

1. Linee guida per l'allestimento di prove sperimentali

Metodologie ed attrezzature utilizzate per l'analisi modale sperimentale possono variare sensibilmente a seconda delle caratteristiche del sistema oggetto di studio, di particolari esigenze del committente e/o dello sperimentatore.

Ad esempio è evidente che le metodologie e la strumentazione utilizzata per valutare la risposta della struttura di una piattaforma petrolifera alle sollecitazioni imposte dal moto ondoso non potranno essere le stesse che vengono utilizzate per studiare analizzare le vibrazioni di una macchina utensile destinata a lavorazioni ad alta velocità.

L'obiettivo che ci si ripropone in questo breve capitolo è quello fornire delle semplici linee guida che aiutino a focalizzare l'attenzione su quelle che sono le effettive problematiche della sperimentazione ed a pianificarne l'esecuzione.

In particolare l'attenzione si concentrerà su come il montaggio dei diversi componenti che compongono l'apparato sperimentale può influenzare l'identificazione delle Funzioni di Risposta in Frequenza di un sistema meccanico.

1.1. **Obiettivo della Attività Sperimentale**

Per poter pianificare una attività sperimentale, come del resto tutte le attività, è indispensabile individuare chiaramente l'OBIETTIVO dell'attività stessa. L'*obiettivo* condiziona infatti fortemente tutti gli aspetti fondamentali del progetto dell'attività, tra cui si ricordano:

- Metodologie che si intende utilizzare;
- Quantità e caratteristiche della strumentazione da utilizzare;
- Costo Economico (Budget);
- Tempi disponibili per l'esecuzione delle prove e l'elaborazione dei risultati.

Ancora una volta degli esempi possono chiarire come l'obiettivo condizioni il tipo di studio:

- ***Stima Approssimata delle frequenze proprie e dei modi del sistema meccanico.*** Tale attività può essere richiesta specificatamente da un cliente, e viene generalmente realizzata modificando un modello già in produzione. Se ad esempio si fa riferimento ad una macchina utensile destinata ad eseguire particolari lavorazioni meccaniche, tale attività diventa fondamentale quando si verifica che la macchina non soddisfa le specifiche di progetto. Ad esempio può accadere che in determinate condizioni (es.

particolari posizioni di lavoro o regime di giri) si avvertono delle vibrazioni che ne compromettono il funzionamento. L'ufficio tecnico potrebbe aver individuato alcune possibili cause di questo fenomeno, ma ha bisogno di ulteriori informazioni prima di procedere. In questo semplice esempio, l'individuazione anche approssimativa delle frequenze a cui si manifesta il fenomeno e una stima anche molto rozza dei modi associati, può contribuire ad individuare, tra le possibili concause, quella che effettivamente determina il cattivo funzionamento della macchina.

- ***Valutazione di Modi, frequenze proprie e fattori di smorzamento, identificazione di un modello matematico per il sistema meccanico.*** Si immagini di partecipare alla progettazione di un nuovo prodotto, ad esempio una lavatrice industriale. Precedenti esperienze hanno evidenziato problemi di forti vibrazioni del cestello della macchina all'avvio della centrifuga che ne limitano il regime di giri ed il carico. Per studiare il problema ed ottimizzare, ad esempio la posizione e le caratteristiche delle sospensioni del cestello, può essere utile la costruzione di un modello matematico più o meno semplice del sistema. Questo scopo può essere ottenuto utilizzando tecniche di modellazione ai parametri concentrati, FEM o MultiBody, oppure cercando di identificare direttamente le caratteristiche matematiche del modello a partire da misure sperimentali effettuate su un prototipo. Attraverso le misure non è solo possibile ricavare un modello matematico, ma è anche possibile validare il modello matematico stesso (comunque questo sia stato ottenuto) e/o sperimentare gli effetti delle soluzioni proposte.
- ***Studio Approfondito/Valutazione di non linearità presenti nel sistema/ creazione di librerie di sotto-modelli modali assemblabili, ecc...*** Se l'importanza dell'applicazione lo richiede si possono eseguire studi estremamente accurati tesi a ricostruire con la massima accuratezza la risposta del sistema tenendo conto di aspetti spesso trascurati come ad esempio la non linearità di alcuni componenti e/o le interazione tra i vari componenti di una macchina. Se il numero dei componenti e la complessità degli stessi risulta particolarmente elevate, può risultare indispensabile la messa a punto separatamente di diversi modelli matematici che riproducono la risposta delle varie componenti della macchina. Questi, una volta validati, possono essere assemblati per generare un macro-modello più grande in grado di tener conto delle reciproche

interazioni. Un esempio in tal senso può essere la progettazione della trasmissione di un locomotore ferroviario o di un autoveicolo: per i vari organi di trasmissioni (rinvii, giunti omocinetici, treni di ingranaggi, supporti) possono essere costruiti dei sotto-modelli dinamici molto accurati. Questi, una volta validati singolarmente, possono essere utilizzati assemblati e il modello complessivo può essere utilizzato per prevedere e/o eliminare alcuni problemi caratteristici della trasmissione (es. oscillazioni torsionali/flessionali non desiderate, vibrazioni, rumore, ecc...).

1.2. Scelta del Layout

Una volta individuato l'obiettivo dell'attività sperimentale occorre definire l'*architettura* (o Layout) dell'apparato sperimentale che si intende realizzare. Questo generalmente è composto dai seguenti elementi:

- **Sistema meccanico oggetto della sperimentazione.** Alcune scelte, come ad esempio il tipo di vincolo utilizzato per bloccare il sistema durante le prove, possono influenzare la risposta dinamica del sistema ed alterare quindi il risultato della prova.
- **Eccitazione.** Per studiarne la risposta dinamica del sistema, esso deve essere sottoposto a una qualche forma di eccitazione (una forza esterna). L'eccitazione deve essere **NOTA**, **RIPETIBILE** e **CONTROLLABILE**. Per questo motivo la forza effettivamente erogata dall'attuatore deve essere misurata tramite apposite celle di carico interposte tra l'attuatore stesso ed il sistema. L'attuatore, controllato dal relativo **DRIVER**, deve essere capace di riprodurre nella maniera più fedele possibile la forma d'onda richiesta dallo sperimentatore per verificare la risposta del sistema. Il montaggio degli attuatori ed il loro collegamento con il sistema deve essere effettuato in modo da ridurre/eliminare la possibilità che vengano trasmesse anche sollecitazioni non completamente note, non desiderate o comunque non riproducibili.
- **Misurazione.** La risposta del sistema viene misurata utilizzando uno o più sensori posti sul sistema oggetto di sperimentazione. Una oculata scelta dei punti di misura, delle grandezze acquisite, del tipo di sensori può contribuire sensibilmente a migliorare il rapporto segnale/rumore e quindi l'esito della prova. La maggior parte dei sensori non possono essere direttamente collegati alle schede di acquisizione (se si utilizzano PC) e/o agli analizzatori spettrali, ma necessitano di particolari apparecchiature dette

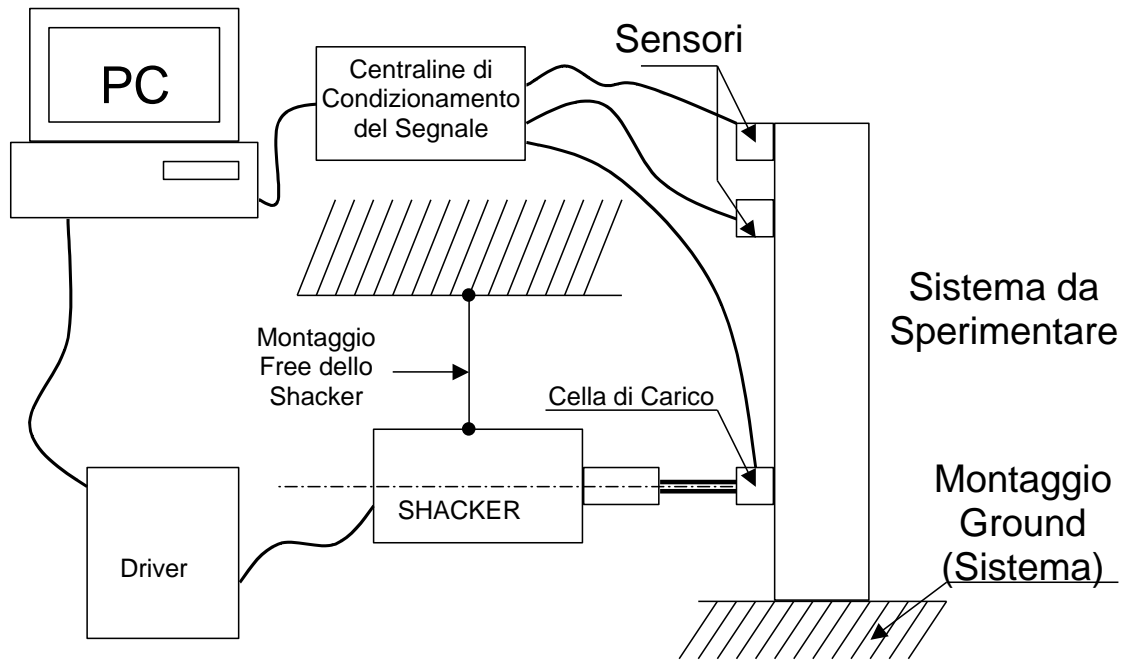
“Centraline di Condizionamento del Segnale”. Le Centraline di Condizionamento del Segnale (specifiche per ciascuna tipologia di sensore) assolvono numerosi funzioni:

- *Alimentazione Stabilizzata dei sensori;*
- *Amplificazione/Conversione del Segnale proveniente dai sensori;*
- *Filtraggio (Anti-Aliasing) del Segnale proveniente dai sensori.*

La verifica di cablaggi, connettori, messe a terra, protezioni da disturbi EMI sono indispensabili per ridurre al minimo l’entità di rumori/interferenze sul segnale acquisito.

E’ inutile ricordare che dimensioni, peso e montaggio dei sensori devono essere tali da non influenzare in maniera significativa la dinamica del sistema studiato.

- **Controllo ed Acquisizione.** Uno speciale dispositivo elettronico (un analizzatore spettrale, o un PC equipaggiato con schede di acquisizione) gestisce in tempo reale tutta la prova assolvendo alle seguenti funzioni:
 - *Generazione della forma d’onda desiderata per l’eccitazione;*
 - *Controllo e sincronizzazione dell’unità di Attuazione e della acquisizione dei dati;*
 - *Memorizzazione dei Dati;*
 - *Altre Attività opzionali (es. valutazione in tempo reale e/o in postprocessing di funzioni di trasferimento e/o grandezze correlate come Cross-Spettri, Auto-Spettri, funzioni di Coerenza, Trigger, medie eseguite su sequenze di prove ripetitive generate automaticamente, operatori statistici vari, ecc...).*

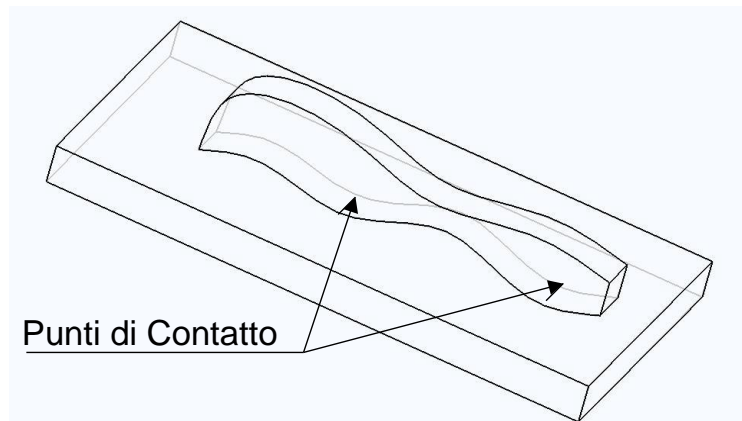


Esempio di Layout di prova con catena d misura

1.2.1. Montaggio del sistema da sperimentare

E' evidente che per poter effettuare delle prove è indispensabile vincolare in qualche modo su un telaio il sistema meccanico che si intende identificare. La risposta del sistema meccanico risulta pesantemente influenzata dall'interazione con il vincolo prescelto. E' opportuno quindi vincolare il componente oggetto della sperimentazione in modo da rendere facilmente individuabili ed isolabili dalla risposta del sistema i contributi derivanti dall'interazione tra sistema in analisi e vincolo.

Di solito si fa riferimento a due configurazioni limite: FREE e GROUND. Le condizioni di vincolo reali saranno sempre una 'via di mezzo' tra tali due configurazioni, ma si cercherà sempre di tendere il più possibile ad una di esse.



La trave di forma ‘complessa’ riportata nella figura soprastante è stata semplicemente appoggiata su una lastra di metallo. Lastra e trave sono geometricamente a contatto lungo due direttrici su cui risultano tangenti.

Il vincolo così realizzato è monilatero ed inoltre il contatto praticamente puntiforme che si genera introduce una cedevolezza del vincolo sicuramente non trascurabile.

Lo spostamento della trave in direzione tangenziale alla lastra è inoltre impedito dal solo attrito tangenziale tra le superfici per cui risulta difficile quantificarne l’entità o simularne l’effetto.

E’ superfluo aggiungere che un vincolo di questo tipo non risulta idoneo all’esecuzione di prove sperimentali sulla trave perché influenza pesantemente la risposta della trave in maniera difficilmente modellabile dallo sperimentatore.

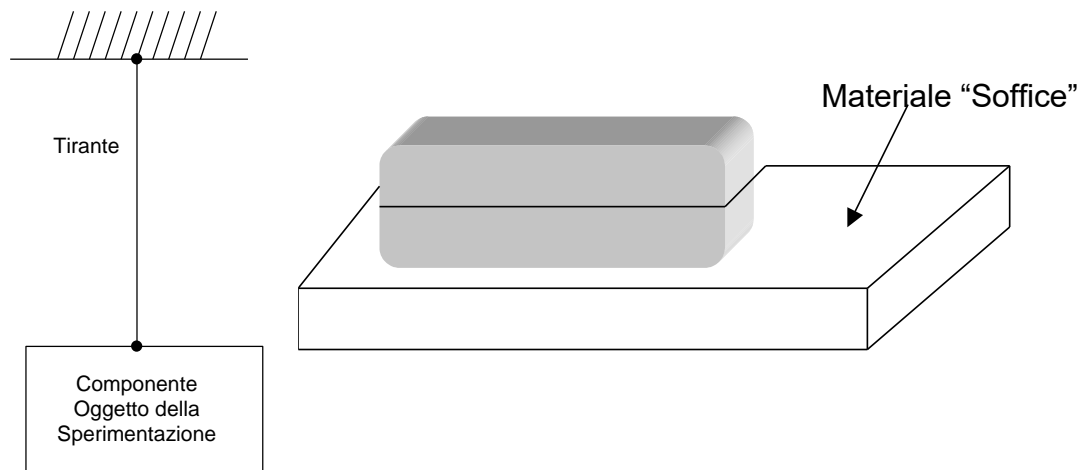
In sintesi occorre evitare tutte quelle condizioni di montaggio in cui risulta difficile modellare la risposta del vincolo e/o discriminare tra la risposta modale del componente oggetto della sperimentazione e quella dovuta all’interazione con il vincolo stesso.

1.2.2. Montaggio FREE

Un montaggio di tipo rigorosamente FREE prevede la scelta di un vincolo talmente cedevole da approssimare la condizione di assenza di vincoli (sistema labile): le frequenze introdotte dalla cedevolezza del vincolo sono generalmente molto basse. Agendo sulla rigidità del vincolo si fa dunque in modo che queste cadono molto al di sotto del campo di frequenze che si intende investigare.

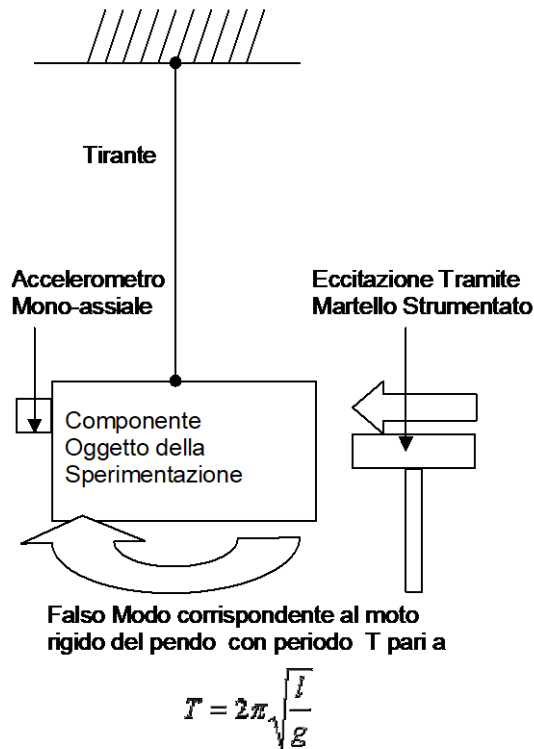
In questo modo il vincolo risulta facilmente modellabile come una completa labilità del sistema (assenza di vincoli/tutti i nodi sono liberi).

