Fisica Matematica II

[1]

M. Padula,
Universita' di Ferrara

O quant'e' corto il dire, e comefioco
al mio concetto! e questo, a quel ch'io vidi,
e' tanto, che non basta al dicer poco,
canto 33, verso 121 s. Dante, Paradiso

[1]Edited on 20/10/2010

Indice

Capitolo 11.

Stabilita' di moti fluidi stazionari

In questo capitolo ricaviamo teoremi di stabilita' per moti stazionari fluidi.

11.1 Fluidi incomprimibili in Ω con frontiera rigida

11.1.1 Stabilita' di moti incompressibili

In questo numero vogliamo provare un risultato di stabilita' per soluzioni regolari del sistema di Navier-Stokes, vale a dire determiniamo condizioni sufficienti affiche' un moto base sia stabile rispetto a perturbazioni iniziali arbitrarie.

Scopo principale e' la determinazione di una condizione su numero puro Re (detto numero di Reynolds), funzione del moto base, atto ad assicurare la stabilita' di un moto fluido *arbitrario* in un dominio limitato: **criterio di stabilita' universale**. Per un generico moto base definiamo il corrispondente numero di Reynolds come $Re = Vd/\nu$, dove V e' il massimo della velocita' del moto base, allora se

$$Re < 5.71$$

detto moto e' stabile. Il numero 5.71 e' assolutamente rigoroso ed indipendente dalla regione nella quale avviene il moto e dal moto stesso!

Ammettiamo, da ora in poi, che per le equazioni di Navier-Stokes esistano soluzioni regolari globali.

3.1 **Teorema 11.1.1** - *Sia Ω una regione limitata e regolare che possa essere inclusa in un cubo di lato d. Sia $\mathbf{v}(x)$, π una soluzione di (critt ??), e sia $\tilde{\mathbf{v}}(x)$, $\tilde{\pi}$ un'altra soluzione corrispondente alla stessa forza $\mathbf{b}$, entrambe le soluzioni siano continue con le loro derivate seconde spaziali. Allora, l'energia cinetica $T(\mathbf{u})$ della perturbazione $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}$ soddisfa le diseguaglianze*

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) &\leq T(\mathbf{u}_0)\exp^{2(m-\alpha\nu/d^2)t}, \\ T(\mathbf{u}) &\leq T(\mathbf{u}_0)\exp^{(V^2-\alpha\nu^2/d^2)t/\nu}. \end{aligned} \tag{11.1.1}$$ expdec

Qui $T(\mathbf{u}_0)$ e' l'energia cinetica della perturbazione all'istante iniziale, $-m$ il minimo dei valori caratteristici del gradiente di deformazione del moto base in Q_t, V il massimo della velocita' del moto base in Q_t e, cf. (??) del cap.I,

$$\alpha = \frac{3+\sqrt{13}}{2}\pi^2 \equiv 32.6.$$

Questo risultato e' stato provato da T.Y. Thomas (11.1.1)$_1$ nel 1943, e da E. Hopf (11.1.1)$_2$ nel 1955. Come corollari discendono i due seguenti

Criteri di stabilita' universale *(I) Il numero di Reynolds $Re = md^2/\nu$ corrisponda al moto $\mathbf{v}$ soddisfacente*

$$Re < 32.6. \qquad (11.1.2)$$ hp1

(II) Il numero di Reynolds $Re = Vd/\nu$ corrisponda al moto $\mathbf{v}$ soddisfacente

$$Re < 5.71. \qquad (11.1.3)$$ hp2

Allora, il moto base $\mathbf{v}$ risulta stabile rispetto ad ogni pertubazione iniziale $\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x)$. Inoltre, ogni altra soluzione di (??), corrispondente al dato iniziale $\tilde{\mathbf{v}}_0(x) + \mathbf{u}_0(x)$ ed alla forza $\mathbf{b}$ tende per $t \to \infty$ al moto $\mathbf{v}$ con rapidita' esponenziale.

Dim. - Sia

$$\tilde{\mathbf{v}} := \mathbf{v} + \mathbf{u}, \quad \tilde{\pi} := \pi + \pi'$$

sia un'altra soluzione di (??) corrispondente alla stessa forza $\mathbf{b}$. La perturbazione $\mathbf{u}$, π' verifichera' il sistema (??) ed, analogamente a quanto fatto nella sezione VI.1.4 perveniamo all'identita' integrale (??)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx + \nu\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 dx + \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}dx = 0. \qquad (11.1.4)$$ engy'

In (11.1.4) troviamo il nuovo funzionale $\mathcal{F}(\mathbf{u})$ definito da

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx = -\nu\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 dx\Big(1 + \frac{\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}dx}{\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 dx}\Big) =: -\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 dx(\nu + \mathcal{F}(\mathbf{u})). \qquad (11.1.5)$$ engyo

Se avviene che

$$\max_{\mathbf{u}\in W^{1,2}(\Omega)} -\mathcal{F} \le \nu, \qquad (11.1.6)$$ var

allora la derivata si puo' scrivere per la diseguaglianza di Poincare' otteniamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx \le \Big(m - \frac{\alpha\nu}{d^2}\Big)\int_\Omega |\mathbf{u}|^2 dx. \qquad (11.1.7)$$

Applicando ora il lemma di Gronwall e' facile dedurre

$$\int_\Omega u^2(x,t)dx \le \exp^{-2(m-\alpha\nu/d^2)t}\int_\Omega u^2(x,0)dx, \qquad (11.1.8)$$

dove la costante $(m - \alpha\nu/d^2)$ per ipotesi e' positiva. Nel secondo caso, poiche' $\mathbf{u}$ e' nulla sul bordo ed e' solenoidale, deduciamo

$$-\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}dx = +\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}dx.$$

Inoltre, utilizziamo la diseguaglianza di Cauchy vettoriale

$$\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\le\frac{1}{2}\Big(\nu|\nabla\mathbf{u}|^2+\frac{u^2v^2}{2\nu}\Big),$$

ed otteniamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2dx\le\frac{1}{\nu}\Big(V^2-\frac{\alpha^2\nu^2}{d^2}\Big)\int_\Omega|\mathbf{u}|^2dx. \tag{11.1.9}$$

La stabilita' asintotica resta cosi' pienamente provata.

servazione 1.

Osservazione 11.1.1 *Riguardo il problema della stabilita' dobbiamo ancora osservare che, a differenza di quanto ottenuto in Meccanica Analitica, le ipotesi per ottenere la stabilita' nel Teorema 11.2.1 sono fatte sul moto base e non sulle forze. Tale limite e' dovuto al fatto che noi stiamo assumendo che esista una soluzione regolare in corrispondenza di una data forza* $\mathbf{b}$. *In effetti, generalmente, una prova di esistenza di soluzioni per il sistema* (??) *comporta anche la prova di una stima a priori che limita la norma di* $\mathbf{v}$ *in termini di* $\mathbf{b}$. *Qui, ci limitiamo ad osservare che un esempio di stima a priori per la norma di* $\nabla\mathbf{v}$ *in* L^2 *e' fornito dalla disegueglianza dell'energia provata nella sezione precedente.*

sservazione 2

Osservazione 11.1.2 *Osserviamo, infine, che se la forza e' di natura potenziale* $\mathbf{b}=\nabla U$ *essa viene assorbita nel termine di pressione e non fornisce quindi alcun contributo. In tal caso, l'unico moto possibile verificante* (15.2.20) *e' la quiete* $\mathbf{v}=0$ *che verifica sempre la condizione* (11.1.2). *Possiamo allora concludere che la quiete e' sempre incondizionatamente stabile. Si confronti questo risultato di stabilita' con il criterio di Dirichlet in cui, non e' sufficiente supporre che la forza derivi da un potenziale.*

Esercizio: Si spieghi il motivo fisico per il quale se la forza e' di natura potenziale $\mathbf{b}=\nabla U$ essa non fornisce quindi alcun contributo.

Indicazione: la stabilita' di un corpo rigido controlla anche la posizione del corpo, a differenza dei fluidi nei quali si controlla solo la velocita'. Ad esempio, un punto pesante su di un piano orizzontale liscio ammette tutte le posizioni del tavolo come posizioni di equilibrio ma nessuna di esse e' stabile in quanto assegnando una piccola velocita' al punto all'istante iniziale esso si allontana indefinitamente dalla sua posizione iniziale. Se vogliamo fare un paragone con il fluido, dobbiamo pensare al fluido contenuto in un recipiente rigido e fisso, il baricentro del contenitore sara' l'analogo del punto materiale, ma in questo caso e' fisso! Quindi il lavoro corrispondente alla forza peso in entranbi i casi e' nullo! Ma nel caso del punto materiale non e' soddisfatto il criterio di Dirichlet, non vi sono massimi isolati per il potenziale, si puo' continuare ad affermare che per il punto vi e' stabilita' parziale, rispetto alla velocita'.

11.1.2 Problema variazionale

Il Teorema ?? fornisce una condizione sufficiente perche' un moto risulti stabile, pero' nulla si puo' affermare quando una delle condizioni (11.1.2) o (11.1.3) non sia verificata. Nei problemi concreti e' piu' interessante sapere quando un moto $\mathbf{v}$ non verifica la definizione stabilita', in tal caso $\mathbf{v}$ si dira' instabile. Tale problema e' molto piu' complesso e vi sono solo risultati parziali. D'altra parte, fisicamente e' importante conoscere la stabilita' di un dato moto, in corrispondenza di una classe di forze bfb quanto piu' possibile larga. Sempre nell'ottica della stabilita' di un moto nella norma L^2 vogliamo ora trovare la costante ottimale per la stabilita' che appare nella condizione (11.1.6). A tal fine, introduciamo il funzionale lineare

$$\mathcal{F} : \mathbf{u} \in D_0^1 \to -\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} dx \in R.$$

Con questa notazione, riscriviamo la (12.4.8) nel seguente modo

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega u^2 \leq -2\nu \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 + 2\mathcal{F}(\mathbf{u}). \qquad (11.1.10)$$ en3

La (11.1.10) implica la stabilita' di $\mathbf{v}$ ogni qual volta il secondo membro risulti non positivo. Poiche' il primo termine a secondo membro e' certamente negativo, e' sufficiente provare che l'estremo superiore di $\mathcal{F}(\mathbf{u})$ non superi detto termine, vale a dire che sia

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) \leq K \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2, \qquad (11.1.11)$$ stima1

al variare di $\mathbf{u}$ in J. In tal modo, poi si sceglie $\nu \geq K$.

(a) Possiamo sempre moltiplicare (11.1.11) per un'opportuna costante in modo da rendere il gradiente di $\mathbf{u}$ unitario. Da ora in poi si supporra', senza ledere la generalita' del problema

$$\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 = 1. \qquad (11.1.12)$$ norma

(b) Notiamo che il funzionale $\mathcal{F}$ in J ammette estremo superiore. Infatti, un maggiorante per $\mathcal{F}$ e' ottenuto utilizzando la diseguaglianza di Poincare'

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) \leq K, \quad K := \sup_x |\nabla \mathbf{v}|.$$

Esiste quindi una successione massimizzante $\mathbf{u}_n$ che verifica la usuale condizione: $\forall \epsilon > 0$ esiste un $\bar{n}$ tale che

$$K - \epsilon < \mathcal{F}(\mathbf{w}_n), \quad n \geq \bar{n}.$$

(c) Proviamo che il funzionale $\mathcal{F}$ in J ammette massimo. Infatti, stante condizione (11.1.12) la successione $\mathbf{w}_n$ e' limitata in J. Da noti teoremi dell'Analisi Funzionale si puo' provare che la successione $\mathbf{w}_n$ converge quasi ovunque ad una funzione vettoriale $\mathbf{w}$ che appartiene ancora a J. Inoltre, si ha

$$\begin{aligned} \lim_n \int_\Omega |\mathbf{w}_n - \mathbf{w}|^2 = 0, \\ \lim_n \int_\Omega (\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \varphi = 0, \end{aligned} \qquad (11.1.13)$$ lim

per ogni $\varphi \in J$. Proviamo che $\lim_n \mathcal{F}(\mathbf{w}_n) = \mathcal{F}(\mathbf{w})$. Infatti, risulta,

$$|\lim_n \int_\Omega (\mathbf{w}_n \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_n - \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{w})| = |\lim_n \int_\Omega (\mathbf{w}_n \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) + (\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{w})|$$
$$\leq K(\int_\Omega |\mathbf{w}_n|^2 \int_\Omega |\mathbf{w}_n - \mathbf{w}|^2)^{1/2} + (\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}).$$

Il primo termine a secondo membro della diseguaglianza e' nullo poiche' valgono la diseguaglianze di Poincare', (11.1.12) e $(11.1.13)_1$. Il secondo termine si annulla utilizzando la $(11.1.13)_2$ con $\varphi = \mathbf{w}$.

In (a), (b), (c) si e' provato che esiste il massimo di $\mathcal{F}$ in J. Una tale informazione teorica ci mette in grado di calcolare esattamente questo massimo. E' sufficiente per cio' notare che

$$\mathcal{F}(\mathbf{w} + t\mathbf{u}) - K \int_\Omega |\nabla \mathbf{w} + t\nabla \mathbf{u}|^2| \leq 0, \quad \forall t \in R, \quad \forall \mathbf{u} \in J.$$

In particolare, la funzione reale della variabile reale t

$$f(t) := \mathcal{F}(\mathbf{w} + t\mathbf{u}) - K$$

e' non positiva e si annulla per $t = 0$. La condizione che 0 risulti un punto di stazionarieta' per f si esprime imponendo che la sua derivata prima si annulli in 0.

$$\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_0 = 0.$$

Calcolando questa derivata per il nostro funzionale, ed integrando per parti, troviamo

$$2 \int_\Omega (\mathbf{D} \cdot \mathbf{w} - K\Delta \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}) = 0.$$

Dovendo essa valere per ogni $\mathbf{u} \in J$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale concludiamo che il massimo deve verificare la seguente equazione di Eulero Lagrange

$$K\Delta \mathbf{w} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \in J. \tag{11.1.14}$$ autov

Il problema precedente richiede la determinazione di numeri reali K (autovalori) per cui esistano funzioni vettoriali non nulle $\mathbf{w} \in J$ (autovettori) verificanti in senso generalizzato (11.1.14).

11.2 Fluidi incomprimibili in Ω con frontiera libera

11.2.1 Modello Geometrico

Il fluido si muove lungo un piano rigido orizzontale $z = 0$.

La rappresentazione cartesiana della frontiera libera e' data da

$$\Gamma_\eta(t) = \{(x_*, z) \in R^3 : \ x_* \in \Sigma \subset R^2; \, z = \zeta(x_*, t)\,\}.$$

La rappresentazione cartesiana del dominio

$$\Omega_\eta(t) = \{(x_*, z) \in R^3 : \ x_* \in \Sigma \subset R^2; \, 0 < z < \zeta(x_*, t)\,\}$$

Space time domain

$$G_\zeta = \cup_{t\in(0,T)}\Omega_\zeta(t).$$

Interazione Fluido-Aria alla frontiera libera

Il fluido $\mathcal{F}$ e' in contatto con l'aria in quiete $\mathcal{B}$ alla superficie materiale $\Gamma_\eta(t)$. Per sistemi in scala macroscopica rispetto alle forze di superficie, i numeri adimensionali rilevanti sono:

$$Re = \frac{Uh}{\nu}; \quad Fr = \frac{U^2}{gh}.$$

sulla superficie materiale e' imposta la condizione di continuita' per la componente normale della velocita' e per lo sforzo.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\mathcal{F} &= \mathbf{v}_\mathcal{B} \qquad\qquad \text{on } \Gamma_\eta(t); \\ \mathbf{T}_\mathcal{F}\cdot\mathbf{n} &= \mathbf{T}_\mathcal{B}\cdot\mathbf{n}. \end{aligned}$$

11.2.2 Fluido in un dominio con frontiera libera

Il fluido $\mathcal{F}$ si muove in un dominio limitato dalla superficie libera $\Gamma_\zeta(t)$.

Quando le dimensioni sono di scala microscopica, altezza dello strato liquido minore di $cm.$, i numeri adimensionali rilevanti sono:

$$Ca = \frac{\nu U}{\sigma}; \quad Bo = \frac{\rho g h^2}{\sigma};$$

le forze di superficie non sono piu' trascurabili e giocano un ruolo centrale nella configurazione della superficie libera!

Sulla superficie libera la velocita' dei punti di $\Gamma_\zeta(t)$ e' $\mathbf{V} = (0, \zeta_t)$. Noi chiediamo che

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\mathcal{F}\cdot\mathbf{n} &= \mathbf{V}\cdot\mathbf{n} \qquad \text{condizione di impermeabilita'}; \\ (\mathbf{T}_\mathcal{F} - \mathbf{T}_\mathcal{B})\cdot\mathbf{n} &= H(\eta)\mathbf{n} \qquad \text{condizione di salto}. \end{aligned}$$

Formulazione del problema di frontiera libera

Per l'aria in quiete si ha

$$\mathbf{T}_\mathcal{B} = -p_e\mathbb{I}.$$

Per un fluido pesante esiste la forza di gravita' data da $\mathbf{g} = -\nabla(g\,z)$ se z e' rivolto verso l'alto. Inoltre e' nota la pressione dell'aria p_e. Le incognite del problema sono date dall'altezza dello strato ζ in $\Sigma\times(0,T)$, velocita' $\mathbf{v}$ e prssione p del fluido in G_ζ, l'evoluzione di queste sette incognite e' governata dal sistema di equazioni:

Navier-Stokes piu' condizioni iniziali ed al contorno

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{v} &= 0, \qquad \text{in } G_\zeta; \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} &= \nu\nabla\cdot\mathbf{S}(\mathbf{v}) - \nabla p - \nabla(g\,z), \qquad \text{in } G_\zeta; \end{aligned} \tag{1a} \quad \boxed{\texttt{NS}}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\nabla_*\zeta\cdot\mathbf{v}_* + v_z = (\mathbf{v}\cdot\tilde{\mathbf{n}}), \qquad \text{su } \Gamma_\zeta(t); \tag{1b}$$

$\mathbf{v} = (v_*, v_z)$ e $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n}\sqrt{1+|\nabla_*\zeta|^2} = (-\nabla_*\zeta, 1)$, ν = coefficiente di viscosita' $\mathbf{S}(\mathbf{v}) = (\nabla\mathbf{v}^T + \nabla\mathbf{v})/2$, p pressione esterna.

$$\begin{aligned}\big(-p+\nu\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}\big)&=H(\zeta)-p_e \quad \text{su}\Gamma_\zeta(t);\\ \big(\mathbf{t}\cdot\mathbf{S}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}\big)&=0. \qquad \text{su}\Gamma_\zeta(t);\end{aligned} \tag{1c} \boxed{\texttt{model}}$$

$H(\zeta) =$ descrive la curvatura della superficie,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}&=0, \qquad \text{su } \Gamma_0;\\ \eta(x_*,t)=\eta(x_*+a,t), \quad \mathbf{v}(x_*,z,t)&=\mathbf{v}(x_*+a,z,t)\end{aligned} \tag{1d} \boxed{\texttt{model6}}$$

$$\mathbf{v}(x_*,z,0)=\mathbf{v}_0(x_*,z), \quad \text{in } \Omega_{\eta_0}; \qquad \eta(x_*,0)=\eta_0(x_*). \tag{1e} \boxed{\texttt{model7}}$$

11.2.3 Soluzione esatta

Una configurazione di equilibrio $\mathbf{v} = 0$, $\zeta = cost.$ comporta

$$p=-g\,z+p_0, \qquad in\Omega$$

$$H(\zeta)=0,$$

$$p(\zeta)=p_e.$$

Da queste equazioni ricaviamo

$$g\zeta=p_0-p_e \longrightarrow \zeta=h=(p_0-p_e)/g.$$

Quest'ultima equazione ci fornisce l'altezza del layer. La costante p_0 equivale alla scelta di una origine per il sistema di riferimento.

