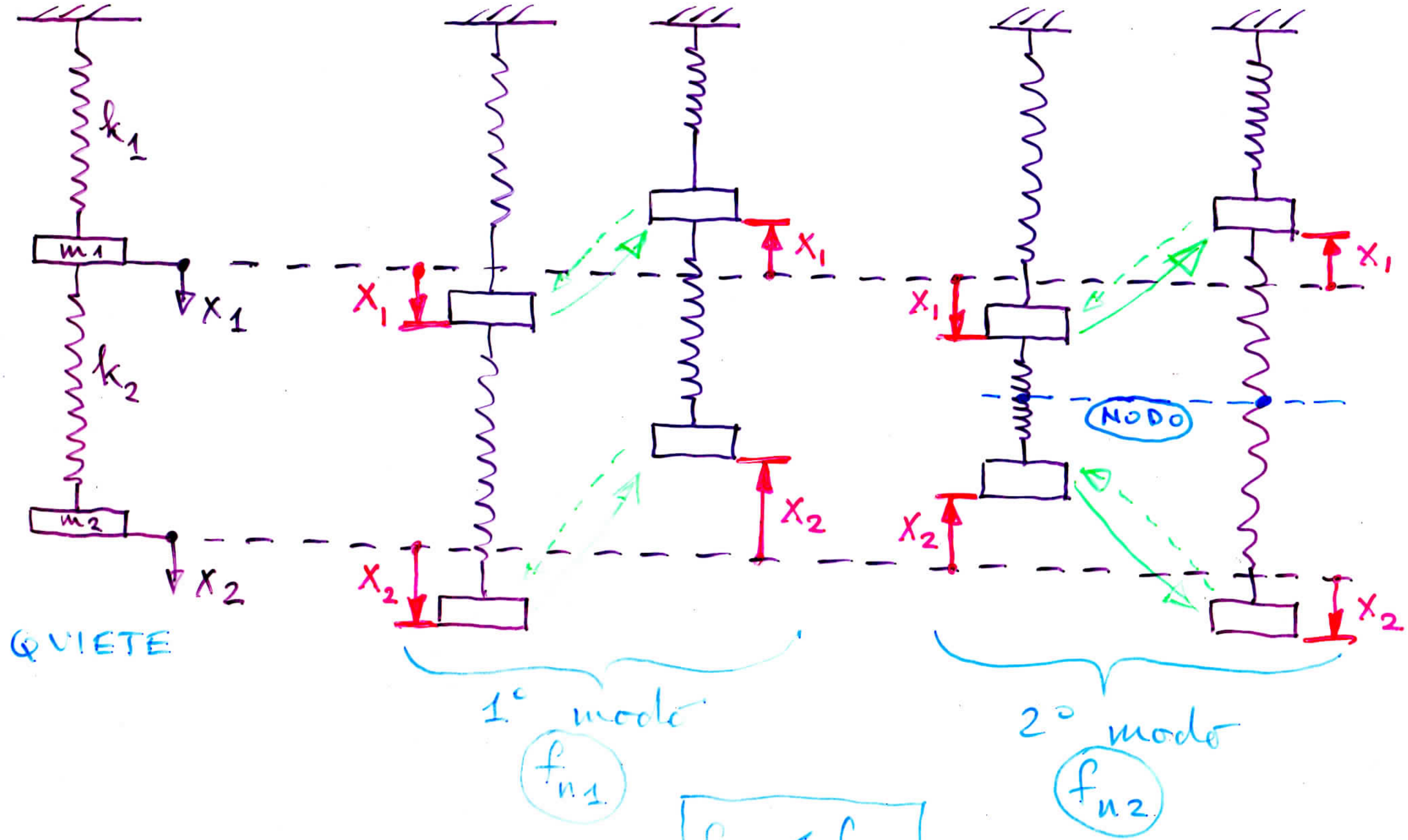
SISTEMA a 2gdl - FREQ. NATURALI E MODI

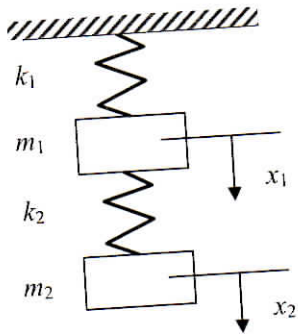


$$\boxed{f_{n1} < f_{n2}}$$

e le due equazioni differenziali del moto possono

Esempio numerico. *Si analizzi il sistema a due gdl di figura, ricavandone dapprima i modi di vibrare mediante l'equazione caratteristica, studiandone quindi le vibrazioni libere per determinate condizioni iniziali, e ricavandone infine pulsazioni proprie e forme modali mediante la matrice dinamica. I dati numerici siano:* $m_1 = 9$ *kg,* $m_2 = 1$ *kg,* $k_1 = 24$ *N/m,* $k_2 = 3$ *N/m.*