Tipiche tecniche di montaggio FREE consistono nel sospendere tramite uno o più tiranti (meglio se relativamente lunghi) il componente. Un'altra soluzione frequentemente adottata è quella di appoggiarlo su una sede costituita da materiale estremamente cedevole (es. gommapiuma, un letto di molle) incapace di esercitare forze tali da influenzare consistentemente la risposta dinamica del componente.



Esempi di montaggio FREE

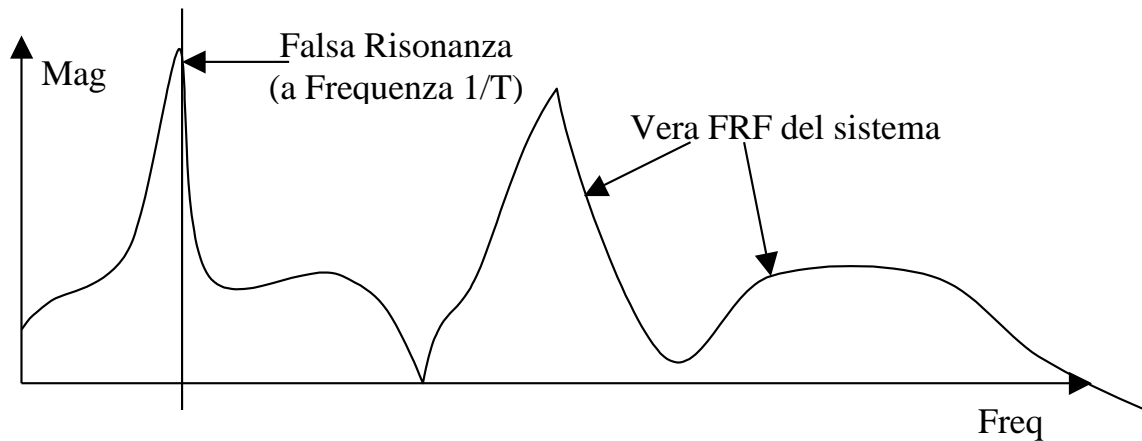
Adottando un montaggio di tipo FREE risulta difficile esercitare sul componente eccitazioni molto forti o a frequenze molto basse perché essendo il sistema praticamente labile, a sollecitazioni anche molto piccole corrispondono in genere spostamenti notevoli del vincolo: ciò si traduce quasi esclusivamente nella generazione di moti rigidi del componente in prova. Tali modi rigidi producono nella risposta del sistema dei “falsi modi” caratterizzati da frequenze proprie molto basse che tuttavia possono essere facilmente individuati e trascurati dallo sperimentatore.



Se ad esempio si eccita tramite un martello strumentato un pezzo che è stato appeso tramite un tirante e si misura con un accelerometro posto sul corpo stesso l'accelerazione di un suo punto, nella risposta del sistema si otterrà sicuramente un picco in corrispondenza della frequenza caratteristica associata al moto del pendolo.

Vista l'elevata lunghezza del tirante, la frequenza del moto rigido risulta molto bassa rispetto alle vibrazioni del componente che si intende sperimentare. Risulta quindi facile individuare la frequenza caratteristica del moto rigido.

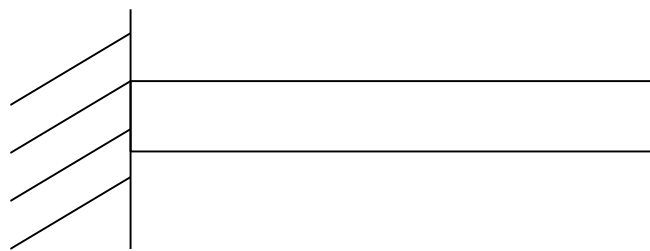
Inoltre vista l'estrema cedevolezza del vincolo (solo nella direzione dell'eccitazione) solo in corrispondenza delle basse frequenze la risposta del sistema viene influenzata dalla interazione tra componente da identificare e sistema di serraggio.



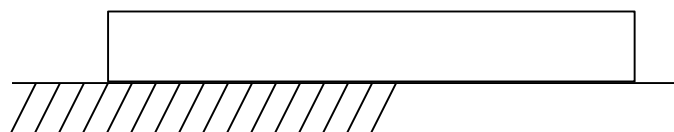
1.2.3. Montaggio Ground

Il montaggio si definisce GROUND (o Grounded) quando il vincolo realizzato approssima la condizione di incastro perfetto: il vincolo è talmente rigido che eventuali frequenze introdotte dalla “cedevolezza” del vincolo risultano ben al di sopra di quelle di interesse. In queste condizioni è possibile approssimare l’interazione tra vincolo e corpo con un vincolo molto facile da modellare (incastro perfetto, in cui i nodi vincolati sono immobili in posizioni assegnate).

Evidentemente il vincolo GROUND prescelto deve essere tale da non compromettere la mobilità del componente stesso, almeno per quanto riguarda il campo di frequenze di interesse, altrimenti viene ovviamente meno la possibilità ottenere risultati attendibili dalla la prova.



Esempio di Montaggio Ground corretto: Asta snella saldata ad una estremità ad un blocco pieno molto rigido e molto pesante. Il vincolo approssima un incastro perfetto e la risposta flessionale e torsionale dell’asta è facilmente analizzabile.



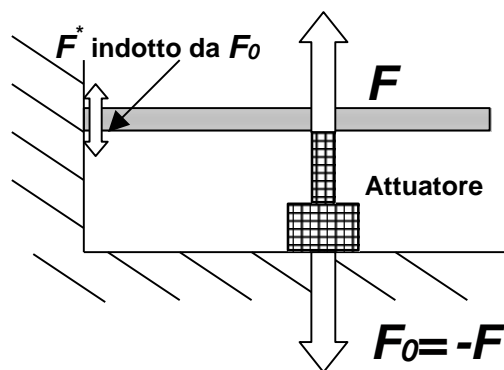
Esempio di Montaggio Ground errato: Asta snella saldata lungo la sua dimensione prevalente ad un blocco molto rigido e pesante. Il vincolo approssima un incastro perfetto ma la risposta flessionale e torsionale dell'asta è difficilmente studiabile perché il vincolo sopprime proprio le mobilità che si vogliono analizzare.

...

Nessun vincolo GROUND reale può effettivamente realizzare un incastro perfetto: esisterà sempre una frequenza oltre la quale il vincolo non può essere considerato come rigido. L'importante è che tale campo di frequenze cada ben al di sopra di quello di interesse. E' tutto il caso speculare a quello del montaggio FREE: la risposta alle basse frequenze è quella propria del sistema, alle alte frequenze vi sono importanti contributi del sistema di fissaggio.

1.3. Montaggio degli Attuatori

E' buona norma adottare un montaggio FREE per gli attuatori utilizzati per eccitare il sistema in prova: in questo modo si riduce il rischio di introdurre nel sistema sollecitazioni indesiderate e non facilmente quantificabili. Queste possono essere trasmesse dall'attuatore al componente in prova per via solida, attraverso il telaio cui sono collegati tutti gli elementi dell'apparato sperimentale.



Nella figura su riportata è stato schematizzato un esempio in grado di chiarire tale problema: un'asta incastrata ad un telaio viene sollecitata con un attuatore, montato sul medesimo telaio, che esercita su di essa una forza F . Trascurando l'inerzia e la dinamica interna dell'attuatore stesso, si ha che (per il Principio di Azione e Reazione) una forza vincolare F_0 con modulo pari a F si scambia tra l'attuatore e il telaio.

Se questa forza F_0 è tale da far vibrare il telaio, in corrispondenza dell'incastro può nascere una forza F^* indotta dalle vibrazioni del telaio stesso. Tale forza, non prevista dallo sperimentatore, può influenzare in maniera determinate la dinamica della trave.