11.2.4 Equazione della perturbazione

Poniamo $\zeta = h + \eta$. Il sistema della perturbazione si scrive

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{u}&=0, \qquad \text{in } G_\zeta;\\ \frac{d\mathbf{u}}{dt}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}&=\nu\nabla\cdot\mathbf{S}(\mathbf{u})-\nabla(p+g\,z), \qquad \text{in } G_\zeta;\end{aligned} \tag{1a'} \boxed{\texttt{NS'}}$$

$$\frac{d\eta}{dt}=-\nabla_*\eta\cdot\mathbf{u}_*+u_z=(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{n}}), \qquad \text{su } \Gamma_\zeta(t); \tag{1b'}$$

Introduciamo la classe di regolarita'

$$\begin{aligned}\mathcal{W}=\{&\mathbf{u}(x,t),\ \eta(x',t),\ q(x,t):\\ &\mathbf{u}\in L^2(0,\infty;W^{1,2}(\Omega_t))\cap L^\infty(0,\infty;L^3(\Omega_t))\\ &\eta\in L^\infty(0,\infty;W^{1,\infty}(\Sigma)),\ q\in L^\infty(0,\infty;W^{1,2}(\Omega_t))\}.\end{aligned}$$

Teorema 11.2.1 *Sia* $(\mathbf{u}, \eta, q) \in \mathcal{W}$ *e sia soddisfatta la* ([1.1] ??). *Allora vale la stima dell'energia*

$$\frac{d}{dt}\left[g_0|\Sigma|\|\eta\|^2_{L^2(\Sigma)} - 2\sigma\int_\Sigma\left(\sqrt{1+|\nabla'\eta|^2}-1\right)dx' - \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(\Omega_t)}\right] = \mu\|S(\mathbf{u})\|^2_{L^2(\Omega_t)} \tag{11.2.1}$$ 3.1

o equivalentemente

$$\frac{d}{dt}\left[g_0|\Sigma|\|\eta\|^2_{L^2(\Sigma)} - \sigma\|\nabla'\eta\|^2_{L^2(\Sigma)} + \sigma(\mathcal{H}_{nl}\nabla'\eta, \nabla'\eta)_\Sigma - \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(\Omega_t)}\right] = \mu\|S(\mathbf{u})\|^2_{L^2(\Omega_t)} \tag{11.2.2}$$ 3.2

dove $\mathcal{H}_{nl}$ *la parte nonlineare di* $\mathcal{H}$ *data da*

$$(\mathcal{H}_{nl}\nabla'\eta, \nabla'\eta)_\Sigma = \int_\Sigma \frac{\sqrt{1+|\nabla'\eta|^2}-1}{\sqrt{1+|\nabla'\eta|^2}+1}|\nabla'\eta|^2\,dx'. \tag{11.2.3}$$ 3.3

Osservazione 11.2.1 *E' semplice verificare che la parte nonlineare di* $\mathcal{H}$ *e' positiva, e quindi ha effetto destabilizzante.*

Proof. Moltiplichiamo ([1.1] ??)$_1$ per $\mathbf{u}$ e integriamo su Ω_t troviamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}|\mathbf{u}|^2\,dx = (\nabla\cdot T(\mathbf{u},q), \mathbf{u})_{\Omega_t} + (g_0\nabla x_3, \mathbf{u})_{\Omega_t}, \tag{11.2.4}$$ 3.4

dove $(\cdot,\cdot)_{\Omega_t}$ denota il prodotto scalare $L^2(\Omega_t)$. Il primo membro di ([3.4] 11.2.4) e' ottenuto usando il teorema del trasporto di Reynolds,

$$(\partial_t\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\Omega_t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\Omega_t} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}|\mathbf{u}|^2\,dx. \tag{11.2.5}$$ 4.4bis

Si noti che il termine nonlineare di ([4.4bis] 11.2.5) e' stimato come

$$\begin{aligned}|(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}, \mathbf{u})|_{\Omega_t} &\le \int_{\Omega_t}|\mathbf{u}|^2|\nabla\mathbf{u}|\,dx \le (\int_{\Omega_t}|\mathbf{u}|^4\,dx)^{\frac{1}{2}}(\int_{\Omega_t}|\nabla\mathbf{u}|^2\,dx)^{\frac{1}{2}}\\ &= \|\mathbf{u}\|^2_{L^4(\Omega_t)}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_t)} \le C\|\mathbf{u}\|_{L^3(\Omega_t)}\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{L^2(\Omega_t)},\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la diseguaglianza di Sobolev

$$\|\mathbf{u}\|^2_{L^4(\Omega_t)} \le C\|\mathbf{u}\|_{L^3(\Omega_t)}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_t)}. \tag{11.2.6}$$ sobolev

Dalla condizional contorno ([1.1] ??)$_3$, si ha

$$\begin{aligned}(\nabla\cdot T(\mathbf{u},q), \mathbf{u})_{\Omega_t} &= (T(\mathbf{u},q)\mathbf{n}, \mathbf{u})_{\Gamma_t} - \mu(S(\mathbf{u}), \nabla\mathbf{u})_{\Omega_t}\\ &= ((\sigma\mathcal{H}(\eta) - q_e)\mathbf{n}, \mathbf{u})_{\Gamma_t} - \frac{\mu}{2}(S(\mathbf{u}), S(\mathbf{u}))_{\Omega_t}.\end{aligned} \tag{11.2.7}$$ 3.5

Vale l'identita'

$$\int_\Sigma \partial_t\eta\,dx' = \int_{\Gamma_t}\partial_t\eta\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla'\eta|^2}}\,dS = \int_{\Gamma_t}\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}\,dS = \int_{\Omega_t}\nabla\cdot u\,dx = 0, \tag{11.2.8}$$ 3.6

quindi

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_t} (\sigma\mathcal{H}(\eta) - q_e)\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}\, dS = \int_{\Sigma} (\sigma\mathcal{H}(\eta) - q_e)\partial_t\eta\, dx' \\
=&\int_{\Sigma} \sigma\mathcal{H}(\eta)\partial_t\eta\, dx' = -\sigma\int_{\Sigma} \frac{\nabla'\eta}{\sqrt{1+|\nabla'\eta|^2}}\nabla'\partial_t\eta\, dx' \\
=&-\sigma\int_{\Sigma}\partial_t\frac{|\nabla'\eta|^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla'\eta|^2}}\, dx' = -\sigma\frac{d}{dt}\int_{\Sigma}\sqrt{1+|\nabla'\eta|^2}\, dx'. \qquad (11.2.9)\ \boxed{\texttt{3.7}}
\end{aligned}$$

Inoltre otteniamo

$$\begin{aligned}
(g_0|\Sigma|\nabla x_3, \mathbf{u})_{\Omega_t} &= (g_0|\Sigma|\mathbf{n}(h+\eta), \mathbf{u})_{\Gamma_t} - (g_0|\Sigma|x_3, \nabla\cdot\mathbf{u})_{\Omega_t} \\
&= g_0|\Sigma|\int_{\Gamma_t}(h+\eta)\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}\, dS = g_0|\Sigma|\int_{\Sigma}(h+\eta)\partial_t\eta\, dx' \\
&= g_0|\Sigma|\frac{d}{dt}\int_{\Sigma}\frac{1}{2}(h+\eta)^2\, dx' = g_0|\Sigma|\frac{d}{dt}\int_{\Sigma}\frac{1}{2}\eta^2\, dx'. \qquad (11.2.10)\ \boxed{\texttt{3.8}}
\end{aligned}$$

Combinando ($\overset{\texttt{3.4}}{\text{11.2.4}}$)-($\overset{\texttt{3.8}}{\text{11.2.10}}$), ricaviamo

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\mathbf{u}|^2\, dx - \frac{g_0}{2}\int_{\Sigma}\eta^2\, dx' + \sigma\int_{\Sigma}\sqrt{1+|\nabla'\eta|^2}\, dx'\Big] + \frac{\mu}{2}\|S(\mathbf{u})\|^2_{L^2(\Omega_t)} = 0, \qquad (11.2.11)\ \boxed{\texttt{3.9}}$$

cha e' equivalente a ($\overset{\texttt{3.1}}{\text{11.2.1}}$).

Poniamo

$$D_\eta = \int_{\Sigma}\left(\sqrt{1+|\nabla\eta'|^2} - 1\right)\, dx', \qquad (11.2.12)\ \boxed{\texttt{4.3}}$$

Sostituendo ($\overset{\texttt{4.3}}{\text{11.2.12}}$) in ($\overset{\texttt{3.9}}{\text{11.2.11}}$), e cambiando di segno si ottiene

$$\frac{d}{dt}\Big[g_0|\Sigma|\int_{\Sigma}\eta^2\, dx' - 2\sigma D_\eta - \int_{\Omega_t}|\mathbf{u}|^2\, dx\Big] \;=\; \mu\|S(\mathbf{u})\|^2_{L^2(\Omega_t)}. \qquad (11.2.13)\ \boxed{\texttt{3.9bis}}$$

Poiche'

$$\frac{d}{dt}\int_{\Sigma}\sqrt{1+|\nabla'\eta|^2}\, dx' = \frac{d}{dt}\int_{\Sigma}\left(\sqrt{1+|\nabla'\eta|^2} - 1\right)\, dx' = \frac{d}{dt}\int_{\Sigma}\frac{|\nabla'\eta|^2}{\sqrt{1+|\nabla'\eta|^2}+1}\, dx', \qquad (11.2.14)\ \boxed{\texttt{3.10}}$$

Otteniamo l'effetto dissipativo D_η, cioe'

$$\begin{aligned}
D_\eta = \int_{\Sigma}\frac{|\nabla'\eta|^2}{\sqrt{1+|\nabla'\eta|^2}+1}\, dx' &= \int_{\Sigma}\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla'\eta|^2}+1} - \frac{1}{2}\right)\right\}|\nabla'\eta|^2\, dx' \\
&= \frac{1}{2}\|\nabla'\eta\|^2_{L^2(\Sigma)} - \frac{1}{2}\int_{\Sigma}\frac{\sqrt{1+|\nabla'\eta|^2}-1}{\sqrt{1+|\nabla'\eta|^2}+1}|\nabla'\eta|^2\, dx' \\
&= \frac{1}{2}\|\nabla'\eta\|^2_{L^2(\Sigma)} - \frac{1}{2}(\mathcal{H}_{nl}\nabla'\eta, \nabla'\eta)_{\Sigma}. \qquad (11.2.15)\ \boxed{\texttt{3.11}}
\end{aligned}$$

Allora da ($\overset{\texttt{3.9}}{\text{11.2.11}}$)-($\overset{\texttt{3.11}}{\text{11.2.15}}$) deduciamo ($\overset{\texttt{3.2}}{\text{11.2.2}}$), che completa la dimostrazione del teorema. □

11.3 Fluidi barotropici in Ω con frontiera rigida

In questa sezione forniamo alcuni esempi di norma naturale nella quale la perturbazione e' controllata in termini dei dati iniziali per tutti i t per viscosita' nulla e velocita' base non-nulla.

Ora applichiamo il metodo di Dirichlet ai fluidi compressibili, studiando due problemi modello.

11.3.1 Fluidi barotropici non viscosi $\mathbf{v}_b \neq 0$.

Ricordiamo che i moti nonstazionari di un fluido barotropico non viscoso in un dominio limitato sono governati dalle **equazioni compressibili di Eulero**. Le incognite velocita' $\mathbf{v}$ e densita' ρ sono governate dal seguente problema ai valori iniziali ed al contorno in un dominio Ω:

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, && && (11.3.1)\\
&\rho(\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p(\rho) + \rho \nabla U, && && (x,t) \in \Omega \times (0,T),\\
&\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x), && \rho(x,0) = \rho_0(x), && x \in \Omega,\\
&\int_\Omega \rho(x,t)dx = M, && \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0.
\end{aligned}
$$

Se la pressione $p(\rho)$ e' convessa in funzione di ρ, il sistema (11.3.1) e' strettamente iperbolico.

Posto $x \in \Omega$, $x \equiv (x,y,z)$, denotiamo con $\mathbf{v}_b$, ρ_b la soluzione stazionaria del sistema (11.3.1). Diamo condizioni sufficienti per la stabilita' nonlineare di moti stazionari potenziali, rispetto a perturbazioni tridimensional. Lavoriamo in coordinate Euleriane.

*Studiamo la stabilita' nonlineare del moto stazionario di un **fluido barotropico non viscoso**, governato dalle **equazioni di Eulero compressibile**.* Ricordiamo il Problema ai valori al contorno per i moti stazionari

$$
\begin{aligned}
&\nabla \cdot (\rho_b \mathbf{v}_b) = 0,\\
&(\rho \mathbf{v}_b \cdot \nabla)\ \mathbf{v}_b = -\nabla p(\rho_b) + \rho_b \nabla U, \qquad x \in \Omega\,,\\
&\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \int_\Omega \rho_b(x)\,dx = M, \quad \rho_b \geq 0,
\end{aligned}
\tag{11.3.2}
$$

dove $\mathbf{n}$ e' la normale al contorno, e $p = p(\rho_b)$. In tal caso lo stato di quiete dato da $S_b = \{\mathbf{v} = 0, \quad \rho_b = \rho_b(x)\}$ esiste solo quando le forze $\mathbf{f}$ sono posizionali e derivano da un potenziale uniforme $\mathbf{f} = \nabla U$. Infatti allora la quiete rulta la soluzione esatta di (11.3.2), con ρ_b implicitamente dato da

$$
\int^{\rho_b} \frac{p'(s)}{s} ds = U + c, \qquad \int_\Omega \rho_b\,dx = M. \tag{11.3.3}
$$

Si noti che la costante c e' data dalla condizione che la massa totale sia assegnata $(11.3.2)_4$, quindi la (11.3.3) puo' fornire valuri complessi per ρ_b. Per ottenere solo soluzioni reali e positive ρ_b (densita' materiali), dobbiamo assumere:

Ipotesi sul moto base $(\rho_b, \mathbf{v}_b)$

(i) Il moto $(\rho_b, \mathbf{v}_b)$ soddisfa il problema ai valori al contorno (polit 11.3.2)
(ii) La velocita' $\mathbf{v}_b$ e' *potenziale*;
(iii) La quantita' di moto $\rho_b\mathbf{v}_b$ e' *potenziale*

$$\rho_b \mathbf{v}_b = \nabla\chi.$$

Le assunzioni (i) e (ii) permettono di scrivere (per moti regolari) l'equazione di Bernoulli

$$\begin{aligned} &\nabla\Big(\frac{1}{2}\mathbf{v}_b^2 + \Phi(\rho_b) - U\Big) = 0, \qquad x \in \Omega \\ &\Phi(\rho) = \int^{\rho} \frac{p'(s)}{s} ds, \qquad p'(\rho) = \frac{dp}{d\rho}, \end{aligned} \tag{11.3.4}$$

newbas

dove Φ e' l'entalpia; cf. (enth ??). Definiamo

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}_b, \rho_b) = \int_\Omega \rho_b\Big(\frac{1}{2}\mathbf{v}_b^2 + \Phi(\rho_b) - U\Big)dx.$$

Riscriviamo (balmecc ??) per fludi non viscosi e deduciamo

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\Big(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \int^{\rho}\frac{p(s)}{s^2}ds\Big)dx = -\int_{\partial\Omega} p(\rho)\mathbf{n}dS + \int_\Omega \rho\mathbf{v}\cdot\nabla U dx. \tag{11.3.5}$$

balmu

In questo caso, l'energia totale e' data da

$$\begin{aligned} &E(\mathbf{v}, \rho) = \int_\Omega \big\{\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + \rho\Psi(\rho) - \rho U(x)\big\}dx, \\ &\Psi(\rho) = \int^{\rho}\frac{p(s)}{s^2}ds, \end{aligned} \tag{11.3.6}$$

energy1

dove Ψ e' l'energia libera di Helmholtz; cf. (freen ??). Si ponga

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_b, \qquad \sigma = \rho - \rho_b.$$

Le soluzioni $\mathbf{v}_b + \mathbf{u}$, $\rho_b + \sigma$ di (moty 11.3.1) soddisfano la condizione laterale

$$\int_\Omega \sigma dx = 0.$$

Il funzionale di Lyapunov e' dato da

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(\mathbf{u}, \sigma) = E(\mathbf{v}_b + \mathbf{u}, \rho_b + \sigma) - \mathcal{E}(\mathbf{v}_b, \rho_b) = \\ &\int_\Omega \big\{\frac{1}{2}(\rho_b + \sigma)(\mathbf{v}_b + \mathbf{u})^2 + (\rho_b + \sigma)(\Psi(\rho_b + \sigma) - U(x))\big\}dx \\ &-\int_\Omega \big\{\frac{1}{2}\rho_b\mathbf{v}_b^2 + \rho_b(\Phi(\rho_b) - U(x))\big\}dx. \end{aligned} \tag{11.3.7}$$

energy1'

Si calcola che la derivata temporale di $\mathcal{E}(\mathbf{v}_b, \rho_b)$ e' zero, allora da (newbas 11.3.4) otteniamo

$$\frac{d}{dt}\Big(E(\mathbf{v}, \rho) - \mathcal{E}(\mathbf{v}_b, \rho_b)\Big) = \frac{d}{dt}\int_\Omega \big\{\frac{1}{2}\rho(\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_b^2) + \rho(\Psi(\rho) - \Phi(\rho_b))\big\}dx = 0. \tag{11.3.8}$$

perturb

Abbiamo cosi' provato che $\mathcal{F}(\mathbf{u}, \sigma)$ e' un buon funzionale di Lyapunov .
Applicando la formula del polinomio di Taylor, di punto iniziale point $(\mathbf{v}_b, \rho_b)$, we get:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathbf{u}, \sigma) &= E(\mathbf{v}_b + \mathbf{u}, \rho_b + \sigma) - \mathcal{E}(\mathbf{v}_b, \rho_b)\\ &= E(\mathbf{v}_b + \mathbf{u}, \rho_b + \mathbf{u}) - E(\mathbf{v}_b, \rho_b) + E(\mathbf{v}_b, \rho_b) - \mathcal{E}(\mathbf{v}_b, \rho_b)\\ &= \delta E(\mathbf{v}_b, \rho_b)[\mathbf{u}, \sigma] + \frac{1}{2}\delta^2 E(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\rho})[\mathbf{u}, \sigma]^2 + \int_\Omega \rho_b(\Psi(\rho_b) - \Phi(\rho_b))dx,\end{aligned} \tag{11.3.9}$$

variat

dove $\bar{\mathbf{v}}, \bar{\rho}$ e' un punto tra $(\mathbf{v}_b, \rho_b)$ e $(\mathbf{v}, \rho)$.
Poiche' la primitiva di una funzione e' definita a meno di una costante, le definizioni di Ψ, e Φ comportano

$$\begin{aligned}\int_\Omega \rho_b(\Psi(\rho_b) - \Phi(\rho_b))dx &= \int_\Omega \rho_b \int^{\rho_b} \frac{d}{ds}\Big(\frac{p(s)}{s}\Big)ds\, dx\\ = \int_\Omega \rho_b\Big(\frac{p(\rho_b)}{\rho_b} + c\Big)\, dx &= \int_\Omega p(\rho_b)dx + cM.\end{aligned} \tag{11.3.10}$$

press

Il primo membro di (press 12.1.13) si annulla per c opportuno

$$c = -\frac{\int_\Omega p(\rho_b)dx}{M}.$$

Per tale scelta di c, la funzione $\mathcal{F}$ si semplifica

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}, \sigma) = \delta E(\mathbf{v}_b, \rho_b)[\mathbf{u}, \sigma] + \frac{1}{2}\delta^2 E(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\rho})[\mathbf{u}, \sigma]^2. \tag{11.3.11}$$

varia

Calcoliamo le variazioni prima e seconda di E prendendo come punto iniziale $(\mathbf{v}_b, \rho_b)$.
Si ha

$$\begin{aligned}\delta E(\mathbf{v}_b, \rho_b)[\mathbf{u}, \sigma] &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial \rho}\Big[\rho(\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_b^2) + \rho\Psi(\rho) - \rho\Phi(\rho_b)\Big]_{\rho_b, \mathbf{v}_b} \sigma dx + \int_\Omega \rho_b \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{u} dx,\\ \frac{1}{2}\delta^2 E(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\rho})[\mathbf{u}, \sigma]^2 dx &= \int_\Omega \Big\{\frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\rho\Psi(\rho))}{\partial\rho^2}\Big|_{(\overline{u}, \bar{\rho})}\sigma^2 + \bar{\mathbf{v}}_b \cdot \mathbf{u}\sigma\Big\}dx.\end{aligned} \tag{11.3.12}$$

taylor

Per il primo integrale nella prima variazione di E notiamo che

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\Big[\rho(\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_b^2) + \rho\Psi(\rho)) - \rho\Phi(\rho_b)\Big]_{(\mathbf{v}_b, \rho_b)} = \rho_b\Psi'(\rho_b) + (\Psi(\rho_b) - \Phi(\rho_b)) =$$

$$\frac{p(\rho_b)}{\rho_b} + \int^{\rho_b}\frac{p(s)}{s^2}ds - \int^{\rho_b}\frac{p'(s)}{s}ds = \frac{p(\rho_b)}{\rho_b} - \int^{\rho_b}\frac{d}{ds}\Big(\frac{p(s)}{s}\Big)ds = const = C. \tag{11.3.13}$$

first

Inoltre, $\int_\Omega C\sigma\, dx = 0$ poiche' $\int_\Omega \sigma dx = 0$, quindi il primo integrale in δE e' zero.

