

6.5. Squilibrio dei rotori

Una delle più frequenti sorgenti di vibrazioni nelle macchine rotanti è rappresentata dallo squilibrio dei rotori.

Consideriamo un corpo ruotante attorno ad un asse fisso con velocità angolare costante Ω e fissiamo ad esso una terna cartesiana di riferimento xyz , con asse z coincidente con l'asse di rotazione e con il piano xy contenente il baricentro G del rotore (v. figura 6.5.1).

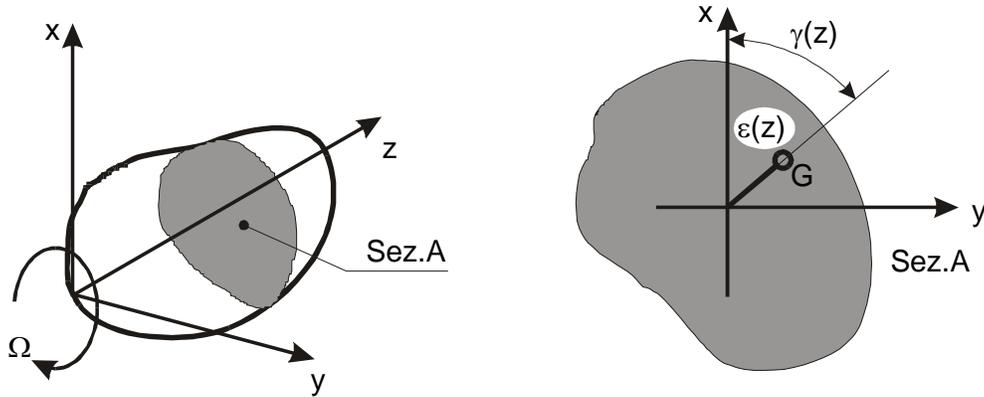


Fig. 6.5.1

Il baricentro di una generica sezione, eseguita con un piano perpendicolare all'asse di rotazione, in generale è spostato da questo di una quantità ε , in una direzione individuata dall'angolo γ misurato rispetto all'asse x . Possiamo, allora, rappresentare l'eccentricità mediante un vettore $\bar{\varepsilon} = \varepsilon e^{j\gamma}$, dove sia ε che γ sono funzioni di z : $\varepsilon = \varepsilon(z)$, $\gamma = \gamma(z)$. Per effetto dell'eccentricità $\bar{\varepsilon}$, in un tronco del rotore di spessore infinitesimo dz nasce una forza centrifuga $\overline{dF_c} = \overline{\varepsilon(z)}\Omega^2 m(z) dz$, dove si è indicato con $m(z)$ la massa per unità di lunghezza del rotore. Tale forza ha la direzione dell'eccentricità ed è pertanto rappresentabile mediante un vettore variabile in ampiezza e direzione lungo l'asse del rotore (v. figura 6.5.2).

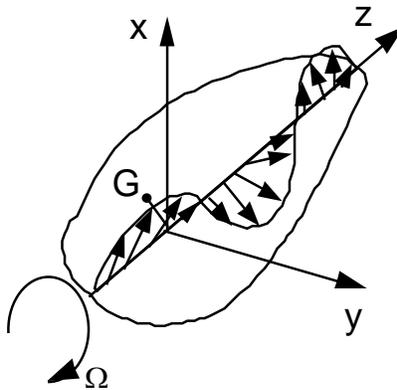
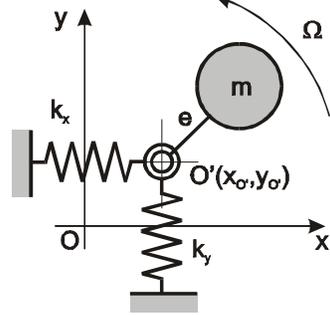


Fig. 6.5.2

Il sistema delle azioni inerziali ora descritto ruota insieme al rotore con velocità angolare Ω e induce sui supporti forze rotanti che possono eccitare vibrazioni pericolose per la macchina.¹

¹ Consideriamo un rotore elementare, ad asse verticale per escludere gli effetti gravitazionali, costituito da una massa m rotante a velocità angolare Ω e con eccentricità e , montata in corrispondenza della mezzeria di un albero privo di massa e rotante su supporti elastici non isotropi ($k_x \neq k_y$). L'equilibrio del rotore nelle direzioni x e y , trascurando il contributo dovuto allo smorzamento, è espresso dalle seguenti equazioni:



$$\begin{aligned} m\ddot{x}_{O'} + k_x x_{O'} &= me\Omega^2 \cos \Omega t \\ m\ddot{y}_{O'} + k_y y_{O'} &= me\Omega^2 \sin \Omega t \end{aligned} \tag{N.1}$$

La soluzione delle (N.1) è del tipo:

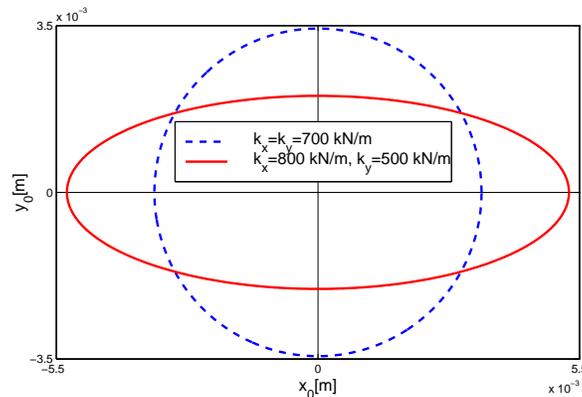
$$\begin{aligned} x_{O'} &= X \cos(\Omega t - \psi_x) \\ y_{O'} &= Y \sin(\Omega t - \psi_y) \end{aligned} \tag{N.2}$$

$$X = \frac{em\Omega^2}{|k_x - m\Omega^2|}; Y = \frac{em\Omega^2}{|k_y - m\Omega^2|} \tag{N.3}$$

e

$$\psi_x = \begin{cases} 0 & \text{per } \Omega < (k_x / m)^2 \\ \frac{\pi}{2} & \text{per } \Omega = (k_x / m)^2 \\ \pi & \text{per } \Omega > (k_x / m)^2 \end{cases} \quad \psi_y = \begin{cases} 0 & \text{per } \Omega < (k_y / m)^2 \\ \frac{\pi}{2} & \text{per } \Omega = (k_y / m)^2 \\ \pi & \text{per } \Omega > (k_y / m)^2 \end{cases} \tag{N.4}$$

La traiettoria del punto O' è in generale un'ellissi, che diventa una circonferenza nel caso particolare in cui sia $k_x = k_y$, come è mostrato nella figura seguente.