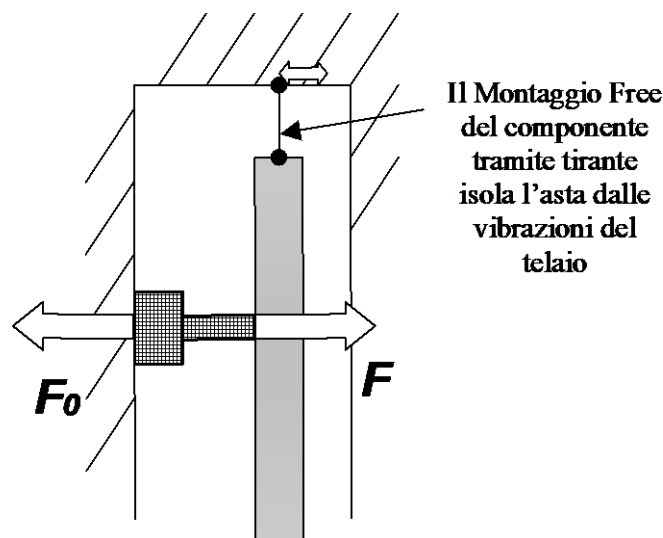
Montando in maniera FREE l'attuatore ed aggiungendo una opportuna massa M allo stesso (in modo da incrementarne l'inerzia) si può impedire la trasmissione della forza F_0 al telaio; si ha infatti:

$$F - F_0 = M\ddot{x} \Rightarrow F_0 = F - M\ddot{x}.$$

Dalla equazione precedente si ricava che se il vincolo è molto cedevole e l'inerzia dell'attuatore è grande (M molto grande) la forza trasmessa al telaio è relativamente piccola. Il problema è comunque riconducibile allo studio di una sospensione ottima atta a ridurre le sollecitazioni trasmessa al telaio dall'attuatore.

Nel caso non sia possibile montare l'attuatore in modo FREE e si debba ricorrere ad un montaggio "GROUND" di quest'ultimo, è possibile risolvere il problema interrompendo la continuità meccanica tra attuatore telaio e componente oggetto di sperimentazione.

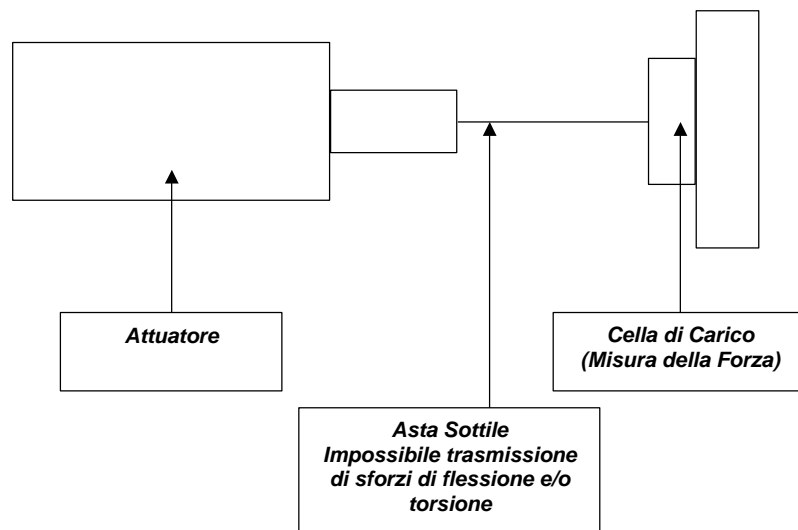
Il metodo più semplice è comunque quello di ricorrere ad un montaggio FREE del componente oggetto di sperimentazione. In questo caso sarebbe bene che l'inerzia stessa del componente oggetto dello studio fosse sufficientemente elevata rispetto alla frequenza di eccitazione: ciò limiterebbe l'insorgenza di moti rigidi di ampiezza troppo elevata.



1.3.1. Collegamento degli Attuatori al Sistema

La forza effettivamente trasmessa dall'attuatore al sistema meccanico oggetto della sperimentazione deve essere misurata nella maniera più esatta possibile per ridurre il rischio di ottenere funzioni di trasferimento del sistema falsate dalla dinamica dell'attuatore e/o dalle caratteristiche modali del collegamento tra attuatore e oggetto della prova.

E' inoltre buona norma collegare l'attuatore al sistema da identificare tramite componenti che impediscano meccanicamente la trasmissione di sforzi di natura diversa da quello desiderato dallo sperimentatore.

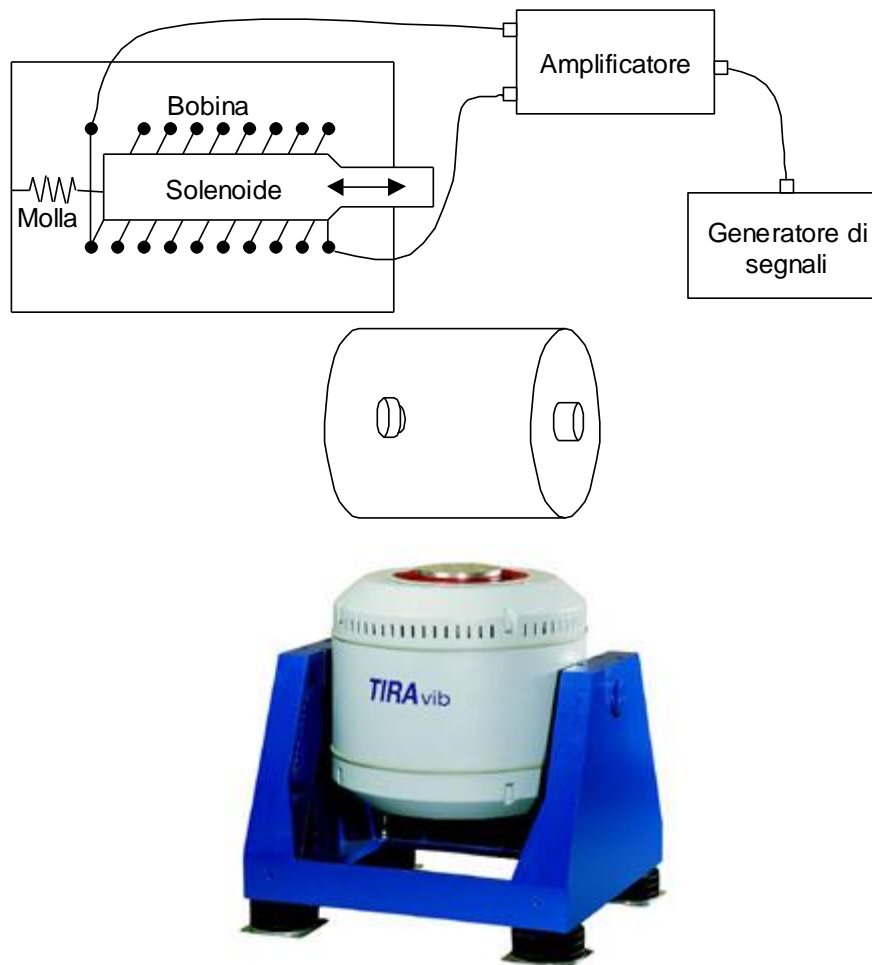


1.4. Principali Tipi di Attuatori

La scelta del tipo di attuatore più adatto a sollecitare opportunamente la struttura (in funzione dell'obiettivo della sperimentazione e delle caratteristiche stesse della struttura) è strettamente dipendente dal tipo di eccitazione che si vuole fornire al sistema. Tale argomento verrà trattato nel paragrafo successivo, ma nel presente l'obiettivo è analizzare il principio di funzionamento dei trasduttori di forza più frequentemente utilizzati.

1.4.1. Shaker Elettromagnetico

Se la struttura da eccitare è sufficientemente leggera e flessibile, e le forze richieste sono relativamente limitate in ampiezza, il trasduttore più largamente utilizzato è lo shaker elettromagnetico.