Per il secondo integrale nella prima variazione di E, usando la decomposizione di Helmholtz per $\mathbf{u}$, $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \nabla\xi$, con $\mathbf{w}$ solenoidale e con zero componente normale alla frontiera, ricordando la seconda ipotesi (ii) assieme alle condizioni al contorno e a (11.3.2)$_1$, abbamo

$$\int_\Omega \rho_b \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{u}\, dx = \int_\Omega \rho_b \mathbf{v}_b \cdot (\mathbf{w} + \nabla\xi)\, dx = \int_\Omega \nabla\chi \cdot \mathbf{w}\, dx + \int_\Omega \rho_b \mathbf{v}_b \cdot \nabla\xi\, dx = 0.$$

Allora, la variazione prima di E e' zero in $(\mathbf{v}_b, \rho_b)$. Ora dobbiamo calcolare la variazione seconda di E data da (11.3.12)$_2$. Ricirdiamo che $(\mathbf{v}_b, \rho_b)$ e' un minimo per l'energia libera di Helmhotz, di conseguenza si ha

$$\frac{\partial^2(\rho\Psi(\rho))}{\partial\rho^2}\Big|_{(\mathbf{v}_b,\rho_b)} > 0,$$

e per continuita' deduciamo che la variazione seconda rimane positiva per tutti i valori in $I_R(\mathbf{v}_b, \rho_b)$, e possiamo dedurre

$$\frac{\partial^2(\rho\Psi(\rho))}{\partial\rho^2}\Big|_{(\overline{u},\bar{\rho})} > 0, \qquad (\overline{u}, \bar{\rho}) \in I_R(\mathbf{v}_b, \rho_b).$$

Se $\mathbf{v}_b$ Non e' troppo grande rispetto alla densita' di base, (11.3.12)$_2$ e' equivalente alla L^2-norm delle perturbazioni $\mathbf{u}$ e σ. Finalmente, integrando (11.3.8) nel tempo comporta

$$a\Big(\|\mathbf{u}\|^2_{L^2} + \|\sigma\|^2_{L^2}\Big) \le \int_\Omega \Big\{\frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\rho\Psi(\rho))}{\partial\rho^2}\Big|_{(\overline{u},\bar{\rho})}\sigma^2 + \bar{\mathbf{v}}_b \cdot \mathbf{u}\sigma\Big\}dx = \tag{11.3.14}$$

finest

$$\int_\Omega \Big\{\frac{1}{2}\rho_0\mathbf{u}_0^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\rho_0\Psi(\rho_0))}{\partial\rho_0^2}\Big|_{(\overline{u_0},\bar{\rho}_0)}\sigma_0^2 + \bar{\mathbf{v}}_b \cdot \mathbf{u}_0\sigma_0\Big\}dx,$$

che assicura il controllo delle perturbazioni $\mathbf{u}$ e σ nella L^2-norma, per tutti i tempi $t > 0$.

11.3.2 Fluidi isotermi viscosi $\mathbf{v}_b = 0$.

In questa sottosezione usiamo il metodo dell'energia in un modo non ortodosso per ricavare il comportamento nel tempo della differenza tra le energie $E(t)$ del moto non stazionario ed E_b dello stato di quiete. Osserviamo che $E(t) - E_b$ domina la L^2-norm spaziale della differenza tra due soluzioni $(\rho, \mathbf{v})$, $(\rho_b, \mathbf{v}_b)$. Ancora, per ottenere il decadimento a zero nel tempo, applichiamo il metodo del lavoro libero, che fornisce termini dissipativi per la perturbazione nella densita'. Il risultato sara' raggiunto usando opportune funzioni test l'esistenza delle quali e' provata nel Lemma ??.

Consideriamo il sistema

$$\begin{aligned}
&\partial_t\rho + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho = -\rho\nabla\cdot\mathbf{u}, \\
&\rho\partial_t\mathbf{u} + \rho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} - (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} = -k\nabla\rho, \qquad (x,t) \in \Omega\times(0,T), \\
&\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x), \qquad \rho(x,0) = \rho_0(x), \qquad x \in \Omega, \\
&\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \int_\Omega \rho dx = M,
\end{aligned} \tag{11.3.15}$$

model

con $k = R_* \theta_b$ costante positiva. Il sistema (11.3.15) descrive fluidi isothermi in moto in assenza di forze esterne. E' facile verificare che $\mathbf{v}_b = 0$, $\rho_b = M/|\Omega|$ e' una soluzione di (11.3.15). Inoltre, e' standard verificare che vale l'**equazione dell'energia**

$$\frac{d}{dt}\Big\{ \int_\Omega \rho \frac{u^2}{2} + k\rho \ln \rho \Big\} dx + \mu \, D_u(t) \, = 0, \tag{11.3.16}$$

energ

con

$$\mu \, D_u(t) = \int_\Omega \Big[(\lambda + \mu)(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \, dx + \mu |\nabla \; \mathbf{u}|^2 \Big] \, dx.$$

Si noti che (11.3.16) puo' essere riscritta nel seguente modo

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(\mathbf{u}, \sigma) + \mu \, D_u(t) \, = 0. \tag{11.3.17}$$

energ1

dove $\mathcal{F}$ e' l'energia delle perturbazioni $\mathbf{u}$, σ:

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}, \sigma) = \int_\Omega \Big\{ \rho \frac{u^2}{2} + k\rho \ln \rho - k\rho \ln \rho_b - k(\rho - \rho_b) \Big\} dx = \int_\Omega \left(\rho \frac{u^2}{2} + k \frac{\sigma^2}{2\overline{\rho}} \right) dx,$$

con $\overline{\rho}$ tra ρ e ρ_b. Segue dalla definizione e da (11.3.17) che $\mathcal{F}$ e' un funzionale di Lyapunov , prtanto la quiete e' stabile.

Osservazione 11.3.1 *La stabilita' in media continua a valere per fluidi non viscosi, ad esempio se $\mu = 0$. Infatti, $\mathcal{F}$ e' un funzionale di Lyapunov a prescindere dal termine di viscosita'.*

Sia $\mu > 0$; vogliamo analizzare il comportamento asintotico di una perturbazione nel tempo. A tal fine costruiamo un termine dissipativo per σ.

Per la perturbazione $\sigma = \rho - \rho_b$ introduciamo la FWE .
Per f e g, due funzioni vettoriali in spazi duali, usiamo la notatione (f, g) per denotare l'integrale su Ω del prodotto scalare tra queste due funzioni.
Moltiplichiamo (11.3.15) per una funzione ausiliaria $\mathbf{V}$, avente la dimensione di uno spostament **spostamento libero**, ed integriamo su Ω. Otteniamo l'**equazione del lavoro libero**

$$\frac{d}{dt}(\rho\mathbf{u}, \mathbf{V}) + k(\nabla\sigma, \mathbf{V}) = \mathcal{I}, \tag{11.3.18}$$

aux1

con

$$\mathcal{I} = (\rho\mathbf{u}, \partial_t \mathbf{V} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{V}) - (\lambda + \mu)\Big(\nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{V} \Big) - \mu \Big(\nabla \; \mathbf{u}, \nabla \; \mathbf{V} \Big).$$

L'equazione (11.3.18) e' chiamata l'**equazione del lavoro libero** in quanto esprime una uguaglianza tra la derivata temporale di $(\rho\mathbf{u}, \mathbf{V})$ ed il lavoro meccanico. Si noti che lo *spostamento* $\mathbf{V}$ un campo vettoriale arbitrario *da essere scelto opportunamente.*
Data σ come funzione regolare $\sigma = \sigma(x, t)$, ora possiamo scegliere lo spostamento $\mathbf{V}$ come soluzione al problema dei valori al bordo; cf. Lemma ?? of Chapter 3,

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \mathbf{V} = \sigma, && (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ &\mathbf{V}|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \tag{11.3.19}$$

bvp

Si noti che, poiche' $\int_\Omega \sigma dx = 0$, la condizione di compatibilita' e' soddisfatta. Ancora per le soluzioni di (11.3.19) esistono costanti c' $\bar{c}$, c_* per le quali sono verificate le diseguaglianze, cf. (??) Lemma ?? of Chapter III,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}\|_{L^2} &\le c'\|\sigma\|_{L^2}, \\ \|\nabla\mathbf{V}\|_{L^2} &\le \bar{c}\|\sigma\|_{L^2}, \\ \|\partial_t\mathbf{V}\|_{L^2} &\le c_*\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{11.3.20}$$

La (11.3.19) fornisce l'**equazione del lavoro libero**

$$-\frac{d}{dt}(\rho\mathbf{u}, \mathbf{V}) + k\|\sigma\|^2_{L^2} = -\mathcal{I}. \tag{11.3.21}$$

(11.3.21) appare nella forma di un'equazione tra lavori, diciamo che la derivata temporale di un termine, avente le dimensioni dell'integrale temporale di una energia, piu' un termine dissipativo per σ che eguaglia il funzionale $\mathcal{I}$ avente dimensione di un lavoro.

Se moltiplichiamo (11.3.18) per $-\nu$, dove ν e' una costante arbitraria positiva avente dimensione dell'inverso di un tempo $1/sec$, e la sommiamo all'equazione dell'energia (11.3.16), troviamo come funzionale alternativo di Lyapunov $\mathcal{F}$, l'**energia modificata** $\mathbb{E}$

$$\mathbb{E} = \Big\{\int_\Omega \frac{u^2}{2} + k\frac{\sigma^2}{2\overline{\rho}} - \nu\,\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{V}\Big\}dx. \tag{11.3.22}$$

che soddisfa l'**equation dell'energia modificata**

$$\frac{d\mathbb{E}}{dt} = -\nu\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{L^2}dx - \nu k\|\sigma\|^2_{L^2} - \nu\mathcal{I}. \tag{11.3.23}$$

Usando (11.3.20), e' facile verificare che l'energia modificata (11.3.22) diviene equivalente alla norma delle perturbazioni per ν sufficientemente piccolo

$$m_1(\|\mathbf{u}\|^2_{L^2}dx + \|\sigma\|^2_{L^2}) \le \mathbb{E} \le m_2(\|\mathbf{u}\|^2_{L^2}dx + \|\sigma\|^2_{L^2}).$$

Ora ricordiamo il metodo generalizzato di Dirichlet, ed analizziamo $\mathcal{I}$, che per piccoli ν e per soluzioni regolari, costituisce una forma quadratica definita positiva nella L^2-norm delle perturbazioni $\mathbf{u}$, σ. Si puo' chiamare il funzionale $\mathcal{I}$ lavoro generalizzati delle perturbazioni. Dalle stime provate per $\mathbf{V}$, segue che

$$|\mathcal{I}| \le c(\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}\|\sigma\|_{L^2} + \|\nabla\mathbf{u}\|^2_{L^2}),$$

dove $c = c(\mathbf{u}, \sigma, \rho_b)$. Quindi il termine

$$\mathcal{D} = \int_\Omega \Big(\mu|\nabla\mathbf{u}|^2 + (\lambda+\mu)(\nabla\cdot\mathbf{u})^2\Big)dx + \nu k\|\sigma\|^2_{L^2} - \nu\mathcal{I}$$

e' una forma quadratica definita positiva nella L^2-norma delle perturbazioni $\mathbf{u}$, σ. Segue che per ν abbastanza piccolo, usando la diseguaglianza di Poincaré , e' possible provare che esiste una costante $\beta > 0$ tale che

$$\mathcal{D} \ge \beta\mathbb{E}.$$

Sostituendo questa informazione in (aux2 11.3.23) deduciamo la diseguaglianza differenziale per l'energia modificata

$$\frac{d\mathbb{E}}{dt} + \beta\mathbb{E} \leq 0,$$

che implica il decadimento esponenziale a zero della L^2-norm delle perturbazioni $\mathbf{u}$, σ. La costante di decadimento dipende dal valore di ν e in generale e' molto piccola.

Problema aperto *Estendere il metodo allo studio della stabilita' di un moto stazionario arbitrario.*

11.4 Continui iperelastici

11.4.1 Posizioni di equilibrio

V.3.1 **Definizione 11.4.1** *Una configurazione Ω_* si dice* ***posizione di equilibrio*** *se la quiete in Ω_* e' un moto possibile.*

In altre parole se, all'istante iniziale $t_0 = 0$ si lascia il corpo $\mathcal{B}$ in Ω_* con distribuzione iniziale di velocita' nulla, il corpo resta in Ω_* negli istanti successivi, vale a dire il moto $x(X,t) = X$ per $t > 0$ e' una soluzione della equazione di Newton, o di bilancio della quantita' di moto.

In questa sezione ricaviamo alcune posizioni di equilibrio per moti unidimensionali con energie interne funzioni esplicite degli invarianti principali del tensore di Cauchy-Green $\mathbf{C}$.

Distinguiamo i seguenti casi:

(A) Espansione tridimensionale;

(B) Scorrimento unidimensionale

(A) Espansione tridimensionale;

Introduciamo il tensore dell'elasticita'

$$C_{lmij}(\mathbf{F}) := \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial F_{lm} \partial F_{ij}}.$$

Supponiamo che le configurazioni di matrici $\mathbf{F}_0$ ed $\mathbf{F}_1$ collegate da espansione omogenea, siano libere da sforzi e di minimo locale per l'energia interna $\mathcal{E}$ cio' comporta

$$\mathbf{S}(\mathbf{F}_0) = 0, \qquad A_{lm} C_{lmij}(\mathbf{F}_0) A_{ij} > 0,$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{F}_1) = 0, \qquad A_{lm} C_{lmij}(\mathbf{F}_1) A_{ij} > 0,$$

per ogni tensore $\mathbf{A}$.

Dal teorema dell'energia discende che i due stati $\mathbf{F}_0$, $\mathbf{F}_1$ sono stabili.

Proviamo che esiste una configurazione $\mathbf{F}_*$ collegata ad $\mathbf{F}_0$, $\mathbf{F}_1$ da deformazione omogenea per la quale

$$\mathbf{A}_* \mathbf{C}(\mathbf{F}_*) \mathbf{A}_* < 0,$$

per almeno un tensore $\mathbf{A}_*$. Questa configurazione non e' di minimo per $\mathcal{E}$.

Introduciamo l'insieme di deformazioni omogenee

$$\mathbf{F}(s) = \sum_{i=1}^{3} [1 + s(\lambda_i - 1)\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i, \qquad s \in (0,1),$$

dove λ_i sono gli autovalori dell'espansione da $\mathbf{F}_0$ ad $\mathbf{F}_1$. Risulta $\mathbf{F}(0) = \mathbb{I}$, $\mathbf{F}(1) = \mathbf{U}$. Poniamo

$$\phi(s) = W_F(\mathbf{F}(s)), \qquad 0 \leq s \leq 1.$$

Per la regola di derivazione per le funzioni composte troviamo

$$\phi'(s) = W_F(F(s)\frac{dF}{ds}, \qquad \phi''(s) = \frac{dF}{ds}\mathbf{C}F(F(s)\frac{dF}{ds}.$$

Per le ipotesi fatte risulta che la funzione scalare ϕ della variabile reale s verifica

$$\phi'(0) = \phi'(1) = 0, \qquad \phi''(0) > 0, \qquad \phi''(1) > 0,$$

il che comporta che *phi* ha minimi in $s = 0$ ed in $s = 1$. Pertanto ϕ deve avere un massimo in un punto s_* tra 0 ed 1 dove risulta $\phi''(s_*) < 0$. La configurazione corrispondente al valore s_* risulta una posizione d'equilibrio instabile.

(B) Scorrimento unidimensionale

Nel caso di scorrimento unidimensionale, per il moto $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ si ha

$$x_(\mathbf{X}, t)1 = X_1, \qquad x_2(\mathbf{X}, t) = u(X_1, t) + X_2, \qquad x_3(\mathbf{X}, t) = X_3.$$

Sia Ω l'intervallo $(0, d)$ dove varia la X_1. Le variabili X_2, X_3 variano ciascuna in R. Da ora in poi poniamo $X_1 = X$ e scriveremo le equazioni in termini dell'unica componente non nulla dello spostamento

$$u(X, t) = x_2 - X_2, \qquad X_1 = X \in (0, d).$$

Il tensore gradiente di deformazione $\mathbf{F}$ e' dato da $\mathbb{I}$ piu' il tensore $F_{12}\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2$, $F_{12} = \gamma$. Il moto in esame e' isocoro, noi supporremo il continuo omogeneo all'istante iniziale e fissiamo $\rho_0 = 1$. Se il continuo e' iperelastico allora la funzione energia interna $\mathcal{E}$ sara' unicamente funzione dei tre invarianti della matrice di deformazione di Cauchy-Green $\mathbf{C} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$. In questo semplice caso $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\gamma^2)$ dove $\gamma = \gamma(X, t) = \frac{\partial u}{\partial X}$. Si vede facilmente che il tensore di Piola Kirchoff risulta dato da

$$\mathbf{S} \equiv \left[\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial F_{ij}}\right] = \frac{d\mathcal{E}}{d\gamma}\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1.$$

Pertanto, in assenza di forze esterne, le equazioni del moto si riducono alla seguente equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{d\mathcal{E}}{d\gamma}\right). \qquad (11.4.1)$$ sedia

Le posizioni di equilibrio, sono particolari soluzioni stazionarie e quindi sono indipendenti dal tempo, esse si ricavano risolvendo il problema dei valori al contorno

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{d\mathcal{E}}{d\gamma}\right) &= 0 \\ u(0) = u_0, &\qquad u(d) = u_d. \end{aligned} \tag{11.4.2}$$ baco

Poiche' ora risulta $u = u(X)$ le derivate parziali si riducono a derivate ordinarie ed il problema (11.4.2) richiede la risoluzione di un'equazione differenziale ordinaria (OD) con i dati al bordo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX}\left(\frac{d\mathcal{E}(\gamma(X))}{d\gamma}\right) &= 0 \\ u_0 = 0, &\qquad u_d = 0. \end{aligned} \tag{11.4.3}$$ baod

La soluzione di (11.4.3) dipende dalla espressione esplicita di $\mathcal{E}$, qui distinguiamo i seguenti due casi:

$$\begin{aligned} (i) \qquad \mathcal{E}(\gamma^2) &= \frac{k}{2}\gamma^2 \\ (ii) \qquad \mathcal{E}(\gamma^2) &= \frac{k}{2}(1-\gamma^2)^2. \end{aligned} \tag{11.4.4}$$ baci

Il primo caso rappresenta un solido linearmente elastico, il secondo caso noto come la barra di Ericksen e' un esempio di funzionale di energia non convesso e rappresenta un solido in presenza di piu' fasi.

