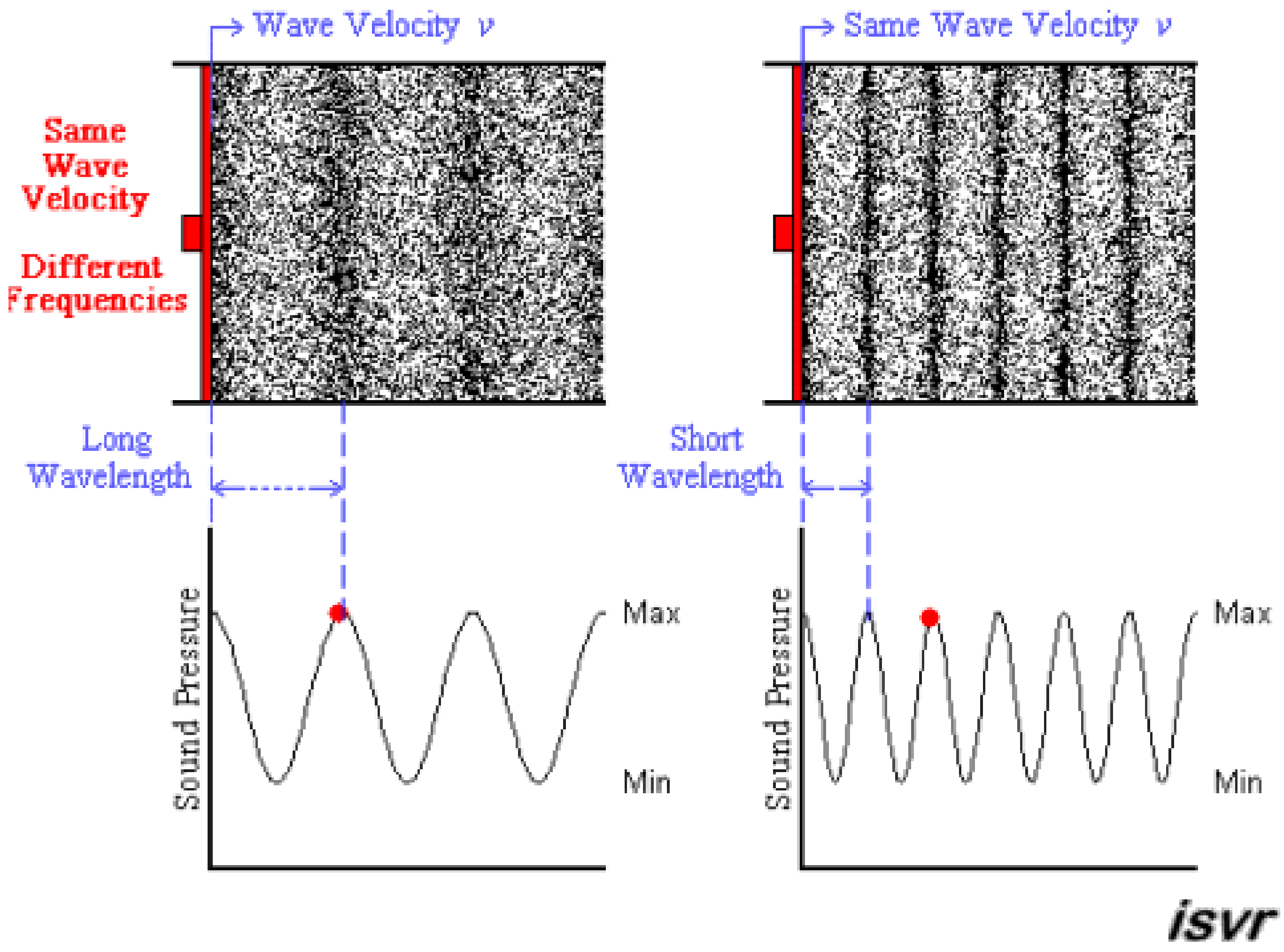
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale



Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

DE Department of Engineering Ferrara



Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Combinando le eq.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{con la} \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = -\gamma p_0 \frac{\partial u}{\partial x}$$

si ottiene che:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

che sottolinea come le variazioni di pressione provocate dal passaggio dell’onda nel mezzo siano direttamente proporzionali alle variazioni di densità. Di conseguenza se si è in grado di risolvere l’equazione delle onde ricavando il campo di pressione nel mezzo, si può risalire al valore assunto dalla densità delle particelle nel mezzo semplicemente dividendo per la velocità del suono al quadrato il campo di pressione:

$$\rho(x,t) = \frac{p(x,t)}{c^2}$$

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Department of Engineering Ferrara

Occorre inoltre sottolineare che mediante **l'equazione del moto**

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}}$$

è possibile correlare il campo di pressione nel mezzo al campo di velocità; integrando ambo i membri rispetto al tempo si ottiene infatti che:

$$u(x,t) = -\frac{1}{\rho_0}\int \frac{\partial p}{\partial x}\,dt$$

Più in generale, detta con *n* la direzione di propagazione dell'onda:

$$u(n,t) = -\frac{1}{\rho_0}\int \frac{\partial p}{\partial n}\,dt$$

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

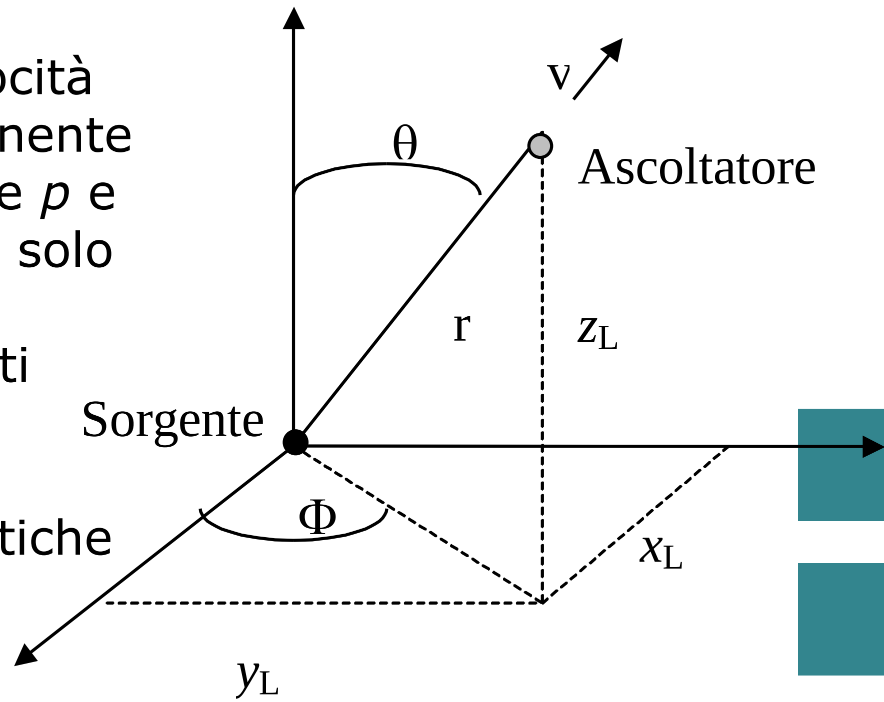
Department of Engineering Ferrara

Soluzione dell'equazione di *D'Alembert* – Onde Sferiche

Un'onda a simmetria sferica che si allontana da una sorgente in un mezzo fluido non limitato è un'altra idealizzazione, dopo l'onda piana, di una perturbazione acustica; si consideri la sorgente centrata all'origine degli assi.