Attraverso un generatore di segnali si comanda un amplificatore in modo tale da fornire allo shaker una corrente elettrica di alimentazione proporzionale alla forza che si vuole applicare alla struttura. Lo shaker è costituito da un solenoide, elasticamente vincolato al telaio dello shaker stesso, che si muove in funzione della corrente che circola nella bobina che lo avvolge. Nel caso ideale il segnale in uscita dal generatore di segnali viene trasformato senza errori in un segnale elettrico che va ad alimentare la bobina. Questa mette in movimento il solenoide con la legge di moto assegnata e quindi alla struttura da eccitare viene impressa (tramite la testa del solenoide) una forza del tutto simile a quella impostata tramite il generatore di segnali. Nella realtà, anche trascurando il fatto che l'amplificatore non può trasformare perfettamente il segnale in ingresso in un segnale di corrente (in uscita) puramente proporzionale, il segnale di forza risultante può essere molto diverso da quello impostato. Ciò è naturalmente determinato dal fatto che il sistema molla-solenoide ha una sua dinamica interna, che a grandi linee fa sì che il sistema si comporti come un filtro passa-basso: se si richiede allo shaker di applicare forzanti con un contenuto in frequenza troppo elevato, il

segnale di forza risultante sarà totalmente diverso da quello imposto. Va inoltre detto che una volta che la testa viene collegata alla struttura da eccitare, l'inerzia dello shaker aumenta, e quindi le sue prestazioni diminuiscono rispetto a quelle nominali (a vuoto). Più leggera sarà la struttura da eccitare, maggiore sarà la possibilità di sfruttare le capacità dello shaker.

Va comunque chiarito che, poiché il segnale di comando (dal generatore di segnali) e la forza realmente applicata alla struttura sono generalmente diverse, vi è sempre la necessità di una misura diretta della forza applicata attraverso una cella di carico.

1.4.2. Attuatore Oleodinamico

Sostituendo il sistema bobina-solenoidale con un sistema pistone-olio in pressione è possibile applicare alla struttura forze di ampiezza decisamente più elevata. Per utilizzare tale sistema occorre un sistema per il mantenimento di un serbatoio di olio a pressioni anche elevate, un generatore di segnali e un sistema di elettrovalvole. Il generatore di segnali comanda le elettrovalvole che fanno in modo che l'olio in pressione entri nel cilindro attraverso una delle due luci in figura con la pressione desiderata. Quando l'olio in pressione entra in una delle due camere, si determina uno squilibrio tra le pressioni che insistono sulle due facce del pistone, determinandone lo spostamento (o comunque la generazione di una forza approssimativamente pari al prodotto tra l'area trasversale del cilindro e la differenza di pressione che si viene a generare).

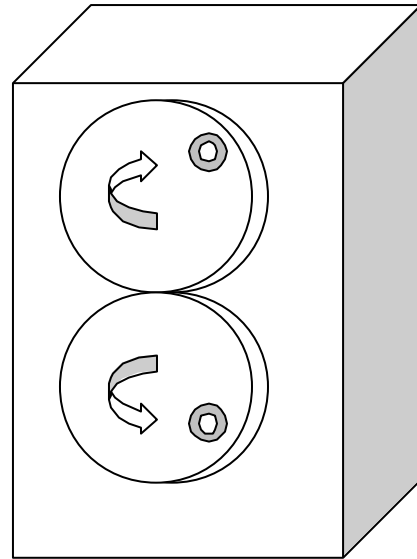
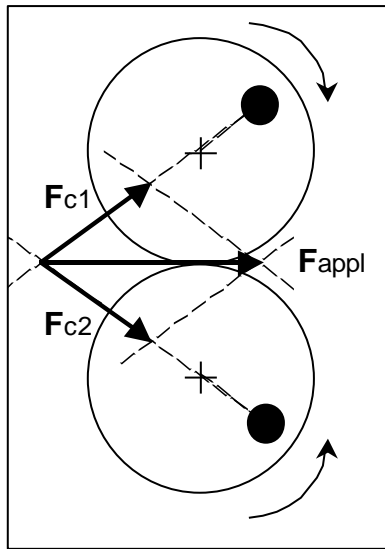
Le forze che possono essere sviluppate sono notevolmente superiori a quelle dello shaker: basta pensare che, a parità di pressione, la forza generata è proporzionale alla sezione del cilindro, per cui utilizzando cilindri molto grandi si possono generare forze elevatissime. Tuttavia tale sistema ha grossi limiti sulla dinamica che sono dovuti sia alla dinamica delle elettrovalvole che, e soprattutto, al circuito oleodinamico. Se infatti si vogliono generare significativi spostamenti del pistone (specialmente in corrispondenza di forze elevate), necessario movimentare una grossa quantità di fluido. Per via delle perdite nel circuito idraulico e della viscosità del fluido, la massima portata di olio circolante è relativamente limitata, e di conseguenza anche le caratteristiche dinamiche del trasduttore.



1.4.3. Vibrodina

Quando vi è la necessità di eccitare strutture estremamente grandi (ponti, palazzi, ecc...) è evidente che né shaker né attuatore oleodinamico possono garantire una eccitazione sufficientemente elevata alla struttura. Inoltre tali trasduttori necessitano di un telaio su cui scaricare le reazioni vincolari derivanti dall'eccitazione stessa; nel caso fosse necessario eccitare un ponte sospeso (ad un'unica campata) in corrispondenza della sezione mediana del ponte (a sezione con maggior flessibilità) sarebbe estremamente difficile realizzare un telaio (e per di più sufficientemente rigido) su cui montare, ad esempio, un gigantesco trasduttore oleodinamico.

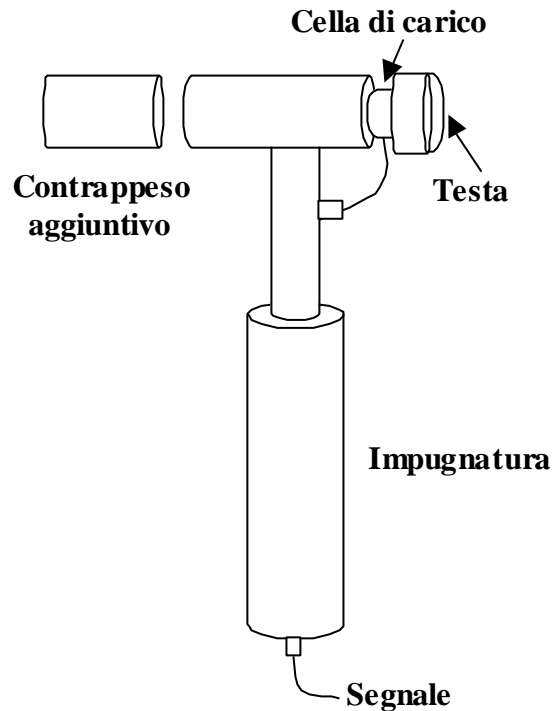
La soluzione più utilizzata è quella di sfruttare le forze di inerzia per l'eccitazione strutturale. La vibrodina in particolare sfrutta la forza centrifuga che si determina quando un corpo è portato in rotazione attorno ad un asse che non sia baricentrico. Schematicamente si può pensare ad un telaio su cui sono montate due grandi ruote dentate (a dentatura esterna) di uguale raggio che ingranano tra loro. Su ciascuna di queste due ruote è fissata una massa eccentrica in posizione angolare opportuna (le due masse devono essere sempre simmetriche rispetto alla tangente comune alle primitive delle ruote dentate); l'eccentricità delle masse può essere regolata a piacere. Un motore movimentava una delle due ruote (ipotizziamo in modo da imporre una velocità angolare ω costante), e l'altra viene trascinata dal collegamento dentato in un moto controrotante con la medesima velocità angolare.



Se le masse squilibranti sono uguali e con la medesima eccentricità, le due forze centrifughe che si generano come conseguenza della rotazione con velocità angolare ω , si combinano in una forza sempre orizzontale (lungo la tangente comune alle primitive delle ruote dentate) e puramente armonica se la velocità angolare ω è costante. Regolando la velocità angolare è possibile controllare la frequenza dell'eccitazione, tramite l'eccentricità si controlla invece l'ampiezza.

1.4.4. Martello Strumentato

In molti casi, specie per l'analisi modale di strutture relativamente leggere, è conveniente eccitare la struttura con forze impulsive, ossia di durata estremamente breve (ma di ampiezza significativa). Lo strumento più utilizzato a tale scopo è il martello strumentato.