Soluzione del Problema dei Valori al Bordo

Qui ci limitiamo al caso piu' semplice

$$u_0 = u_d = 0.$$

Caso (i)

Ricordiamo $\gamma = \frac{\partial u}{\partial X}$, quindi

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\gamma} = k\gamma = k\,\frac{du}{dX}$$

e ricaviamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX}\left(k\frac{du}{dX}\right) &= 0 \\ u(0) = 0, &\qquad u(d) = 0. \end{aligned} \tag{11.4.5}$$ bacu

La (11.4.5) ammette solo la soluzione banale $u(X) = 0$, in termini fisici un solido lineare in assenza di forze esterne ammette come posizione di equilibrio solo la posizione indeformata $\mathbf{x} = \mathbf{X}$.

Caso (ii)

Ricordiamo $\gamma = \frac{du}{dX}$, quindi

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\gamma} = k2\gamma(\gamma^2 - 1)$$

e ricaviamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX}\left[k2\gamma(\gamma^2-1)\right] \; &= \; 0 \\ u(0)=0, \qquad u(d)&=0. \end{aligned} \tag{11.4.6}$$ $\boxed{\texttt{bacoii}}$

La soluzione di (11.4.6) ammette anche la seguente espressione

$$\begin{aligned} k2(3\gamma^2-1)\frac{d^2u}{dX^2} \; &= \; 0 \\ u(0) \; = \; 0 = \; &u(d). \end{aligned} \tag{11.4.7}$$ $\boxed{\texttt{bacii}}$

Le (11.4.6) (11.4.7) ammettono ancora la soluzione banale $u(X)=0$, che rappresenta per il solido in assenza di forze esterne la posizione indeformata $\mathbf{x}=\mathbf{X}$. Pero' le (11.4.6) (11.4.7) ammettono anche altri integrali generali come ad esempio per (11.4.7) le due funzioni

$$\gamma(X)=\frac{du}{dX}=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \gamma(X)=\frac{du}{dX}=-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

o per la (11.4.6)

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\gamma}=2k\gamma(\gamma^2-1)=cost.. \tag{11.4.8}$$ $\boxed{\texttt{cost}}$

In particolare, fissando per la costante il valore zero, la (15.1.2) richiede che sia

$$\gamma(X)=\frac{du}{dX}=\pm 1. \tag{11.4.9}$$ $\boxed{\texttt{cost'}}$

Abbiamo cosi' calcolato i seguenti integrali generali

$$u_{**}(X)=\pm\frac{X}{\sqrt{3}}+c, \qquad u_*=\pm X+c,$$

con c costante arbitraria. Gli integrali generali che abbiamo individuato debbono pero' verificare anche le condizioni al contorno.

Per far si' che la soluzione $u=u(X)$ di (11.4.6) verifichi anche i dati al bordo si puo' pensare di considerare alternativamente la soluzione corrispondente al segno positivo in un tratto dell'intervallo e corrispondente al segno negativo nella rimanente parte dell'intervallo

$$u_{**}(X)=\begin{cases} \frac{X}{\sqrt{3}}, & X\in\left(0,\frac{d}{2}\right), \\ \frac{d}{\sqrt{3}}-\frac{X}{\sqrt{3}}, & X\in\left(\frac{d}{2},d\right). \end{cases}$$

In generale queste soluzioni lineari a tratti e continue vanno bene anche per le soluzioni di (11.4.6) e si ha

$$u_*(X)=\begin{cases} X, & X\in\left(0,\frac{d}{2}\right), \\ d-X, & X\in\left(\frac{d}{2},d\right). \end{cases} \tag{11.4.10}$$ $\boxed{\texttt{eq}}$

Osservazione V.3.1 *E' chiaro che si e' introdotta una nuova tecnica di risoluzione dei problemi al contorno per equazioni OD. Le funzioni lineari che abbiamo ricavato hanno ciascuna una sola costante arbitraria e quindi, non possono verificare due condizioni al bordo. Noi abbiamo allora suddiviso l'intervallo di definizione in maniera opportuna in modo che la funzione costante a tratti cosi' costruita verifichi i dati al bordo, e sia in piu' continua. Con questo trucco noi possiamo pensare di suddividere ulteriormante l'intervallo in quattro (di ampiezza $d/4$) o piu' parti e trovare nuove soluzioni u_n se l'intervallo e' diviso in 2^n. Poiche' ciascun tratto corrisponde ad una fase diversa del materiale possiamo concludere che sono possibili infinite soluzioni rappresentate come una successione ordinata di due fasi alternate. Questi materiali esistono in natura e cambiano da una fase ad un'altra mediante precisi processi di tensione o termici. Per le leghe di metalli le due fasi si chiamano* ***Martensite*** *ed* ***Austenite****.*

Osservazione V.3.2 *Notiamo che la soluzione $u = 0$ e' ora un punto di massimo locale per l'energia, mentre la soluzione (classe di soluzioni) corrispondente a $\gamma = \pm 1/\sqrt{3}$ e' un punto di minimo per l'energia, mentre per la soluzione (classe di soluzioni) $\gamma = \pm 1$ la derivata seconda dell'energia interna e' zero e e' necessaario uno studio ulteriore.*

Esercizio Dette A_n le aree sottese dalle funzioni minimizzanti u_n che si determinano all'aumentare degli intervalli in n parti $(2^{-n}, 2^{-n-1})$ verificare che esse sono in ordine descrescente con n.

11.4.2 Stabilita' di equilibri unidimensionali

In questa sezione studiamo le conseguenze della stima dell'energia in casi di continui iperelastici unidimensionali nel caso in cui l'energia interna abbia un minimo.

Teorema 11.4.1 ***Teorema (i)*** *Supponiamo che l'energia interna abbia un minimo nella posizione di equilibrio $u(X) = 0$. Allora la posizione d'equilibrio $u_*(X, t) = x_2(X, t) - X_2 = 0$ e' una posizione di equilibrio stabile rispetto alla norma in L^2 dello spostamento, del gradiente di spostamento e della derivata temporale dello spostamento (velocita').*

Dimostrazione Usiamo la notazione $\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) = \mathbf{v}$. Integrando l'equazione dell'energia (dens2 **??**) per $U = cost.$ si ricava

$$\int_{\Omega_*} \left[\frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}^2 + \mathcal{E}(\gamma)\right] dX = \int_{\Omega_*} \left[\frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}_0^2 + \mathcal{E}(\gamma_0)\right] dX. \qquad (11.4.11)$$ dens3

Poiche' il moto base e' la quiete, le velocita' ed i gradienti di spostamento coincidono con la differenza delle velocita' e dei gradienti di spostamento tra i due moti. Ricordando l'espressione di $\mathcal{E} = (k/2)\gamma^2$ si deduce che la somma dei quadrati delle norme in L^2 dei campi di velocita' $\mathbf{v}$ e dei gradienti di spostamento $\gamma = \partial_X u$ sono controllate, per ogni istante t dai loro valori all'istante iniziale. La stabilita' e' quindi provata per le norme del gradiente di spostamento e della derivata temporale dello spostamento (velocita). Riguardo alla norma in L^2 dello spostamento, per diseguaglianza di Poincare' esse e' maggiorata dal gradiente di spostamento e il teorema e' completamente provato.

11.4.3 Stabilita' ed instabilita' dell'equilibrio

In questo capitolo trattiamo solo il problem di stabilita' ed instabilita' nel caso unidimensionale. Il caso tridimensionale si puo' trattare in maniera perfettamente analoga e lasciamo la prova allo studioso lettore.

Teorema 11.4.2 ***Teorema (ii)*** *Supponiamo che l'energia interna abbia un massimo nella posizione di equilibrio $u(X) = 0$, e che l'energia interna abbia un minimo in un'altra posizione di equilibrio $u_*(X)$. Le posizioni d'equilibrio $u_*(X)$ definite in (11.4.10) sono posizioni di equilibrio stabile rispetto alla norma in L^2 dello spostamento, del gradiente di spostamento e della derivata temporale dello spostamento (velocita), la posizione $u(X) = 0$ e' una posizione di equilibrio instabile.*

Dimostrazione

Parte I: Stabilita'

Forniamo un cenno dimostrativo della stabilita' per la soluzione u_* fornita da (11.4.10). Integrando l'equazione dell'energia (??) per $U = cost.$ si ricava

$$\int_{\Omega_*} \left[\frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}^2 + \mathcal{E}(\gamma)\right] dX \;=\; \int_{\Omega_*} \left[\frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}_0^2 + \mathcal{E}(\gamma_0)\right] dX. \tag{11.4.12}$$

dens4

Poiche' nel moto base e' $\gamma_*(X,t) = \pm 1$ la velocita' coincide ancora con la differenza delle velocita' ($\mathbf{v}_* = 0$), ma i gradienti di spostamento non coincidono con la differenza dei gradienti di spostamento tra i due moti perche' $\gamma_* \neq 0$.

Riscriviamo la (11.4.12)

$$\int_{\Omega_*} \left[\frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}^2 + \Big(\mathcal{E}(\gamma) - \mathcal{E}(\gamma_*)\Big)\right] dX \;=\; \int_{\Omega_*} \left[\frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}_0^2 + \Big(\mathcal{E}(\gamma_0) - \mathcal{E}(\gamma_*)\Big)\right] dX. \tag{11.4.13}$$

densi5

Indichiamo con $\|.\|$ la norma il L^2.

Ricordando l'espressione di $\mathcal{E} = (k/2)(1-\gamma^2)^2$ applicando lo sviluppo in polinomi di Taylor di punto iniziale γ_* e ricordando che la derivata prima di $\mathcal{E}$ si annulla in γ_*, si ha

$$\mathcal{E}(\gamma) - \mathcal{E}(\gamma_*) = \frac{1}{2}\frac{d^2\mathcal{E}}{d\gamma^2}\Big|_{\overline{\gamma}=1+\alpha}(\gamma - \gamma_*)^2 = 2\Big(2 + \alpha(3+\alpha)\Big)(\gamma - \gamma_*)^2,$$

dove α e' un opportuno numero reale. All'istante iniziale scegliamo γ_0 vicino ad 1 e quindi α_0 e' piccolo, la quantita' $(2 + \alpha(2+\alpha)$ restera' positiva in un intorno di $t = 0$. In questo intervallo temporale (11.4.13) si scrive

$$\int_{\Omega_*} \frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}^2 dX + \int_{\Omega_*} 2\Big(2+\alpha(3+\alpha)\Big)(\gamma - \gamma_*)^2\, dX \;=\; \int_{\Omega_*} \left[\frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}_0^2 + 2\Big(2 + \alpha_0(3+\alpha_0)\Big)(\gamma_0 - \gamma_*)^2\right] dX. \tag{11.4.14}$$

dens6

Sia $\mathbf{v}_0$ tale che

$$\int_{\Omega_*} \frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}_0^2 dX < \frac{\delta}{2}.$$

Inoltre fissiamo $\gamma_0 = \gamma_* + \alpha_0$ in modo che risulti

$$\int_{\Omega_*} 2\Big(3 + \alpha_0(2 + \alpha_0)\Big)(\alpha_0)^2 \, dX < \frac{\delta}{2}$$

Vogliamo provare che la norma in L^2 di $\gamma = \gamma_* + \alpha$ resta nell'intorno di γ_* di raggio ϵ, arbitrariamente piccolo, a condizione di fissare α_0 sufficientemente piccolo. Abbiamo gia' fissato all'istante iniziale $\|\alpha_0\| < \epsilon$, per la continuita' di α basta allora far vedere che $\|\alpha(t)\|$ non puo' mai essere uguale ad ϵ, per ogni $t > 0$.

Fissato ϵ, sia μ il minimo del funzionale $\int_{\Omega_*} \left|\frac{d^2\mathcal{E}}{d\gamma^2}\right| (\gamma - \gamma_*)^2 dX$ per $\|\alpha\|^2 := \int_{\Omega_*} (\gamma - \gamma_*)^2 dX = \epsilon$

$$\mu = \min_{\|\alpha\|^2 = \epsilon} \int_{\Omega_*} \left|\frac{d^2\mathcal{E}}{d\gamma^2}\right| \alpha^2 dX = \int_{\Omega_*} 2\Big(2 + \alpha(3 + \alpha)\Big)\alpha^2 dX.$$

Scegliamo $\delta < \mu$. Proviamo che che la somma dei quadrati delle norme in L^2 dei campi di perturbazione per le velocita' $\mathbf{v}$ ed i gradienti di spostamento $\gamma - \gamma_* = \alpha$ sono minori di ϵ scelto ad arbitrio.

Inizialmente scegliamo $\delta < \epsilon$, questo comporta che la somma dei quadrati delle norme in L^2 dei campi di velocita' $\mathbf{v}_0$ e delle differenze dei gradienti di spostamento $\gamma_0 - \gamma_* = \alpha_0$ sia minore di ϵ

$$\|\mathbf{v}_0\|^2 + \|\alpha_0\|^2 < \epsilon.$$

Osserviamo che la somma dei quadrati delle norme in L^2 dei campi di velocita' $\mathbf{v}$ e delle differenze dei gradienti di spostamento $\gamma - \gamma_* = \alpha$ sono controllate dai loro valori all'istante iniziale per ogni istante $t < \bar{t}$ dove $\bar{t}$ rappresenta il primo istante per il quale $\|\alpha\| = \epsilon$.

La stabilita' sara' quindi provata non appena si provi che $\bar{t} = \infty$, il che equivale a provare $\|\alpha(t)\| \neq \epsilon$ per ogni $t \in (0, \infty)$. In effetti se per assurdo esistesse un $\bar{t} \neq \infty$ finito, tale che $\|\alpha\| = \epsilon$ in quell'istante si avrebbe

$$\begin{aligned} \mu &< \int_{\Omega_*} \frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}^2 dX + \int_{\Omega_*} 2\Big(2 + \alpha(3 + \alpha)\Big)(\gamma - 1)^2 \, dX \\ &= \int_{\Omega_*} \left[\frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{v}_0^2 + \frac{1}{2} 2\Big(2 + \alpha_0(3 + \alpha_0)\Big)(\gamma_0 - 1)^2\right] dX < \delta. \end{aligned} \tag{11.4.15}$$

dens6

Poiche' $\delta < \mu$ la (11.4.15) non e' compatibile con l'ipotesi di partenza e comporta quindi un assurdo.

La stabilita' e' stata cosi' completamente provata.

Parte II: Instabilita'

Proviamo infine la instabilita' della posizione di equilibrio $u_* = 0$. A tal fine notiamo che $u = u - 0$,

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\gamma}\Big|_{\gamma}\gamma = \frac{d\mathcal{E}}{d\gamma}\Big|_{0}\gamma + \frac{d^2\mathcal{E}}{d\gamma^2}\Big|_{\overline{\gamma}}\gamma^2 = \frac{d^2\mathcal{E}}{d\gamma^2}\Big|_{\overline{\gamma}}\gamma^2 \le -a^2\gamma^2 \quad \gamma \in B_\epsilon(0), \tag{11.4.16}$$ sedia

dove $\overline{\gamma} \in (0, \gamma)$. Riscriviamo le equazioni del moto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{d\mathcal{E}}{d\gamma}\right]. \tag{11.4.17}$$ sed

Supponiamo per assurdo che la quiete nella posizione indeformata sia stabile, cioe'

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \quad \|u_0\| + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(0)\right\| + \left\|\frac{\partial u_0}{\partial X}\right\| < \delta \longrightarrow \|u(t)\| + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right\| + \left\|\frac{\partial u(t)}{\partial X}\right\| < \epsilon.$$

La nostra ipotesi di assurdo comporta che la γ sia sempre vicina a 0 per ogni t, quindi la derivata seconda dell'energia elastica restera' negativa per ogni t. L'equazione dell'energia e' sempre valida

$$\int_{\Omega_*}\left[\frac{1}{2}\rho_0\mathbf{v}^2 + \frac{d^2\mathcal{E}}{d\gamma^2}\Big|_{\overline{\gamma}}\gamma^2\right]dX = \int_{\Omega_*}\left[\frac{1}{2}\rho_0\mathbf{v}_0^2 + \Big(\mathcal{E}(\gamma_0) - \mathcal{E}(\gamma_*)\Big)\right]dX. \tag{11.4.18}$$ don

pero' in questo caso la derivata seconda dell'energia interna e' negativa e quindi non siamo piu' in grado di dedurre un controllo per le norme di $\mathbf{v}$ e di γ. Bisogna cambiare strategia, a tal fine moltiplichiamo la (11.4.17) per u ed integriamo su $(0, d)$, integrando per parti ricaviamo

$$\int_0^d u\,\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)dX = \int_0^d u\,\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{d\mathcal{E}}{d\gamma}\right]dX = -\int_0^d \frac{d^2\mathcal{E}}{d\gamma^2}\Big|_{\overline{\gamma}}\gamma^2 dX. \tag{11.4.19}$$ sedi

In (11.4.19) si e' usata la condizione al bordo nell'integrazione per parti e la definizione di $\gamma = \frac{du}{dx}$. Integrando per parti nel tempo si ha

$$\frac{d}{dt}\int_0^d u\,\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)dX = \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 dX - \int_0^d \frac{d^2\mathcal{E}}{d\gamma^2}\Big|_{\overline{\gamma}}\gamma^2 dX. \tag{11.4.20}$$ seda

Il secondo membro di (11.4.20) e' sempre positivo, quindi integrando (11.4.20) nel tempo deduciamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^d u^2\,dX = \int_0^d u_0\,\mathbf{v}_0\,dX + \int_0^t \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 dX - \int_0^d \frac{d^2\mathcal{E}}{d\gamma^2}\Big|_{\overline{\gamma}}\gamma^2 dX \ge \int_0^d u_0\,\mathbf{v}_0\,dX. \tag{11.4.21}$$ seda1

Scegliendo i dati iniziali in modo da avere $\int_0^d u_0\,\mathbf{v}_0\,dX = b^2$ ed integrando (11.4.21) in t si ricava

$$\int_0^d u^2\,dX \ge \int_0^d u_0^2\,dX + b^2 t,$$

che impone una crescita verso infinito alla norma dello spostamento, per t che va ad infinito. Ma questo contraddice l'ipotesi di stabilita' fatta all'inizio ed il teorema e' completamente provato.

11.5 Approssimazione di Boussinesq

Il problema del sorgere della instabilita' termica (convettiva) in uno strato orizzontale di fluido (pesante) riscaldato dal di sotto, e' risultato estremamente utile per illustrare molte situazioni, sia fisiche che matematiche, della teoria generale della stabilita' idrodinamica. Se allarghiamo il problema fino ad includere effetti di rotazione, di concentrazione o di campo magnetico, si possono esibire anche tendenze contrastanti cui il fluido e' soggetto.

In questo numero consideriamo il problema piu' semplice del problema di Benárd nell'approssimazione di Boussinesq.

Ricordiamo che le equazioni piu' generali che governano il moto di un fluido newtoniano sono :

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} &= 0 \\
\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho\mathbf{b} - \nabla p + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) + \mu\Delta\mathbf{v} \\
\rho\frac{d\epsilon}{dt} &= \rho r + \nabla\cdot(\chi\nabla\theta) - p\nabla\cdot\mathbf{v} + \mathbf{\Phi} \\
\mathcal{F}(p,\rho,\theta) &= 0,
\end{aligned} \tag{11.5.1}$$

dove $\mathcal{F}$ determina lo stato termodinamico del sistema, e $\Phi = 2\mu\mathbf{D} : \mathbf{D}$. Questo e' un sistema di sette equazioni scalari nelle sette incognite ρ, v_1, v_2, v_3, p, θ, ϵ. Tale modello viene anche detto *compressibile*.

Problema di Benard

Consideriamo uno strato orizzontale Ω di spessore d di fluido pesante soggetto ad un gradiente di temperatura β che viene mantenuto riscaldando la parte inferiore dello strato. Sperimentalmente si osserva l' insorgere di moti convettivi per gradienti di temperatura superiori ad un valore ben determinato. Tali moti insorgono in quanto la densita' del fluido nella zona inferiore dello strato, piu' calda, e' minore della densita' nella zona superiore : il fluido meno denso, quindi, si muovera' verso l' alto, mentre quello piu' denso verso il basso. La determinazione del gradiente di temperatura critico e' il ben noto *Problema di Bénard*.