Per questioni di simmetria, la velocità del fluido avrà come unica componente quella radiale e quindi la pressione *p* e la velocità radiale *u* dipenderanno solo da *r* e *t*.

Per sistemi tridimensionali descritti in coordinate sferiche (r,φ,ω) (particolarmente indicate quando si ha a che fare con sorgenti acustiche puntiformi) l'espressione assunta dal Laplaciano è la seguente:



Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

$$\nabla^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 sen\omega}\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{ctg\varphi}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi} \right]$$

Se si può considerare il mezzo isotropo allora l'espressione del Laplaciano in coordinate sferiche si semplifica potendosi trascurare ogni variazione delle grandezze fisiche di interesse in direzione ω e φ:

$$\nabla^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right]$$

Combinando l'espressione del Laplaciano in coordinate sferiche con l'equazione d'onda scritta in forma generalizzata si ottiene:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2}$$ od anche (visto che r non dipende da t):

$$\frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2}$$

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

In questo modo si è ottenuta un'equazione analoga a quella ricavata per onda piana, nel caso monodimensionale; l'unica differenza è nella variabile che, in questo caso, è data da (rp).

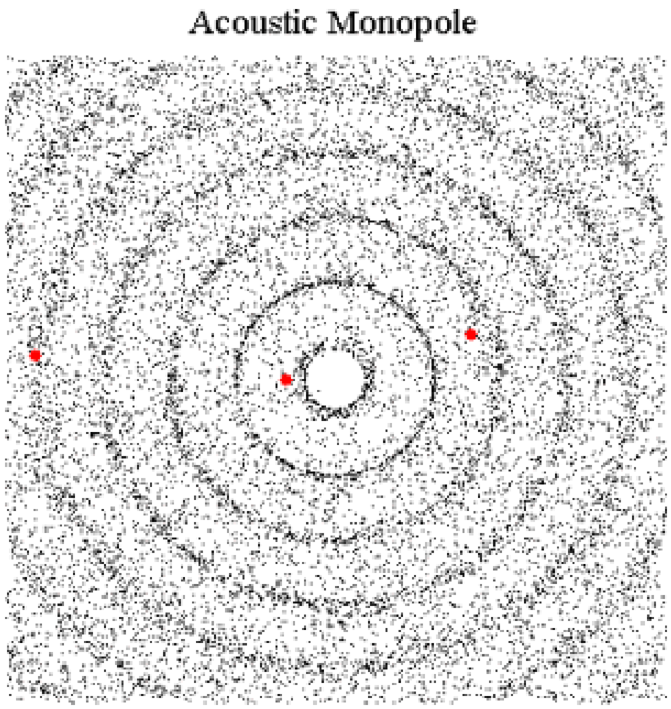
Come già visto, la soluzione dell'equazione delle onde è data da:

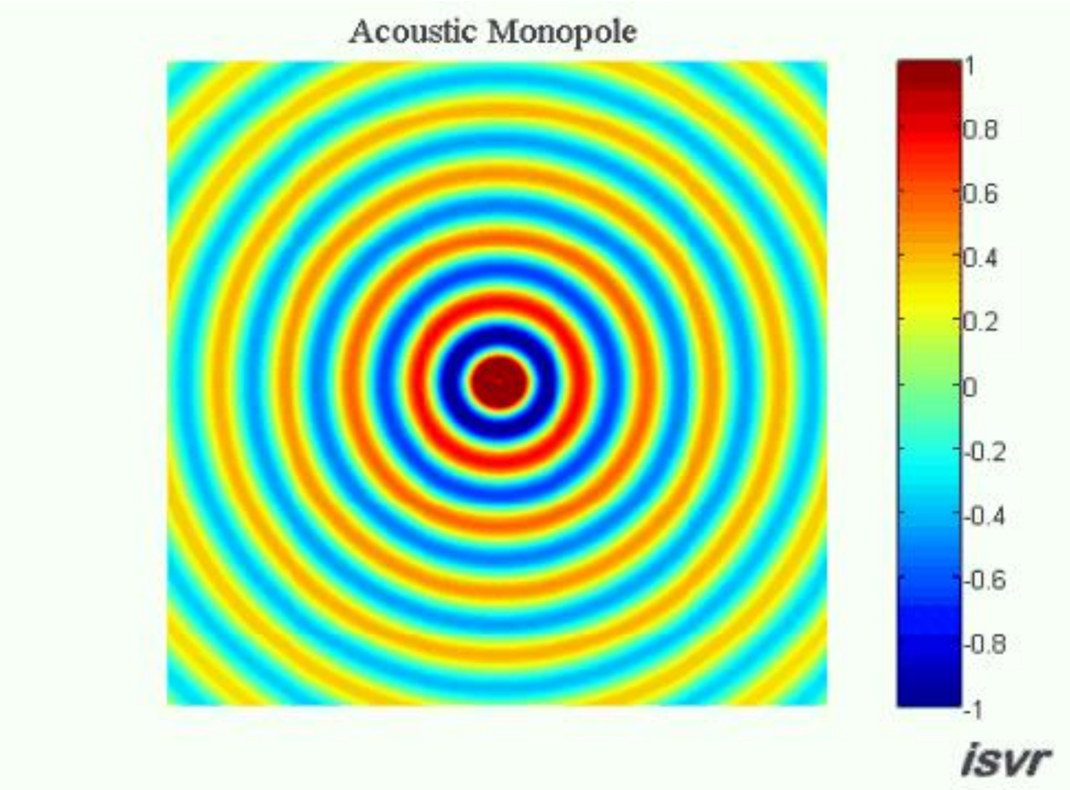
$$rp(r,t) = A\cos(\omega t - kr)$$

da cui si ricava:

$$\boxed{p(r,t) = \frac{A\cos(\omega t - kr)}{r}}$$

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale





Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

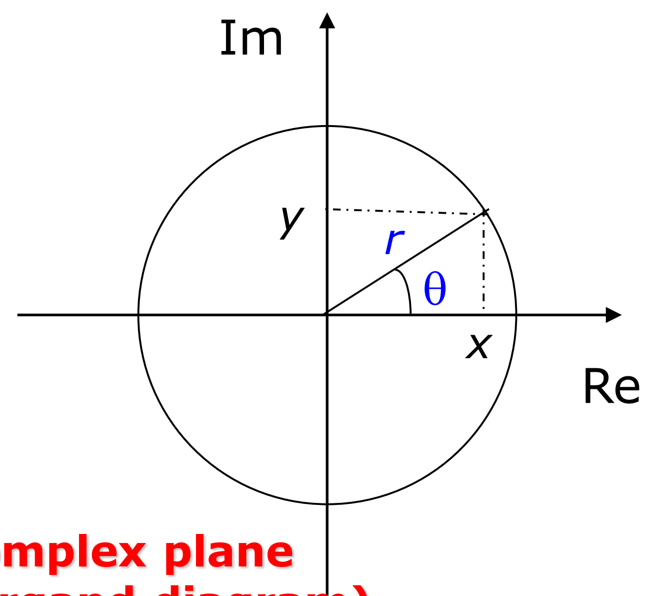
E' più conveniente esprimere la soluzione dell' equazione delle onde (piane o sferiche) in notazione complessa:

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

DE Department of Engineering Ferrara

Rappresentazione cartesiana

Un numero complesso: $z=x+iy$ può essere rappresentato come una coppia di numeri (x, y) che formano un vettore nel diagramma di *Argand*, che rappresenta il piano dei numeri complessi. "Re" è l’asse reale, "Im" è l’asse immaginario, e i soddisfa la relazione $i^2 = -1$.

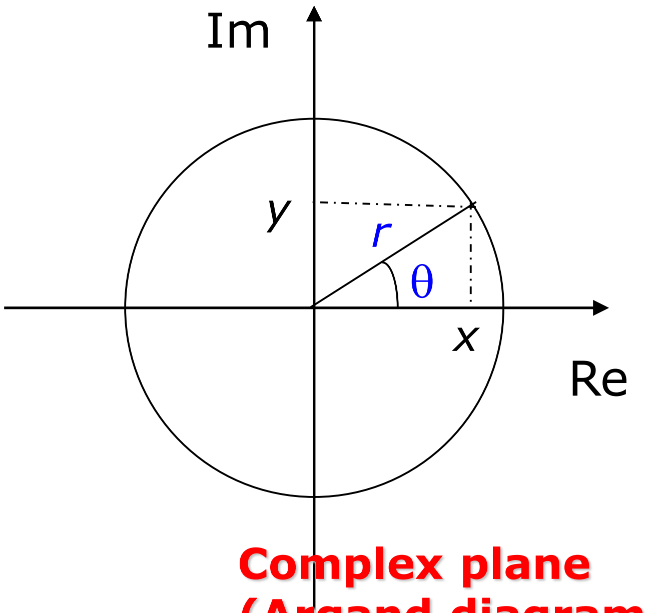


Complex plane (Argand diagram)

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Rappresentazione trigonometrica

Dato un numero complesso: z=*x*+*iy*



Complex plane (Argand diagram)

Modulo   Fase

$$x = r\cos\theta \quad e \quad y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

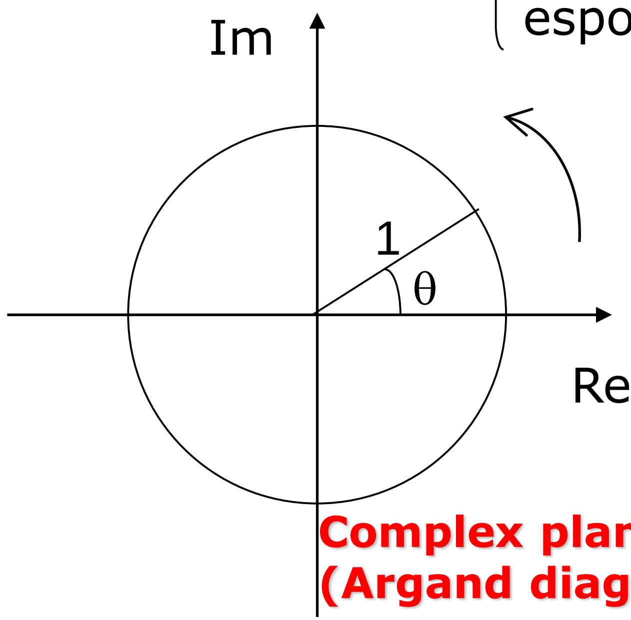
$$z = x + iy = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Rappresentazione esponenziale (Formula di Eulero):

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Consente di esprimere una qualunque funzione trigonometrica (seno, coseno, etc..) utilizzando degli esponenziali complessi. Quindi consente di passare dalla notazione trigonometrica a quella esponenziale



Complex plane (Argand diagram)

$e^{i\theta}$: Vettore di modulo unitario ruotato di θ rispetto all'asse delle ascisse. E' denominato "operatore di rotazione" di un angolo θ in senso antiorario

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Riassumendo:

- $z=x+iy$ *numero complesso in notazione algebrica*
- $z=r\,(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ *numero complesso in notazione trigonometrica*
- $z=re^{i\theta}$ *numero complesso in notazione esponenziale*

Caso particolare : $e^{i\pi} = \cos\pi+i\,\mathrm{sen}\,\pi=-1$

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Department of Engineering Ferrara

Onda piana armonica progressiva

In questo caso il campo di pressione *p(x,t)* può essere considerato come la **parte reale** di un campo di pressione complesso ***p***(*x,t*) che vale:

$$\boldsymbol{p}(x,t) = \hat{p}\ e^{i(\omega t - k_0 x)}$$

Infatti:

$$\hat{p}\ e^{i(\omega t - k_0 x)} \overset{\substack{\text{Notazione}\\ \text{esponenziale}}}{=} \boxed{\hat{p}\cos(\omega t - k_0 x)} + i\hat{p}\,\mathrm{sen}(\omega t - k_0 x)$$

$$p(x,t) = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{p}(x,t)\}$$

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Department of Engineering Ferrara

Onda sferica

In questo caso il campo di pressione *p(x,t)* può essere considerato come la **parte reale** di un campo di pressione complesso $\boldsymbol{p_c}(x,t)$ che vale:

$$p_c(r,t) = \frac{\hat{p} e^{i(\omega t - kr)}}{r}$$

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Department of Engineering Ferrara

Vantaggi della notazione complessa:

➢ ogni operazione di differenziazione e integrazione rispetto al tempo è equivalente rispettivamente ad una moltiplicazione o divisione del termine *iω*

$$u(t) = Ue^{i\omega t} \quad \begin{cases} \dot{u}(t) = \dfrac{d\left\{Ue^{i\omega t}\right\}}{dt} = i\omega Ue^{i\omega t} = i\omega u(t) \\ \ddot{u}(t) = \dfrac{d\left\{i\omega u\right\}}{dt} = i^2\omega^2 u = -\omega^2 u(t) \end{cases}$$