1. Equazioni del moto e modi di vibrare.



Le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} 9\ddot{x}_1 + 27x_1 - 3x_2 = 0 \\ 1\ddot{x}_2 - 3x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

L'equazione caratteristica è:

$$\begin{vmatrix} 27 - 9\omega^2 & -3 \\ -3 & 3 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

le cui radici sono:

$$\omega_{n1}^2 = 2, \qquad \omega_{n2}^2 = 4.$$

Pertanto le pulsazioni naturali del sistema sono:

$$\omega_{n1} = \sqrt{2} \ \text{rad/s}, \qquad \omega_{n2} = 2 \ \text{rad/s},$$

e i corrispondenti modi di vibrare – come spesso vengono dette le forme modali –, normalizzati con l'ampiezza della vibrazione della massa m_1 posta uguale a 1 (v. § 4.2) sono:

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}; \qquad \Phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

2. Vibrazioni libere.

Le equazioni del moto libero generale del sistema sono:

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \sin\left(\sqrt{2}\, t + \alpha_1\right) - A_2 \sin\left(2t + \alpha_2\right) \\ x_2(t) = 3A_1 \sin\left(\sqrt{2}\, t + \alpha_1\right) + 3A_2 \sin\left(2t + \alpha_2\right) \end{cases}$$

Se le condizioni iniziali sono:

$$x_1(0) = 3 \text{ m}, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0,$$

le costanti $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$ si ricavano imponendo che sia:

$$\begin{cases} A_1 \sin\alpha_1 - A_2 \sin\alpha_2 = 3 \\ A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2 = 0 \\ \sqrt{2} A_1 \cos\alpha_1 - 2 A_2 \cos\alpha_2 = 0 \\ \sqrt{2} A_1 \cos\alpha_1 + 2 A_2 \cos\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro le ultime due, e ponendo $A_1 \neq 0$, si ricava $\alpha_1 = \pi/2$. Sostituendo nell'ultima, si ottiene $\alpha_2 = \pi/2$. Sostituendo infine questi valori nelle prime due, si ha:

$$\begin{cases} A_1 - A_2 = 3 \\ A_1 + A_2 = 0 \end{cases}$$

da cui infine si ricava:

$$\begin{cases} A_1 = 1.5 \\ A_2 = -1.5. \end{cases}$$

Pertanto, le equazioni del moto libero sono:

$$\begin{cases} x_1(t) = 0.5\left[\cos\left(\sqrt{2}\, t\right) + \cos\left(2t\right)\right] \\ x_2(t) = 1.5\left[\cos\left(\sqrt{2}\, t\right) - \cos\left(2t\right)\right] \end{cases}$$

3. Autovalori e autovettori.

Le matrici di massa e di rigidezza del sistema sono:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 27 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix},$$

per cui risulta:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & -1/3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di **A** sono:

$$\lambda_1 = 2; \qquad \lambda_2 = 4,$$

per cui le pulsazioni naturali sono:

$$\omega_{n1} = \sqrt{2} \text{ rad/s}, \qquad \omega_{n2} = 2 \text{ rad/s},$$

cioè le stesse trovate prima. I corrispondenti autovettori sono:

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \Phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

e sono naturalmente gli stessi trovati prima.

Esempio: vibrazioni libere di un sistema a 3 gdl

Consideriamo il sistema rappresentato nella figura 1.