Il martello strumentato è molto simile a un normale martello con una testa metallica relativamente pesante (che può essere ulteriormente appesantita da un contrappeso in modo da aumentare le forze di inerzia che con la martellata eccitano la struttura). Sulla testa è montata una cella di carico che misura la forza che effettivamente si scambiano il martello e la struttura all'atto della eccitazione. I cavi che trasportano il segnale di forza scorrono all'interno dell'impugnatura che a volte contiene anche un primo embrione di condizionamento del segnale analogico. Sulla cella di carico (sulla parte che andrà a contatto della struttura da eccitare) possono essere avvitati dei puntali, costituiti di vario materiale. I puntali possono essere interamente in metallo, oppure ricoperti da vari spessori di gomma più o meno dura. Il compito di tali componenti è quello di costituire un primo filtro meccanico (ovviamente passa-basso) tra il martello e la struttura da eccitare: se la struttura necessita di eccitazione ad alte frequenze si utilizzerà il puntale in metallo, se le frequenze a cui si vuole sollecitare la struttura sono via via decrescenti, si utilizzeranno puntali con spessori crescenti di gomma e/o di materiale più morbido.

Ovviamente la martellata deve essere impartita alla struttura da mani esperte. Alcune regole di base sono: il polso deve essere il più morbido possibile (non irrigidire l'articolazione), l'angolo tra il braccio e l'avambraccio deve approssimare il più possibile l'angolo retto, la martellata deve essere la più rapida possibile, e in tale ottica un rapido movimento del polso subito dopo l'urto è grandemente utile per allontanare rapidamente la testa del martello dalla struttura. Un rapido allontanamento del martello è tanto più necessario quanto più rigida è la struttura: in tale caso dopo un primo contatto e il conseguente distacco tra martello e struttura, quest'ultima tende rapidamente a ritornare nella sua configurazione originaria, urtando nuovamente la punta del martello (che nel frattempo non ha fatto in tempo ad allontanarsi). Tale fenomeno determina la cosiddetta martellata doppia (due picchi ravvicinati di forza applicata alla struttura) che sono particolarmente deleteri per i risultati dell'analisi modale sperimentale.

1.5. Tecniche di Eccitazione per Analisi Modale

Nel caso dell'analisi modale sperimentale, ovvero della misura delle Funzioni di Risposta in Frequenza dei sistemi meccanici, due sono le principali classi per le modalità di eccitazione che possono essere utilizzati:

1. Tecniche monofrequenziali;
2. Tecniche multifrequenziali.

Le prime, che si differenziano semplicemente per le modalità pratiche di eccitazione della struttura, consistono nell'applicare alla struttura una forza di tipo armonico, o almeno il più possibile simile ad una forza puramente sinusoidale (caratterizzata da una unica componente spettrale alla pulsazione ω).

Le tecniche multifrequenziali sono più varie, e le principali sono:

- eccitazione tramite sweep;
- eccitazione tramite forze impulsive;
- eccitazione tramite forze casuali (random - rumore bianco).

In ogni caso si ricorda ancora che l'analisi modale ha come obiettivo la misura sperimentale delle Funzioni di Risposta in Frequenza dei sistemi meccanici. Se si fa riferimento alla Ricettanza $\alpha(\omega)$ si ha quindi:

$$\alpha(\omega) = \frac{X_0(\omega)}{F_0(\omega)}.$$

La ricettanza, come tutte le altre FRFs, è quindi una funzione complessa (dotata di modulo e fase) della variabile reale ω . La ricettanza può essere calcolata come il rapporto tra la Trasformata di Fourier della risposta (es. spostamento $X_0(\omega)$) e quella della eccitazione (in genere una forza $F_0(\omega)$).

1.5.1. Eccitazione Monofrequenziale

Se si applica ad un sistema una forza di tipo puramente armonico con modulo F_0 e con pulsazione ω , nell'ipotesi che il sistema sia lineare, questo risponderà *a regime* con degli spostamenti di ampiezza X_0 e sfasati di un angolo φ rispetto alla forzante.

Il rapporto tra le ampiezze di spostamenti e forza X_0/F_0 costituisce il modulo della ricettanza, in corrispondenza della pulsazione ω dell'eccitazione. Lo sfasamento φ tra gli spostamenti e la forzante costituisce la fase della ricettanza.

I vantaggi di tale tecnica risiedono nella estrema precisione della misura del modulo e della fase e nei limitati mezzi richiesti per la identificazione (non è richiesto un pesante postprocessing dei segnali).

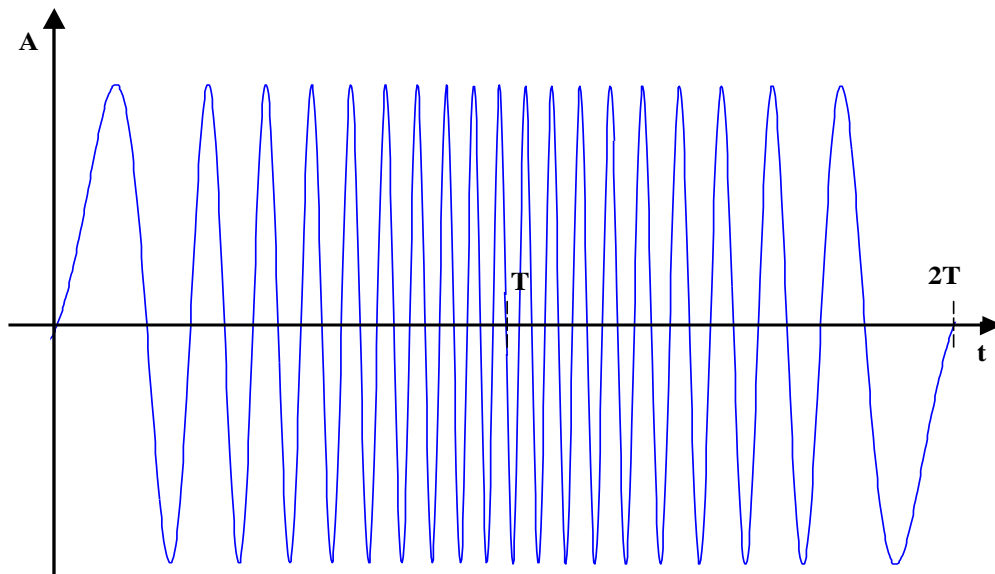
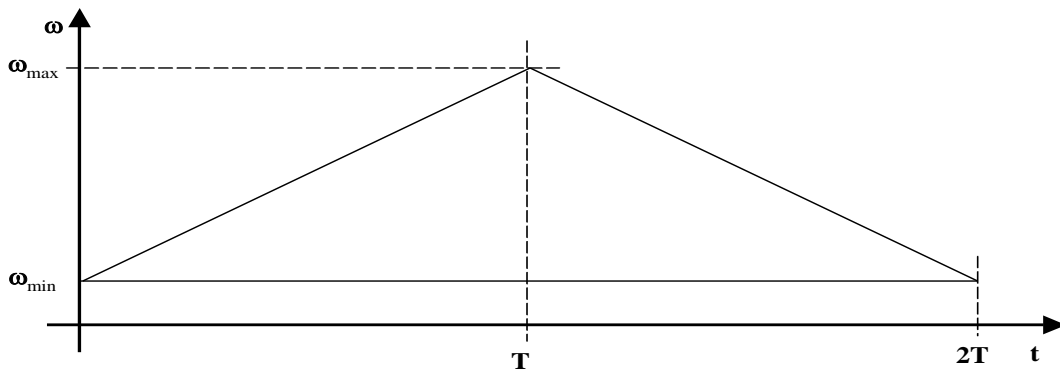
Gli svantaggi, se si trascurano le difficoltà di generare una forza eccitatrice rigorosamente sinusoidale, consistono nei tempi di misura. Per ogni sessione di misura è infatti possibile misurare un solo punto della FRF corrispondente alla pulsazione della forzante. Se si intende coprire un campo di frequenze vasto, e con una sufficiente risoluzione in frequenza della FRF sperimentale, è dunque necessario effettuare un gran numero di prove. Inoltre modulo e fase degli spostamenti vanno misurati solo dopo che si è esaurito il transitorio (devono essere relativi al comportamento a regime del sistema): nei sistemi poco smorzati il transitorio può avere tuttavia durata abbastanza rilevante, e quindi ciò comporta un ulteriore allungamento dei tempi di misura.