➢ il prodotto o la divisione di due grandezze si riduce ad una somma o differenza degli esponenziali

$$\frac{p_1(x,t)}{p_2(x,t)} = \frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_2} \cdot e^{i\varphi}$$

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Campo di velocità dedotto dal campo di pressione

Se si ricava dall'equazione delle onde il campo di pressione si è anche in grado di calcolare il campo di velocità dell'onda:

Onde piane:

Se si utilizza l'espressione complessa del campo di pressione si ottiene che:

$$\frac{\partial p_c}{\partial x} = -iAke^{i(\omega t - kx)}$$

Sostituendo tale espressione si è in grado di calcolare il campo di velocità in forma complessa nel mezzo:

$$u_c(x,t) = -\frac{1}{\rho_0}\int \frac{\partial p}{\partial x} dt = \frac{iAk}{\rho_0}\int e^{i(\omega t - kx)} dt = \frac{Ak}{\rho_0 \omega} e^{i(\omega t - kx)} = \frac{1}{\rho_0 c} p_c(x,t)$$

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Da tale relazione si può osservare come il campo di velocità complesso sia legato al campo di pressione da una relazione di diretta proporzionalità.

Il rapporto fra il campo di pressione complesso ed il campo di velocità complesso in un punto è definito **impedenza acustica specifica**:

$$z(P) = \frac{p(P,t)}{u(P,t)}$$

in cui si è indicato con P un generico punto dello spazio.

Tale parametro quantifica la resistenza che il mezzo in cui l'onda si propaga oppone al fenomeno acustico.

L'impedenza dipende quindi dal materiale e dalla forma dell'onda acustica (piana, sferica, ecc..) e, per come è definita, è in generale un numero complesso.

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Se si indica con *r* la parte reale dell'impedenza *z* e con *x* la parte immaginaria di *z*, è sempre possibile scrivere l'impedenza acustica specifica come:

$$z(P) = r(P,t) + ix(P,t)$$

r(P,t) è detta **resistenza acustica** ed *x(P,t)* è detta **reattanza acustica**

Nel caso di onde piane l'impedenza acustica assume un valore reale pari a $\rho_0 c_0$ costante in ogni punto dello spazio:

$$z(P) = \frac{p(P,t)}{u(P,t)} = \rho_0 c_0$$

Si può quindi affermare che per un'onda piana l'impedenza acustica coincide con la resistenza acustica visto che la reattanza acustica è nulla.

L'impedenza ha le dimensioni di una resistenza per unità d'area $[\rho_0 c_0] = [M][T]^{-1}[L]^{-2}$. La sua unità di misura nel sistema MKS è il mks rayl.

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Department of Engineering Ferrara

Nell'aria alla temperatura di 0°C: $\rho_0 c_0$ =427kg/m²s.
Per pressioni di circa 1N/m², la velocità delle particelle sarà:

$$u = \frac{p}{\rho_0 c_0} = \frac{1N}{m^2} \cdot \frac{m^2 s}{427\,kg} = 2.34 \cdot 10^{-3}\,\frac{m}{s}$$

Nell'acqua ρ c=1,5•106 kg/m²s (circa 3000 volte maggiore di quella dell'aria), quindi per la stessa pressione, la velocità della particella nell'acqua sarà 3000 volte minore che nell'aria.

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Onde sferiche

Il campo di pressione al campo di velocità è dato da:

$$u(r,t) = -\frac{1}{\rho_0}\int \frac{\partial p}{\partial r}\,dt$$

Se si introduce il campo di pressione complesso p_c si ricava il campo di velocità in rappresentazione complessa $u_c(r,t)$.
Facendo la derivata rispetto ad r del campo di pressione complesso e sostituendola nell'integrale si ottiene:

$$u_c(r,t) = -\frac{1}{\rho_0}\int dt\left(\frac{(-ikr)Ae^{i(\omega t-kr)} - Ae^{i(\omega t-kr)}}{r^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\rho_0 r^2}\left(-\frac{Ar}{c}e^{i(\omega t-kr)} - \frac{A}{i\omega}e^{i(\omega t-kr)}\right) =$$

$$= \frac{Ae^{i(\omega t-kr)}}{\rho_0 r}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{i\omega r}\right) = \frac{p_c(r,t)}{\rho_0 c}\left(1-i\frac{1}{kr}\right)$$

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Department of Engineering Ferrara

Per **un onda sferica** in aria l'impedenza è pari a:

$$z(r) = \frac{p(r,t)}{v(r,t)} = \frac{p(r,t)}{\left(\frac{p(r,t)}{\rho_0 c_0}\right) \cdot \left(1 - i \cdot \frac{1}{kr}\right)} = \rho_0 c_0 \cdot \left(\frac{1 + ik_0 r}{ik_0 r}\right)$$

NB:

Contrariamente alle onde piane, per le **onde sferiche** l'impedenza non dipende solo dal mezzo ma anche dalla distanza dalla sorgente

Propagazione delle onde sonore in un fluido ideale

Ci sono due regioni di interesse messe in luce dalla relazione fra pressione e velocità:

kr «1 e kr »1.

Quando **kr»1**, la (A.43) si riduce a

$$u_c(r,t) = \frac{p_c(r,t)}{\rho_0 c}$$

ovvero è formalmente identica alla relazione ottenuta nel caso di onde acustiche piane.

Quando ***kr* «1**, la (A.43) diventa

$$uc(r,t) = \frac{p_c(r,t)}{i\rho_0 \omega r} = -i\,\frac{p_c(r,t)}{\rho_0 \omega r}$$

La regione in cui *kr* »1 è spesso chiamata ***campo lontano*** mentre quella per cui *kr* «1 è detta ***campo vicino***; per onde sferiche viene spesso scelto il valore *kr* = 10 come limite inferiore della regione di campo lontano. La regione di campo lontano è quella che dista dalla sorgente più di 1,6λ dove λ è la lunghezza d'onda del segnale emesso dalla sorgente.