Il modulo della reazione elastica che fa equilibrio alla forza centrifuga agente sul rotore è dato da:

Sotto l'azione delle forze centrifughe il rotore si deforma secondo una configurazione che può essere interpretata come una combinazione lineare dei diversi modi propri (v. 2.5.17) e che si modifica al variare della velocità angolare. Infatti, quando la velocità angolare Ω tende al valore ω_r di una delle pulsazioni proprie del rotore, lo stesso, per l'eccitazione dovuta alle azioni inerziali a cui è sottoposto, tende ad assumere la configurazione del modo proprio corrispondente, alterando la distribuzione di eccentricità relativa al caso statico. E' evidente che in tale situazione anche l'equilibratura del rotore dipende dalla velocità angolare.

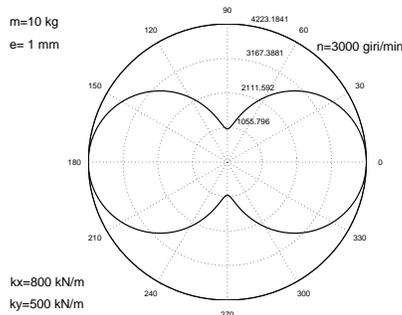
Se, però, la velocità angolare Ω è sufficientemente più bassa della prima pulsazione propria ω_0 (di solito per $\Omega < \frac{1}{2}\omega_0$), la deformabilità del rotore può essere trascurata e questo può essere considerato **rigido**. Per un rotore rigido, dunque, l'equilibratura non dipende dalla velocità e può essere eseguita indifferentemente a velocità angolari comprese nell'intervallo $0 < \Omega < 0.5\omega_0$.

In quanto segue supporremo che la velocità di funzionamento del rotore soddisfi le condizioni sopra indicate affinché il rotore possa essere considerato rigido.

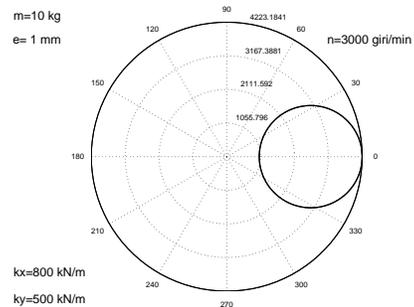
Un rotore rigido di massa M , ruotante attorno ad un asse fisso con velocità angolare costante Ω , è sottoposto ad azioni inerziali rappresentabili mediante una forza di inerzia

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{(k_x x_o)^2 + (k_y y_o)^2} = \\
 &= \sqrt{k_x^2 X^2 \cos^2(\Omega t - \psi_x) + k_y^2 Y^2 \sin^2(\Omega t - \psi_y)} = \\
 &= \sqrt{k_x^2 X^2 \frac{1 + \cos 2(\Omega t - \psi_x)}{2} + k_y^2 Y^2 \frac{1 - \cos 2(\Omega t - \psi_y)}{2}} \tag{N.5}
 \end{aligned}$$

Tale reazione è rappresentabile mediante la proiezione di un vettore rotante con velocità angolare 2Ω rispetto al sistema di riferimento fisso e quindi con velocità angolare Ω rispetto al rotore. Come esempio, si osservi l'andamento della reazione elastica S in funzione della rotazione del rotore e della posizione angolare sul rotore nelle figure seguenti.



Andamento della reazione elastica S in funzione della rotazione del rotore



Direzione e modulo della reazione elastica S rispetto al rotore

$$\overline{F}_i = M\Omega^2 \overline{\varepsilon}_G \quad (6.5.1)$$

ed un momento \overline{C}_i di componenti secondo gli assi x e y

$$C_{ix} = -J_{yz}\Omega^2 \quad (6.5.2)$$

$$C_{iy} = J_{xz}\Omega^2 \quad (6.5.3)$$

dove $\overline{\varepsilon}_G$ rappresenta il vettore che individua l'eccentricità del baricentro e J_{yz} e J_{xz} sono i prodotti di inerzia definiti rispetto agli assi del sistema di riferimento solidale con il rotore (v. figura 6.5.3).

Se l'asse di rotazione è principale di inerzia, ma non baricentrico, lo squilibrio si dice **statico**: in tal caso il rotore è sottoposto alla sola forza \overline{F}_i . Se l'asse di rotazione non è principale di inerzia, ma è baricentrico, lo squilibrio si dice **dinamico**: in tal caso il rotore è sottoposto alla sola coppia \overline{C}_i . Spesso i due tipi di squilibrio sono presenti contemporaneamente.

Uno squilibrio statico può essere evidenziato con prove statiche, ossia senza bisogno di porre in rotazione il rotore. E' sufficiente disporlo su supporti con basso attrito che ne mantengano l'asse orizzontale (coltelli o coppie di rulli) ed osservare la posizione di equilibrio stabile che il rotore assume quando il baricentro viene a trovarsi nella posizione più bassa.

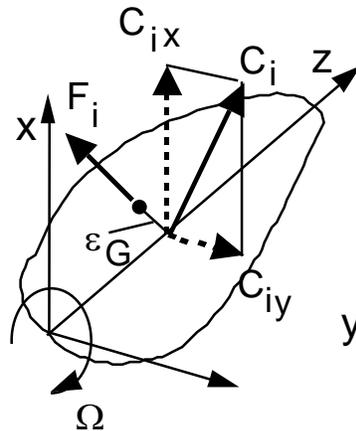


Fig. 6.5.3

L'equilibratura di uno squilibrio statico può essere eseguita agendo su di un solo piano, quello contenente il baricentro. Le figure 6.5.4 e 6.5.5 mostrano due esempi di equilibratura