11.5.1 Modello incompressibile

Il modello piu' corretto da utilizzare sarebbe quello del fluido compressibile, pero' le equazioni del moto da esso fornite (le (5.1)) sono relativamente complesse. Vorremmo allora utilizzare un modello piu' semplice e cioe' le equazioni di Navier−Stokes alle quali aggiungeremo l' equazione dell' energia per tenere conto della temperatura del sistema, che non e' costante. La densita' del sistema verra' comunque trattata come una costante.

Per quanto detto, le equazioni del moto sono :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta &= \kappa \Delta \theta \\ \theta(x_1, x_2, x_3, 0) = \theta_0(x_1, x_2, x_3,), \qquad \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, 0) &= \mathbf{v}_0(x_1, x_2, x_3,). \end{aligned} \tag{11.5.2}$$

in cui $\mathbf{g}$ e' l' accelerazione di gravita', $\kappa = \chi/\rho_0 c_V$ essendo χ la conduttivita' e c_V il calore specifico a volume costante. Osserviamo inoltre che nell' equazione dell' energia viene trascurato il termine di dissipazione viscosa, notevolmente piu' piccolo di tutti gli altri termini. Alle (11.5.2) bisogna aggiungere opportune condizioni iniziali ed al contorno. Come condizioni al contorno fisseremo quelle di aderenza sullo strato infiriore e di frontiera libera sullo strato superiore. Precisamente, per $x_3 = d$ richiediamo la condizione di impermeabilita' per la velocita' che si scrive $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3 = 0$ e quella di continuita' per lo sforzo $\mathbf{t}(x_1, x_2, d, t, \mathbf{e}_3) = \mathbf{T}\mathbf{e}_3$ in $x_3 = d$. Supponendo all'esterno aria in quiete, quest'ultima condizione si traduce nelle seguenti due condizioni scalari $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_3 = 0$, $i = 1, 2$, $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_3 = -p_e$, dove p_e denota la pressione uniforme dell'aria. In definitiva otteniamo

$$\begin{aligned} u_3 &= 0, \\ 2D_{13} = \frac{\partial v_i}{\partial x_3} &= 0 \\ -p + 2\nu D_{33} = -p + \nu \frac{\partial v_3}{\partial x_3} &= -p_e. \end{aligned} \tag{11.5.3}$$

A queste si aggiunge la condizione di parete perfetta conduttrice di calore,

$$\theta(x_1, x_2, 0) = T_1 \quad \theta(x_1, x_2, d) = T_2,$$

dove T_1, T_2 sono due temperature costanti in x. Come si puo' facilmente verificare, una soluzione del sistema (5.7) e' la quiete :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{v}_b(\mathbf{x}) &=& \mathbf{0} \\ \theta_b(x_3) &=& \beta x_3 + T_1 \\ p(x_3)_b &=& p_0 + \rho_0 g x_3 \end{array} \right. \tag{11.5.4}$$

in cui $\beta = (T_2 - T_1)/d$.

Si puo' pero' dimostrare che la (5.8) e' l' unica soluzione stazionaria possibile per questo modello. Infatti, sia per assurdo $\mathbf{v} \neq 0$, ρ, θ una nuova soluzione di (5.7), moltiplicando scalarmente per $\mathbf{v}$ la seconda equazione del sistema (5.7) e applicando il teorema della divergenza, otteniamo (il moto e' stazionario) :

$$\int_\Omega \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} dV = 0 \tag{11.5.5}$$

in quanto la velocita' e' solenoidale e si annulla sul bordo. Affinche' sia rispettata la (5.9) e' necessario che la velocita' sia costante in tutto il dominio Ω ; ma dovendo la velocita' essere nulla sul bordo inferiore, otteniamo :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Sostituendo tale informazione in $(5.7)_3$ ricaviamo, nello stesso modo che anche $\theta = \theta_b$.

Limiti del modello incompressibile

Il modello incompressibile non comprende quindi i moti convettivi come soluzione del sistema (5.7). La ragione fisica di cio' puo' essere individuata nel fatto che, con le equazioni (5.7), il campo di velocita' viene di fatto determinato senza usare l' equazione dell' energia, quindi senza tenere conto del campo di temperatura.

L' unica funzione dell' equazione dell' energia e' allora quella di determinare il campo di temperatura una volta che sia gia' noto il campo di velocita'.

Pertanto, e' necessario cambiare modello: non possiamo ritenere la densita' costante.

Approssimazione di Boussinesq

Il modello piu' usato per problemi di questo tipo e' quello di Boussinesq.

A tutt' oggi non esiste una formulazione rigorosa di questa approssimazione che, tuttavia, fornisce in diversi casi significativi risultati in accordo con le osservazioni sperimentali. Noi seguiremo l' impostazione data in Chandrasekhar.

Nel sistema (5.1) assumiamo che il fluido trattato sia quasi incompressibile. Vale a dire, consideriamo l' equazione di stato $\mathcal{F}(p, \rho, \theta)$, esplicitando rispetto alla densita' (scegliendo p e θ come variabili indipendenti, otteniamo:

$$\rho = \rho(p, \theta) \tag{11.5.6}$$

Sviluppandola in serie e fermandosi al primo ordine, trascurando i termini di ordine superiore si ottiene :

$$\rho = \rho_0 + \left.\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right|_{\rho=\rho_0} (\theta - \theta_0) + \left.\frac{\partial \rho}{\partial p}\right|_{\rho=\rho_0} (p - p_0), \tag{11.5.7}$$

in cui $\rho_0 = \rho(p_0, \theta_0)$ e' lo stato di riferimento.

Un fluido e' incompressibile se : $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_\theta = 0$. L' equazione (5.3) allora diventa :

$$\rho = \rho(\theta) = \rho_0 \left[1 + \frac{1}{\rho_0} \left.\frac{d\rho}{d\theta}\right|_{\rho=\rho_0} (\theta - \theta_0) \right] \tag{11.5.8}$$

Introducendo il coefficiente di espansione termica α :

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\theta} \tag{11.5.9}$$

la (5.4) diventa :

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \alpha_0(\theta - \theta_0)\right] \tag{11.5.10}$$

Quando e' costante la temperatura del sistema allora anche la densita' sara' una costante dipendente dal fluido in esame. Conseguentemente le equazioni (5.1) si riducono alle usuali equazioni di Navier−Stokes. Per i fluidi di piu' largo impiego pratico i coefficienti di espansione termica α sono dell' ordine di $10^{-3} \div 10^{-4}$; Di conseguenza per variazioni di temperatura all' interno del sistema attorno a $10K$ le corrispondenti variazioni di densita' non superano l' 1% ; variazioni analoghe si verificano nei termini delle equazioni del moto che contengono ρ. Tali variazioni potranno dunque essere trascurate. C'e' pero' una importante eccezione rappresentata dal termine relativo alla forza peso, infatti, esso e' molto piu' grande di tutti gli altri termini. In questo termine le variazioni apportate dalla temperatura alla densita' non possono essere trascurate. Tratteremo ρ come una costante dipendente dal fluido in tutti i termini delle equazioni del moto, fatta eccezione per il termine con la forza di volume. In cio' consiste la *Approssimazione di Boussinesq*.

Equazioni del moto nell' approssimazione di Boussinesq

Sulla base delle precedenti osservazioni, in sostituzione dell' equazione di continuita' possiamo usare la condizione di solenoidalita':

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Sostituendola nella equazione costitutiva, otteniamo :

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$$

quindi l' equazione del bilancio della quantita' di moto e' :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = [1 - \alpha_0(\theta - \theta_0)]\mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}$$

in cui il termine $[1 - \alpha_0(\theta - \theta_0)]\mathbf{g}$, dipendente dalla temperatura, non puo' essere trascurato.

Nell'ipotesi $\epsilon = c_V \theta$, fluidi politropici, e ritenendo costanti sia il calore specifico a volume costante c_V che la diffusivita' termica χ, l' equazione dell' energia diventa :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \kappa \Delta \theta + r$$

con $\kappa = \chi/\rho_0 c_V$ e $q = r/c_V$.

Solitamente il termine di dissipazione viscosa e' notevolmente piu' piccolo degli altri e puo' quindi essere trascurato.

Ricapitolando, le equazioni del moto del fluido nell' approssimazione di Boussinesq sono :

$$\begin{gathered} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = [1 - \alpha_0(\theta - \theta_0)]\mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \kappa \Delta \theta + r \end{gathered} \tag{11.5.11}$$

boussin

Capitolo 12.

Domini con bordo non compatto

In questo capitolo studiamo alcuni problemi relativi la buona posizione per le equazioni di Navier-Stokes quando il dominio e' a frontiera non compatta come tubi o condotti idraulici. Tale problema presenta molte difficolta' e molti problemi di base irrisolti che noi cercheremo di sottolineare nell'esposizione.

12.1 Buona posizione per moti stazionari in canali.

Consideriamo il dominio Ω **con frontiera non compatta**.

Questo caso comprende i moti che avvengono in tubi di sezione costante, o in canali divergenti o tra piani indefiniti. Per la complessita' del problema generale, qui rinunciamo a trattare i canali divergenti, limitandoci a sottolineare le peculiari difficolta' del problema. Forniremo una trattazione sistematica solo nel caso di tubi a sezione costante. In questa geometria, l'infinito e' assunto secondo una prefissata direzione, x_n, $n = 2, 3$, l'asse del tubo. Iniziamo ad analizzare il significato fisico del moto di Poiseuille $\mathbf{v}_b$, p_b, che rappresenta una soluzione esatta del problema omogeneo dei dati al bordo per le equazioni stazionarie di Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} &= -\nabla p + \mathbf{b}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ v(x_1, \dots, x_n)|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \tag{12.1.1}$$ n-s

Consideriamo una striscia a sezione costante Σ di spessore $2d$, centriamo il sistema di coordinate al centro di un intervallo $\Sigma = (-d, d)$ della striscia con l' asse x_1 su Σ. Per il moto $\mathbf{v}_b = V(x_1)\mathbf{e}_2$, dobbiamo risolvere il seguente problema al bordo

$$-\nu \frac{d^2 V(x_1)}{d^2 x_1^2} e_2 = -\nabla \pi, \qquad V(\pm 1) = 0. \tag{12.1.2}$$

Tale problema, per forze nulle e per gradiente di potenziale costante uguale ad h, ammette l'unica soluzione

$$V(x_1) = \frac{h}{\nu}(x_1^2 - 1).$$

Notiamo ancora, che il flusso attraverso Σ e' non nullo e resta univocamente determinato dalla relazione

$$\int_{-d}^{d} V(x_1)dx_1 = \frac{h}{\nu}(\frac{2d^3}{3} - 2d) = \Phi.$$

Il valore del flusso e' chiaramente costante rispetto ad x_2 come impone la condizione di solenoidalita'.

Il profilo lineare di Poiseuille, si puo' osservare sperimentalmente in due modi diversi:

o inclinando il tubo rispetto ad un piano orizzontale;

o versando altro liquido nel tubo.

Entrambe le operazioni sono possibili, infatti nel primo caso la forza e' di natura potenziale ed e' nascosta nel gradiente di pressione, nel secondo, poiche' il volume occupato dal liquido e' non limitato si puo' aggiungere un flusso arbitrario nel tubo come se provenisse dall'infinito. In un caso si assegnera' h, nell'altro Φ, ma per l'osservabilita' bisogna dimostrare che il moto di Poiseuille e' l'unico corrispondente ad h o a ϕ.

Si fissi un dato flusso Φ. In una regione (di forma arbitraria al finito) con uscite cilindriche all'infinito cf. figura, il problema di determinare un moto che tenda

alla soluzione di Poiseuille corrispondente a Ψ al tendere di x_2 all'infinito, e' noto come **problema di Leray**. Questo problema e' risolubile solo per flussi piccoli, esattamente come per il problema dell'esistenza di soluzioni stazionarie in domini limitati a bordo non semplicemente connesso.

12.1.1 Estensione di una funzione da $\partial\Omega$ ad Ω.

Definita una funzione u su una frontiera regolare $\partial\Omega$ in $L^2(\partial\Omega)$ e' sempre possibile estendere u ad una funzione $\tilde{u} \in \Omega$ in $W_2^1(\Omega)$ che verifichi la seguente diseguaglianza (inversa della diseguaglianza di traccia)

$$\|\tilde{u}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c\|u\|_{L^2(\partial\Omega)},$$

dove c dipende dalla regolarita' della frontiera.

Consideriamo un valore al bordo per la velocita'

$$\mathbf{v}_* : \partial\Omega \to R^n,$$

questo dato deve soddisfare la necessaria condizione di compatibilita'

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_* \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0.$$

Un metodo classico per risolvere il problema dell'esistenza di moti stazionari dell'equazione di Navier-Stokes consiste in una procedura iterativa, tipo costruzione di una successione di funzioni $\mathbf{v}_n$, e richiede la conoscenza di una stima uniforme in n per la successione. Per Navier-Stokes stazionario con $\mathbf{b} \neq 0$, in un dominio limitato, la stima si ottiene subito se i dati al bordo sono omogenei, infatti, si moltiplica la (12.1.1) per $\mathbf{v}$ e si integra su Ω, ricavando (cf. capitolo IV)

$$\nu \int_\Omega |\nabla \mathbf{v}|^2 dx = \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dx, \tag{12.1.3}$$ n-s1

da cui applicando la diseguaglianza di Poincare' si ricava $\|\nabla v\|_2 \leq c\|b\|_2$. Se i dati sono non omogenei si scrive

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{a},$$

dove $\mathbf{u}$ e' una funzione solenoidale che coincide con $\mathbf{v}_*$ al bordo, detta **estensione di $\mathbf{v}_*$** a tutto Ω. Sostituendo questa espressione di $\mathbf{v}$ in (12.1.3), moltiplicando per $\mathbf{u}$ e ripetendo le stesse operazioni di prima si trova

$$\nu \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 dx = -\int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} + \nabla \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) dx, \tag{12.1.4}$$

dove i valori al bordo si annullano perche' $\mathbf{u}$ ha valore zero al bordo. I termini lineari in $\mathbf{u}$ si trattano come il termine di forza, assegnando sufficiente regolarita' ad $\mathbf{a}$ e si giunge alla diseguaglianza

$$\nu \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \leq -\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} dx + C\Big(\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 dx\Big)^{1/2}, \tag{12.1.5}$$

con C funzione di Ω, e $\mathbf{v}_*$. In tal modo, per ottenere una stima a priori bisogna provare la seguente diseguaglianza

$$-\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \leq \alpha \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 dx, \tag{12.1.6}$$ take

con α arbitrario, poiche' vogliamo sceglierlo minore di ν che e' un dato del problema.

Nel caso di domini limitati a frontiera non semplicemente connessa Takeshita ha provato con un controesempio che non e' possibile soddisfare a questa richiesta, come visto al capitolo IV.

Anche per i tubi non si riesce a costruire un'estensione opportuna.

12.1.2 Non sommabilita' della soluzione

Dalla condizione di flusso costante nelle sezioni di taglio, deduciamo

$$\Big|\int_\Sigma \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma\Big| \leq |\Sigma|^{1/2}\Big(\int_\Sigma |v|^2 dx\Big)^{1/2}, \tag{12.1.7}$$

da cui si vede che la norma in $L^2(\Omega_t)$, $\Omega_t = \Omega \cap B_t(O)$ di $\mathbf{v}$ e' minorata da

$$t\Big|\int_\Sigma \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}d\sigma\Big| \le |\Sigma|^{1/2}t^{1/2}\Big(\int_{-t}^{t}\int_\Sigma |v|^2 dx_* dx_n\Big)^{1/2}, \tag{12.1.8}$$ sezione

e cresce per $t\to\infty$ come $t^{1/2}$. Se la sezione del canale cresce all'infinito, allora la norma in t^2 potrebbe essere finita. Mostriamo questo nel caso in cui la sezione del canale sia una circonferenza di raggio $R = R(x_n)$. Da (12.1.8) troviamo

$$t\Big|\int_\Sigma \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}d\sigma\Big| \le \Big(\pi\int_{-t}^{t} R^2(x_n)dx_n\Big)^{1/2}\Big(\int_{-t}^{t}\int_\Sigma |v|^2 dx_* dx_n\Big)^{1/2}, \tag{12.1.9}$$ sezio

Se assegniamo per R una crescita polinomiale in t del tipo $R = t^\alpha$ si vede che la norma di v non e' in t^2 per $\alpha < 1/2$. Viceversa se $\alpha > 1/2$ si puo' porre il problema dell'esistenza di soluzioni di (12.1.1) in L^2 e quindi e' lecito chiedersi se la velocita' tende a zero all'infinito puntualmente e con quale velocita', **problema del controllo spaziale della soluzione**.

12.1.3 Problema di Leray

Al di la' della sua formulazione datata agli inzi del 1900, il problema della buona posizione nei canali ha ricevuto risposte concrete solo negli ultimi 25 anni e quindi e' ora nel suo piu' intenso sviluppo.

Consideriamo il dominio Ω costituito da due uscite cilindriche a sezioni circolari Ω_i $i = 1,2$, e da una parte limitata Ω_0,

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_0.$$

$$\Omega_i = \{x \in \Omega : \ x_* \in \Sigma_i; \quad x_n < 0\ i = 1, \ \ x_n > 0, \ i = 2\}.$$

Problema di Leray

Dato un flusso $\Phi \in R$, determinare una soluzione del sistema (12.1.1)*tale che*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}|_{\partial\Omega} &= 0, \\ \int_\Sigma \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} &= \Phi, \\ \mathbf{v}\to\mathbf{v}_i, \qquad x\in\Omega_i, \quad |x_n| &\to \infty. \end{aligned} \tag{12.1.10}$$ dati

Ricordando che $D(\Omega)$ definisce l'insieme delle funzioni solenoidali in $C_0^\infty(\Omega)$, introduciamo la seguente:

Definizione 1.1 *Una funzione vettoriale* $\mathbf{v} : \Omega \to R^3$ *si dice* **soluzione debole** *del problema di Leray se e solo se*

1 $\mathbf{v} \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$;

2 $\mathbf{v}$ *soddisfa l'equazione*

$$(\nabla\mathbf{v}, \nabla\varphi) = -(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}, \varphi), \forall\varphi \in D(\Omega). \tag{12.1.11}$$ weak

3 $\mathbf{v}$ *si annulla sul bordo nel senso delle tracce;*

4 *vale*

$$\int_\Sigma \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = \Phi, \quad \textit{nel senso delle tracce};$$

5 $(\mathbf{v}-\mathbf{v}_i) \in W_2^1(\Omega_i)$, $i = 1, 2$.

Osserviamo che per una funzione f sommabile nella semiretta si ha

$$\int_0^\infty |f(t)|dt = \sum_{k=0}^\infty \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t)|dt,$$

$t_0 = 0$, $t_{k+1} \to \infty$ per $k \to \infty$. Dai criteri di sommabilita' delle serie a termini positivi si ricava

$$\lim_{k\to\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t)|dt = 0.$$

Per il teorema della media integrale ne segue l'esistenza di una successione di valori τ_k lungo i quali f si annulla. Se la funzione ha anche la derivata rispetto a t sommabile si ha

$$f(t) = f(\tau_k) + \int_{\tau_k}^t |\frac{\partial}{\partial s} f(s)|ds, \tag{12.1.12}$$

che implica il tendere a zero di f per $t \to \infty$.

