

# FONDAMENTI di MdV

## GRADI DI LIBERTÀ

Il minimo numero di coordinate indipendenti richiesto per determinare univocamente la posizione di tutti gli elementi di un sistema ad ogni istante di tempo, definisce il numero di gradi di libertà del sistema. Indicato con  $n$  il numero di gdl di un generico sistema è sempre possibile definire un set di cosiddette *coordinate generalizzate*, usualmente indicate con  $q_k$  ( $k=1,2,\dots,n$ ), ossia di coordinate indipendenti in numero uguale a quello dei gdl del sistema.

## SISTEMI CONTINUI E DISCRETI

Un gran numero di sistemi meccanici può essere descritto impiegando un numero finito di gdl; ciò accade quando sono presenti elementi dotati di elevata elasticità e scarsa massa e, al contempo, elementi di notevole massa ed elevata rigidità. Quando, al contrario, il sistema ha un numero infinito di "punti di massa" e presenta membri deformabili, è necessario un numero infinito di coordinate per specificare la sua configurazione deformata.

Sistemi aventi un numero di gdl finito sono detti *discreti* o a *parametri concentrati*, mentre quelli con un numero infinito di gradi di libertà sono detti *continui*.

Spesso, i sistemi continui sono approssimati come discreti; in tal modo è più semplice ottenere la soluzione del problema dinamico. Sebbene trattare un sistema come continuo dia risultati esatti, i metodi di analisi per i sistemi continui sono limitati ad una tipologia di sistemi molto ridotta, come ad esempio travi a sezione uniforme, piastre sottili, membrane, etc. Di conseguenza, la maggior parte dei sistemi viene studiata impiegando modelli discreti. In generale, risultati più accurati sono ottenibili aumentando il numero di gdl.

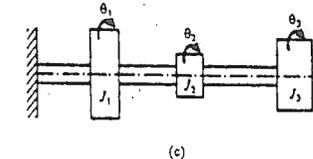
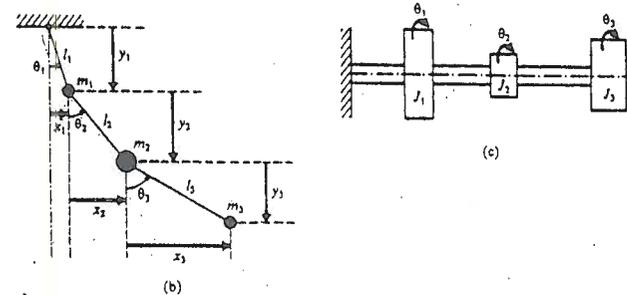
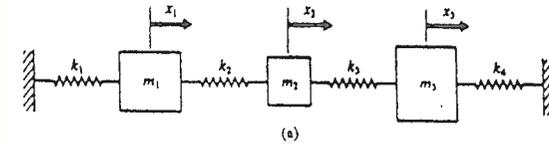
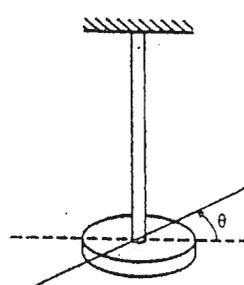
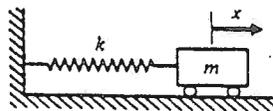
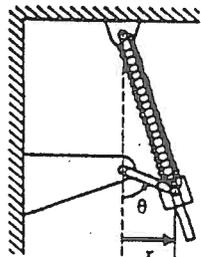


Fig. 3.3 - Three degree of freedom systems ("Mechanical vibrations", S.S. Rao, p. 15)

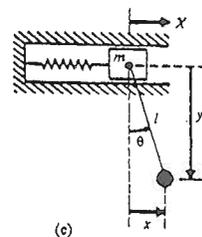
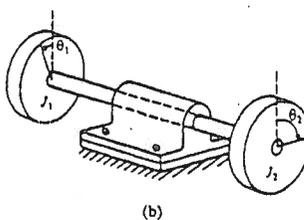
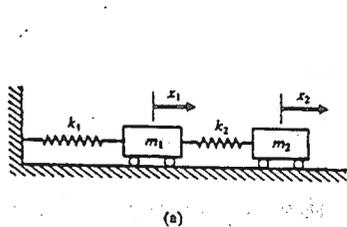


(a) Slider-crank-spring mechanism

(b) Spring-mass system

(c) Torsional system

Fig. 3.1 - Single-degree of freedom (SDOF) systems ("Mechanical vibrations", S.S. Rao, p. 14)



(a)

(b)

(c)

Fig. 3.2 - Two degree of freedom systems ("Mechanical vibrations", S.S. Rao, p. 14)

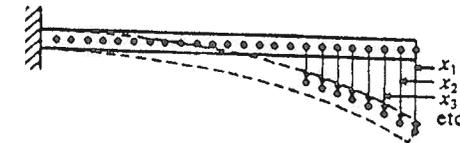


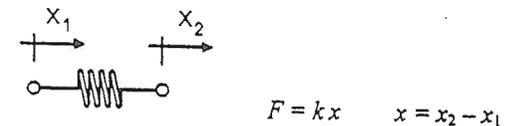
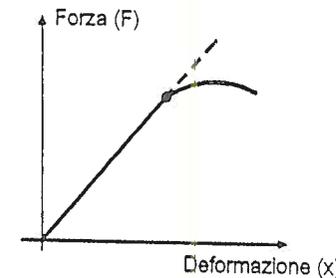
Fig. 3.4 - An infinite number of dof system: a cantilever beam ("Mechanical vibrations", S.S. Rao, p. 16)

## ELEMENTI ELASTICI

Diversi sono i modelli impiegati per i membri dotati di elevata elasticità rispetto agli altri elementi del sistema meccanico. Tali membri non si considerano dissipare energia e solitamente sono considerati privi di massa.

