

## APPENDICE A5-3

### SISTEMA CON TRE GRADI DI LIBERTÀ

Come esempio di applicazione di quanto esposto nel testo, eseguiamo lo studio del sistema di figura A5-3.1, che è un sistema con tre gradi di libertà, non smorzato.

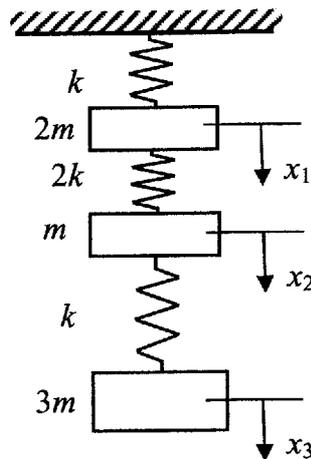


Fig. A5-3.1 – Sistema con tre gradi di libertà, non smorzato.

a) *Vibrazioni libere.* Le matrici di massa  $\mathbf{M}$  e di rigidità  $\mathbf{K}$  sono:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 3m \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}. \quad (\text{A5-3.1})$$

Essendo:

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2m & 0 & 0 \\ 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 1/3m \end{bmatrix}, \quad (\text{A5-3.2})$$

la matrice dinamica è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3k/2m & -k/m & 0 \\ -2k/m & 3k/m & -k/m \\ 0 & -k/3m & k/3m \end{bmatrix}. \quad (\text{A5-3.3})$$

Le radici quadrate degli autovalori e gli autovettori della matrice dinamica – normalizzati con il primo elemento posto uguale a 1 –, cioè le pulsazioni proprie e le forme modali del sistema, sono:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 0.324305\sqrt{\frac{k}{m}}, & \Phi_1 &= \begin{pmatrix} 0.3753 \\ 0.5235 \\ 0.7649 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.3948 \\ 2.0378 \end{pmatrix}; \\ \omega_2 &= 0.899227\sqrt{\frac{k}{m}}, & \Phi_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0.6914 \\ -0.4849 \end{pmatrix}; \\ \omega_3 &= 1.97978\sqrt{\frac{k}{m}}, & \Phi_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2.4196 \\ 0.2249 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (\text{A5-3.4})$$

La matrice modale (normalizzata) è allora:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.3948 & 0.6914 & -2.4196 \\ 2.0378 & -0.4849 & 0.2249 \end{pmatrix}. \quad (\text{A5-3.5})$$

Le espressioni del moto libero generale delle tre masse sono:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + A_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3) \\ x_2(t) &= 1.3948 A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + 0.6914 A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) - 2.4196 A_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3) \\ x_3(t) &= 2.0378 A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - 0.4849 A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + 0.2249 A_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3)\end{aligned}\quad (\text{A5-3.6})$$

L'inversa e la trasposta della matrice modale sono:

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 0.121926 & 0.085032 & 0.372691 \\ 0.628262 & 0.217181 & -0.456957 \\ 0.249811 & -0.302214 & 0.084266 \end{pmatrix}; \quad \Phi^T = \begin{pmatrix} 1 & 1.3948 & 2.0378 \\ 1 & 0.6914 & -0.4849 \\ 1 & -2.4196 & 0.2249 \end{pmatrix}. \quad (\text{A5-3.7})$$

Le relazioni fra le coordinate fisiche  $x$  e coordinate principali  $q$  sono:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.3948 & 0.6914 & -2.4196 \\ 2.0378 & -0.4849 & 0.2249 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 + q_2 + q_3 \\ 1.3948q_1 + 0.6914q_2 - 2.4196q_3 \\ 2.0378q_1 - 0.4849q_2 + 0.2249q_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A5-3.8})$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.121926 & 0.085032 & 0.372691 \\ 0.628262 & 0.217181 & -0.456957 \\ 0.249811 & -0.302214 & 0.084266 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A5-3.9})$$

$$= \begin{pmatrix} 0.121926 x_1 + 0.085032 x_2 + 0.372691 x_3 \\ 0.628262 x_1 + 0.217181 x_2 - 0.456957 x_3 \\ 0.249811 x_1 - 0.302214 x_2 + 0.084266 x_3 \end{pmatrix}.$$