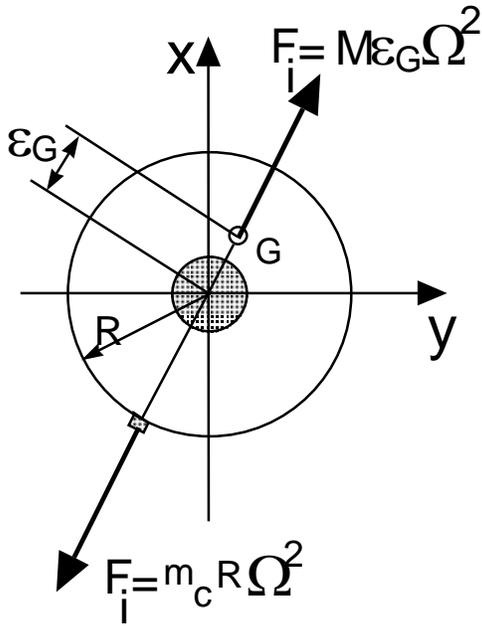


Fig. 6.5.4

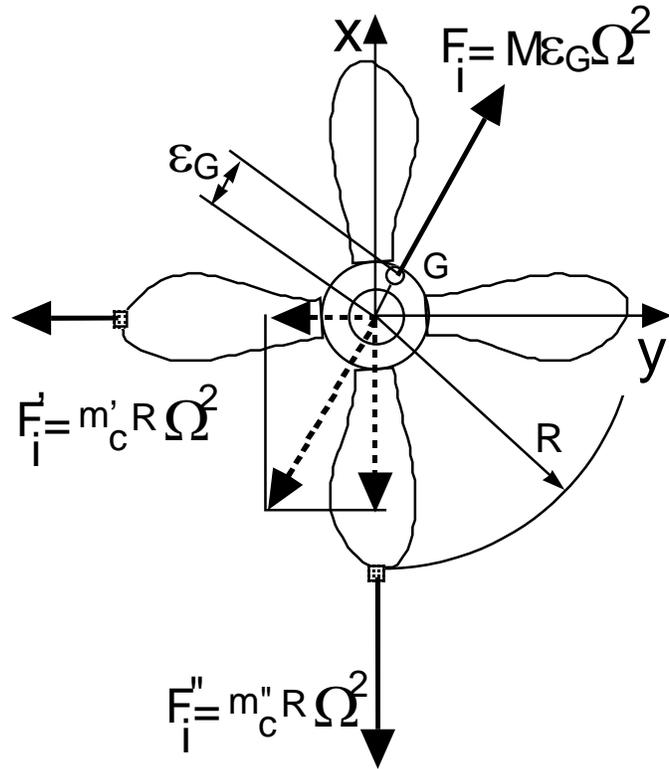


Fig. 6.5.5

fatta in un solo piano: nel primo caso è possibile aggiungere una massa di correzione nella stessa direzione dell'eccentricità; nel secondo caso ciò non è possibile e si devono aggiungere due masse in altre direzioni, in modo tale che la risultante delle forze centrifughe da esse generate possa equilibrare la forza centrifuga dovuta allo squilibrio iniziale del rotore.

Considerati due piani, π_M e π_N , perpendicolari all'asse di rotazione e distanti a e b dal piano che contiene il baricentro G del rotore (v. figura 6.5.6), la forza centrifuga \bar{F} può essere equilibrata da due forze, \bar{S}'_M e \bar{S}'_N , giacenti su detti piani e dirette come \bar{F}_i , che valgono:

$$\bar{S}'_M = \frac{b}{a+b} \bar{F}_i \quad (6.5.4)$$

$$\bar{S}'_N = \frac{a}{a+b} \bar{F}_i \quad (6.5.5)$$

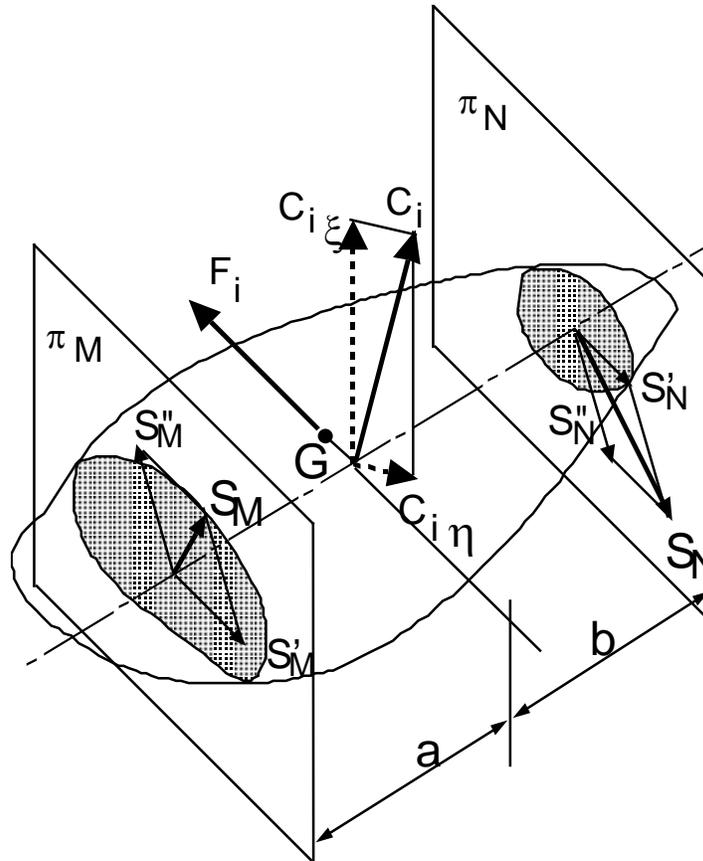


Fig.6.5.6

Analogamente, la coppia \bar{C}_i può essere equilibrata dalla coppia di forze \bar{S}''_M e \bar{S}''_N , giacenti su un piano perpendicolare a \bar{C}_i , di intensità pari a

$$S''_M = S''_N = \frac{C_i}{a+b} \quad (6.5.6)$$

Nei due piani, le forze ora trovate danno luogo a risultanti

$$\bar{S}_M = \bar{S}'_M + \bar{S}''_M \quad (6.5.7)$$

$$\bar{S}_N = \bar{S}'_N + \bar{S}''_N \quad (6.5.8)$$

ruotanti con la stessa velocità angolare Ω del rotore.

L'equilibratura del rotore, nel caso generale di squilibrio statico e dinamico, può essere quindi effettuata disponendo in corrispondenza dei piani π_M e π_N , detti **piani di correzione**,

due masse m_M e m_N , nelle direzioni e versi di $\overline{S_M}$ e $\overline{S_N}$ e a distanza r_M e r_N dall'asse di rotazione, tali che risulti:

$$S_M = m_M r_M \Omega^2 \quad (6.5.9)$$

$$S_N = m_N r_N \Omega^2 \quad (6.5.10)$$

Ovviamente la correzione può essere fatta anche sottraendo uguali quantità di massa in punti diametralmente opposti a quelli sopra determinati.