## Molle lineari

Se la molla funziona nel campo elastico entro il limite di proporzionalità, la forza che si sviluppa quando la molla si deforma è proporzionale alla deformazione stessa. La costante di proporzionalità è detta *rigidezza* ed il suo inverso è chiamato *cedevolezza*.



$$F = kx \quad x = x_2 - x_1$$

Il lavoro compiuto per deformare una molla di rigidezza  $k$ , viene immagazzinato come energia potenziale  $V$ :

$$V = \frac{1}{2} k x^2$$

57

Anche altri elementi elastici, quali ad esempio travi, si comportano come molle.

Per esempio si consideri la trave incastrata di figura, avente all'estremo libero una massa concentrata  $m$  e si assuma per semplicità che la massa della trave sia trascurabile nei confronti della massa  $m$ .

La freccia statica all'estremo libero vale:

$$\delta_{st} = \frac{W l^3}{3EI}$$

dove  $W=mg$  è il peso della massa  $m$ ,  $E$  è il modulo di Young del materiale,  $I$  è il momento di inerzia di sezione e  $l$  è la lunghezza della trave.

Di conseguenza la costante elastica (la rigidità) della trave vale:

$$k = \frac{W}{\delta_{st}} = \frac{3EI}{l^3}$$

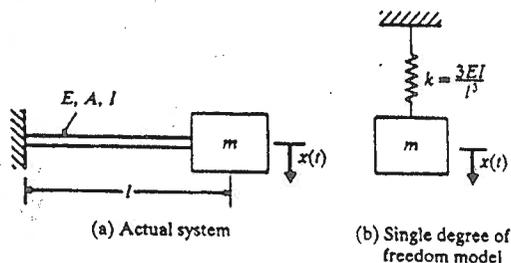


Fig. 3.5 - Cantilever with end mass ("Mechanical vibrations", S.S. Rao, p. 23)

**Molle non lineari**

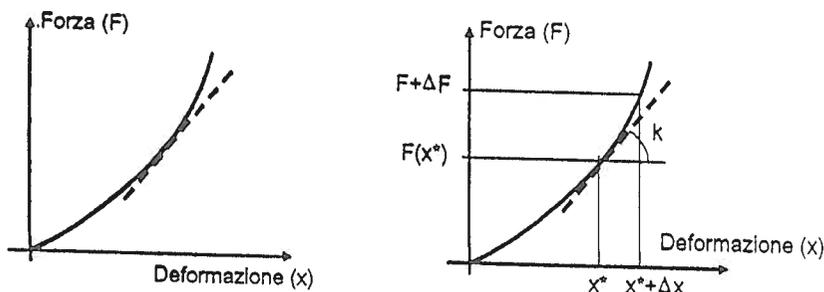
Gli elementi elastici seguono un comportamento lineare solo entro certi limiti della deformazione. Oltre certi valori di deformazione, la tensione eccede il limite di proporzionalità del materiale e la relazione tra forza e deformazione diviene non lineare.

In molte applicazioni pratiche si assume che le deformazioni siano piccole e pertanto si considerano le molle come aventi comportamento lineare.

In altri casi, anche se la molla è non lineare, si approssima ad una molla lineare mediante un processo di linearizzazione:

Sia  $F$  un carico statico agente su una molla non lineare causandone una deformazione  $x^*$ . Se la forza  $F$  viene incrementata di una quantità  $\Delta F$ , la molla si deforma ulteriormente di una quantità  $\Delta x$ . La nuova forza  $F+\Delta F$  può essere espressa in serie di Taylor (vedi Appendice 1) attorno alla posizione di equilibrio statico:

$$F + \Delta F = F(x^* + \Delta x) = F(x^*) + \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x^*} (\Delta x) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 F}{dx^2} \right|_{x^*} (\Delta x)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n F}{dx^n} \right|_{x^*} (\Delta x)^n$$



Per piccoli valori di  $\Delta x$ , i termini contenenti derivate di ordine elevato possono essere trascurati ottenendo:

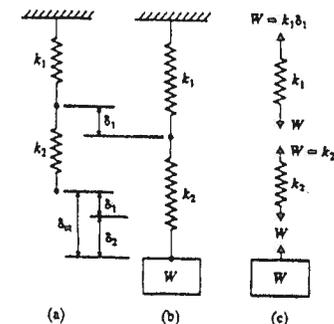
$$F + \Delta F = F(x^* + \Delta x) = F(x^*) + \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x^*} (\Delta x)$$

e poiché  $F = F(x^*)$ , si può esprimere  $\Delta F$  come:  $\Delta F = k \Delta x$

dove  $k$  è la rigidità linearizzata della molla in corrispondenza della deformazione  $x^*$ :  $k = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x^*}$

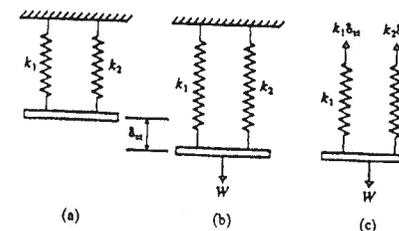
**Molle in serie**

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$$



**Molle in parallelo**

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$



**ELEMENTI SMORZANTI**

In molti sistemi meccanici, l'energia di vibrazione è gradualmente convertita in energia termica o energia acustica. A causa della riduzione di energia, la risposta vibratoria del sistema subisce un graduale decremento. Tale meccanismo prende il nome di smorzamento delle vibrazioni.

Sebbene la quantità di energia convertita in calore o suono sia relativamente piccola, considerare lo smorzamento è di fondamentale importanza per una adeguata previsione del comportamento vibratorio del sistema.