Tornando alla definizione di soluzione debole si deduce che la richiesta $\mathbf{v}-\mathbf{v}_i \in W_0^{1,2}(\Omega)$ comporta come caso particolare anche che la soluzione debole tenda al moto di Poiseuille per $t \to \infty$. Nel caso generale, di forze a supporto compatto [1], riterremo nuovamente che l'infinito non venga influenzato da variazioni di moto causate in una regione limitata del tubo. Resta, pertanto, spontaneamente fissata la condizione limite

$$\lim_{z\to\pm\infty} \mathbf{v} = \mathbf{v}_0.$$

Per la pressione vale il seguente lemma

Lemma 1.1 *Sia* $\mathbf{v}$ *una soluzione debole del problema di Leray, allora esiste una funzione* $p \in L^2_{loc}(\Omega)$ *tale che*

$$(\nabla\mathbf{v}, \nabla\psi) = -(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}, \psi) + (p, \nabla\cdot\psi), \qquad \forall\psi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{12.1.13}$$ press

Vale inoltre il seguente **teorema di regolarita' locale**

Teorema 1.1 *Ogni soluzione* $\mathbf{v}$, p *debole di* (n-s 12.1.1) *verifica la seguente diseguaglianza*

$$\|\mathbf{v}\|_{m+2,2,\omega(s)} + \|p\|_{m+1,2,\omega(s)} \le c(\|\mathbf{b}\|_{m,2,\omega(s,\delta)} + \|\mathbf{v}\|_{1,2,\omega(s,\delta)}), \tag{12.1.14}$$ regol

dove

$$\omega(s) = \{x \in \Omega : s < x_n < s+1\},$$
$$\omega(s,\delta) = \{x \in \Omega : s-\delta < x_n < s+\delta+1\}.$$

Poniamo

$$\Omega_R = \Omega \cap B_R; \qquad \Omega^R = \Omega/\Omega_R.$$

Cerchiamo ora una opportuna decomposizione del vettore velocita' per provare proprieta' di unicita' e decadimento spaziale delle soluzioni deboli.

[1] Una forza a supporto compatto nel tubo puo' facilmente essere rappresentata da una deformazione (ansa) del tubo o da una strettoia nel tubo nel tratto Ω_0 di lunghezza finita

12.1.4 Il portatore di flusso o flux carrier

Dato un flusso Φ si vuole costruire un campo vettoriale $\mathbf{a}$ avente le seguenti proprieta':

$\mathbf{a} \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$;

$\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$;

$\mathbf{a}|_{\partial\Omega} = 0$;

$\mathbf{a} = \mathbf{v}_i$ in Ω_i^R.

Sia L un numero sufficientemente grande tale che in Ω^L vi siano solo le uscite cilindriche nelle quali e' valida la soluzione di Poiseuille. Siano $\chi_i(\Omega^L)$ due funzioni scalari regolari uguali ad 1 nelle semirette $x_n < -L$, $x_n < L$ ed uguali a zero per $x_n > -L/2$, $x_n < L/2$, risp. $i = 1, 2$. Il campo $\mathbf{w} = \chi_1\mathbf{v}_1 + \chi_2\mathbf{v}_2$ e' regolare, coincide con $\mathbf{v}_i$ in Ω_i^L ma non e' a divergenza nulla in tutto Ω. Posto $A_L = \Omega - [\Omega_1^L \cup \Omega_2^L]$, risolviamo il problema ausiliare:

Costruire un campo vettoriale $\mathbf{z} \in W_0^{2,2}(A_L)$ *soluzione del seguente problema*

$$\nabla \cdot \mathbf{z} = -\nabla \cdot \mathbf{V},$$

$$\|\mathbf{z}\|_{2,2,A_L} \leq c\|\nabla \cdot \mathbf{V}\|_{1,2,A_L}$$

La costruzione del flux carrier e' immediata conseguenza delle precedenti operazioni, infatti

$$\mathbf{a} = \mathbf{V} + \mathbf{w},$$

verifica tutte le proprieta' richieste dal flux carrier.

12.1.5 Unicita' del problema di Leray

Una soluzione debole del problema di Leray si puo' sempre ricercare nella seguente forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{u},$$

dove $\mathbf{u}$ verifica il sistema

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} = -\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{a} - \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{b} + \nu\Delta\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{a}, \\ \nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \\ v(x_1,x_2,x_3)|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \qquad (12.1.15) \quad \boxed{\texttt{car1}}$$

Teorema 1.2 *Sia*

$$(c_2 \sum_{i=1}^{2} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_i\|_{W_2^1(\Omega_i)} + c_1|\Phi|) < \nu,$$

dove c_i sono definiti in seguito, allora la soluzione generalizzata $\mathbf{v}$ *del problema di Leray e' l'unica corrispondente al flusso Φ caratterizzante il problema.*

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$, $\tilde{p} = p + \pi$ sia un'altra soluzione di (car1 12.1.15) corrispondente allo stesso flusso Φ, allora la differenza $\mathbf{u}$, π, con $\mathbf{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ soddisfa il sistema

$$-\nu\Delta\mathbf{u} = -\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{a} - \mathbf{u}\cdot\nabla(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{a}) - \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{u} - \nabla\pi. \qquad (12.1.16) \quad \boxed{\texttt{car}}$$

Moltilicando per $\mathbf{u}$, integrando si Ω_z si ottiene

$$\nu \int_{\Omega_z} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx = -\int_{\Omega_z} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} dx - \int_{\Omega_z} \mathbf{u} \cdot \nabla(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} dx \tag{12.1.17}$$
$$- \int_{\Sigma(\pm z)} \Big[\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \frac{u^2}{2} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \pi + \nu \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \Big] d\sigma.$$

carr

Nel limite $z \to \pm\infty$ i termini sulle sezioni di taglio (cross sections) in (carr 12.1.17) vanno a zero, e si ricava

$$\nu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx = -\int_{\Omega_z} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} dx - \int_{\Omega_z} \mathbf{u} \cdot \nabla(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} dx. \tag{12.1.18}$$

carr1

In (carr1 12.1.18) abbiamo distinto tra $\mathbf{a}$ che non e' sommabile ma e' noto, e $\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{a}$ che e' un vettore arbitrario ma sommabile. Si ricava pertanto

$$-\int_{\Omega_z} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} dx \le \sup_{\Omega} |\nabla \mathbf{a}| \int_{\Omega_z} \mathbf{u}^2 dx \le c_1 \Phi \int_{\Omega_z} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx,$$

dove si e' applicata la diseguaglianza di Poincare', e

$$-\int_{\Omega_z} \mathbf{u} \cdot \nabla(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} dx \le \Big(\int_{\Omega_z} \mathbf{u}^4 dx \Big)^{1/2} \Big(\int_{\Omega_z} |\nabla(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{a})|^2 \Big)^{1/2} \le c_2 \big(\sum_{i=1}^{2} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_i\|_{W_2^1(\Omega_i)} \big) \int_{\Omega_z} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx,$$

dove si sono applicate le diseguaglianze di Ladyzhenskaja e di Poincare'.

Sostituendo queste stime in (carr 12.1.17), e passando al limite $z \to \infty$ si deduce

$$(\nu - c_1 \Phi - c_2 \sum_{i=1}^{2} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_i\|_{W_2^1(\Omega_i)}) \int_{\Omega_z} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \le 0,$$

che nelle ipotesi del teorema 1.2 comporta un assurdo. Quindi deve essere $\nabla \mathbf{u} = 0$ che per le condizioni al contorno implica $\mathbf{u} = 0$, come volevasi dimostrare.

12.2 Condizioni artificiali al contorno.

La maggior parte dei metodi numerici in domini non limitati Ω richiede un taglio del dominio ideale ad un dominio limitato $\Omega_R = \Omega \cap B_R$. In questo modo si trova un pezzo di frontiera $\partial B_R \cap \Omega$ artificiale sulla quale bisogna imporre opportune condizioni per il campo di velocita'. In questa sezione analizzeremo detto problema nella formulazione variazionale per $\rho = cost$, $\nu = \mu/\rho$.

12.2.1 Formulazioni classiche e variazionali nel tubo non limitato

Formulazione classica Poniamo $\Omega_- = \{x \in \Omega : \ \ x_3 < -L\}$, $\Omega_+ = \{x \in \Omega : x_3 > L\}$, ed indichiamo con $\mathbf{v}_\pm$ i rispettivi moti di Poiseuille corrispondenti ad un flusso $\Phi(t)$ o ad un gradiente di pressione $P(t) = p_+ - p_-$. Il moto di un fluido incomprimibile in un canale con uscite cilindriche e' retto classicamente dalle equazioni di Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{v} \to \mathbf{v}_{\pm}, \quad z \to \pm\infty. \end{aligned} \tag{12.2.1}$$

class

Alle (class 12.2.1) bisogna assegnare una **condizione laterale o ausiliare** affinche' il problema sia ben posto, queste condizioni sono determinate dal flusso o dal gradiente di pressione a seconda del problema in esame.

Salto di pressione assegnato (Pressure drop)

$$\lim_{z\to-\infty} p(x,t) - \lim_{z\to\infty} p(x,t) = P(t), \tag{12.2.2}$$

press1

dove $P(t)$ e' assegnato.

Flusso assegnato

$$\int_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \Phi(t), \tag{12.2.3}$$

flux

dove $\Phi(t)$ e' assegnato.

Formulazione variazionale Si puo' considerare una formulazione dello stesso problema in termini integrali detta anche **formulazione variazionale**. Come abbiamo visto nel capitolo II, sono possibili molte formulazioni variazionali dello stesso problema, qui cercheremo la ottimale per il calcolo numerico.

Con $D(\Omega)$ si indica il sottospazio di $C_0^\infty(\Omega)$ delle funzioni solenoidali.

Una formulazione variazionale generalmente adottata e' la seguente: *Trovare un campo vettoriale* $\mathbf{v}$ *che verifichi le condizioni iniziali* $\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x)$ *tale che, per tutti i* $t > 0$*:*

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in J_1^*(\Omega) = \{\varphi \in W_2^1(\Omega) : \quad \varphi|_{\partial\Omega} = 0, \nabla \cdot \varphi = 0\} \\ \nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \varphi) + (\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in J_1^*(\Omega). \end{aligned} \tag{12.2.4}$$

form1

Una formulazione variazionale lievemente differente ma anch'essa molto usata e' la seguente: *Trovare un campo vettoriale* $\mathbf{v}$ *che verifichi le condizioni iniziali* $\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x)$ *tale che, per tutti i* $t > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in J_1(\Omega) = \text{completamento di} D(\Omega) \ in \ W_2^1(\Omega) \\ \nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \varphi) + (\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in J_1(\Omega). \end{aligned} \tag{12.2.5}$$

form2

Le due formulazioni non sono equivalenti, infatti se integriamo $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ in Ω_+^L, per $\varphi \in D(\Omega)$ ricaviamo

$$\int_{\Sigma(L)} \varphi \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Omega^L} \nabla \cdot \varphi dx = 0.$$

Pertanto, la seconda formulazione richiede che sia necessariamente $\Phi = 0$, il che elimina i moti di Poiseuille!

Formulazioni variazionali corrette di (form1 12.2.4), (form2 12.2.5) che includano il salto di pressione $P(t)$(o il flusso Φ) sono le seguenti.

1) *Trovare un campo vettoriale* $\mathbf{v}$ *che verifichi le condizioni iniziali* $\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x)$ *tale che, per tutti i* $t > 0$:

$$\begin{gathered}\mathbf{v} \in J_1^*(\Omega),\\ \nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \varphi) + (\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}, \varphi) = -P(t) \int_\Sigma \varphi \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad \forall \varphi \in J_1^*(\Omega).\end{gathered} \tag{12.2.6}$$

nform1

2) *Trovare un campo vettoriale* $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{u}$ *che verifichi le condizioni iniziali* $\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x)$ *tale che, per tutti i* $t > 0$: *Trovare un campo vettoriale* $\mathbf{v}$ *che verifichi le condizioni iniziali* $\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x)$ *tale che, per tutti i* $t > 0$:

$$\begin{gathered}\mathbf{u} \in J_1(\Omega)\\ \nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \varphi) + (\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in J_1(\Omega).\end{gathered} \tag{12.2.7}$$

nform2

Per comprendere meglio come (12.2.7) tenga conto del flusso, basta sostituire in $(12.2.7)_2$ la espressione di $\mathbf{v}$ e si trova

$$\nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi) + (\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}, \varphi) = -\nu(\nabla \mathbf{a}, \nabla \varphi) - (\mathbf{a}_t + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{a}, \varphi), \ \forall \varphi \in J_1(\Omega). \tag{12.2.8}$$

nflux

Nel seguito cambieremo punto di vista per scopi pratici ed useremo queste formulazioni come guida nelle formulazioni dei problemi.

12.2.2 Formulazioni variazionali in una porzione limitata di tubo

Partiamo dal problema di calcolare il moto di un fluido in un tubo cilindrico che contiene un ostacolo al suo interno

Per il dominio non limitato, se il flusso e' piccolo sappiamo che il moto tende al moto di Poiseuille all'infinito. Consideriamo quindi una parte finita del tubo Ω_R, se R e' sufficientemente grande possiamo approssimare il moto $\mathbf{v}$ alle sezioni di taglio $\Sigma(\pm R)$con il moto esatto di Poiseuille $\mathbf{v}_P$. In questo modo si riduce il problema del dominio non limitato a quello in dominio limitato e si puo' operare numericamente. Siamo in grado quindi di dare una corretta formulazione variazionale nel dominio Ω_R.

Trovare un campo vettoriale $\mathbf{v} = \mathbf{v}_P + \mathbf{u}$ *che verifichi le condizioni iniziali* $\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x)$ *tale che, per tutti i* $t > 0$:

$$\begin{gathered}\mathbf{u} \in J_1^*(\Omega) = \{\varphi \in W_2^1(\Omega_R) : \quad \varphi|_{\partial\Omega_R} = 0, \nabla \cdot \varphi = 0\}\\ \nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \varphi) + (\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in J_1^*(\Omega).\end{gathered} \tag{12.2.9}$$

nform22

In questo modo si studia un problema di Dirichlet con dato omogeneo per $\mathbf{u}$.

In modo analogo si puo' dare una formulazione variazionale nello spazio piu' ampio dei vettori non solenoidali.

Trovare un campo vettoriale $\mathbf{v} = \mathbf{v}_P + \mathbf{u}$ *che verifichi le condizioni iniziali* $\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x)$ *tale che, per tutti i* $t > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \in V_1^*(\Omega) = \{\varphi \in W_2^1(\Omega_R) : \quad \varphi|_{\partial\Omega_R} = 0\} \\ \nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla\varphi) + (\mathbf{v}_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}, \varphi) - (p, \nabla\cdot\varphi = 0, \quad \forall\varphi \in V_1^*(\Omega), \\ (\psi, \nabla\cdot\mathbf{u}) = 0. \end{aligned} \tag{12.2.10}$$ nform2'

I risultati computazionali in questo caso sono altamente soddisfacenti poiche' non dipendono dalla distanza R, superiore ad un numero prefissato, in cui il taglio viene effettuato. Se pero' si considerano problemi in tubi biforcanti

I risultati cambiano notevolmente al variare delle distanze in cui si effettuano i tagli e appare naturale cambiare le condizioni sulle sezioni di taglio $\Sigma_\pm$ che fissano tutto il campo di velocita'. Bisogna cercare delle condizioni che forniscano una soluzione e che lascino quanto piu' indeterminato possibile il campo di velocita' sulle sezioni di taglio, infatti ricordiamo che ogni condizione sulle $\Sigma_\pm$ e' del tutto arbitraria e non controllabile!

Poniamo

$$\Gamma = \partial\Omega \cap \partial\Omega_R.$$

Salto di pressione assegnato (Pressure drop)

Formulazione classica Per ogni $P(t)$ assegnato, trovare $\mathbf{v}$, p tali che

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v} + \nabla p = 0, \\ \nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \\ \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}|_\Gamma = 0, \quad \frac{1}{|\Sigma_i|}\int_{\Sigma_i} p d\sigma = P_i(t). \end{aligned} \tag{12.2.11}$$ class1

In questo modo si assegna un flusso su ciascuna sezione.

Formulazione variazionale, nello spazio delle funzioni solenoidali

Trovare un campo vettoriale $\mathbf{v}$ *che verifichi le condizioni iniziali* $\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x)$ *tale che, per tutti i* $t > 0$*:*

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in J_1^*(\Omega_R) = \{\varphi \in W_2^1(\Omega_R) : \quad \varphi|_\Gamma = 0, \nabla\cdot\varphi = 0\} \\ \nu(\nabla\mathbf{v}, \nabla\varphi) + (\mathbf{v}_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}, \varphi) = -\sum_{i=1}^m P_i(t)\int_{\Sigma_i} \varphi\cdot\mathbf{n} d\sigma, \quad \forall\varphi \in J_1^*(\Omega). \end{aligned} \tag{12.2.12}$$ form11

Questa formulazione variazionale e' ben posta.

Formulazione variazionale (funzioni non solenoidali)

Trovare un campo vettoriale $\mathbf{v}$ *che verifichi le condizioni iniziali* $\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x)$ *tale che, per tutti i* $t > 0$*:*

$$\mathbf{v} \in V_1^*(\Omega_R) = \{\varphi \in W_2^1(\Omega_R): \quad \varphi|_\Gamma = 0\}$$
$$\nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla\varphi) + (\mathbf{v}_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}, \varphi) = -\sum_{i=1}^{m} P_i(t)\int_{\Sigma_i} \varphi\cdot\mathbf{n}d\sigma, \quad \forall\varphi \in J_1^*(\Omega), \tag{12.2.13}$$
$$(\psi, \nabla \mathbf{v}) = 0.$$

formnsol

Questa formulazione variazionale e' ben posta.

Flusso assegnato

Formulazione classica

Per ogni $\Phi_i(t)$ soddisfacenti $\sum_{i=1}^{m} \Phi_i(t) = 0$, trovare $\mathbf{v}$, p tali che

$$\begin{gathered} \mathbf{v}_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v} + \nabla p = 0, \\ \nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \\ \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}|_\Gamma = 0, \quad \int_{\Sigma_i}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}d\sigma = \Phi_i(t). \end{gathered} \tag{12.2.14}$$

class2

In questo modo si assegna un flusso su ciascuna sezione.

Formulazione variazionale per campi solenoidali

Vogliamo includere queste condizioni al contorno nella formulazione variazionale: *Trovare un campo vettoriale* $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{u}$ *che verifichi le condizioni iniziali* $\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x)$ *tale che, per tutti i* $t > 0$:

$$\begin{gathered} \mathbf{u} \in J_1(\Omega) = \{\varphi \in W_2^1(\Omega_R): \ \varphi|\Gamma = 0, \ \int_{\Sigma_i}\varphi\cdot\mathbf{n}d\sigma = 0, \ \forall i \\ \nu(\nabla\mathbf{v}, \nabla\varphi) + (\mathbf{v}_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}, \varphi) = 0, \quad \forall\varphi \in J_1(\Omega_R). \end{gathered} \tag{12.2.15}$$

form23

Formulazione variazionale per campi non solenoidali *Trovare un campo vettoriale* $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{u}$ *che verifichi le condizioni iniziali* $\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x)$ *tale che, per tutti i* $t > 0$:

$$\begin{gathered} \mathbf{u} \in V_1(\Omega) = \{\varphi \in W_2^1(\Omega_R): \ \varphi|\Gamma = 0, \ \int_{\Sigma_i}\varphi\cdot\mathbf{n}d\sigma = 0, \ \forall i \quad p \in L^2(\Omega_R), \\ \nu(\nabla\mathbf{v}, \nabla\varphi) + (\mathbf{v}_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}, \varphi) - (p, \nabla\cdot\varphi) = 0, \quad \forall\varphi \in V_1(\Omega_R). \end{gathered} \tag{12.2.16}$$

form22

Vi sono *formulazioni variazionali alternative* di (form11 12.2.12), (form22 12.2.16) che includono il salto di pressione $P(t)$(o il flusso Φ formulazioni alternative, ad esempio, sono le seguenti

Trovare un campo vettoriale $\mathbf{v}$ *che verifichi le condizioni iniziali* $\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x)$ *tale che, per tutti i* $t > 0$:

$$\begin{gathered} \mathbf{v} \in J_1^*(\Omega), \\ \nu(\nabla\mathbf{v}, \nabla\varphi) + (\mathbf{v}_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}, \varphi) = -P(t)\int_{\Sigma}\varphi\cdot\mathbf{n}d\sigma, \quad \forall\varphi \in J_1^*(\Omega). \end{gathered} \tag{12.2.17}$$

nform11

Trovare un campo vettoriale $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{u}$ *che verifichi le condizioni iniziali* $\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x)$ *tale che, per tutti i* $t > 0$: *Trovare un campo vettoriale* $\mathbf{v}$ *che verifichi le condizioni iniziali* $\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x)$ *tale che, per tutti i* $t > 0$:

$$\mathbf{u} \in J_1(\Omega) \quad \nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \varphi) + (\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in J_1(\Omega). \tag{12.2.18}$$

1nform21

12.2.3 Formulazione classica in una porzione limitata di tubo

Vogliamo mostrare ora come le precedenti formulazioni variazionali contengano anche adeguate condizioni al bordo. A tal fine proviamo che la formulazione classica comporta alcune condizioni al contorno sul campo di velocita', e ne commenteremo il loro significato fisico. Affinche' tali condizioni siano in piu' adeguate e' necessario provare un teorema di buona posizione. In effetti quest'ultimo problema resta ancora irrisolto, ma le simulazioni numeriche forniscono risultati molto soddisfacenti, infatti i risultati non dipendono dal taglio che si effettua nelle varie uscite dei tubi.