Ritornando alla definizione di rotore rigido precedentemente data, si può ora affermare che un rotore può essere considerato rigido se le deformazioni prodotte dalle masse aggiunte nei due piani di correzione generano nei supporti vibrazioni o forze inferiori ai limiti di tolleranza prestabiliti. A questo proposito si può citare la definizione fornita dalla norma ISO 1925, secondo la quale *un rotante si può considerare rigido ai fini dell'equilibratura quando i suoi squilibri possono essere corretti con masse poste su due piani trasversali arbitrari, così che lo squilibrio residuo può essere ridotto a valori inferiori alle tolleranze di equilibratura, per tutte le velocità non superiori a quella massima di funzionamento, posto che nel montaggio definitivo ruoti in condizioni molto simili a quelle del sistema di appoggio e di montaggio durante l'equilibratura.*

Per una corretta equilibratura dei rotori rigidi devono essere tenute presenti le seguenti considerazioni:

- a) la rigidità del rotore, agli effetti dell'equilibratura, deve essere verificata nelle condizioni di montaggio effettivo e alla massima velocità di funzionamento;
- b) la velocità di equilibratura deve essere la più bassa possibile, compatibilmente con la necessità di effettuare una misura sufficientemente precisa degli squilibri residui. La bassa velocità riduce la deformazione del rotore, il tempo dei lanci ed il pericolo di distacco di masse;
- c) i piani di correzione devono essere il più possibile distanti tra loro;
- d) non è opportuno, perché troppo costoso, spingere l'equilibratura oltre i limiti precisati dalla **tolleranza di equilibratura**.

La tolleranza di equilibratura e_r può essere interpretata come l'eccentricità massima ammissibile del baricentro del rotore in uno squilibrio di tipo statico, e viene solitamente misurata in micrometri. Nel caso generale di squilibrio sia statico che dinamico, lo squilibrio tollerato, pari al prodotto della massa del rotore per la tolleranza di equilibratura, viene ripartito tra i due piani di correzione con criteri dettati dalla posizione relativa del baricentro, dei piani di correzione e degli appoggi. Se il baricentro del rotore è tra i supporti ed i piani di

correzione sono equidistanti dallo stesso, lo squilibrio tollerato su ciascun piano è pari alla metà di quello complessivo.

Si definisce **grado o classe di equilibratura**, e si indica con G , il prodotto dell'eccentricità massima ammissibile per la velocità angolare del rotore ω , misurata in rad/s. Il grado di equilibratura viene misurato in mm/s e pertanto valgono le seguenti relazioni:

$$G = \frac{e_i}{1000} \omega = \frac{e_i}{1000} \frac{2\pi n}{60} \text{ [mm/s]} \quad (6.5.11)$$

$$e_i = \frac{1000 \times 60}{2\pi n} G \approx 10000 \frac{G}{n} \text{ [\mu m]} \quad (6.5.12)$$

dove n è la velocità angolare in giri/min.

La tabella 6.5.1 fornisce i valori del grado di equilibratura per alcuni tipi di rotori, secondo quanto indicato dalla norma ISO 1940.

Come si è già accennato in precedenza, l'equilibratura di un rotore rigido viene eseguita aggiungendo (o sottraendo) masse in corrispondenza di due piani prefissati del rotore, fino a che i livelli delle vibrazioni o delle forze misurati sui supporti non scendono a valori inferiori o uguali a quelli ammessi dalle tolleranze di equilibratura.

Note le forze che il corpo in rotazione esercita sui supporti, si possono determinare quelle che occorre generare sui piani di correzione per equilibrare le prime e, quindi, l'entità e la posizione angolare delle masse da aggiungere o da sottrarre. Tale operazione è indicata come **separazione dei piani di correzione** e nelle moderne macchine equilibratrici viene di solito eseguita per via elettrica.

Per mostrare come ciò sia possibile si consideri il rotore rappresentato nella figura 6.5.7 a) e b), il quale, posto in rotazione con velocità angolare costante Ω , esercita sui supporti le forze $\overline{F_S}$ e $\overline{F_D}$ ruotanti con la medesima velocità angolare. Tali forze sono rappresentabili come vettori aventi posizione angolare nota rispetto ad un riferimento prefissato:

$$\begin{aligned} \overline{F_S} &= F_S e^{j\varphi_S} \\ \overline{F_D} &= F_D e^{j\varphi_D} \end{aligned} \quad (6.5.13)$$

Grado di equilibratura G [mm/s]	Tipo di rotore
0.4	Giroscopi. Mandrini, dischi e indotti di rettifiche di alta precisione.
1.0	Indotti di piccoli motori veloci, con elevate esigenze di equilibratura. Rotori di giradischi, registratori. Azionamenti di rettifiche di alta precisione.
2.5	Rotori di turbine a vapore e a gas, turboalternatori, turbosoffianti, turbopompe. Turbine di propulsione di navi mercantili. Indotti di motori medi e grandi con elevate esigenze di equilibratura. Indotti di piccoli motori con buona esigenza di equilibratura. Indotti di motori non compresi nelle condizioni specificate per il grado 6.3. Azionamenti di macchine utensili.
6.3	Indotti di piccoli motori elettrici, prodotti in serie, in applicazioni non sensibili alle vibrazioni oppure con montaggio con antivibranti. Indotti di medi e grandi motori elettrici (con altezza dell'albero di almeno 80 mm) senza speciali esigenze. Macchine utensili e parti di macchine utensili e di macchine in generale. Parti veloci di macchine operatrici, ceste di centrifughe. Volani, ventilatori, pompe centrifughe. Ingranaggi di riduttori di turbine marine di propulsione di navi mercantili. Cilindri e rulli per macchine da stampa. Rotori uniti a turbine a gas per l'aeronautica. Parti staccate di macchine con elevate esigenze.
16	Alberi di trasmissione, alberi cardanici con elevate esigenze di equilibratura. Parti di macchine agricole, di macchine molitorie, trebbiatrici. Parti di motori per vetture, autocarri, locomotori (a benzina o diesel). Alberi a gomito completi di volano e frizione a sei o più cilindri con elevate esigenze di equilibratura.
40	Ruote e cerchi di ruote per autovetture. Alberi di trasmissione e assali completi di autoveicoli. Alberi a gomito completi di volani e frizioni di motori a 4 tempi con 6 o più cilindri montati elasticamente, con velocità del pistone superiore a 9 m/s. Alberi a gomito completi di volani e frizioni di motori per vetture, autocarri e locomotive.
100	Alberi a gomito completi di motori diesel con 6 o più cilindri con velocità del pistone superiore a 9 m/s. Motori completi di autoveicoli e locomotive.
250	Alberi a gomito completi di motori diesel a 4 cilindri, montati rigidamente con velocità del pistone superiore a 9 m/s.
630	Alberi a gomito completi di grandi motori montati rigidamente a 4 tempi. Alberi a gomito completi di motori diesel marini montati elasticamente.
1600	Alberi a gomito completi di grandi motori a due tempi montati rigidamente.
4000	Alberi a gomito completi di motori diesel marini, montati rigidamente, con qualsiasi numero di cilindri, con velocità dei pistoni inferiore a 9 m/s.