Solitamente si assume che un elemento smorzante sia privo di massa ed elasticità.

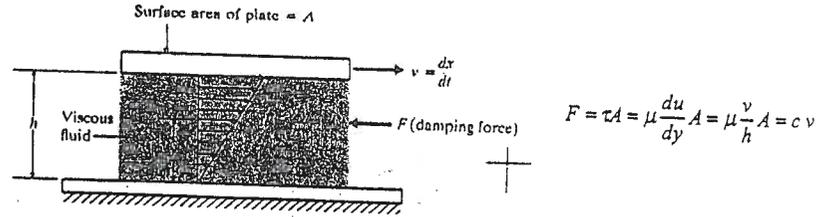
La forza che esercita uno smorzatore esiste solo in presenza di velocità relativa tra i due estremi dello smorzatore stesso.

E' piuttosto difficile determinare le cause di smorzamento nei sistemi meccanici; solitamente lo smorzamento viene modellato come una combinazione dei seguenti:

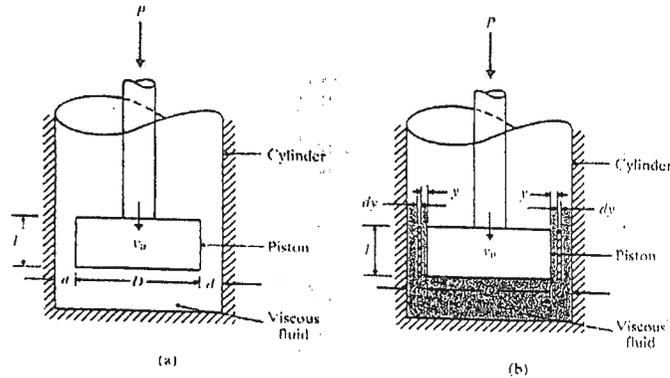
**Smorzamento viscoso**

E' quello usato più frequentemente nello studio delle vibrazioni.

Quando un sistema meccanico si muove in un fluido, la resistenza che il fluido offre al movimento dei corpi causa dissipazione di energia. L'ammontare di questa energia dipende da molti fattori quali ad esempio le dimensioni e la forma dei corpi, la viscosità del fluido, la velocità dei corpi. Nello smorzamento di tipo viscoso, la forza è proporzionale alla velocità relativa dei corpi e la costante di proporzionalità dipende dalla viscosità del fluido edalla geometria dei corpi.



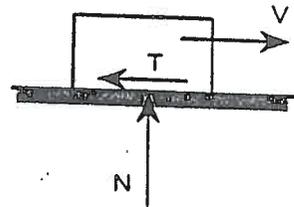
$$F = \tau A = \mu \frac{du}{dy} A = \mu \frac{v}{h} A = c v$$



$$c = \mu \left[ \frac{3\pi D^3 l}{4d^3} \left( 1 + \frac{2d}{D} \right) \right]$$

**Attrito Coulombiano (attrito secco)**

La forza è costante in ampiezza ma ha verso opposto a quello della velocità relativa tra i corpi.



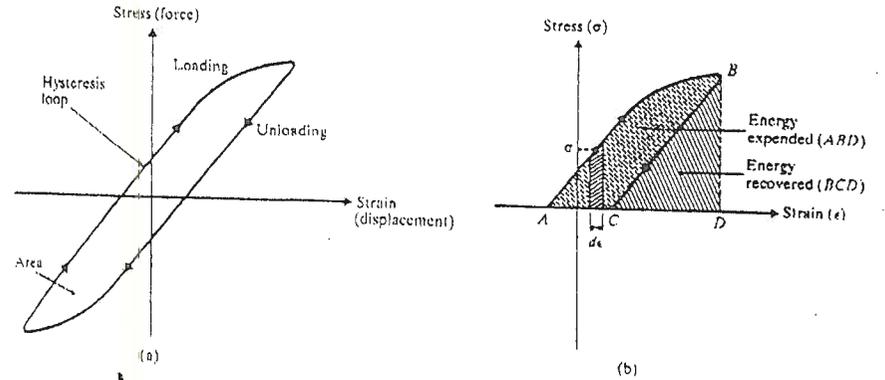
$$|T| = f N$$

$$F = - \text{sign}(V) |T|$$

**Smorzamento isteretico (smorzamento strutturale)**

Quando un corpo si deforma, l'energia di deformazione è assorbita e dissipata dal materiale. Tale effetto è dovuto all'attrito nello scorrimento tra le fibre interne del materiale all'atto della deformazione. Quando un corpo soggetto a questo tipo di fenomeno è sottoposto alternativamente a trazione e compressione o, nello specifico, vibra, la relazione tra tensione e deformazione è del tipo rappresentato in figura. L'energia dissipata ad ogni ciclo vale:

$$D = \int_L \sigma d\epsilon - \int_U \sigma d\epsilon$$



MOTO ARMONICO

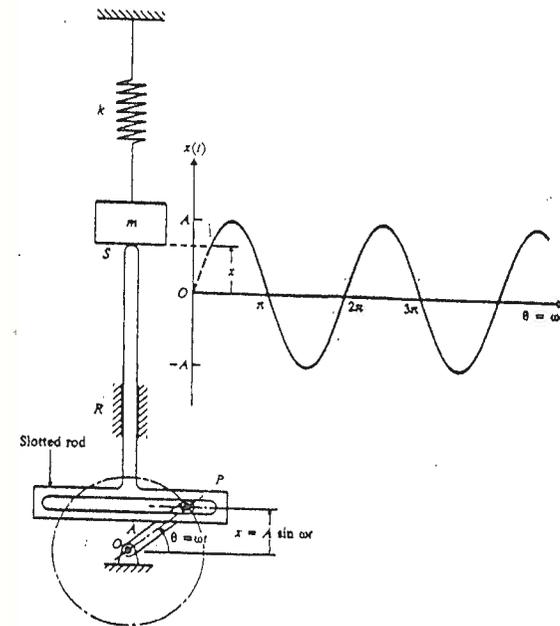


Fig. 3.6 - Meccanismo per moto armonico ("Mechanical vibrations", S.S. Rao, p. 46)