1.5.2. Sweep in Frequenza

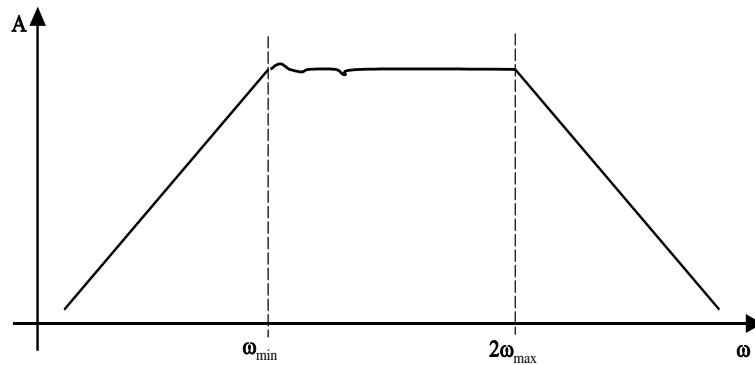
La tecnica dello sweep è, fra le tecniche multifrequenziali, quella che più somiglia alla eccitazione monofrequenziale.

Lo sweep è costituito da una forzante analiticamente molto simile a quella sinusoidale, in cui però la pulsazione non è costante, ma viene fatta variare linearmente (e ciclicamente) tra un valore massimo e un minimo.

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t) \begin{cases} \omega = \text{costante} \Rightarrow \text{eccitazione e armonica} \\ \omega = \omega_{\min} \pm \frac{(\omega_{\max} - \omega_{\min})}{T} t \Rightarrow \text{sweep in frequenza} \end{cases}$$



Si può dimostrare che la trasformata di Fourier di uno sweep (e quindi il suo contenuto in frequenza) è pressoché costante tra le pulsazioni ω_{\min} e $2\omega_{\max}$, mentre per le frequenze al di fuori del suddetto range, i contributi diminuiscono progressivamente.



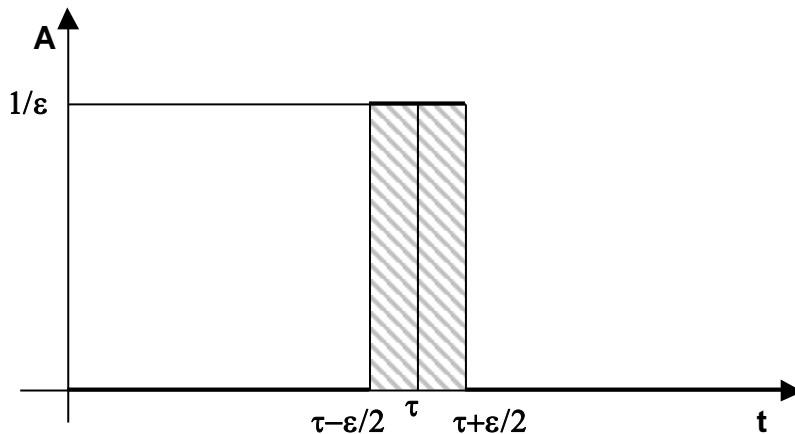
Se il contenuto in frequenza dell'eccitazione è rilevante nell'intervallo $[\omega_{\min}, 2\omega_{\max}]$, lo stesso si potrà dire della risposta del sistema. Effettuando quindi il rapporto tra la Trasformata di Fourier e risposta e quella dell'eccitazione, è quindi possibile ricavare l'andamento della FRF nell'intervallo $[\omega_{\min}, 2\omega_{\max}]$. Al di fuori di tale intervallo, il rapporto tra le due trasformate non è in generale relazionato alla FRF e quindi non va minimamente considerato nella fase di identificazione. Per tali frequenze l'eccitazione e la relativa risposta del sistema sono talmente piccole da risultare in ombra rispetto agli immancabili rumori (disturbi) presenti nei segnali misurati.

Ovviamente vi sono dei precisi legami che permettono di settare in modo ottimale le pulsazioni limite dello sweep (ω_{\min} e ω_{\max}) in funzione dell'ampiezza del semiperiodo T. E' infatti impensabile effettuare uno sweep che parta dalla pulsazione $\omega_{\min} = 1 \text{ rad/s}$ fino ad arrivare a $\omega_{\max} = 1000 \text{ rad/s}$ in un tempo T pari a 10 s, e con esso sperare di eccitare in maniera opportuna il campo di frequenze $1 \div 2000 \text{ rad/s}$. In pratica si utilizzano un certo numero di sweep con contenuto in frequenza relativamente limitato, ma che riescono globalmente a ricoprire tutto il campo di frequenze di interesse.

1.5.3. Eccitazione Impulsiva

Per eccitazione impulsiva si intende una eccitazione di durata estremamente breve (in teoria infinitesima) e di ampiezza significativa. Analiticamente l'impulso unitario è descritto dalla funzione Delta di Dirac $\delta(t - \tau)$, costituita da un segnale nullo per ogni tempo $t \neq \tau$ e da un segnale non nullo in corrispondenza dell'istante $t = \tau$ con ampiezza tale da rendere unitaria l'area sottesa dalla curva rappresentante la funzione stessa sul piano ampiezza-tempo.

In sostanza la Delta di Dirac può essere immaginata come la funzione limite di quella successivamente rappresentata analiticamente e graficamente, per $\varepsilon \rightarrow 0$.



$$f(\tau, \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \notin \left[\tau - \frac{\varepsilon}{2}, \tau + \frac{\varepsilon}{2} \right] \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{per } t \in \left[\tau - \frac{\varepsilon}{2}, \tau + \frac{\varepsilon}{2} \right] \end{cases}$$

Ovviamente l'area sottesa dalla curva vale:

$$\text{base} \cdot \text{altezza} = \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1.$$

Si ha quindi che $\delta(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\tau, \varepsilon)$.

La funzione Delta di Dirac $\delta(t)$ ($\tau=0$) assume particolare interesse in quanto la sua Trasformata di Fourier (e quindi il suo contenuto in frequenza) è rigorosamente costante e pari a $\frac{1}{2\pi}$.

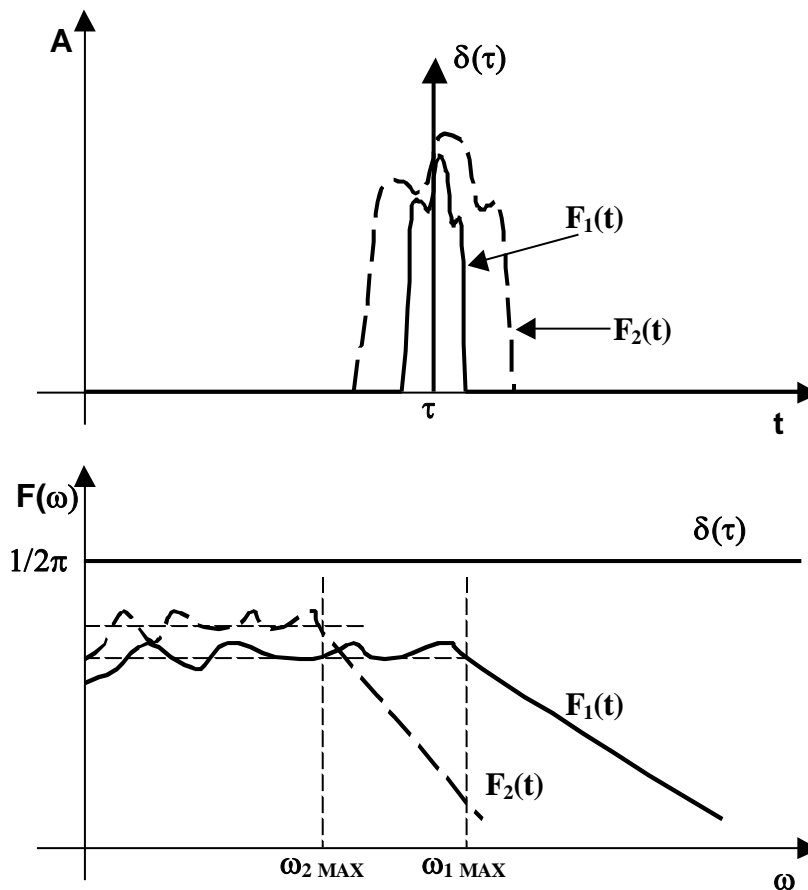
Poiché è noto che la Trasformata di Fourier della risposta del sistema si può ottenere come prodotto tra la FRF e la Trasformata di Fourier dell'eccitazione, si ha che nel caso della forzante impulsiva agente all'istante $t=0$ (e della ricettanza):

$$X_0(\omega) = \alpha(\omega)F_0(\omega) = \frac{1}{2\pi}\alpha(\omega);$$

ovvero il contenuto in frequenza della risposta è proporzionale alla FRF considerata.