Definizione delle grandezze energetiche

Department of Engineering Ferrara

Grandezze energetiche utilizzate per la descrizione dei fenomeni legati alla propagazione dell’onda sonora:

- ***Pressione efficace acustica:***

$$\overline{p}_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T_M}\int_0^{T_M} p^2(t)dt}$$

ONDE PIANE:

$$p_{eff}(x) = A\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T}\left|\cos(\omega t - kx)\right|^2 dt} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

ONDE SFERICHE:

$$p_{eff}(r) = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T}\left|\frac{A\cos(\omega t - kr)}{r}\right|^2 dt} = \frac{A}{r}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T}\left|\cos(\omega t - kr)\right|^2} = \frac{A}{r\sqrt{2}}$$

Definizione delle grandezze energetiche

Department of Engineering Ferrara

- ***<u>Intensità acustica:</u>*** è l'energia che fluisce nell'unità di tempo attraverso una superficie unitaria

$$\vec{I}(P,t) = p(P,t)\vec{u}(P,t) \qquad [W/m^2]$$

L'intensità acustica, data la sua natura vettoriale, permette di determinare anche la direzione del flusso di energia

L'energia trasportata da un'onda sonora si compone di una parte
cinetica legata al moto delle particelle e di una parte potenziale, dovuta ai processi di compressione e rarefazione, di natura elastica

Definizione delle grandezze energetiche

Department of Engineering Ferrara

Intensità acustica mediata nel tempo T:

$$I(P) = \frac{1}{T}\int_0^T I(P,t)\,dt$$

ONDE PIANE:

$$I(P) = \frac{{p_{eff}}^2}{\rho_0 c}\cos\theta$$

ONDE SFERICHE:

$$I(P) = \frac{p_{eff}^2}{\mathrm{Re}\left(\dfrac{\rho_0 c}{\left(1 - \dfrac{i}{kr}\right)}\right)}\cos\theta = p_{eff}^2 \cos\theta \,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\rho_0 c} - i\,\frac{1}{\rho_0 \omega r}\right]$$

Definizione delle grandezze energetiche

Department of Engineering Ferrara

- ***Densità di energia acustica:***

Si consideri un punto *P* ed un volumetto *dV* centrato in *P*; l'energia cinetica associata al volumetto *dV* del mezzo in cui si propaga il fenomeno sonoro è data da:

$$e_c(P,t) = \frac{1}{2}\rho_0 u^2(P,t)$$

ricordando che *dV* e la massa *dM* in esso contenuta sono legati dalla relazione $dM=\rho_0 dV$.

L'energia potenziale associata allo stesso elemento *dV* si può esprimere:

$$e_p(P,t) = \rho_0 \cdot \left(-\int p dv\right) \Rightarrow e_p(P,t) = \rho_0 \cdot \left(-\int p dv\right) = \frac{1}{\rho_0 c^2}\int p dp = \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho_0 c^2}$$

Si definisce densità di energia sonora la somma delle densità di energia cinetica e potenziale

$$w(P,t) = ec(P,t) + ep(P,t) = \frac{1}{2}\rho_0 u^2(P,t) + \frac{1}{2}\frac{p^2(P,t)}{\rho_0 c^2}$$

Definizione delle grandezze energetiche

➢ ***Densità di energia acustica:***

ONDE PIANE: $$w(P) = \frac{1}{T}\int_0^T w(P,t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{p^2(P,t)}{\rho_0 c^2}dt = \frac{p_{eff}{}^2}{\rho_0 c^2}$$

$$I_0 (P) = w(P)c$$

ONDE SFERICHE:

$$w(P) = \frac{1}{T}\int_0^T w(P,t)dt = \frac{p_{eff}{}^2}{2\rho_0 c^2} + \frac{p_{eff}{}^2}{2\rho_0 c^2}\left(1 - \frac{2i}{kr} - \frac{1}{k^2 r^2}\right)$$

Come si può notare, anche in questo caso per grandi valori di r (kr »1) ritroviamo l'espressione ottenuta per le onde piane.

Definizione delle grandezze energetiche

DE Department of Engineering Ferrara

➢ ***Potenza acustica**:* rappresenta l'energia sonora emessa da una
sorgente nell'unita di tempo. Per il teorema di Gauss:

$$W = \int\int_S I \cdot n dS \quad [W]$$

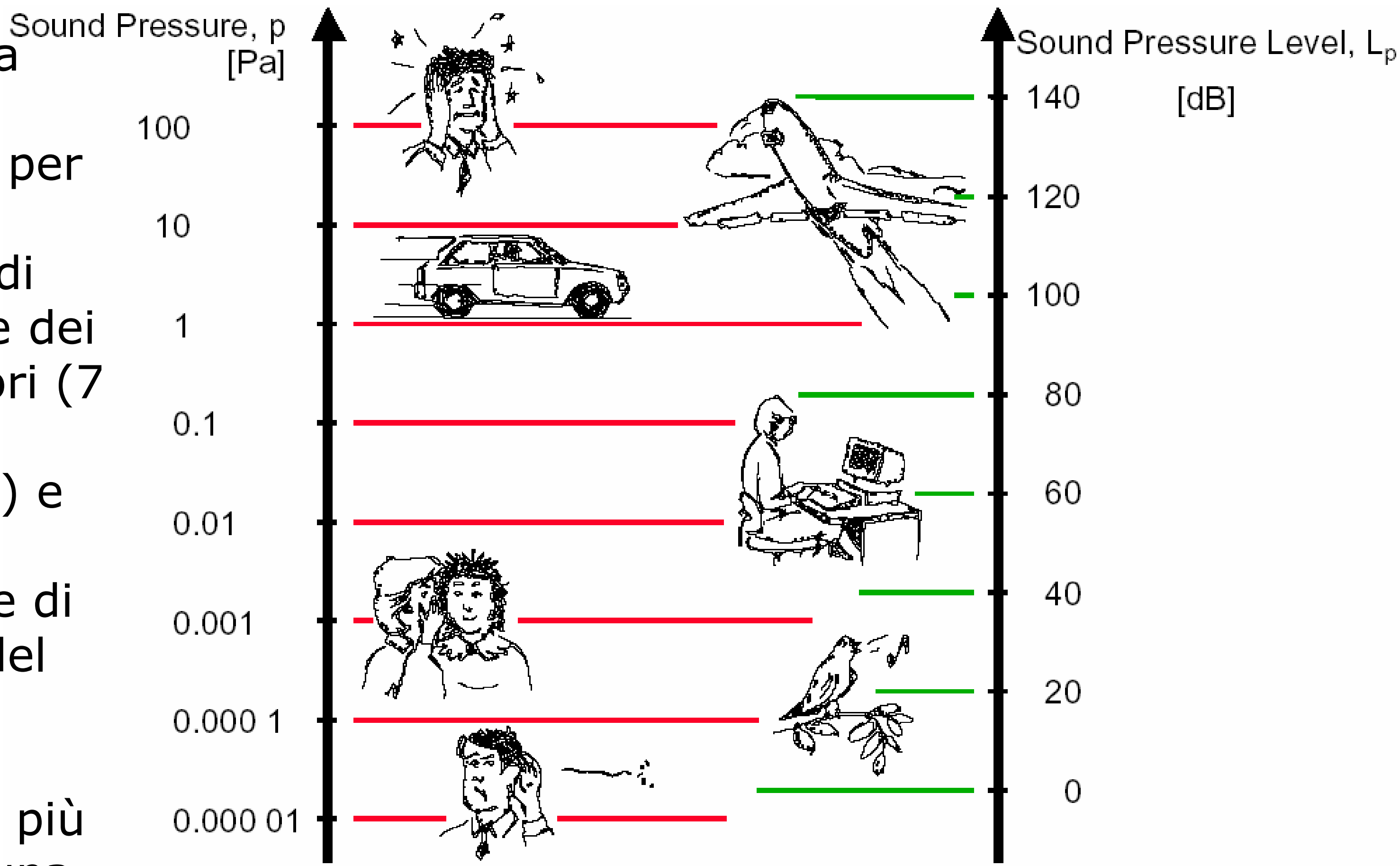
dove n è il versore normale alla superficie infinitesima e S è una qualunque superficie chiusa che racchiude la sorgente
La potenza sonora è la vera grandezza caratteristica della sorgente e della sua emissione sonora, indipendente dall'ambiente e dalle condizioni in cui tale sorgente è posta