In fig. 3.6 è rappresentato un meccanismo mediante il quale alla massa  $m$  è impartito un *moto armonico semplice* (l'accelerazione è proporzionale allo spostamento) quando alla manovella  $OP$  si impone un moto rotatorio continuo uniforme. Se  $\omega$  è la velocità angolare della manovella e  $A$  è la sua lunghezza, la massa si muove con legge di moto  $x(t)$ :

$$x = A \sin \omega t$$

con  $\omega$  pulsazione del moto armonico.

Si ha inoltre:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \omega A \cos \omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega^2 A \sin \omega t = -\omega^2 x$$

**Rappresentazione vettoriale**

Un moto armonico può anche essere rappresentato mediante un vettore OP, di ampiezza A, rotante con velocità angolare  $\omega$ . Con riferimento alla fig. 3.7, le proiezioni di questo vettore lungo le due direzioni x e y forniscono:

$$y = A \sin \omega t;$$

$$x = A \cos \omega t$$

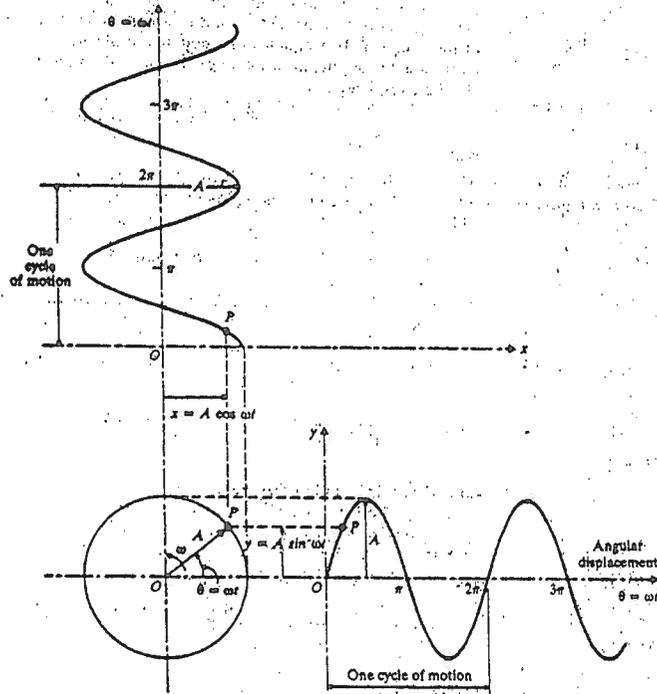


Fig. 3.7 - Proiezioni di un vettore rotante ("Mechanical vibrations", S.S. Rao, p. 47)

**Rappresentazione con numeri complessi**

Si può ricorrere anche alla rappresentazione mediante numeri complessi. Infatti, ogni vettore X nel piano xy può essere rappresentato con il numero complesso:

$$X = a + ib$$

dove a e b sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria.

Se si indica con A l'ampiezza del vettore X e con  $\theta$  il suo argomento (l'angolo compreso tra il vettore e l'asse x), X può essere espresso come:

$$X = A \cos \theta + i A \sin \theta$$

$$\text{con: } A = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

Introducendo le relazioni di Eulero, si ha anche:

$$X = A \cos \theta + i A \sin \theta = A e^{i\theta}$$

Usando la rappresentazione con numeri complessi, il vettore rotante di fig. 3.7 può essere scritto come:

$$X = A e^{i\omega t}$$

dove  $\omega$  è anche detta *frequenza circolare* di rotazione ed è espressa in rad/s.

Derivando rispetto al tempo si ha:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt}(A e^{i\omega t}) = i\omega A e^{i\omega t} = i\omega X$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(A e^{i\omega t}) = \frac{d}{dt}(i\omega A e^{i\omega t}) = -\omega^2 A e^{i\omega t} = -\omega^2 X$$

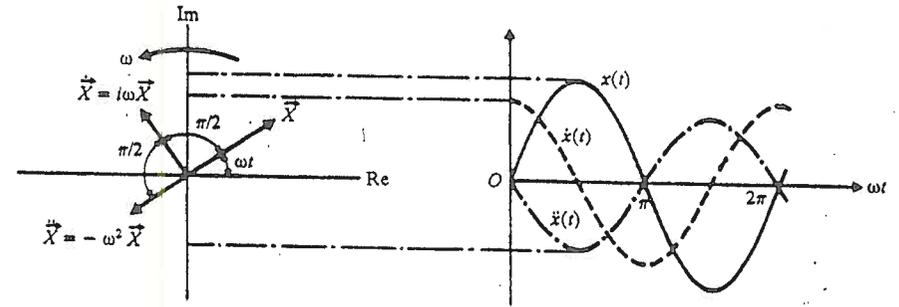


Fig. 3.8 - Spostamento, velocità e accelerazione come vettori rotanti ("Mechanical vibrations", S.S. Rao, p. 50)

da cui si vede che l'operazione di derivazione si traduce nel moltiplicare il vettore per  $i\omega$ , od anche nel moltiplicare l'ampiezza del vettore per  $\omega$  e ruotarlo in avanti di 90 gradi (vedi fig. 3.8).