Tab. 6.5.1

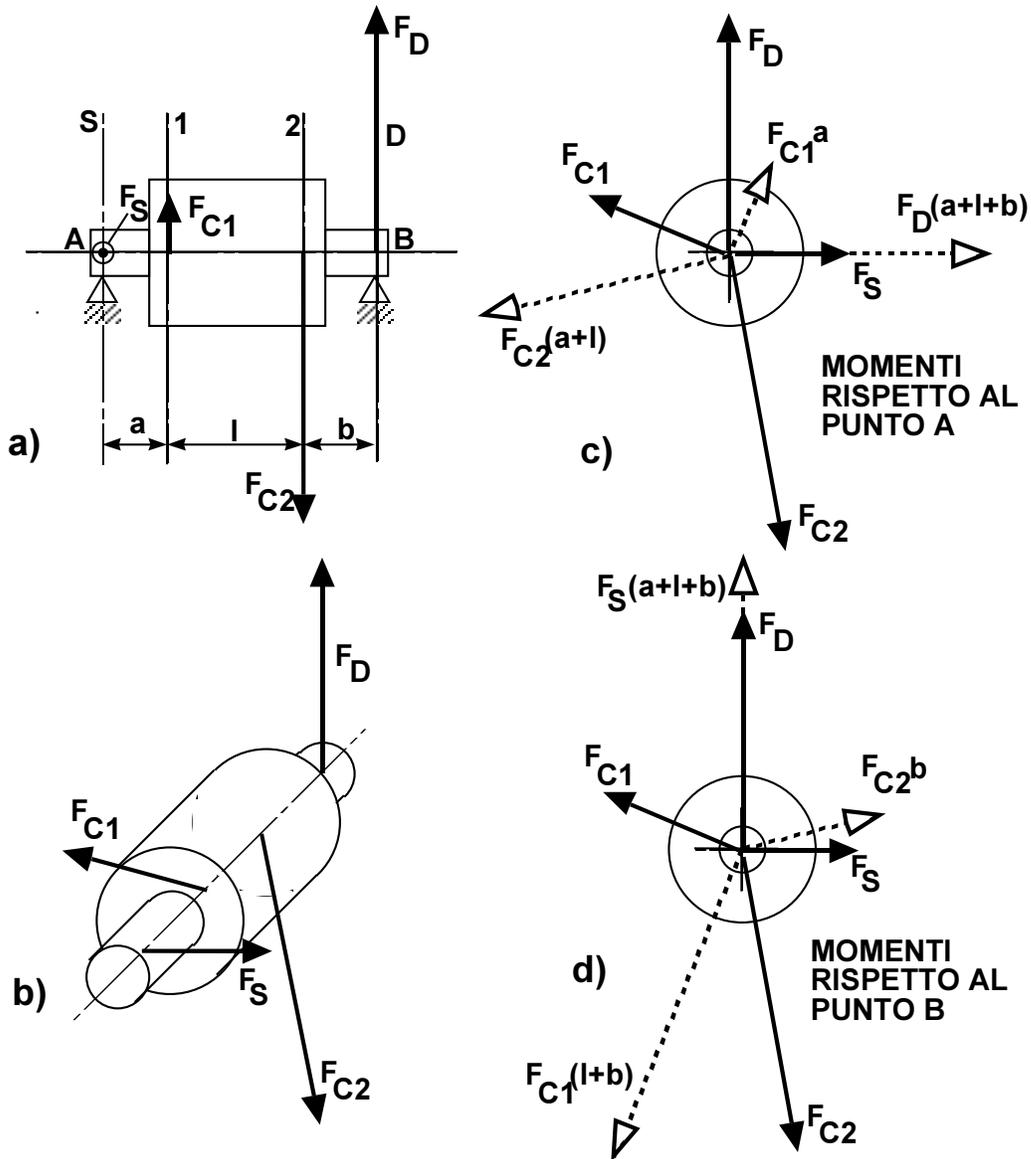


Fig. 6.5.7

Fissati i piani di correzione 1 e 2, occorre determinare gli squilibri $\bar{q}_1 = m_1 \bar{r}_1$ e $\bar{q}_2 = m_2 \bar{r}_2$, dove m_1 e m_2 sono le masse correttive e \bar{r}_1 e \bar{r}_2 i vettori che ne individuano la posizione radiale ed angolare, tali che le forze centrifughe corrispondenti $\bar{F}_{c1} = \bar{q}_1 \Omega^2$ e $\bar{F}_{c2} = \bar{q}_2 \Omega^2$ facciano equilibrio alle \bar{F}_S e \bar{F}_D .

Per l'equilibrio dei momenti rispetto ai punti A e B (v. figura 6.5.7 c) e d)) si può scrivere:

$$\begin{cases} a\bar{q}_1\Omega^2 + (a+l)\bar{q}_2\Omega^2 + (a+l+b)\bar{F}_D = 0 \\ (b+l)\bar{q}_1\Omega^2 + b\bar{q}_2\Omega^2 + (a+l+b)\bar{F}_S = 0 \end{cases} \quad (6.5.14)$$

Il sistema delle (6.5.14) permette di trovare i valori di \bar{q}_1 e \bar{q}_2 , dai quali, noti r_1 e r_2 , si ricavano le entità delle masse e le loro posizioni angolari. Si ha:

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 &= \frac{b}{\Omega^2 l} \left(\frac{\bar{F}_D}{b} - \frac{a+l}{b} \bar{F}_S \right) \\ \bar{q}_2 &= \frac{a}{\Omega^2 l} \left(-\frac{b+l}{a} \bar{F}_D + \bar{F}_S \right) \end{aligned} \quad (6.5.15)$$

Il circuito rappresentato nella figura 6.5.8 è un esempio di come si possa determinare analogicamente \bar{q}_1 e \bar{q}_2 . In questo caso \bar{F}_S e \bar{F}_D sono rappresentate dalle tensioni alternate, con pulsazione Ω e sfasate come \bar{F}_S e \bar{F}_D , generate dai trasduttori posti sui supporti. I potenziometri vengono predisposti in funzione delle caratteristiche geometriche del rotore.

L'equilibratura può essere eseguita sia col rotore montato su macchine speciali, dette **equilibratrici**, sia in condizioni operative e in tal caso si parla di **equilibratura in situ o in condizioni di servizio**. Il primo metodo è adottato di solito dal costruttore del rotore, prima che questo sia montato sulla macchina; il secondo viene seguito prevalentemente quando si opera nell'ambito della manutenzione.

Le equilibratrici si distinguono, generalmente, in **equilibratrici a supporti rigidi** e **equilibratrici a supporti flessibili**.