ONDE PIANE: $W = I_0 \cdot S = wcS$

ONDE SFERICHE: $W = \int I_0 2\pi r dr = I_0 \cdot 4\pi r^2 = I_0 \cdot S$

Scala dei decibel e livelli sonori

La scala logaritmica viene introdotta per il grande intervallo di percezione dei livelli sonori (7 ordini di grandezza) e perché la sensazione di intensità del suono del nostro orecchio è più simile ad una scala logaritmica



Scala dei decibel e livelli sonori

Department of Engineering Ferrara

La scala logaritmica consente di confrontare i valori della grandezza in esame con valori convenzionali della stessa grandezza assunti come riferimento.
Il logaritmo decimale del rapporto tra questi valori, moltiplicato per 10 per non comprimere troppo la scala, rappresenta il livello della grandezza in esame. Il risultato viene espresso in dB nonostante rappresenti una quantità adimensionale.

Grandezza fisica	Riferimento	Livello
Energia sonora p^2	p_o=20*10^-6 Pa	$Lp=10\log(p^2/p^2o)$
Potenza sonora W	Wo=10^-12 W	$L_W=10\log(W/W_o)$
Intensità sonora I	Io=10^-12 W/m^2	$L_I=10\log(I/I_o)$

Scala dei decibel e livelli sonori

DE Department of Engineering Ferrara

$$L_p = 20 \log \frac{p}{p_0} \text{ dB re } 20\ \mu\text{Pa}$$

$$(p_0 = 20\ \mu\text{Pa} = 20 \times 10^{-6}\ \text{Pa})$$

Es. 1:

$p = 1$ Pa

$$L_p = 20 \log \frac{1}{20 \times 10^{-6}}$$

$= 20 \log 50\,000$

$= 94$ dB

Es. 2:

$p = 31.7$ Pa

$$L_p = 20 \log \frac{31.7}{20 \times 10^{-6}}$$

$= 20 \log 1.58 \times 10^{-6}$

$= 124$ dB

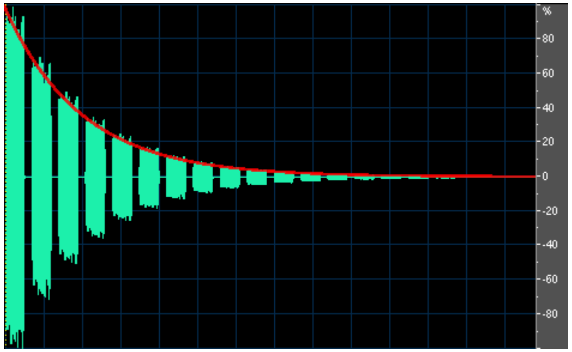
Scala dei decibel e livelli sonori

DE Department of Engineering Ferrara

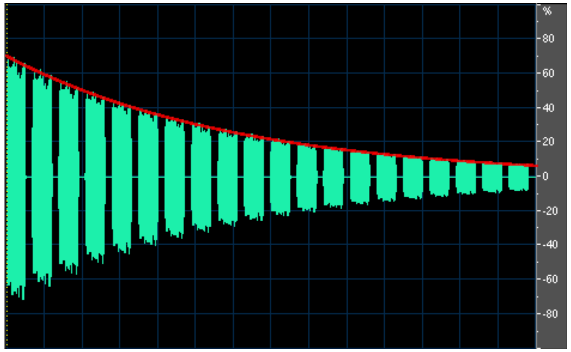
Differenza di livello [dB]	***Differenza di percezione***
-1	Quasi nulla
-3	Modesta
-5	Notevole
-10	Dimezzamento della sensazione
-15	Molto ampia

Valutazione dei livelli in termini percettivi

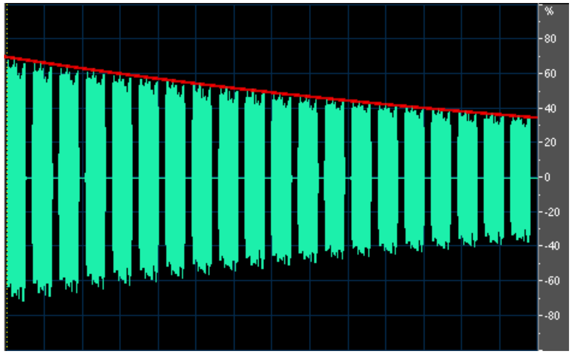
DE Department of Engineering Ferrara



Step di – 3 dB (.wav)



Step di – 1 dB (.wav)



Step di – 0.3 dB (.wav)

Operazioni con i livelli: somma

Department of Engineering Ferrara

Se immaginiamo due sorgenti scorrelate tra loro (non in fase) i contributi delle singole sorgenti si sommano su base energetica:

$$p_1^2 = p_0^2 10^{\frac{Lp1}{10}}$$

$$p_2^2 = p_0^2 10^{\frac{Lp2}{10}}$$

$$\Rightarrow \quad L_{pt} = 10\log\frac{p_1^2 + p_2^2}{p_0^2} = 10\log\left(10^{\frac{Lp1}{10}} + 10^{\frac{Lp2}{10}}\right)$$

NB: se $p_1=p_2$ allora $L_{pt}=L_{p1}+3$ essendo $\log(2)=0.3$, e analogamente 4 sorgenti uguali portano ad un incremento di 6 dB, 8 ad un incremento di 9 dB, ecc.