**Lavoro compiuto in moti armonici**

Un importante concetto in molte applicazioni è quello del lavoro compiuto da una forza, che varia armonicamente con una certa pulsazione, per uno moto armonico avente la stessa pulsazione.

Sia data la forza  $P = P_0 \sin(\omega t + \varphi)$  agente su un corpo dotato di legge di moto  $x = x_0 \sin \omega t$ .

Il lavoro compiuto dalla forza in un periodo  $2\pi/\omega$  vale:

$$W = \int_0^{2\pi/\omega} P dx = \int_0^{2\pi/\omega} P \frac{dx}{dt} dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} P \frac{dx}{dt} d(\omega t) = P_0 x_0 \int_0^{2\pi} \sin(\omega t + \varphi) \cos \omega t d(\omega t) =$$

$$= P_0 x_0 \int_0^{2\pi} \cos \omega t [\sin \omega x \cos \varphi + \cos \omega x \sin \varphi] d(\omega t) =$$

$$= P_0 x_0 \cos \varphi \int_0^{2\pi} \sin \omega x \cos \omega t d(\omega t) + P_0 x_0 \sin \varphi \int_0^{2\pi} \cos^2 \omega t d(\omega t)$$

Il primo integrale è nullo mentre il secondo vale  $\pi$  per cui in definitiva si ha:  $W = \pi P_0 x_0 \sin \varphi$

**OTTAVA**

Quando il massimo valore di una banda di frequenza è il doppio del minimo, tale banda è detta *banda d'ottava*. Ad esempio, ciascuna banda 75 - 150 Hz, 150 - 300 Hz, e 300 - 600 Hz, è una banda d'ottava. In ciascun caso, il massimo ed il minimo valore della frequenza, che hanno un rapporto pari a 2:1, si dice che differiscono di un'ottava.

**DECIBEL**

Le varie quantità che si incontrano nel campo delle vibrazioni e del rumore, come ad esempio, spostamento, velocità, accelerazione, pressione, potenza, sono spesso rappresentate usando la notazione dB (*decibel*). In origine il decibel è stato definito con riferimento a potenze elettriche come:

$$dB = 10 \log \left( \frac{P}{P_0} \right) \quad \text{dove } P_0 \text{ è un valore di riferimento.}$$

Poiché la potenza elettrica è proporzionale al quadrato della tensione ( $X$ ), il decibel può anche essere espresso come:

$$dB = 10 \log \left( \frac{X}{X_0} \right)^2 = 20 \log \left( \frac{X}{X_0} \right) \quad \text{dove } X_0 \text{ è un valore di riferimento.}$$

Naturalmente il dB è usato anche per esprimere il rapporto tra altre quantità (spostamenti, velocità, accelerazioni, pressioni, ...).

**BIBLIOGRAFIA**

- \* E. Funaioli, A. Maggiore, U. Meneghetti, *Lezioni di Meccanica applicata alle macchine*, Vol. II, ed. Patron, Bologna.
- \* S.S. Rao, *Mechanical vibrations*, Third edition, Addison Wesley Pub. Company, 1995.
- \* W.J. Palm. *Modeling, Analysis, and Control of Dynamic Systems*, 2nd ed., John Wiley & Sons.

**APPENDICE A1 - Serie di Taylor**

Il teorema di Taylor afferma che una funzione può essere rappresentata in prossimità di un punto  $x = x_0$ , dall'espansione:

$$f(x) = f(x_0) + \left( \frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} (x-x_0) + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2 f}{dx^2} \right)_{x=x_0} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{k!} \left( \frac{d^k f}{dx^k} \right)_{x=x_0} (x-x_0)^k + \dots + R_n$$

dove il termine  $R_n$  è dato da:  $R_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{d^n f}{dx^n} \right)_{x=b} (x-x_0)^n$  con  $b$  compreso tra  $x_0$  e  $x$ .

Il risultato è valido se la funzione ammette derivate continue fino all'ordine  $n$ . Se  $R_n$  tende a zero, l'espansione è detta *serie di Taylor* della funzione  $f(x)$  attorno a  $x = x_0$ . Se  $x_0 = 0$ , la serie è anche detta *serie di McLaurin*.

Esempio

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad \text{dove } x_0 = 0.$$

Si noti che se  $x$  è piccolo le prime due danno luogo a due approssimazioni largamente usate delle funzioni seno e coseno:

$$\sin x \approx x \quad \text{e} \quad \cos x \approx 1.$$

Inoltre se nella terza si considera  $x = i\theta$ , si ottiene:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \dots$$

separando la parte reale da quella immaginaria:

$$e^{i\theta} = \left( 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right) + i \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \right)$$

si ottengono le *identità di Eulero*:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \quad (\text{avendo sostituito } \theta \text{ con } -\theta).$$

APPENDICE A2 - Espressioni trigonometriche utili

$$\cos(m\omega t + \varphi) = \cos m\omega t \cos \varphi - \sin m\omega t \sin \varphi$$

$$\sin(m\omega t + \varphi) = \sin m\omega t \cos \varphi + \cos m\omega t \sin \varphi$$

$$\sin n\omega t \sin m\omega t = \frac{1}{2} \cos(n-m)\omega t - \frac{1}{2} \cos(n+m)\omega t$$

$$\sin n\omega t \cos m\omega t = \frac{1}{2} \sin(n+m)\omega t + \frac{1}{2} \sin(n-m)\omega t$$

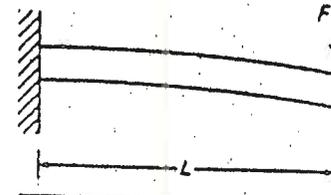
$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t)$$