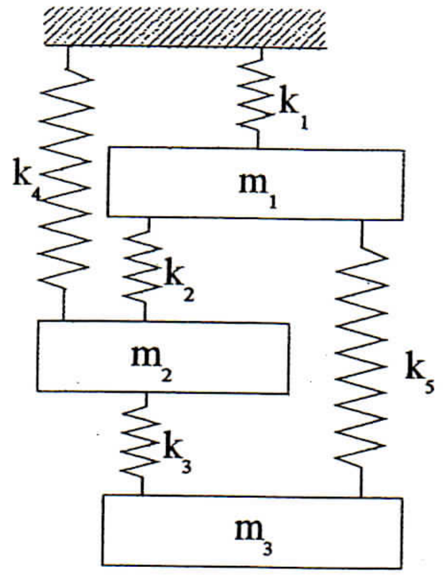


Fig. 1

I valori dei parametri concentrati presenti sono:

$m_1 = 1.5$ kg
$m_2 = 3.0$ kg
$m_3 = 2.0$ kg
$k_1 = 7500$ N/m
$k_2 = 10000$ N/m
$k_3 = 12000$ N/m
$k_4 = 5000$ N/m
$k_5 = 8000$ N/m

Misuriamo gli spostamenti $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ delle masse a partire dalle rispettive posizioni di equilibrio statico. Le matrici massa e rigidezza sono:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1+k_2+k_5 & -k_2 & -k_5 \\ -k_2 & k_2+k_3+k_4 & -k_3 \\ -k_5 & -k_3 & k_3+k_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25500 & -10000 & -8000 \\ -10000 & 27000 & -12000 \\ -8000 & -12000 & 20000 \end{bmatrix}.$$

L'inversa della matrice massa è:

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6667 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5000 \end{bmatrix}$$

e quindi la matrice dinamica $A=[M]^{-1}[K]$ risulta essere:

$$[A]=[M]^{-1}[K]=\begin{bmatrix} 1.7000 & -0.6667 & -0.5333 \\ -0.3333 & 0.9000 & -0.4000 \\ -0.4000 & -0.6000 & 1.0000 \end{bmatrix}\times 10^4$$

Il determinante della matrice $[A-\lambda I]$ ha l'andamento mostrato nella figura 2.

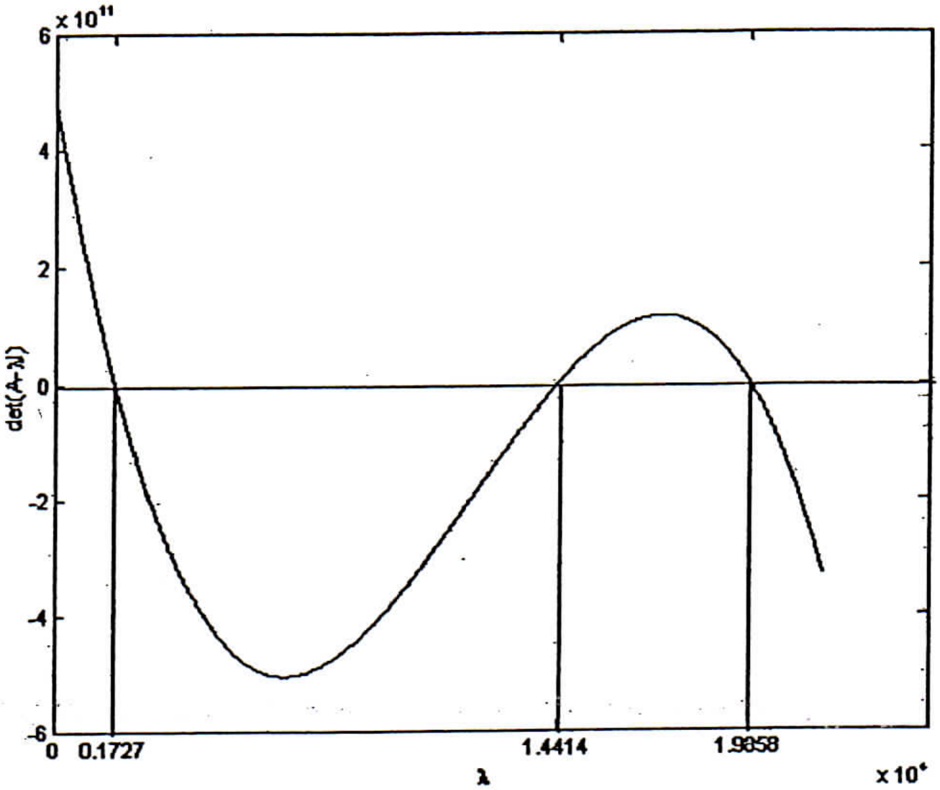


Fig. 2

e si annulla per i valori $\lambda_1 = 0.1727\times10^4$, $\lambda_2 = 1.4414\times10^4$ e $\lambda_3 = 1.9858\times10^4$. A tale risultato si può giungere utilizzando opportuni strumenti di calcolo numerico, come, ad esempio, quelli forniti nell'ambiente MATLAB®, dove è disponibile la funzione ***eig*** che fornisce gli autovalori e gli autovettori di una matrice. In questo caso si ottiene:

$$[D]=\begin{bmatrix} 0.1727 & 0 & 0 \\ 0 & 1.9858 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4414 \end{bmatrix}\times 10^4$$ (matrice diagonale degli autovalori)

$$[\Phi] = [VN]=\begin{bmatrix} -0.3237 & -0.7489 & 0.0312 \\ -0.3901 & 0.1521 & -0.3975 \\ -0.4395 & 0.2113 & 0.5121 \end{bmatrix}$$

$$[\Phi] = [\{\Phi_1\}\ \{\Phi_2\}\ \{\Phi_3\}]$$

(matrice degli autovettori)

GLI AUTOVETTORI SOPRA INDICATI SONO NORMALIZZATI, COME AVVIENE DI SOLITO, IMPONENDO LA CONDIZIONE:

$$\{\Phi_j\}^T[M]\{\Phi_j\} = 1 \quad , \quad \forall j = 1,2,3$$

Le forme modali corrispondenti agli autovalori sono rappresentate nella figura 3.

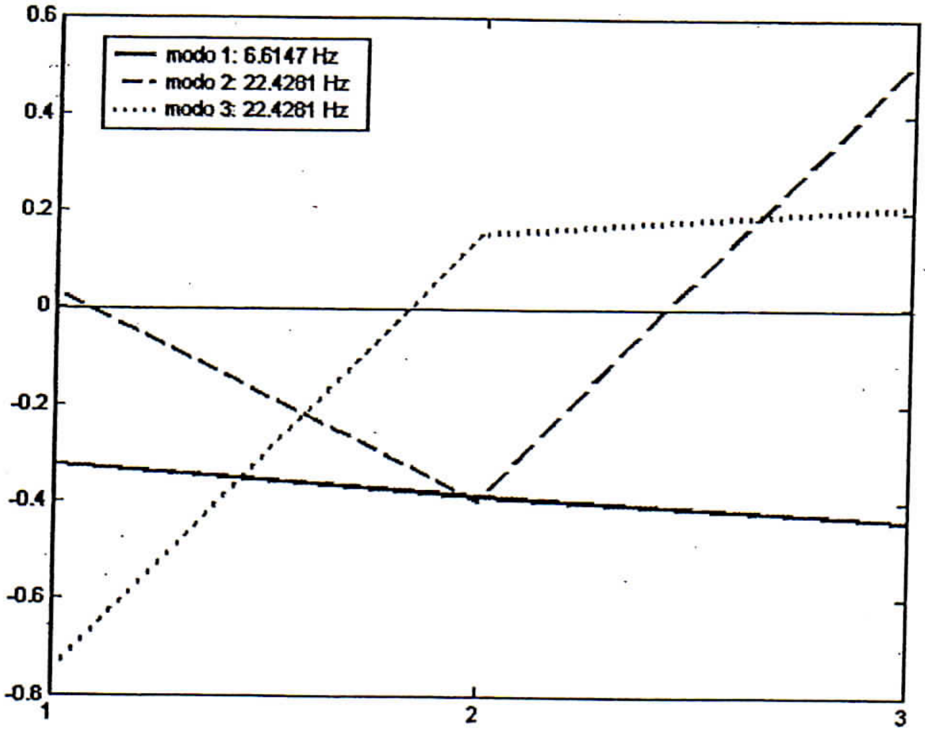


Fig. 3

Verifichiamo, ora, l'ortogonalità degli autovettori. Eseguendo i calcoli, si ottiene:

$$\{VN_1\}^T[M]\{VN_2\} = -2.4980\times 10^{-16}$$

$$\{VN_2\}^T[M]\{VN_3\} = 1.1102\times 10^{-16}$$

$$\{VN_3\}^T[M]\{VN_1\} = 5.5511\times 10^{-17}$$

$$\{VN_1\}^T[K]\{VN_2\} = -1.1369\times 10^{-13}$$

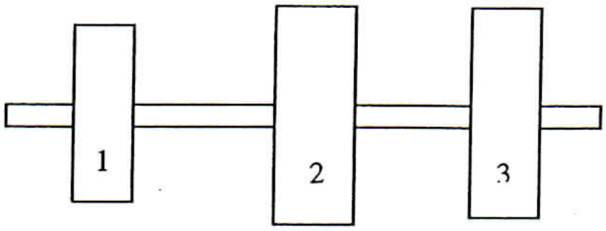
$$\{VN_2\}^T[K]\{VN_3\} = 2.7285\times 10^{-12}$$