Per il problema di pressione assegnata, consideriamo la formulazione variazionale in Ω_R con funzioni non solenoidali. Per funzioni regolari e' possibile integrare per parti in (12.2.13) e si ricava, $\forall \varphi \in J_1^*(\Omega)$,

$$-\nu(\Delta \mathbf{v}, \varphi) + (\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}, \varphi) + (\nabla p, \varphi) + \int_{\partial \Omega_R} [\nu \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{n} p] \cdot \varphi d\sigma = -\sum_{i=1}^{m} P_i(t) \int_{\Sigma_i} \varphi \cdot \mathbf{n} d\sigma. \tag{12.2.19}$$

bound

Usando funzioni test in $C_0^\infty(\Omega_R)$ gli integrali sul bordo si annullano e si trova

$$-\nu(\Delta \mathbf{v}, \varphi) + (\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}, \varphi) + (\nabla p, \varphi) = 0,$$

che dovendo valere per ogni $\varphi \in C_0^\infty$ comporta la usuale equazione di Navier-Stokes

$$-\nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p.$$

Il campo cosi' ottenuto e' inoltre solenoidale. Sostituendo quest'informazione in (12.2.19) si trova, per funzioni nulle su Γ non nulle sulle sezioni Σ_i,

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{\Sigma_i} [\nu \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} - p \mathbf{n} - P_i(t) \mathbf{n}] \cdot \varphi d\sigma = 0, \quad \forall \varphi \in J_1^*(\Omega). \tag{12.2.20}$$

front

La (12.2.20) deve valere per ogni funzione $\varphi = \varphi_\tau \mathbf{t} + \varphi_n \mathbf{n}$, dove $\mathbf{t}$ denota un vettore tangente alle sezioni Σ_i. Dall'arbitrarieta' di φ_τ e φ_n si deducono le seguenti condizioni sui punti frontiera di Σ_i

$$\begin{gathered} \nu \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \tau = 0, \\ \nu \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - p = -P_i. \end{gathered} \tag{12.2.21}$$

frontpunt

Le (12.2.21) rappresentano delle condizioni sulle frontiere artificiali Σ_i che devono essere necessariamente soddisfatte da $\mathbf{v}$ e da p. Notiamo ora che per funzioni solenoidali regolari vale sul bordo Σ_i

$$\int_{\Sigma_i} \frac{\partial v_n}{\partial n} d\sigma = -\int_{\Sigma_i} \frac{\partial v_\tau}{\partial t} d\sigma = 0.$$

frontpunt
Da (12.2.21)$_2$ integrando su Σ_i si ricava quindi

$$\int_{\Sigma_i} (\nu \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - p) = -|\Sigma_i| P_i,$$

il che comporta per P_i il significato fisico di pressione media su Σ_i.

12.3 Soluzioni esatte

In questa sezione diamo delle soluzioni stazionarie esatte.

12.3.1 Moto di Poiseuille

Studiamo un moto stazionario soddisfacente il sistema di quattro equazioni alle derivate parziali nelle quattro incognite $\vec{v}$, p funzioni di x, t, del primo ordine in t e in x

$$\begin{cases} div\vec{v} = 0 & (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ \vec{v} \cdot \; grad\, \vec{v} = \vec{b} - \; grad\, p + \mu \Delta \vec{v} & (x,t) \in \Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{12.3.1}$$

ed in componenti, il seguente sistema

$$\begin{cases} \sum_i v^i \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} = - \, grad\, p + \nu \Delta \, \vec{v} + \vec{b}; \\ div\vec{v} = 0 \end{cases} \tag{12.3.2}$$

Il moto di cui diamo una soluzione esatta stato introdotto da Poiseuille. La regione in cui si svolge il moto una striscia piana, delimitata da due rette parallele che, senza ledere la generalit, sono rappresentate nel riferimento $\mathcal{R}O, x, y$ del piano dalle equazioni $y = d$, $y = -d$, precisamente

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -d \leq y \leq d\}.$$

Cerchiamo una soluzione delle equazioni di Navier-Stokes nella forma di moto, detto **laminare**,

$$\vec{v}(x, y, t) = V(y)\vec{e}_1,$$

il sistema (3.20) si riduce, cos, all'unica equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine nell'incognita $V = V(y)$

$$\nu \frac{d^2\, V(y)}{dy^2} \vec{e}_1 = - \, grad\, p + \vec{f}.$$

La (3.20) rappresenta, ora, un sistema differenziale alle derivate ordinarie del secondo ordine, lineare ed possibile, in tal caso, fissare per l'incognita velocit due costanti arbitrarie. Tali condizioni saranno imposte sulla frontiera $\partial\Omega$ del dominio di moto. Dovendo imporre condizioni fisicamente ragionevoli sulla velocit, notiamo che per un fluido in un condotto, le particelle sul contorno di Ω rallentano notevolmente la loro velocit. Adotteremo allora la seguente condizione ideale al contorno

$$\vec{v}(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in \partial\Omega.$$

Dobbiamo allora risolvere il seguente **problema al bordo**

$$\begin{cases} -\nu \dfrac{d^2V(y)}{dy^2}\vec{e_1} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + h, \\ V(\pm d) = 0, \end{cases} \tag{12.3.3}$$

dove h denota l'intensit della forza nella direzione $\vec{e}_1$. Tale problema, per forze nulle e per gradiente di potenziale costante, ammette l'unica soluzione

$$V(y) = \frac{h}{\nu}(y^2 - d^2).$$

Vediamo che relazione c' tra h e il flusso Φ.
Ricordiamo che il flusso

$$\Phi = -\frac{h}{\nu}\int_{-d}^{d}(y^2 \, - \, d^2)dy = -\frac{h}{\nu}\int_{-d}^{d} y^2 dy \, - \, 2d^3 \, = \, -\frac{2}{3}\frac{h}{\nu}d^3 \, + \, \frac{2hd^3}{\nu} \, = \, \frac{4h\,d^3}{3\nu}\,.$$

Quindi

$$h \, = \, \frac{3\nu\,\Phi}{4d^3}\,.$$

Tale profilo, noto come **profilo lineare di Poiseuille**, osservabile sperimentalmente, trova accordo con le osservazioni sperimentali, e risolve il paradosso trovato nel caso di fluidi non viscosi.

12.3.2 Moti di Hagen Poiseuille

Ci interesseremo, ora, di moti di fluidi incompressibili in geometrie a simmetria circolare. Sar quindi utile fornire l'espressione delle equazioni del moto in coordinate cilindriche.

Sia Ω un cilindro circolare, di raggio R, retto, di asse verticale z. Nella sezione circolare Σ introduciamo un sistema di coordinate polari r, θ, con centro nell'intersezione O di Σ con l'asse z ed asse polare arbitrario. Otteniamo, cos, un sistema di coordinate cilindriche (r, θ, z), la cui base locale sar $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$. La superficie di Ω data dall'equazione $r \, = \, R$.

Prima di studiare moti particolari, opportuno ricordare le espressioni delle equazioini di Navier-Stokes in coordinate polari. Precisamente, per moti corrispondenti a forza $\vec{f}$ nulla, si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\, v_r}{\partial\, t} + (\vec{v} \cdot \, \nabla\,)v_r - \dfrac{v_\theta^2}{r} = f_r - \dfrac{\partial\, p}{\partial\, r} + \nu\left[\nabla^{\,2} v_r - \dfrac{v_r}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial\, v_\theta}{\partial\, \theta}\right] \\ \dfrac{\partial\, v_\theta}{\partial\, t} + (\vec{v} \cdot \, \nabla\,)v_\theta + \dfrac{v_r v_\theta}{r} \, = \, f_\theta - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\, p}{\partial\, \theta} + \nu\left[\nabla^{\,2} v_\theta - \dfrac{v_\theta}{r^2} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial\, v_r}{\partial \theta}\right] \\ \dfrac{\partial\, v_z}{\partial\, t} + (\vec{v} \cdot \, \nabla\,)v_z = f_z - \dfrac{\partial\, p}{\partial\, z} + \nu\,\nabla^{\,2} v_z \\ \dfrac{\partial\, v_r}{\partial\, r} + \dfrac{v_r}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\, v_\theta}{\partial\, \theta} + \dfrac{\partial\, v_z}{\partial\, z} = 0, \end{cases} \tag{12.3.4}$$

dove

$$\vec{v} \cdot \, \nabla \, = v_r \frac{\partial}{\partial\, r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial\, z}$$

$$\nabla^2 := \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Alle (3.22) vanno aggiunte opportune condizioni al contorno ed iniziali

$$\vec{v}|_{\partial\Omega} = \overrightarrow{W},$$

$$\vec{v}(x,0) = \vec{v}_0(x),$$

dove $\overrightarrow{W}$ denota la velocit del contorno rigido.

La soluzione di Hagen Poiseuille fornisce una soluzione esatta stazionaria per il moto di un fluido in un cilindro, causato da una differenza di pressione, quando la forza esterna $\vec{f}$ diretta secondo l'asse z verticale

$$\vec{f} = -g\vec{k}.$$

Nel cilindro verticale fisso, risulta $\overrightarrow{W} = 0$, e la soluzione di Hagen Poiseuille si cerca nella forma

$$\vec{v} = v_z(r)\vec{k}.$$

Sostituendo questa informazione nelle (3.22) si ricava

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial\theta} = 0,$$

$$0 \;=\; -g - \frac{\partial p}{\partial z} + \nu\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)v_z.$$

La condizione di solenoidalit automaticamente verificata.

Le prime due condizioni sulla pressione comportano che p dipenda solo da z. Una particolare scelta data da

$$p \;=\; k\,z.$$

In questo caso le equazioni del moto si riducono all'unica equazione

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)v_z = \frac{g+k}{\nu}.$$

Moltiplichiamo per r quest'ultima equazione ed integriamo in r si ha

$$r\frac{d}{dr}v_z = \frac{g+k}{2\nu}R^2 + c_1.$$

Dividiamo per r quest'ultima e integriamo in r troviamo

$$v_z(r) = \frac{g+k}{4\nu}r^2 + c_1 \ln\, r + c_0. \tag{12.3.5}$$

Se ci limitiamo alla classe di soluzioni regolari nell'origine, dobbiamo richiedere

$$c_1 = 0.$$

Infine la condizione di aderenza su $\vec{v}$ implica

$$c_0 = -\frac{g+k}{4\nu}R^2,$$

e (3.23) diventa

$$v_z(r) = \frac{g+k}{4\nu}\left(r^2 - R^2\right).$$

Osserviamo che $g+k>0$ implica che $\vec{v}$ sia diretta verso il basso, mentre $g+k<0$ implica che $\vec{v}$ sia diretta verso l'alto.

Secondo la Legge di Hagen-Poiseuillle la resistenza al flusso (cio l'inverso del flusso) direttamente proporzionale alla viscosit del liquido e alla lunghezza del vaso e inversamente proporzionale alla quarta potenza del raggio.
Infatti il flusso

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^R v_z(r)\, r\, dr d\theta$$

dove $v_z(r)$ quello appena trovato, allora

$$\Phi \,=\, 2\pi \int_0^R \frac{g+k}{4\nu}\left(r^2 - R^2\right) r\, dr =$$

$$= \pi\,\frac{g+k}{2\nu}\left(\int_0^R r^3 dr \,-\, \int_0^R Rr^2 dr\right) = \pi\,\frac{g+k}{2\nu}\left(\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R\right) - R\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R =$$

$$= \pi\,\frac{g+k}{2\nu}\left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{3}\right) = -\pi\,\frac{g+k}{2\nu}\,\frac{R^4}{12}\,.$$

Anche se l'applicazione di questa legge al flusso ematico limitata, essa spiega comunque il perch della localizzazione della resistenza principale al flusso nelle arteriole.

12.4 Stabilita' dei moti di Couette Taylor.

Ci interesseremo, ora, di moti di fluidi incompressibili in geometrie a simmetria circolare. Sara' quindi utile fornire l'espressione delle equazioni del moto in coordinate cilindriche.

Sia Ω un cilindro circolare, di raggio R, retto di asse x. Nella sezione circolare Σ introduciamo un sistema di coordinate polari r, θ, con centro nell'intersezione O di Σ con l'asse z ed asse polare arbitrario. Otteniamo, cosi' un sistema di coordinate cilindriche (r, θ, z), la cui base locale sara' $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{k})$. La superficie di Ω e' data dall'equazione $r = R$.

Prima di studiare moti particolari, e' opportuno ricordare le espressioni delle equazioini di Navier-Stokes in coordinate polari. Precisamente, per moti corrispondenti a forza **f** nulla, si ha

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_r}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)v_r-\frac{v_\theta^2}{r}&=-\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left[\nabla^2 v_r-\frac{v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right]\\
\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)v_\theta+\frac{v_r v_\theta}{r}&=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\nu\left[\nabla^2 v_\theta-\frac{v_\theta}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\\
\frac{\partial v_z}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)v_z&=-\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\nabla^2 v_z\\
\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}&=0,
\end{aligned}
\tag{12.4.1}
$$

cileq

dove

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}\cdot\nabla&=v_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial}{\partial z}\\
\nabla^2&:=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.
\end{aligned}
$$

Alle (12.4.1) vanno aggiunte opportune condizioni al contorno ed iniziali

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega}=\mathbf{W},\qquad \mathbf{v}(x,0)=\mathbf{v}_0(x),$$

dove **W** denota la velocita' del contorno rigido.

Nelle due seguenti sottosezioni, precisiamo due domini e ricaviamo due corrispondenti soluzioni stazionarie dette *soluzioni di Couette Taylor.* Nella sottosezione tre facciamo alcune osservazioni relative la stabilita' di dette soluzioni per fluidi non viscosi, ed infine nella sottosezione quattro studiamo alcune condizioni sufficienti ad assicurare la stabilita' non lineare dei moti di Couette Taylor per i fluidi viscosi.

12.4.1 Couette Taylor in un cilindro ruotante (N-S)

Il moto di cui diamo una soluzione esatta e' stato introdotto da Taylor ed e' dello stesso tipo del moto di Couette tra piani, vale a dire, il moto e' prodotto dalle condizioni al contorno non omogenee, aderenza ad un contorno in moto rigido. Le soluzioni alle equazioni di Navier-Stokes, sono cercate nella forma

$$V_r=0,\quad V_\theta=V(r)=r\Omega(r),\quad V_z=0,\quad P=P(r).$$

Si verifica agevolmente che la condizione di solenoidalita' e' soddisfatta, inoltre e' $\mathbf{V}\cdot\nabla V=0$.

Fluido non viscoso

In questo caso, le equazioni del moto siottengono da (12.4.1) ponendo $\nu=0$ e richiedendo come condizione al bordo la classica condizione di impermeabilita'

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=v_r=0,$$

che risulta anch'essa automaticamente vera per il moto scelto.

Sostituendo **V** in (12.4.1) con $\nu=0$, si ricava

$$\frac{dP}{dr}=\frac{V^2(r)}{r},\tag{12.4.2}$$

cilsta1

che puo' essere considerata come una condizione sulla pressione. Possiamo concludere in tal caso che per un fluido non viscoso sono possibili infinite rotazioni rigide di cilindri coassiali di raggi $r \in (0, R)$, ciascuna avente una velocita' angolare assolutamente indipendente da quella degli altri cilindri. Questa situzione risulta spiegabile solo in quanto il fluido e' considerato nella condizione ideale di totale assenza di attrito. Si ricordi il risultato analogo ricavato per i moti di Poiseuille e di Couette.

Fluido Viscoso

Sostituendo $\mathbf{V}$ in (cileq 12.4.1) si ricava

$$\begin{gathered} \frac{dP}{dr} = \frac{V^2(r)}{r}, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) - \frac{V}{r^2} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)V = 0. \end{gathered} \tag{12.4.3}$$ vista

Esprimendo la forma dell'integrale generale di (vista 12.4.3)$_2$ in termini di Ω, deduciamo

$$V = Ar + \frac{B}{r^2} =: r\Omega(r),$$

dove A, e B sono due costanti collegate alle velocita' angolari dei cilindri ed a condizioni di regolarita'. Infatti, in questo caso r puo' assumere il valore zero e, per la sommabilita' della soluzione, bisogna assumere $B = 0$. Infine, imponendo la condizione al bordo

$$V(R) = R\Omega = AR$$

si determina A. Si puo' concludere che il moto e' un moto rigido rotatorio uniforme di velocita' angolare Ω.

12.4.2 Couette-Taylor tra cilindri coassiali ruotanti (N-S)

Sia Ω' il dominio tridimensionale contenuto tra due cilindri coassiali, di asse z e di raggi R_1, R_2, ruotanti con velocita' angolari Ω_1, Ω_2, rispettivamente.

Le soluzioni di Couette-Taylor sono cercate nella forma

$$V_r = 0, \quad V_\theta = r\Omega(r), \quad V_z = 0, \qquad P = P(r).$$

Sostituendo in (cileq 12.4.1) si ricava nuovamente (cilsta1 12.4.2), quindi la soluzione e' data da

$$V = Ar + \frac{B}{r^2} =: r\Omega(r),$$

dove A, e B sono due costanti collegate alle velocita' angolari dei cilindri. Infatti, imponendo le condizioni al bordo

$$\Omega_i = A + \frac{B}{R_i^2}, \quad i = 1, 2,$$

si ricava

$$\begin{gathered} A = -\Omega_1\eta^2\frac{1-(\mu/\eta^2)}{1-\eta^2}, \quad B = \Omega_1\frac{R_1^2(1-\mu)}{1-\eta^2}, \\ \mu := \frac{\Omega_2}{\Omega_1}, \quad \eta = \frac{R_1}{R_2}. \end{gathered}$$

Il moto di Couette-Taylor e' dato da una famiglia di moti rigidi al variare di r Infatti ciascuna superficie cilindrica di raggio r con $r \in (R_1, R_2)$ ruota attorno all'asse del cilindro con velocita' costante $\Omega(r)$.

12.4.3 Stabilita' non lineare

Supponiamo di perturbare inizialmente il moto di base $\mathbf{V}$ di una quantita' $\mathbf{u}_0$, il moto non stazionario corrispondente $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{u}$, $p = P + \pi$ sara' soluzione di (cileq 12.4.1).

Per i fluidi non viscosi vale il criterio di stabilita' di Rayleigh il quale afferma che condizione necessaria e sufficiente affinche' una distribuzione di velocita' angolare $\Omega(r)$ sia stabile e' che verifichi la relazione

$$\frac{d}{dr}(r^2\Omega)^2 > 0, \tag{12.4.4}$$

`Rayleigh`

in tutto l'intervallo (R_1, R_2).

Vi sono solo argomenti euristici a riguardo che qui tralsciamo di esporre. Notiamo solo che, poiche' il fluido e' omogeneo, la quantita' $r^2\Omega$ rappresenta fisicamente il momento della quantita' di moto del sistema rispetto all'asse di rotazione. Tale condizione e' certamente soddisfatta per i moti rigidi. Ricordando le espressione del moto base, si nota che la costante A contiene un termine in $\eta^2 - \mu$ che fornisce la dipendenza dal momento della quantita' di moto, mentre nella costante B e' assente questa dipendenza. Nel caso di moti viscosi ci si aspetta di trovare stabilita' almeno in questo caso, in quanto la viscosita' agisce in favore della stabilita' del sistema. Ci si aspetta di trovare condizioni in cui intervenga la costante A. Si vedra' tra breve che non e' tanto facile ricavare questa informazione, neanche nel caso del sistema linearizzato.