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t)$$

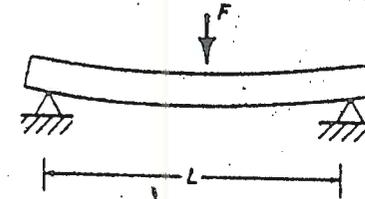
$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

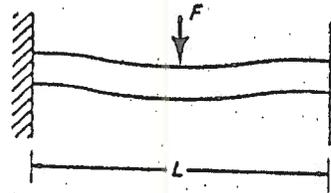
APPENDICE A3 - Rigidezze e equivalenti



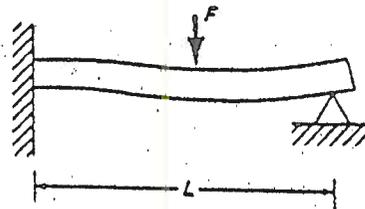
1. Cantilever  
 $K_{eq} = \frac{3EI}{L^3}$   
 where  
 $I = \frac{bh^3}{12}$



2. Simply supported  
 $K_{eq} = \frac{48EI}{L^3}$

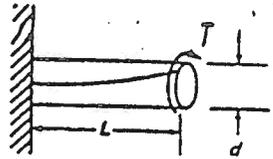


3. Both ends fixed or clamped  
 $K_{eq} = \frac{192EI}{L^3}$



4. Cantilever with pinned end  
 $K_{eq} = \frac{110EI}{L^3}$

APPENDICE A4 - Momenti di inerzia di massa

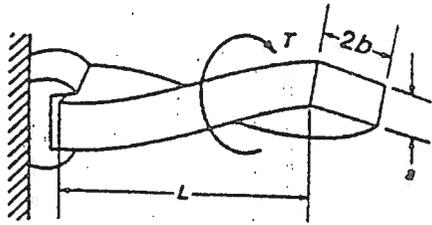


1. Round rod

$$K_{eq} = \frac{\pi d^4 G}{32L}$$

where

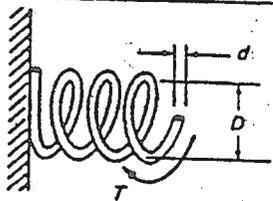
$G$  = modulus in shear



2. Rectangular bar

$$K_{eq} = \frac{CG}{L}$$

$$C = ab^3 \left[ \frac{16}{3} - 3.36 \frac{b}{a} \left( 1 - \frac{b^4}{12a^4} \right) \right]$$

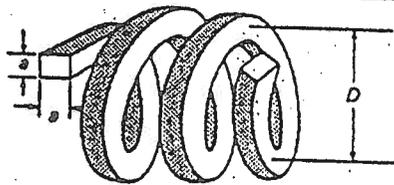


3. Coiled spring in torsion (round wire)

$$K_{eq} = \frac{Ed^4}{64DN}$$

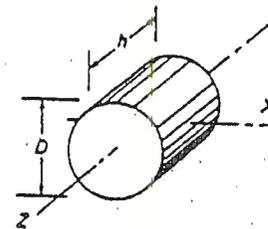
where

$E$  = Young's modulus  
 $N$  = number of coils



4. Square wire coiled spring

$$K_{eq} = \frac{Ea^4}{12\pi DN}$$

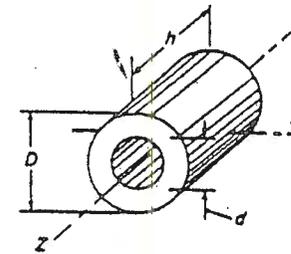


1. Solid disk

$$M = \frac{\rho \pi D^2 h}{4}$$

$$J_x = \frac{\rho \pi D^4 h}{32} = \frac{MD^2}{8}$$

$$J_z = \frac{\rho \pi D^2 h}{16} \left[ \frac{h^2}{3} + \frac{D^2}{4} \right] = M \left[ \frac{h^2}{12} + \frac{D^2}{16} \right]$$

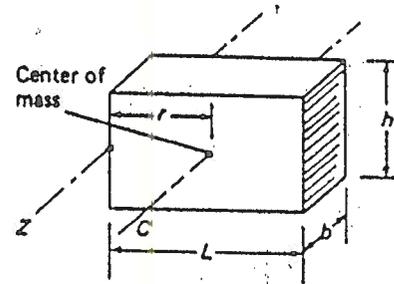


2. Tube

$$M = \frac{\rho \pi h (D^2 - d^2)}{4}$$

$$J_x = \frac{\rho \pi h (D^4 - d^4)}{32} = \frac{M(D^2 + d^2)}{8}$$

$$J_z = \frac{\rho \pi h}{16} (D^2 - d^2) \left[ \frac{h^2}{3} + \frac{D^2}{4} + \frac{d^2}{4} \right] = M \left[ \frac{h^2}{12} + \frac{D^2}{16} + \frac{d^2}{16} \right]$$