Le prime hanno una struttura tale che le frequenze proprie di vibrazione, tenendo conto anche del rotore su di esse montato, sono superiori alla frequenza di rotazione (e per questo sono anche dette *macchine sub-critiche*). In questo caso opportuni trasduttori, di solito piezoelettrici, misurano le forze trasmesse dal rotore ai supporti e da queste, scelti i piani di correzione e noti i diametri su cui operare, è possibile risalire all'entità delle masse correttive e alla loro posizione angolare. Questo tipo di macchine non ha bisogno di lanci di taratura, ma è sufficiente introdurre le distanze relative dei piani di correzione ed il valore dei diametri corrispondenti: la separazione dei piani viene effettuata con circuiti del tipo mostrato nella figura 6.5.8.

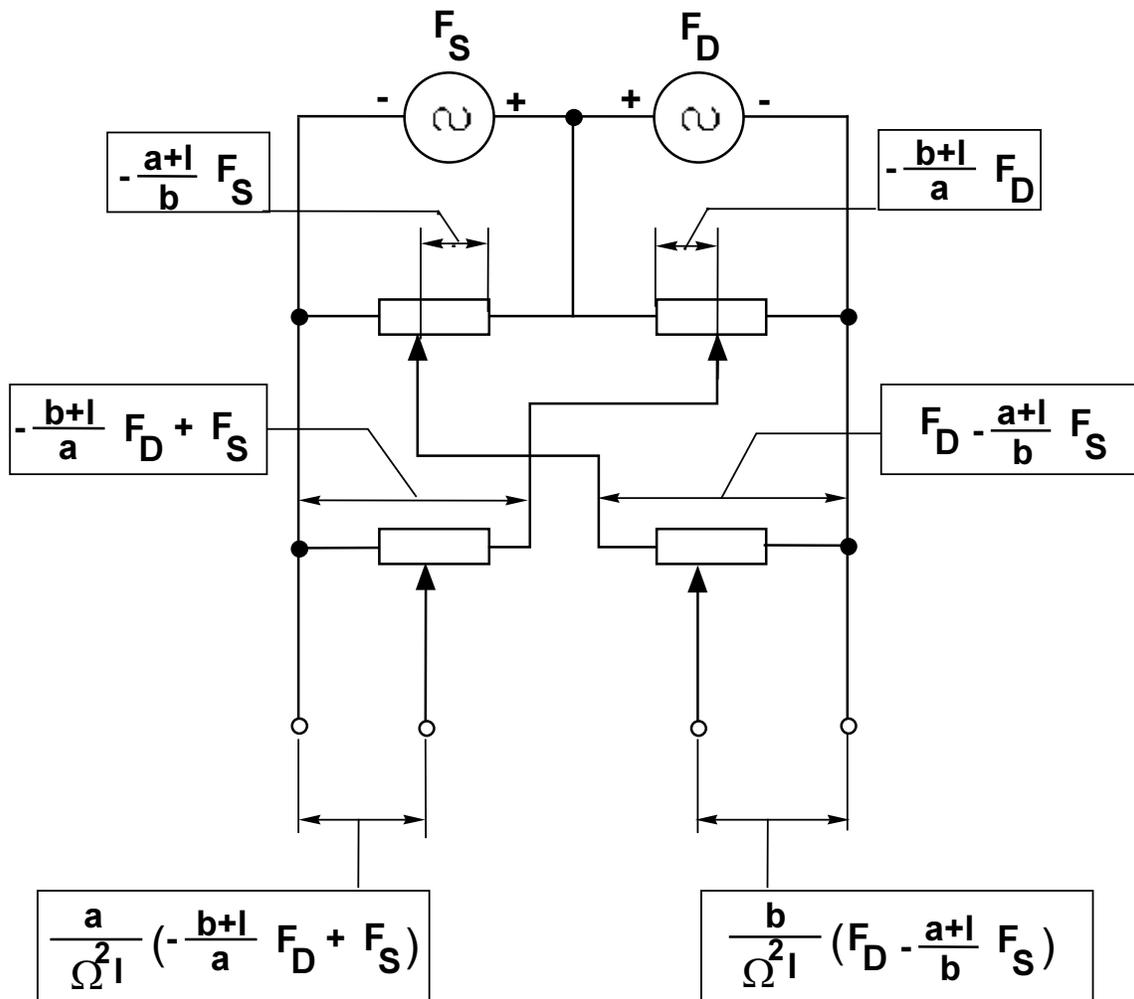


Fig. 6.5.8

Le equilibratrici a supporti flessibili lavorano invece con frequenze di rotazione del rotore superiori alle frequenze proprie della macchina, i cui supporti hanno generalmente bassa rigidezza in direzione orizzontale (*macchine super-critiche*). Si ottiene così un moto vibratorio del complesso rotore-supporti, dalla cui ampiezza di risale al valore delle forze agenti sul rotore e, quindi, al valore delle azioni equilibratrici che occorre generare. In questo caso i trasduttori misurano la velocità di vibrazione e la taratura deve essere fatta con lanci successivi della macchina, onde tener conto delle caratteristiche di massa del sistema rotore-supporti che viene posto in vibrazione.

Passiamo, ora, a considerare l'equilibratura in condizioni di servizio. Tale metodo può rendersi necessario sia allo scopo di perfezionare l'operazione fatta su macchine equilibratrici, per tener conto di differenti rigidzze e masse dei supporti, sia a fini manutentivi, per correggere le alterazioni dei rotori dovute, per esempio, ad usura o ad incrostazioni.

I parametri misurati sono, generalmente, le vibrazioni dei supporti, rilevate in termini di spostamento, velocità o accelerazione, e le relative fasi rispetto ad un riferimento arbitrario. L'ampiezza di vibrazione è riconducibile alla forza esercitata dal rotore sul supporto ed, in ogni caso, fornisce direttamente l'entità della grandezza fisica sulla quale l'equilibratura si propone di agire. Si può usare, a tal fine, un vibrometro accoppiato ad un misuratore di fase, con l'avvertenza di filtrare il segnale proveniente dai sensori per eliminare le componenti a frequenza diversa da quella di rotazione.

Il metodo più usato per la determinazione delle masse correttive e della loro posizione è quello detto dei **coefficienti di influenza** (v. figura 6.5.9).

Si individuano, dapprima, i piani m ed n sui quali eseguire le correzioni, e, posto in rotazione il rotore alla velocità angolare Ω , si misurano le vibrazioni \overline{V}_a^s e \overline{V}_b^s sui piani a e b dei supporti dovute allo squilibrio presente nel rotore. \overline{V}_a^s e \overline{V}_b^s sono evidentemente vettori, la cui fase viene misurata rispetto ad un riferimento arbitrario (creato, ad esempio, utilizzando una fotocellula ed un tassello riflettente sull'albero). A questo punto si applica sul rotore, in corrispondenza del piano di correzione m , una massa m_m in una posizione individuata dal vettore \overline{r}_m , e si misurano le corrispondenti vibrazioni \overline{V}_a^{sm} e \overline{V}_b^{sm} sui piani dei supporti, alla medesima velocità angolare. Nell'ipotesi che il sistema sia lineare, la differenza $\overline{W}_{am} = \overline{V}_a^{sm} - \overline{V}_a^s$ tra la vibrazione nel piano a dovuta allo squilibrio più la massa aggiuntiva e quella dovuta al solo squilibrio rappresenta la vibrazione nel piano a dovuta alla sola massa aggiuntiva m_m . Analogamente, $\overline{W}_{bm} = \overline{V}_b^{sm} - \overline{V}_b^s$ rappresenta la vibrazione nel piano b dovuta alla sola massa aggiuntiva m_m .