$$\{VN_1\}^T[K]\{VN_3\} = -1.1369e\times 10^{-12}$$

Ovviamente, il risultato del calcolo non è esattamente uguale a zero a causa della troncatura dei valori numerici.

Calcolo delle frequenze naturali di un rotore con tre masse volaniche.

Si consideri un rotore con tre masse volaniche, come quello rappresentato in figura.



Siano dati i momenti di inerzia polari dei tre volani e le rigidezze torsionali dei tratti di albero che uniscono i tre volani:

$J_1 = 0.015\,\text{kg m}^2$ $\quad J_2 = 0.030\ \text{kg m}^2$ $\quad J_3 = 0.020\ \text{kg m}^2$

$k_1 = 5000\ \text{N m /rad}$ $\quad k_2 = 7000\ \text{N m/rad}$

Dapprima adottiamo un sistema di riferimento fisso, misurando le rotazioni delle masse a partire da una medesima direzione di riferimento. In questo caso, le matrici massa e rigidezza sono date da:

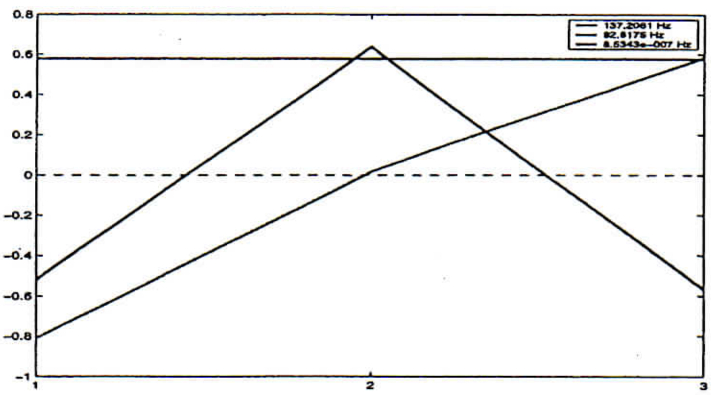
$$[M] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0150 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0300 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0200 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 & -5000 & 0 \\ -5000 & 12000 & -7000 \\ 0 & -7000 & 7000 \end{bmatrix}$$

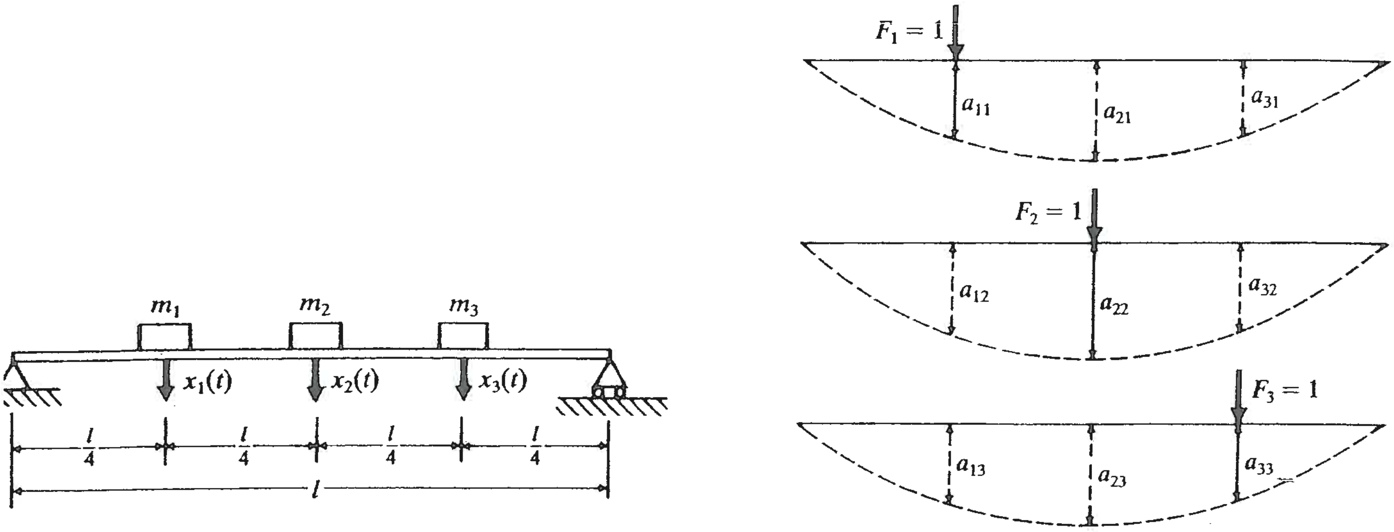
Risolvendo il problema di autovalori ed autovettori si ottiene:

$$[D] = \begin{bmatrix} 7.4322 & 0 & 0 \\ 0 & 3.4011 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0000 \end{bmatrix} \times 10^5\ (\text{rad/s})^2 \quad \text{ossia} \quad [F] = \begin{bmatrix} 137.2081 & 0 & 0 \\ 0 & 92.8175 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0000 \end{bmatrix}\ (\text{Hz})$$

Le forme modali sono rappresentate nella figura seguente:



Forme modali



(a) (b)

URE 6.9

Given: Beam carrying three masses, Fig. 6.9(a).

Find: Flexibility matrix, $[a]$.

Approach: Use the definition of a_{ij} along with beam deflection formula.

Solution: Let x_1, x_2, and x_3 denote the total transverse deflection of the masses m_1, m_2, and m_3, respectively. From the known formula for the deflection of a pinned-pinned beam [6.2], the influence coefficients a_{1j} ($j = 1, 2, 3$) can be found by applying a unit load at the location of m_1 and zero load at the locations of m_2 and m_3 (see Fig. 6.9b):

$$a_{11} = \frac{9}{768}\frac{l^3}{EI}, \qquad a_{12} = \frac{11}{768}\frac{l^3}{EI}, \qquad a_{13} = \frac{7}{768}\frac{l^3}{EI} \tag{E.1}$$

Similarly, by applying a unit load at the locations of m_2 and m_3 separately (with zero load at other locations), we obtain

$$a_{21} = a_{12} = \frac{11}{768}\frac{l^3}{EI}, \qquad a_{22} = \frac{1}{48}\frac{l^3}{EI}, \qquad a_{23} = \frac{11}{768}\frac{l^3}{EI} \tag{E.2}$$

and

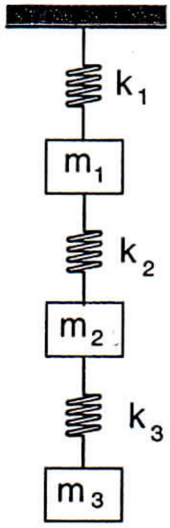
$$a_{31} = a_{13} = \frac{7}{768}\frac{l^3}{EI}, \qquad a_{32} = a_{23} = \frac{11}{768}\frac{l^3}{EI}, \qquad a_{33} = \frac{9}{768}\frac{l^3}{EI} \tag{E.3}$$

Thus the flexibility matrix of the system is given by

$$[a] = \frac{l^3}{768EI}\begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \tag{E.4}$$

■

Esercitazione MODIFICHE STRUTTURALI



In figura è rappresentato un sistema a 3 gdl.
Noti i valori delle masse e delle rigidezze, calcolare:

1) le 3 pulsazioni naturali del sistema (in rad/s)
2) le 3 forme modali (eseguire la normalizzazione in modo che la prima componente sia unitaria)

Inoltre, introdotte nel sistema le modifiche strutturali indicate nel seguito, calcolare il nuovo valore della seconda pulsazione propria del sistema impiegando il quoziente di Rayleigh.

Dati:

$m = 1 + u / 10$ [kg]
$k = 1 - v / 10$ [N/m]

$m_1 = 2\ m$
$m_2 = 3\ m$
$m_3 = 2\ m$
$k_1 = 4\ k$
$k_2 = 3\ k$
$k_3 = 5\ k$

Modifiche strutturali:

$\Delta m_3 = 0.4\ m$
$\Delta k_2 = 0.7\ k$

I dati sono espressi in funzione delle ultime due cifre, u e v, del numero di matricola (numero di matricola = #####uv).