3. Rectangular solid

$$M = \rho Lbh$$

$$J_x = \frac{\rho Lbh}{12} (L^2 + h^2 + 12r^2)$$

$$= M \left[ \frac{L^2}{12} + \frac{h^2}{12} + r^2 \right]$$

$$J_c = \frac{\rho Lbh(L^2 + h^2)}{12}$$

$$= \frac{M[L^2 + h^2]}{12}$$

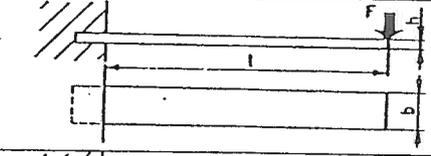
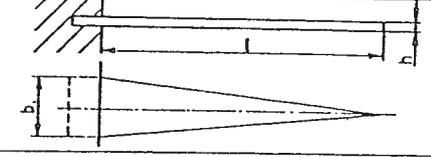
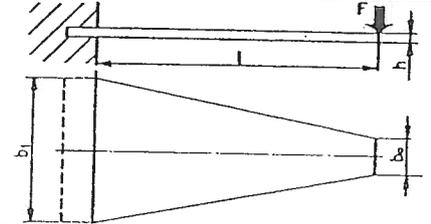
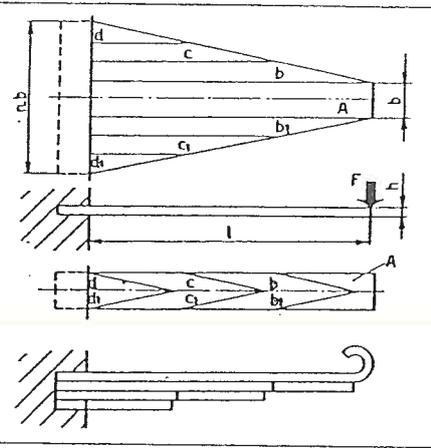
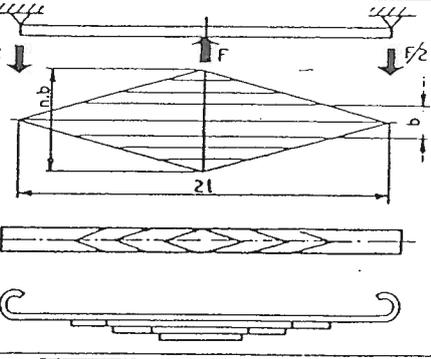
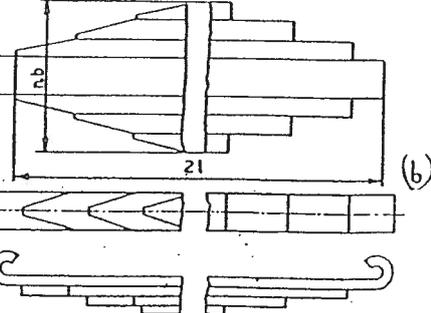
F: forza applicata

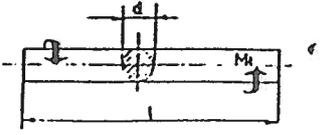
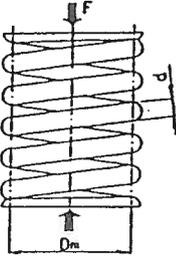
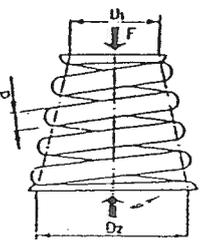
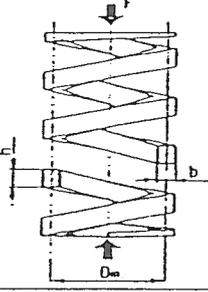
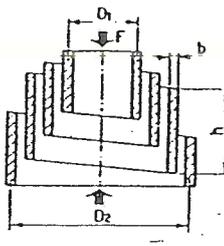
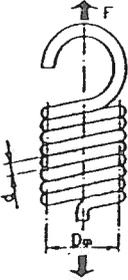
f: freccia

k: rigidità

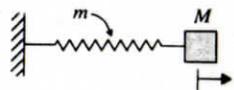
E: modulo di elasticità normale (o di Young)

G: " " " tangenziale

MOLLE DI FLESSIONE A LAMINA E A BALESTRA		
Classificazione		
A LAMINA	rettangolare	 <p>6.1 Molla a lamina - Lamina di sezione b-h costante, sollecitata da una forza F a una distanza l dall'incastro.</p> $f = F \frac{4 l^3}{Ebh^3} \quad k = \frac{Ebh^3}{4 l^3}$
	triangolare	 <p>6.2 Molla a lamina triangolare - Lamina di spessore costante a pianta triangolare. Il caso è teorico.</p> $f = F \frac{6 l^3}{Ebh^3} \quad k = \frac{Ebh^3}{6 l^3}$
	trapezoidale	 <p>6.3 Molla a lamina trapezoidale - Lamina di spessore costante a pianta trapezoidale. È possibile in tal modo applicare il carico all'estremo libero.</p> $f = F \frac{4 cl^3}{Eb_1 h^3} \quad \text{dove } C \approx \frac{3}{2 + \frac{b_2}{b_1}}; k = \frac{Eb_1 h^3}{4 cl^3}$
A BALESTRA	incastrata	 <p>6.4 Molla a balestra, incastrata - La lamina di spessore costante è suddivisa in strisce di larghezza b; su quella centrale vengono sovrapposte le altre accostandole simmetricamente. Questo pacco di lamine così sagomate corrisponde alla lamina originaria, ma l'impiego ne risulta più agevole.</p> $f = F \frac{4 cl^3}{Enbh^3} \quad \text{dove } C \approx \frac{3}{2 + \frac{1}{n}}; k = \frac{Enbh^3}{4 cl^3}$
	appoggiata	 <p>6.5 Molla a balestra, appoggiata - Si ripete, raddoppiato per simmetria, il caso della molla a lamina triangolare.</p> $f = F \frac{3 l^3}{Enbh^3} \quad k = \frac{Enbh^3}{3 l^3}$
		 <p>6.6 Molla a balestra - Sono presi in considerazione i due casi: a gradini (a), che dà luogo a foglie rastremate ma non terminanti a punta; a gradini (b) che dà luogo a foglie con estremità piane. La seconda soluzione è adottata, per ragioni economiche, dalle industrie automobilistiche. Per il caso (a)</p> $f = F \frac{2 cl^3}{Enbh^3} \quad \text{dove } C \approx \frac{3}{2 + \frac{1}{n}}; k = \frac{Enbh^3}{2 cl^3}$