I rapporti

$$\overline{\alpha}_{am} = \frac{\overline{W}_{am}}{m_m \overline{r}_m} \quad (6.5.16)$$

$$\overline{\alpha}_{bm} = \frac{\overline{W}_{bm}}{m_m \overline{r}_m} \quad (6.5.17)$$

sono i cosiddetti **coefficienti di influenza**. Essi vanno considerati come rapporti tra i numeri complessi che rappresentano i vettori corrispondenti e sono pertanto essi stessi numeri complessi aventi per ampiezza il rapporto delle ampiezze dei numeri complessi che compaiono al numeratore e al denominatore e come fase la differenza delle fasi degli stessi numeri. I coefficienti di influenza sono dunque grandezze vettoriali e rappresentano le vibrazioni indotte sui piani a e b dei supporti da masse unitarie poste sui piani di correzione m ed n , alla distanza unitaria e con fase nulla rispetto al riferimento scelto (i vettori \overline{W} e \overline{r} hanno la stessa fase).

Il procedimento viene ripetuto togliendo la massa dal piano m ed aggiungendo sul piano n una massa m_n nella posizione individuata dal vettore $\overline{r_n}$. Effettuate le misure di $\overline{V_a^{sn}}$ e $\overline{V_b^{sn}}$ nei piani a e b , si calcolano $\overline{W_{an}} = \overline{V_a^{sn}} - \overline{V_a^s}$ e $\overline{W_{bn}} = \overline{V_b^{sn}} - \overline{V_b^s}$ ed infine i coefficienti di influenza

$$\overline{\alpha_{an}} = \frac{\overline{W_{an}}}{m_n \overline{r_n}} \quad (6.5.18)$$

$$\overline{\alpha_{bn}} = \frac{\overline{W_{bn}}}{m_n \overline{r_n}} \quad (6.5.19)$$

Noti i coefficienti di influenza, si possono calcolare le masse correttive m_{cm} e m_{cn} da aggiungere nei piani m ed n , nella posizione individuata dai vettori $\overline{r_{cm}}$ e $\overline{r_{cn}}$, affinché si annullino le vibrazioni nei piani dei supporti. Si deve avere:

$$\begin{aligned} \overline{V_a^s} + m_{cm} \overline{r_{cm}} \overline{\alpha_{am}} + m_{cn} \overline{r_{cn}} \overline{\alpha_{an}} &= 0 \\ \overline{V_b^s} + m_{cm} \overline{r_{cm}} \overline{\alpha_{bm}} + m_{cn} \overline{r_{cn}} \overline{\alpha_{bn}} &= 0 \end{aligned} \quad (6.5.20)$$

Risolvendo il sistema (6.5.20) si ottengono i valori $m_{cm} \overline{r_{cm}}$ e $m_{cn} \overline{r_{cn}}$, che fissate le distanze radiali r_{cm} e r_{cn} , forniscono l'entità delle masse di correzione m_{cm} e m_{cn} e la loro posizione angolare rispetto al riferimento scelto.

Il segnale corrispondente ad uno squilibrio sarà caratterizzato, nel dominio delle frequenze, da un picco alla frequenza di rotazione, accompagnato, eventualmente, da armoniche superiori dovute a distorsione del segnale.