Department of Engineering Ferrara

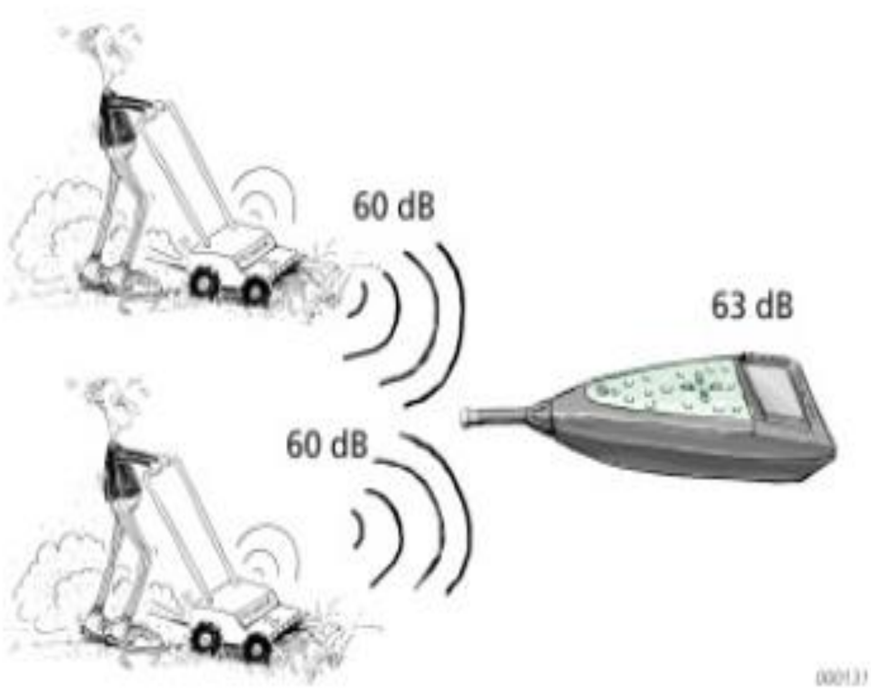
Somma di livelli sonori

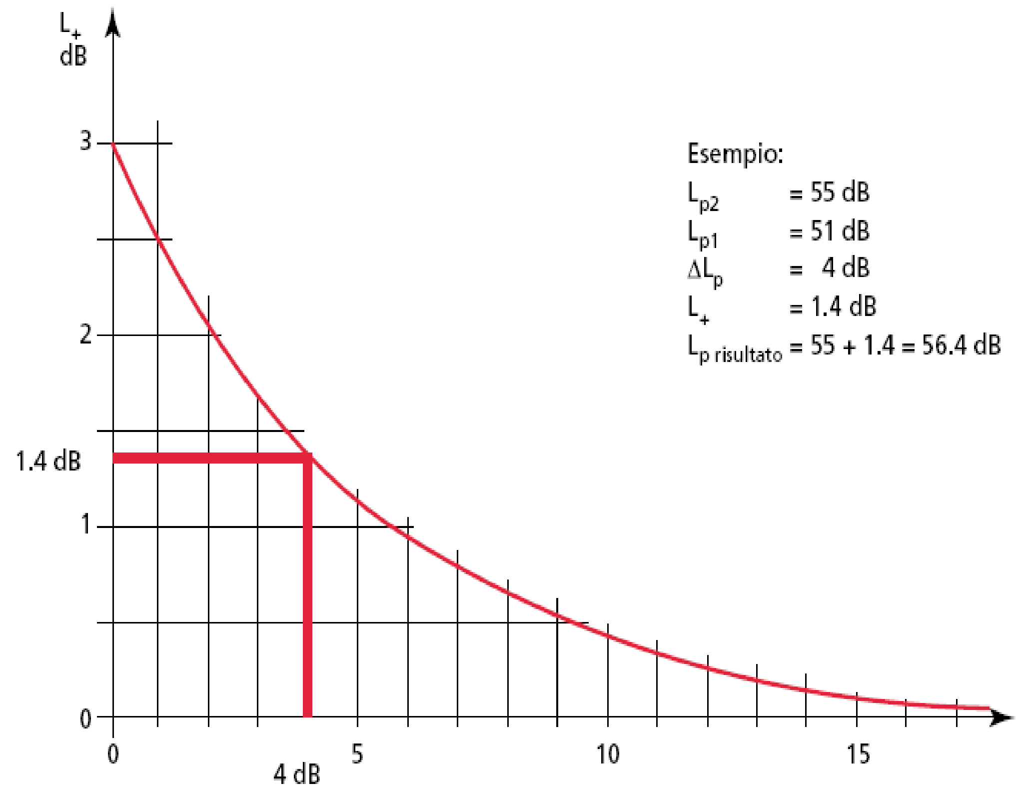
Air conditioning system noise:	**70 dB(A)**
Traffic noise:	**68 dB(A)**
Global noise	**72,1 dB(A)**

Somma di livelli sonori

Più in generale:

$$L_{ptotale} = 10 \cdot \log\left(10^{\frac{L_{p1}}{10}} + 10^{\frac{L_{p2}}{10}} + 10^{\frac{L_{p3}}{10}} + \ldots + 10^{\frac{L_{pn}}{10}}\right)$$





Operazioni con i livelli: differenza

Se immaginiamo due sorgenti scorrelate tra loro (non in fase) i contributi delle singole sorgenti si sottraggono su base energetica:

$$p_1^2 = p_0^2 10^{\frac{Lp1}{10}}$$

$$p_2^2 = p_0^2 10^{\frac{Lp2}{10}}$$

$$\Rightarrow \quad L_{pt} = 10\log\frac{p_1^2 - p_2^2}{p_0^2} = 10\log\left(10^{\frac{Lp1}{10}} - 10^{\frac{Lp2}{10}}\right)$$

NB: se $p_1=10*p_2$ allora $L_{pt}=L_{p1}- 0.5$, quindi si può dire che livelli sonori inferiori di 10 dB a quello principale sono trascurabili.

ESEMPIO di differenza di livelli:
Livello sorgente=Livello ambientale – Livello rumore di fondo

Operazioni con i livelli: differenza

Department of Engineering Ferrara

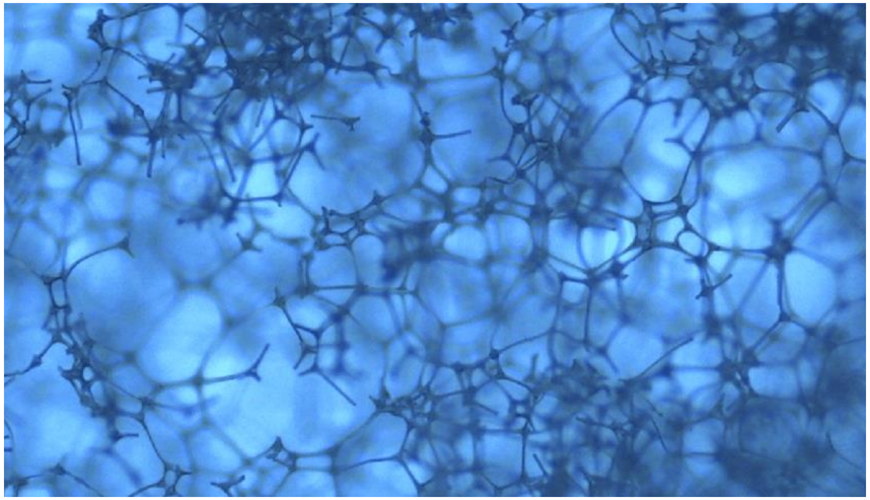
Global noise: **72 dB(A)**

Background noise (traffic): **68 dB(A)**

Source noise

(air conditioning system): **69,8 dB(A)**

Propagazione delle onde sonore nei materiali dissipativi



Propagazione delle onde sonore nei materiali dissipativi

Nella derivazione dell'equazione delle onde in fluido ideale è stato trascurato qualunque effetto dissipativo nel mezzo in cui l'onda sonora si propaga.