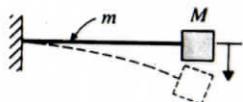
MOLLE DI TORSIONE		Classificazione											
MOLLE AD ASSE RETTILINEO	barre di torsione		$\Theta$ : rotazione tra i due estremi $M_t$ : coppia applicata Barre di torsione: $\Theta = \frac{32l}{\pi d^4 G} M_t$ ; $k = \frac{\pi d^4 G}{32l}$										
		MOLLE AD ASSE ELICOIDALE a compressione											
a trazione	in filo a sezione circolare	cilindriche 	$n_u$ = numero di spire utili Cilindriche: $f = \frac{8 n_u D_m^3}{d^4 G} F$ ; $k = \frac{1}{8} \frac{d^4 G}{n_u D_m^3}$										
		coniche 	Coniche: $f = \frac{2 n_u (D_1 + D_2) (D_1^2 + D_2^2)}{d^4 G} F$ $k = \frac{d^4 G}{2 n_u (D_1 + D_2) (D_1^2 + D_2^2)}$										
		cilindriche 	Cilindriche: $f = \frac{n_u \pi D_m^3}{4 h b^3 \eta G} F$ ; $k = \frac{4 h b^3 \eta G}{n_u \pi D_m^3}$ <table border="1" data-bbox="1013 1120 1316 1220"> <tr> <td>h/b</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>5</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td><math>\eta</math></td> <td>0,14</td> <td>0,229</td> <td>0,29</td> <td>0,313</td> </tr> </table>	h/b	1	2	5	10	$\eta$	0,14	0,229	0,29	0,313
		h/b	1	2	5	10							
$\eta$	0,14	0,229	0,29	0,313									
coniche 	Coniche: $f = \frac{n_u \pi (D_1 + D_2) (D_1^2 + D_2^2)}{16 h b^3 \eta G} F$ $K = \frac{16 h b^3 \eta G}{n_u \pi (D_1 + D_2) (D_1^2 + D_2^2)}$												
			A trazione: $f = \frac{8 n_u D_m^3}{d^4 G} F$ ; $k = \frac{1}{8} \frac{d^4 G}{n_u D_m^3}$										

### Equivalent masses



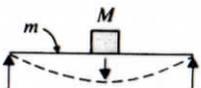
Mass ( $M$ ) attached at end of spring of mass  $m$

$$m_{eq} = M + \frac{m}{3}$$



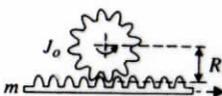
Cantilever beam of mass  $m$  carrying an end mass  $M$

$$m_{eq} = M + 0.23 m$$



Simply supported beam of mass  $m$  carrying a mass  $M$  at the middle

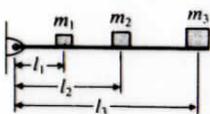
$$m_{eq} = M + 0.5 m$$



Coupled translational and rotational masses

$$m_{eq} = m + \frac{J_0}{R^2}$$

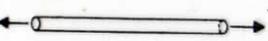
$$J_{eq} = J_0 + mR^2$$



Masses on a hinged bar

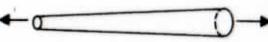
$$m_{eq} = m_1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 m_2 + \left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2 m_3$$

### Equivalent springs



Rod under axial load ( $l$  = length,  $A$  = cross sectional area)

$$k_{eq} = \frac{EA}{l}$$



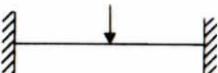
Tapered rod under axial load ( $D, d$  = end diameters)

$$k_{eq} = \frac{\pi EDd}{4l}$$



Helical spring under axial load ( $d$  = wire diameter,  $D$  = mean coil diameter,  $n$  = number of active turns)

$$k_{eq} = \frac{Gd^4}{8nD^3}$$



Fixed-fixed beam with load at the middle

$$k_{eq} = \frac{192EI}{l^3}$$



Cantilever beam with end load

$$k_{eq} = \frac{3EI}{l^3}$$



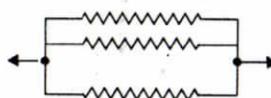
Simply supported beam with load at the middle

$$k_{eq} = \frac{48EI}{l^3}$$



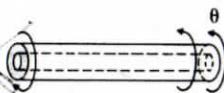
Springs in series

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$$



Springs in parallel

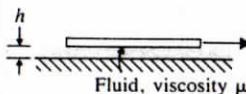
$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$



Hollow shaft under torsion ( $l$  = length,  $D$  = outer diameter,  $d$  = inner diameter)

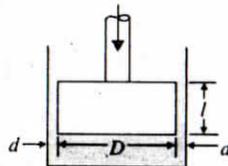
$$k_{eq} = \frac{\pi G}{32l}(D^4 - d^4)$$

### Equivalent viscous dampers



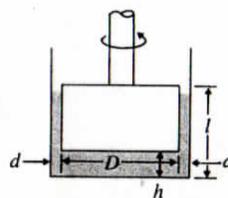
Relative motion between parallel surfaces ( $A$  = area of smaller plate)

$$c_{eq} = \frac{\mu A}{h}$$



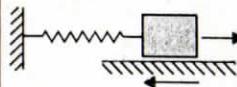
Dashpot (axial motion of a piston in a cylinder)

$$c_{eq} = \mu \frac{3\pi D^3 l}{4d^3} \left(1 + \frac{2d}{D}\right)$$



Torsional damper

$$c_{eq} = \frac{\pi \mu D^2 (l-h)}{2d} + \frac{\pi \mu D^2}{32h}$$



Dry friction (Coulomb damping) ( $fN$  = friction force,  $\omega$  = frequency,  $X$  = amplitude of vibration)

$$c_{eq} = \frac{4fN}{\pi \omega X}$$