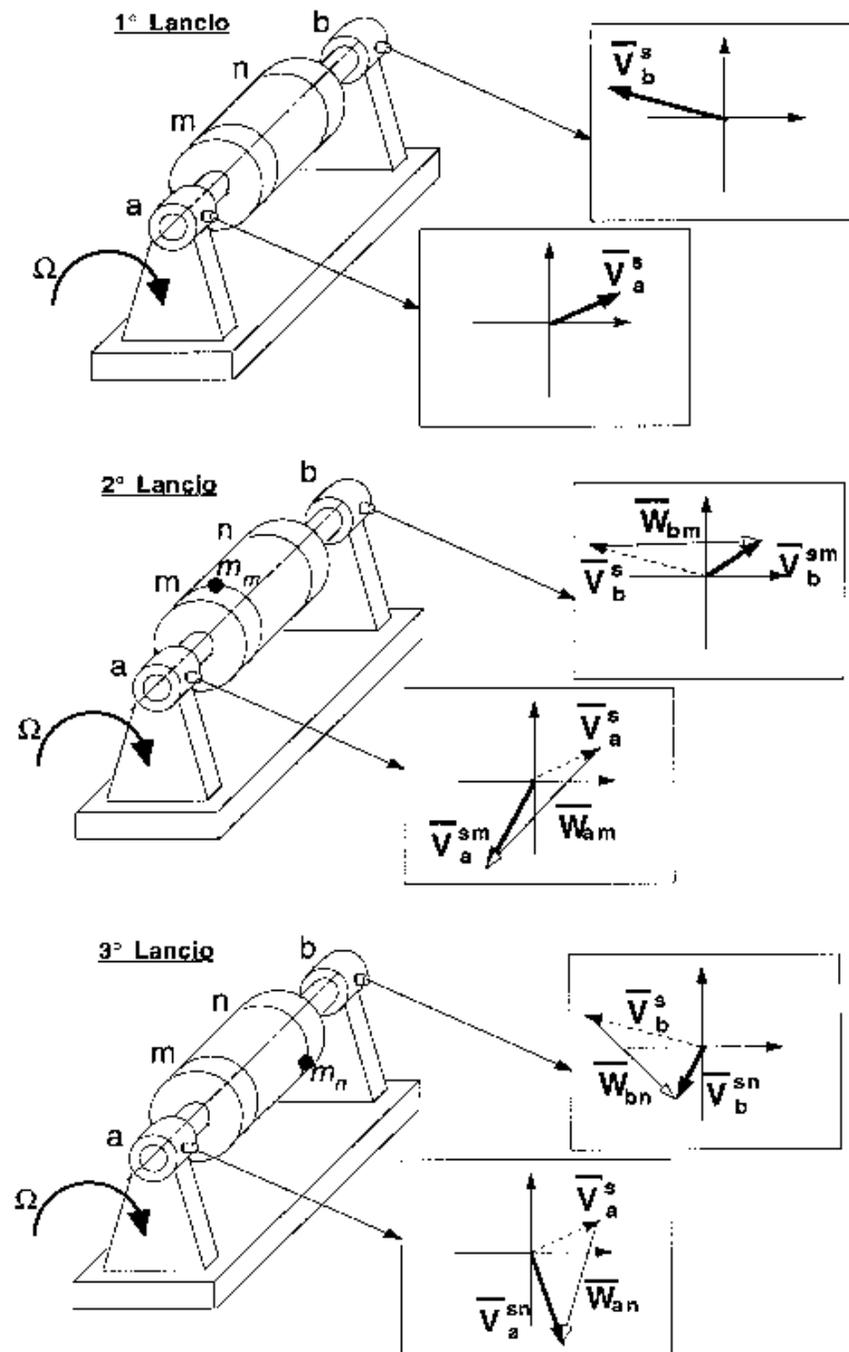


Fig. 6.5.9

La figura 6.5.21 mostra lo spettro del segnale di accelerazione rilevato su un supporto di un rotore di una macchina dimostrativa, sul quale è stato creato uno squilibrio artificiale mediante l'aggiunta di una piccola massa. La velocità di rotazione della macchina è di 1500 giri/1', a cui corrisponde una frequenza di 25 Hz.

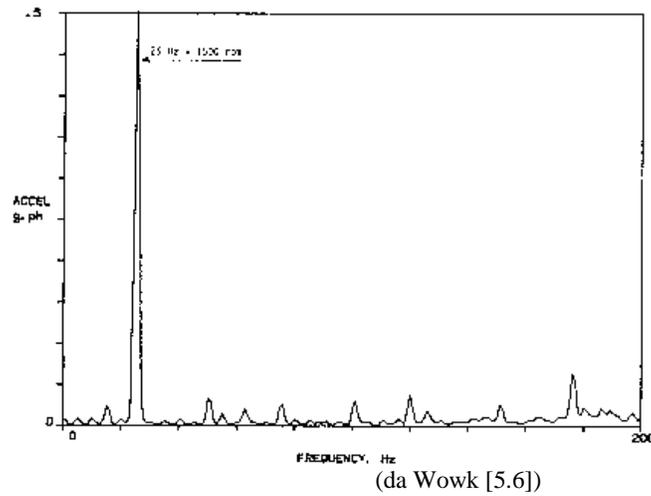


Fig. 6.5.21

EXAMPLE 9.1 Two-Plane Balancing of Turbine Rotor

In the two-plane balancing of a turbine rotor, the data obtained from measurement of the original unbalance, the right-plane trial weight, and the left-plane trial weight are shown below. The displacement amplitudes are in mils (1/1000 inch.) Determine the size and location of the balance weights required.

Condition	Vibration (displacement) amplitude		Phase angle	
	At bearing A	At bearing B	At bearing A	At bearing B
Original unbalance	8.5	6.5	60°	205°
$W_L = 10.0$ oz added at 270° from reference mark	6.0	4.5	125°	230°
$W_R = 12.0$ oz added at 180° from reference mark	6.0	10.5	35°	160°

Given: Data from balancing measurements as given in the table.

Find: Size and location of the necessary balance weights.

Approach: Apply the vector equations, Eqs. (9.16) and (9.17), to achieve balancing.

Solution: The given data can be expressed in vector notation as

$$\vec{V}_A = 8.5 \angle 60^\circ = 4.2500 + i 7.3612$$

$$\vec{V}_B = 6.5 \angle 205^\circ = -5.8910 - i 2.7470$$

$$\vec{V}'_A = 6.0 \angle 125^\circ = -3.4415 + i 4.9149$$

$$\vec{V}'_B = 4.5 \angle 230^\circ = -2.8926 - i 3.4472$$

$$\vec{V}''_A = 6.0 \angle 35^\circ = 4.9149 + i 3.4472$$

$$\vec{V}''_B = 10.5 \angle 160^\circ = -9.8668 + i 3.5912$$

$$\vec{W}_L = 10.0 \angle 270^\circ = 0.0000 - i 10.0000$$

$$\vec{W}_R = 12.0 \angle 180^\circ = -12.0000 + i 0.0000$$

Equations (9.10) and (9.11) give

$$\vec{A}_{AL} = \frac{\vec{V}'_A - \vec{V}_A}{\vec{W}_L} = \frac{-7.6915 - i 2.4463}{0.0000 - i 10.0000} = 0.2446 - i 0.7691$$

$$\vec{A}_{BL} = \frac{\vec{V}'_B - \vec{V}_B}{\vec{W}_L} = \frac{2.9985 - i 0.7002}{0.0000 - i 10.0000} = 0.0700 + i 0.2998$$

The use of Eqs. (9.14) and (9.15) leads to

$$\vec{A}_{AR} = \frac{\vec{V}''_A - \vec{V}_A}{\vec{W}_R} = \frac{0.6649 - i 3.9198}{-12.0000 + i 0.0000} = -0.0554 + i 0.3266$$

$$\vec{A}_{BR} = \frac{\vec{V}''_B - \vec{V}_B}{\vec{W}_R} = \frac{-3.9758 + i 6.3382}{-12.0000 + i 0.0000} = 0.3313 - i 0.5282$$

The unbalance weights can be determined from Eqs. (9.16) and (9.17):

$$\begin{aligned} \vec{U}_L &= \frac{(5.2962 + i 0.1941) - (1.2237 - i 1.7721)}{(-0.3252 - i 0.3840) - (-0.1018 + i 0.0063)} = \frac{(4.0725 + i 1.9661)}{(-0.2234 - i 0.3903)} \\ &= -8.2930 + i 5.6879 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{U}_R &= \frac{(-1.9096 + i 1.7898) - (3.5540 + i 3.8590)}{(-0.1018 + i 0.0063) - (-0.3252 - i 0.3840)} = \frac{(1.6443 - i 2.0693)}{(0.2234 + i 0.3903)} \\ &= -2.1773 - i 5.4592 \end{aligned}$$

Thus the required balance weights are given by

$$\vec{B}_L = -\vec{U}_L = (8.2930 - i 5.6879) = 10.0561 / \underline{145.5548^\circ}$$

$$\vec{B}_R = -\vec{U}_R = (2.1773 + i 5.4592) = 5.8774 / \underline{248.2559^\circ}$$

This shows that the addition of a 10.0561 oz weight in the left plane at 145.5548° and a 5.8774 oz weight in the right plane at 248.2559° from the reference position will balance the turbine rotor. It is implied that the balance weights are added at the same radial distance as the trial weights. If a balance weight is to be located at a different radial position, the required balance weight is to be modified in inverse proportion to the radial distance from the axis of rotation. ■