Le masse modali e le rigidzze modali dei tre modi propri sono:

$$\begin{aligned} m_1 &= \Phi_1^T \mathbf{M} \Phi_1 = 16.403 m, & k_1 &= \Phi_1^T \mathbf{K} \Phi_1 = 1.7252 k, \\ m_2 &= \Phi_2^T \mathbf{M} \Phi_2 = 3.1834 m, & k_2 &= \Phi_2^T \mathbf{K} \Phi_2 = 2.5741 k, \\ m_3 &= \Phi_3^T \mathbf{M} \Phi_3 = 8.0062 m, & k_3 &= \Phi_3^T \mathbf{K} \Phi_3 = 31.381 k. \end{aligned} \quad (\text{A5-3.10})$$

Si verifica subito che è:

$$\sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 0.3243 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = 0.8992 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \sqrt{\frac{k_3}{m_3}} = 1.9798 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (\text{A5-3.11})$$

in accordo con le espressioni (A5-3.4) delle pulsazioni proprie del sistema.

b) *Vibrazioni forzate.* Studiamo ora la risposta del sistema ad una forzante armonica  $F_0 \sin(\Omega t)$  applicata alla massa  $m_2$  (v. fig. A5-3.2).

La forzante è:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_0 \sin(\Omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A5-3.12})$$

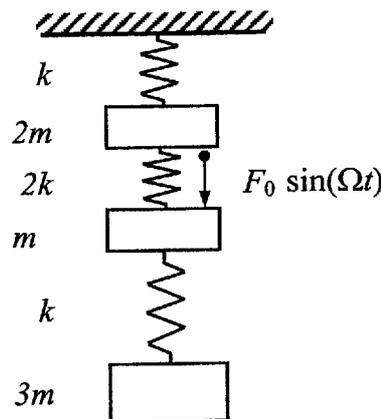


Fig. A5-3.2 – Sistema con tre gradi di libertà, non smorzato.

per cui risulta:

$$\Phi^T \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1.3948 \\ 0.6914 \\ -2.4196 \end{pmatrix} F_0 \sin(\Omega t) \quad (\text{A5-3.13})$$

e le equazioni del moto nelle coordinate principali (approccio modale) sono:

$$\begin{aligned} 16.403 m \ddot{q}_1 + 1.7252 k q_1 &= 1.3948 F_0 \sin(\Omega t) \\ 3.1834 m \ddot{q}_2 + 2.5741 k q_2 &= 0.6914 F_0 \sin(\Omega t) \\ 8.0062 m \ddot{q}_3 + 31.381 k q_3 &= -2.4196 F_0 \sin(\Omega t). \end{aligned} \quad (\text{A5-3.14})$$