Nei mezzi dissipativi si dimostra che l'ampiezza della pressione non rimane costante ma decresce in accordo ad una legge di tipo esponenziale.

L'espressione dell'onda piana progressiva è:

$$p(x,t) = \hat{p}\, e^{-\alpha' x} e^{i(\omega t - k_0 x)} = \hat{p} e^{i(\omega t - k_c x)}$$

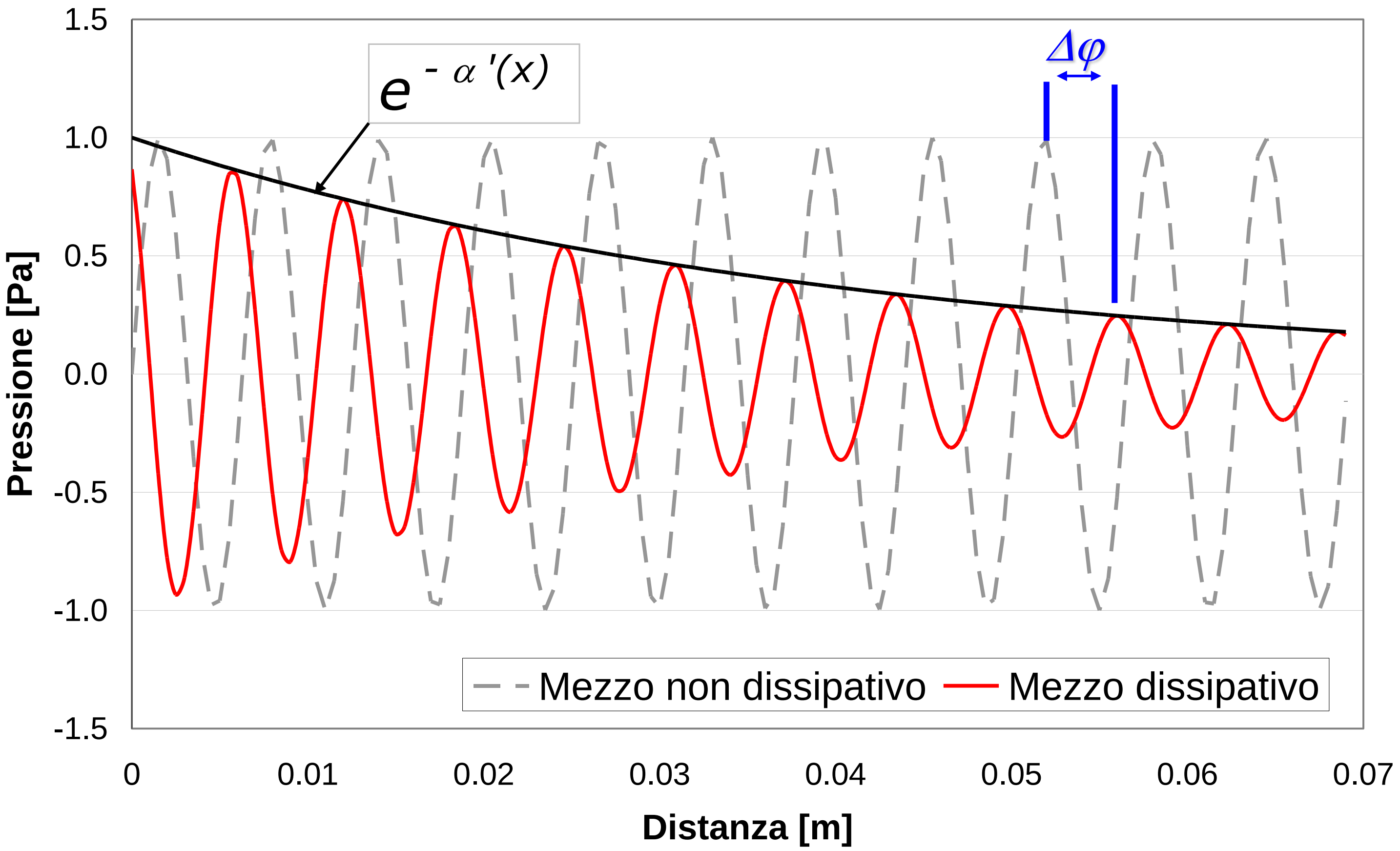
α' : costante di attenuazione [m^{-1}]

$k_c = k_0 - i\alpha'$: numero d'onda complesso [m^{-1}]

$\gamma_c = ik_c$: costante di propagazione [m^{-1}]

Propagazione delle onde sonore nei materiali dissipativi

Andamento dell'ampiezza della pressione in mezzi dissipativi



Propagazione delle onde sonore nei materiali dissipativi

Velocità di particella in un mezzo dissipativo (componente lungo la direzione di propagazione):

$$v(x,t) = \hat{v}e^{i(\omega t - k_c x + \varphi)}$$

L'impedenza caratteristica è data da:

$$Z_c = \frac{p(x,t)}{v(x,t)} = \frac{\hat{p}}{\hat{v}}e^{i\varphi} = \mathrm{Re}[Z_c] + i\,\mathrm{Im}[Z_c]$$

NB: per i materiali dissipativi l'impedenza caratteristica è complessa (velocità e pressione delle particelle sono sfasate tra loro di un angolo φ)

Propagazione delle onde sonore nei materiali dissipativi

Department of Engineering Ferrara

➢L'impedenza caratteristica $\boldsymbol{Z_c}$ e il numero d'onda complesso $\boldsymbol{k_c}$ (o la costante di propagazione) sono proprietà del mezzo e consentono di determinare completamente il campo acustico in un mezzo dissipativo.

➢Per materiali a struttura rigida si può utilizzare il concetto di fluido equivalente dissipativo e tutte le equazioni presentate per la propagazione in un fluido ideale sono formalmente valide a condizione che vengano utilizzate delle espressioni complesse per la velocità del suono $\boldsymbol{c_c}$ e per la densità $\boldsymbol{\rho_c}$:

$$c_c = \frac{\omega}{k_c} \qquad \text{e} \qquad \rho_c = \frac{Z_c}{c_c}$$

➢In analogia al caso del fluido ideale si definisce il modulo di comprimibilità dinamico in un mezzo dissipativo $\boldsymbol{K_c}$:

$$K_c = \rho_c c_c^2$$