In teoria quindi, se si fosse sicuri di riuscire ad applicare al sistema un impulso perfetto, non sarebbe neppure necessario misurare la forza effettivamente applicata: a meno di un fattore di scala facilmente identificabile, il contenuto in frequenza della risposta sarebbe già la FRF che si voleva misurare.

Nella pratica non è tuttavia pensabile di poter applicare un impulso ideale: anche le ‘martellate migliori’ hanno una durata finita, e la forza scambiata tra martello e struttura in tale periodo è tutt’altro che costante. Sta di fatto che comunque minore è la durata della forzante impulsiva, maggiore e più ‘piatto’ è il contenuto in frequenza effettivo dell’eccitazione.



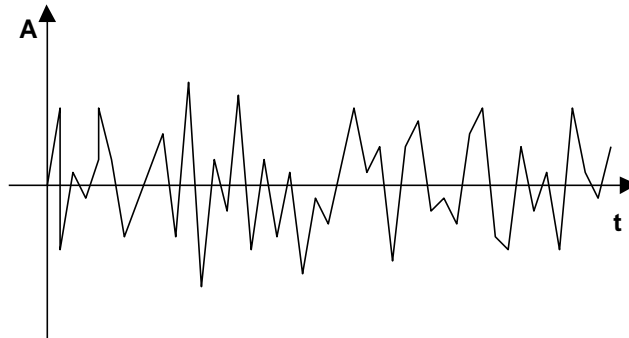
Se quindi la martellata è applicata sufficientemente bene, allora il contenuto in frequenza dell’eccitazione è maggiore del campo di frequenze di interesse per la misura: misurando contemporaneamente la forza applicata dal martello strumentato e la relativa risposta del sistema (dopo aver effettuato le Trasformate di Fourier e averne fatto il rapporto) è possibile ottenere con unica prova la FRF del sistema (almeno per ciò che riguarda il campo di frequenze di interesse).

1.5.4. Eccitazione Random

Se si applica al sistema una forza con andamento temporale del tutto casuale (random), al pari di quanto succede per l’impulso, si riesce ad eccitare il sistema in corrispondenza a tutte le frequenze. Sempre analogamente al caso dell’impulso, un segnale random del tutto casuale

(anche detto white, bianco) *avrebbe* un contenuto in frequenza costante, almeno per ciò che riguarda il modulo.

Si potrebbero quindi ripetere i ragionamenti già fatti per l'impulso e quindi concludere che teoricamente basta una sola prova per riuscire a identificare completamente le FRFs del sistema.



Anche se la filosofia è in effetti la medesima, è d'obbligo utilizzare il condizionale per le affermazioni precedenti. In effetti i passaggi già sviluppati per l'impulso non possono essere ripetuti per una forza casuale perché questa non soddisfa la condizione di Dirichelet:

$$\int_0^T |f(t)| dt < \infty ;$$

è perciò impossibile effettuare la Trasformata di Fourier della forzante, e di conseguenza calcolare le FRFs.

E' necessario allora utilizzare degli operatori statistici, ovvero delle funzioni di correlazione dei segnali che operino nel dominio di tempo. Un operatore di tale tipo può essere indicato come segue:

$$R_{ff}(\tau) = E[f(t), f(t + \tau)] .$$

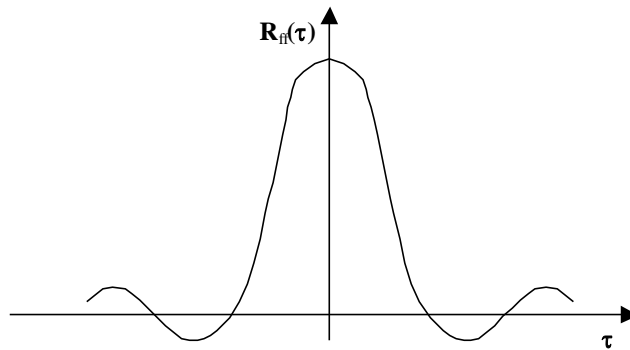
Il simbolo E rappresenta un operatore statistico come il valor medio, o il valor quadratico medio, e la funzione assume il nome di Valore Atteso (Expected Value) della funzione $f(t)$.

Per lo scopo che si è prefisso, si utilizzerà la funzione detta AUTOCORRELAZIONE del segnale $f(t)$ definita come segue:

$$R_{ff}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \right) \int_0^T f(t) f(t + \tau) dt ;$$

in cui in pratica si esegue l'integrale del prodotto della funzione $f(t)$ con la funzione medesima, ma shiftata (sfasata, traslata) rispetto alla funzione 'originale' di τ secondi. E' facile

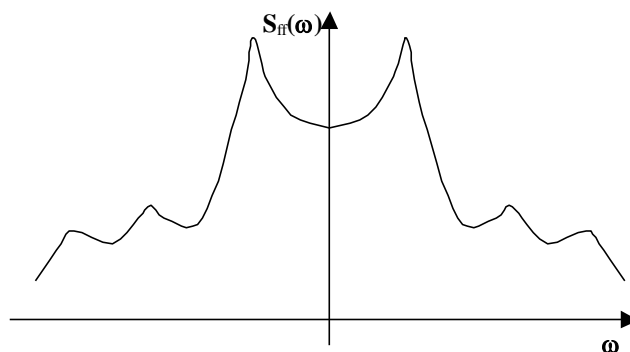
immaginare che l'Autocorrelazione sia una funzione con massimo in corrispondenza del valore $\tau=0$, e modulo via via decrescente con l'allontanarsi dall'asse delle ordinate.



L'Autocorrelazione di un segnale random (a differenza del segnale random stesso), rispetta la Condizione di Dirichelet, ed è quindi possibile effettuarne la Trasformata di Fourier.

La Trasformata di Fourier dell'Autocorrelazione $R_{ff}(\tau)$ viene generalmente indicata con $S_{ff}(\omega)$ e prende il nome di (MEAN-SQUARE) POWER SPECTRAL DENSITY (Densità di Potenza Spettrale):

$$S_{ff}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$



Tale funzione è un indice del 'contenuto in frequenza' di segnali che non rispettano la Condizione di Dirichelet (e quindi anche dei segnali random).

Ovviamente la Power Spectral Density può essere utilizzata anche su segnali che rispettano tale condizione, e anche su segnali periodici. Quello che si ottiene è un diagramma molto simile a quello della Trasformata di Fourier (e quindi del vero contenuto in frequenza del segnale): i moduli risulteranno generalmente più bassi, ma i picchi negli spettri si avranno in corrispondenza delle stesse frequenze.

In maniera analoga è possibile definire la funzione di CROSSCORRELAZIONE tra l'eccitazione $f(t)$ e la risposta del sistema $x(t)$:

$$R_{fx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \right) \int_0^T f(t)x(t+\tau)dt ;$$

dalla quale, effettuando la Trasformata di Fourier, si ottiene il CROSS-SPETTRO (Cross Spectral Density) dei due segnali:

$$S_{fx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{fx}(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau .$$

Si può dimostrare che le FRFs dei sistemi meccanici (sia nel caso di eccitazione random, che di altro tipo) si possono ottenere come rapporto tra il Cross-Spettro di eccitazione e risposta e la Power Spectral Density della eccitazione:

$$\alpha(\omega) = \frac{S_{fx}(\omega)}{S_{ff}(\omega)} .$$

Va inoltre aggiunto che come non è possibile ottenere un impulso perfetto, parimenti non è possibile riprodurre una forzante puramente casuale (*white*, bianca). Anche se un generatore di segnali riuscisse effettivamente a generare un segnale di tale tipo, il sistema fisico di eccitazione (shaker o altro) priverebbe sicuramente il segnale di forza effettivo del suo contenuto alle alte frequenze. Il segnale così ottenuto si indica generalmente come *pink* (rosa), se si vuole indicare che è genericamente privo delle alte frequenze, oppure *coloured* (colorato) se in esso alcune frequenze spiccano più delle altre.

Le considerazioni già espresse per l'impulso possono in questo caso ripetersi: anche se il segnale non è del tutto casuale, ma il suo 'contenuto in frequenza' è sufficientemente elevato, è possibile comunque identificare con una unica prova la FRF considerata, ovviamente solo limitatamente all'intervallo di interesse.