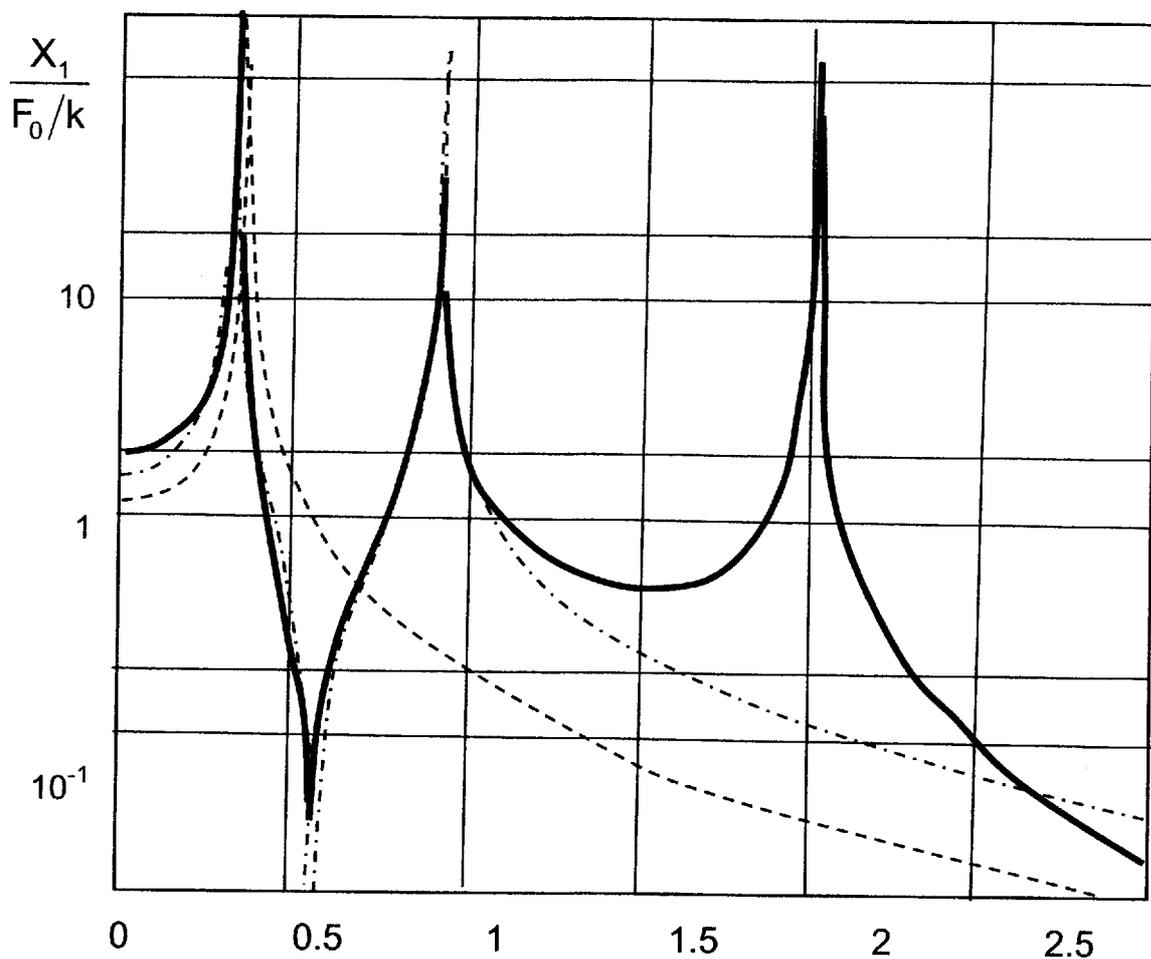


Fig. A5-3.3 – Risposta del solo primo modo (----), del primo e secondo modo (— · — ·), di tutti e tre i modi (—).

Gli integrali delle tre equazioni disaccoppiate (A5-3.14) sono:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= Q_1 \sin(\Omega t), & Q_1 &= \frac{1.3948 F_0}{1.725 k - 16.41 m \Omega^2} = \frac{0.8086 F_0/k}{1 - (\Omega/\omega_1)^2}, \\
 q_2 &= Q_2 \sin(\Omega t), & Q_2 &= \frac{0.6914 F_0}{2.574 k - 3.1834 m \Omega^2} = \frac{0.2686 F_0/k}{1 - (\Omega/\omega_2)^2}, \\
 q_3 &= Q_3 \sin(\Omega t), & Q_3 &= -\frac{2.4186 F_0}{31.381 k - 8.006 m \Omega^2} = -\frac{0.0770 F_0/k}{1 - (\Omega/\omega_3)^2}.
 \end{aligned} \tag{A5-3.15}$$

da cui si deduce, per le coordinate fisiche  $\mathbf{x} = \Phi \mathbf{q}$ :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= X_1 \sin(\Omega t), & X_1 &= \left( \frac{0.8086}{1 - (\Omega/\omega_1)^2} + \frac{0.2686}{1 - (\Omega/\omega_2)^2} - \frac{0.0770}{1 - (\Omega/\omega_3)^2} \right) \frac{F_0}{k}, \\
 x_2 &= X_2 \sin(\Omega t), & X_2 &= \left( \frac{1.12177}{1 - (\Omega/\omega_1)^2} + \frac{0.1857}{1 - (\Omega/\omega_2)^2} - \frac{0.1865}{1 - (\Omega/\omega_3)^2} \right) \frac{F_0}{k}, \\
 x_3 &= X_3 \sin(\Omega t), & X_3 &= \left( \frac{1.6478}{1 - (\Omega/\omega_1)^2} - \frac{0.1302}{1 - (\Omega/\omega_2)^2} - \frac{0.01734}{1 - (\Omega/\omega_3)^2} \right) \frac{F_0}{k}.
 \end{aligned} \tag{A5-3.16}$$

Nella figura A5-3.3 sono riportati gli andamenti di  $X_1$  tenendo conto solo del primo modo, solo dei primi due modi e di tutti e tre i modi. Si vede che per valori molto bassi di  $\Omega$  è sufficiente tenere conto del primo modo, per valori più alti si deve tenere conto anche del secondo modo e per valori elevati occorre mettere in conto tutti e tre i modi propri del sistema.