Ritornando al discorso della stabilita' non lineare, iniziamo a scrivere le equazioni soddisfatte dal moto differenza

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_r}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial \pi}{\partial r} - (\mathbf{V}\cdot\nabla)u_r + 2\frac{V_\theta u_\theta}{r} + \nu\left[\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right],\\
&\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \pi}{\partial \theta} - (\mathbf{V}\cdot\nabla)u_\theta - u_r\frac{dV_\theta}{dr} - \frac{u_r V_\theta}{r} + \nu\left[\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{u_r}{\partial \theta}\right],\\
&\frac{\partial u_z}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)u_z = -\frac{\partial \pi}{\partial z} - (\mathbf{V}\cdot\nabla)u_z + \nu\nabla^2 u_z,\\
&\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,\\
&\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x),\\
&\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0.
\end{aligned} \tag{12.4.5}$$

`nonstaz`

Moltiplicando le prime tre equazioni di (nonstaz 12.4.5) rispettivamente per u_r, u_θ, u_z, sommando le risultanti equazioni ed integrando su Ω_z otteniamo

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_z}\Big(\frac{\partial u^2}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)u^2\Big)dx=-\int_{\Omega_z}\mathbf{u}\cdot\nabla\pi dx-\int_{\Omega_z}(\mathbf{V}\cdot\nabla)\frac{u^2}{2}dx+\int_{\Omega_z}\Big(\frac{V_\theta}{r}-\frac{dV_\theta}{dr}\Big)u_\theta u_r dx+$$
$$\nu\int_{\Omega_z}\Big[u_r\Big(\nabla^2 u_r-\frac{u_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\Big)+u_\theta\Big(\nabla^2 u_\theta-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\Big)+u_z\nabla^2 u_z\Big]dx. \tag{12.4.6}$$

en1

Analizziamo tutti gli integrali in (12.4.6).

Nel primo integrale si puo' portare la derivata temporale fuori del segno di Integrale in quanto il dominio Ω_z non varia in t.

Ricordando che $\mathbf{V}$ e $\mathbf{u}$ sono solenoidali e che $\mathbf{u}$ si annulla sul bordo possiamo annullare tutti i termini del tipo $\mathbf{u}\cdot\nabla\psi$, $\mathbf{V}\cdot u^2$ sulla parte rigida della frontiera $\partial\Omega_z$, mentre i termini sulle sezioni Σ_z si annullano quando si effettua il limite $z\to\infty$ in quanto $\mathbf{u}$ e' sommabile in Ω.

Per il termine viscoso analizziamo i termini separatamente. Per i termini in ∇^2 usiamo l'integrazione per parti, per semplicita' ricaviamo il risultato per una funzione ψ

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_z}\psi\nabla^2\psi dx &= \int_{-z}^{z}\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\psi\Big[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\Big]rdxd\theta dz\\
&= \int_{-z}^{z}\int_0^{2\pi}\Big[\int_{R_1}^{R_2}\psi\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big)dr\Big]d\theta dz+\int_z^z\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r}\Big[\int_0^{2\pi}\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}d\theta\Big]drdz\\
&+\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\Big[\int_{-z}^{z}\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}dz\Big]rdrd\theta=\int_{-z}^{z}\int_0^{2\pi}\Big[\psi r\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big]_{R_1}^{R_2}d\theta dz\\
&-\int_z^z\int_0^{2\pi}\Big[\int_{R_1}^{R_2}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big)^2 rdr\Big]d\theta dz+\int_z^z\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r}\Big[\psi\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\Big]_0^{2\pi}drdz\\
&-\int_z^z\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}\Big[\int_0^{2\pi}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\Big)^2 d\theta\Big]rdrdz+\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\Big[\psi\frac{\partial\psi}{\partial z}\Big]_{-z}^{z}rdrd\theta\\
&-\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\Big[\int_z^z\Big(\frac{\partial\psi}{\partial z}\Big)^2 dz\Big]rdrd\theta.
\end{aligned} \tag{12.4.7}$$

nuterm

Annullando tutti i termini di bordo si deduce, nel limite $z\to\infty$

$$\int_\Omega\psi\nabla^2\psi dx=-\int_\Omega(\nabla\psi)^2 dx.$$

Quindi, per il termine in ∇^2 si ha

$$\int_\Omega\left[u_r\nabla^2 u_r+u_\theta\nabla^2 u_\theta+u_z\nabla^2 u_z\right]dx=-\int_\Omega[(\nabla u_r)^2+(\nabla u_\theta)^2+(\nabla u_z)^2]dx.$$

Infine si ricava per il termine di viscosita' la seguente uguaglianza

$$\nu\int_\Omega\Big[u_r\Big(\nabla^2 u_r-\frac{u_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\Big)+u_\theta\Big(\nabla^2 u_\theta-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\Big)+u_z\nabla^2 u_z\Big]dx=$$
$$-\nu\int_\Omega\Big[(\nabla u_r)^2+(\nabla u_\theta)^2+(\nabla u_z)^2+\frac{u_r^2+u_\theta^2}{r^2}\Big]dx.$$

Sostituendo in (en1 12.4.6) tutte le identita' ricavate otteniamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx = \int_\Omega \Big(\frac{V_\theta}{r} - \frac{dV_\theta}{dr}\Big) u_\theta u_r dx - \nu \int_\Omega \Big[(\nabla u_r)^2 + (\nabla u_\theta)^2 + (\nabla u_z)^2 + \frac{u_r^2 + u_\theta^2}{r^2}\Big] dx. \tag{12.4.8}$$

en2

Una condizione sufficiente ad assicurare la stabilita' non lineare e' data da

$$\int_\Omega \Big(\frac{V_\theta}{r} - \frac{dV_\theta}{dr}\Big) u_\theta u_r dx - \nu \int_\Omega \Big[(\nabla u_r)^2 + (\nabla u_\theta)^2 + (\nabla u_z)^2 + \frac{u_r^2 + u_\theta^2}{r^2}\Big] dx \leq -a \int_\Omega u^2 dx,$$

con a costante positiva. Bisogna quindi analizzare il termine di segno non definito, si ha

$$\frac{V_\theta}{r} - \frac{dV_\theta}{dr} = \frac{B}{r^2}.$$

In questo termine la costante A non compare e quindi troveremo certamente delle condizioni di stabilita' piuttosto conservative.

Problema 3.1 Trovare una soluzione analoga nel caso di fluidi compressibili.

Problema 3.2 - Ricavare l'identita' dell'energia nel caso di fluidi compressibili.

Capitolo 13.

Stabilita': applicazioni

In questo capitolo ricaviamo teoremi di stabilita' per moti stazionari fluidi.

13.1 Soluzioni stazionarie in coordinate cartesiane

I **moti stazionari piani** di un fluido viscoso sono retti dalle **equazioni di Navier-Stokes in coordinate cartesiane** si scrivono, per $\rho = 1$,

$$\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + b_x + \nu\Delta u, \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + b_y + \nu\Delta v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \tag{13.1.1}$$

staz

dove il Laplaciano e' l'operatore lineare del secondo ordine

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}.$$

Le equazioni (staz 15.2.20) vanno completate aggiungendo i valori di aderenza al bordo per un bordo rigido e si indica con **Problema dei valori al contorno** BVP.

Esercizio 13.1.1 *Moto tra due linee parallele (a) e (b), a distanza h tra loro, in un piano verticale, le linee sono inclinate di un angolo α rispetto alla linea orizzontale. Si fissi il riferimento con l'asse x sulla linea (a) piu' bassa, e l'asse y sia rivolto verso l'alto. Se la retta (b) trasla su se stessa con velocita' U, le linee sono porose. Le forze esterne* **b** *sono nulle. Il problema al bordo BVP e' dato da*

$$\begin{aligned} &u = 0, \qquad v = V, \qquad y = 0, \\ &u = U, \qquad v = V, \qquad y = h. \end{aligned} \tag{13.1.2}$$

Verificare che nella classe di soluzioni $u = u(y)$, $v = v(y)$, le (staz 15.2.20) *comportano*

$$p = p(x) = -Px + c,$$

$$u(y) = \frac{P}{V} y + U\Big(1 - \frac{Ph}{UV}\Big) \frac{(1 - \exp^{Vy/\nu})}{(1 - \exp^{Vh/\nu})}.$$

Nel limite $V \to 0$ si trova

$$u(y) = \frac{Uy}{h} + \frac{Ph^2}{2\nu} \frac{y}{h}\Big(1 - \frac{y}{h}\Big).$$

Se $U < 0$ dire se esistono y per i quali $u > 0$, cioe' vale l'inversione del moto (reversal flows).
Calcolare il flusso di massa Q nella sezione $(0, h)$ verificare che

$$Q = \int_0^h \rho\, u\, dy = \frac{\rho\, U\, h}{2}\Big(1 + \frac{Ph^2}{6\nu\, U}\Big).$$

Esercizio 13.1.2 *Moto tra due linee parallele (a) e (b), a distanza h tra loro, in un piano verticale, le linee sono inclinate di un angolo α rispetto alla linea orizzontale. Si fissi il riferimento con l'asse x sulla linea (a) piu' bassa, e l'asse y sia rivolto verso l'alto. Le pareti non sono porose $V = 0$. Sulla retta $y = h$ vi sono le condizioni di* ***frontiera libera****, su $y = 0$ la condizione di aderenza*

$$u = v = 0, \qquad y = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad y = h.$$

Il fluido e' pesante $\mathbf{b} = \mathbf{g}$. Verificare che

$$p = p(x) = -g \sin\alpha\, x + c, \qquad y = h,$$

$$u(y) = \frac{gh^2 \sin\alpha}{2\nu} \frac{y}{h}\Big(1 - \frac{y}{2h}\Big),$$

e' una soluzione del problema dei valori al bordo con frontiera libera dove h e' incognita.
L velocita' della superficie libera V e la quantita' di moto in $(0, h)$ sono date da

$$V = \frac{gh^2 \sin\alpha}{2\nu}, \qquad Q = \frac{gh^3 \sin\alpha}{3\nu}.$$

Esercizio 13.1.3 *Moto tra due linee parallele (a) e (b), a distanza h tra loro, in un piano verticale, le linee sono orizzontali. La forza esterna e' data da*

$$\mathbf{b} = \gamma \sin\Big(\frac{\pi\, y}{h}\Big).$$

Le rette sono rigide fisse ed impermeabili. Verificare che

$$p = cost., \qquad u(y) = \frac{\gamma\, h^2}{\pi^2 \nu} \sin\big(\frac{\pi\, y}{h}\big),$$

fornisce una soluzione esatta del BVP. Verificare che il flusso attraverso $(0, h)$ e' nullo.
Questo e' un esempio di moto periodico in corrispondenza di forze spazialmente periodiche.

I **moti stazionari in canali rettangolari o triangolari** di un fluido viscoso sono retti dalle **equazioni di Navier-Stokes in coordinate cartesiane** (3carte ??). Sia (x, y) il piano contenente una sezione di taglio del canale di asse z perperdicolare ad (x, y). Si cerca una soluzione esatta in condizioni di aderenza $\mathbf{v} = 0$, nella classe di moti

$$\mathbf{v} \equiv (u(y, z), 0, 0).$$

Esercizio 13.1.4 *La sezione del canale e' rettangolare $x \in (0, l)$, $y \in (0, h)$. Verificare che la funzione*

$$\begin{aligned} u(y,z) &= \frac{Ph^2}{2\nu}\frac{y}{h}\Big(1-\frac{y}{h}\Big) \\ &- \frac{4Ph^2}{\nu\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\sinh(\frac{(2n+1)\pi z}{h}) + \sinh\frac{(2n+1)\pi(l-z)}{h}]\sin(\frac{(2n+1)\pi y}{h})}{(2n+1)^3\sinh(\frac{(2n+1)\pi l}{h})}, \end{aligned} \tag{13.1.3}$$

retg

e' una soluzione esatta e che il flusso di massa e' dato da

$$Q = \int_0^l \int_0^h u(y,z)\,dydz = \frac{Ph^3 l}{12\nu} - \frac{16\,Ph^4}{\pi^5\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\cosh(\frac{(2n+1)\pi l}{h}) - 1]}{(2n+1)^5(\sinh\frac{(2n+1)\pi l}{h})}.$$

Esercizio 13.1.5 *La sezione del canale e' triangolare $y \in (0, h)$, $z \in (-\frac{h}{\sqrt{3}}, \frac{h}{\sqrt{3}})$. Verificare che la funzione*

$$u(y,z) = \frac{P}{4\nu\,h}(y-h)(y^2 - 3z^2). \tag{13.1.4}$$

triang

e' una soluzione esatta In tal caso il ***triangolo e' equilatero*** *di lato $2h/\sqrt{3}$, il corrispondente flusso di massa e' dato da*

$$Q = \frac{Ph^4}{60\sqrt{3}\nu}.$$

Esercizio 13.1.6 *La sezione del canale e' un triangolo isoscele $z \in (0, l)$, $y = \pi$, $y = \pm\, z$. Verificare che la funzione*

$$u(y) = \frac{P}{2\nu}(y+z)(\pi - y) - \frac{P}{\pi\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3\sinh(2n+1)\pi}\times \tag{13.1.5}$$

triango

$$\Big[\sinh(\Big(n+\frac{1}{2}\Big)(2\pi - y + z))\sin(\Big(n+\frac{1}{2}\Big)(y+z) - \sinh\Big(n+\frac{1}{2}\Big)(y+z)\times\sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)(y-z)\Big],$$

e' una soluzione esatta. Verificare che il flusso di massa e' dato da

$$Q = \frac{P}{2\nu}\left(\frac{\pi^4}{6} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\coth(2n+1)\pi + \csc(2n+1)\pi\Big)\Big(n+\frac{1}{2}\Big)^{-5}\right).$$

13.2 Moti stazionari piani di fluidi incomprimibili

I moti *stazionari piani* di un fluido viscoso incomprimibile sono rette dalle equazioni di Navier-Stokes, che in coordinate cartesiane piane, ponendo In questo capitolo ricaviamo teoremi di stabilita' per moti stazionari fluidi.

13.1 Soluzioni stazionarie in coordinate cartesiane

I **moti stazionari piani** di un fluido viscoso sono retti dalle **equazioni di Navier-Stokes in coordinate cartesiane** si scrivono, per $\rho = 1$,

$$\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + b_x + \nu\Delta u, \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + b_y + \nu\Delta v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, & \end{aligned} \tag{13.1.1}$$

staz

dove il Laplaciano e' l'operatore lineare del secondo ordine

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}.$$

Le equazioni (staz 15.2.20) vanno completate aggiungendo i valori di aderenza al bordo per un bordo rigido e si indica con **Problema dei valori al contorno** BVP.

13.1.1 Una soluzione esatta

Al fine di indagare il significato di nuove condizioni ai limiti da associare alle (n-s1 12.1.3) studiamo un moto particolare in cui le incognite $\mathbf{v}$ e p non dipendono esplicitamente dal tempo, anche detto moto stazionario. I moti stazionari soddisfano il seguente sistema

$$\begin{aligned} \sum_i v^i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} &= -\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{b}; \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \tag{13.1.2}$$

staz2

Il moto di cui diamo una soluzione esatta e' stato introdotto da **Poiseuille**. La regione in cui si svolge il moto e' una striscia piana, delimitata da due rette parallele che, senza ledere la generalita', sono rappresentate nel riferimento $\mathcal{R}O, x, y$ del piano dalle equazioni $y = 1$, $y = -1$, precisamente

$$\Omega := \{(x, y) \in R^2 : -1 \leq y \leq 1\}.$$

Cerchiamo una soluzione delle equazioni di Navier-Stokes nella forma di moto, detto laminare,

$$\mathbf{v}(x, y, t) = V(y)\mathbf{e}_1, \tag{13.1.3}$$

lprof

il sistema (staz2 13.1.2) si riduce, cosi', all'unica equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine nell'incognita $V = V(y)$

$$\nu\frac{d^2V(y)}{dy^2}\mathbf{e}_1 = -\nabla p + \mathbf{f}. \tag{13.1.4}$$

(I) $\nu = 0$.*Fluidi non viscosi*

La (13.1.2) si riduce a

$$0 = -\nabla p + \mathbf{f}. \tag{13.1.5}$$ staz1

Dovendo imporre condizioni fisicamente ragionevoli, notiamo subito che la pressione non puo' essere controllata in quanto e' essa stessa una variabile dinamica. Infatti, in conseguenza dell'incompressibilita' il fluido e' in grado di sopportare una pressione, comunque elevata avendo tale forza l'unico effetto di modificare il volume. Inoltre, a causa della mancanza di viscosita' il fluido puo' scorrere sulle pareti. L'unica condizione certamente soddisfatta e' la condizione di impermeabilita' sulle pareti, cioe'

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(x, y) = V(x, \pm 1) = 0 \tag{13.1.6}$$ nbc1

dove n e' la normale esterna ad Ω in (x, y). Nel moto di Poiseuille, la condizione (13.1.6) e' automaticamente soddisfatta. Inoltre, la (13.1.5) e' sempre soddisfatta per forze di tipo potenziale $\mathbf{f} = \nabla U$, pur di scegliere la pressione coincidente con il potenziale U della forza. Pertanto, per i fluidi non viscosi si trova il risultato non realistico che ogni profilo lineare del tipo (13.1.3) rappresenta un moto possibile, prescindendo dalle forze agenti!

(II) $\nu > 0$ *Fluidi viscosi* La (13.1.2) rappresenta, ora, un sistema differenziale alle derivate ordinarie del secondo ordine, lineare ed e' possibile, in tal caso, fissare per la incognita velocita' due costanti arbitrarie. Tali condizioni saranno imposte sulla frontiera $\partial\Omega$ del dominio di moto. Dovendo imporre condizioni fisicamente ragionevoli sulla velocita', notiamo che per un fluido in un condotto, le particelle sul contorno di Ω rallentano notevolmente la loro velocita'. Adotteremo allora la seguente condizione ideale al contorno

$$v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$

Dobbiamo allora risolvere il seguente problema al bordo

$$-\nu \frac{d^2 V(y)}{dy^2} e_1 = -\frac{\partial p}{\partial x} + h, \qquad V(\pm 1) = 0, \tag{13.1.7}$$ stazbd

dove h denota l'intensita' della forza nella direzione $\mathbf{e}_1$. Tale problema, per forze nulle e per gradiente di potenziale costante, ammette l'unica soluzione

$$V(y) = \frac{h}{\nu}(y^2 - 1)$$

Tale profilo, noto appunto come profilo lineare di Poiseuille, e' appunto osservabile sperimentalmente.

13.1.2 Moto tra pareti porose

Moto tra due linee parallele (a) e (b), a distanza h tra loro, in un piano verticale, le linee sono inclinate di un angolo α rispetto alla linea orizzontale. Si fissi il riferimento con l'asse x sulla linea (a) piu' bassa, e l'asse y sia rivolto verso l'alto. Se la retta (b) trasla su se stessa con velocita' U, le linee sono porose. Le forze esterne $\mathbf{b}$ sono nulle. Il problema al bordo BVP e' dato da

$$\begin{aligned} u &= 0, & v &= V, & y &= 0,\\ u &= U, & v &= V, & y &= h. \end{aligned} \tag{13.1.8}$$

Verificare che nella classe di soluzioni $u = u(y)$, $v = v(y)$, le (staz 15.2.20) comportano

$$p = p(x) = -Px + c,$$

$$u(y) = \frac{P}{V} y + U\Big(1 - \frac{Ph}{UV}\Big) \frac{\big(1 - \exp^{V y/\nu}\big)}{\big(1 - \exp^{V h/\nu}\big)}.$$

Nel limite $V \to 0$ si trova

$$u(y) = \frac{U y}{h} + \frac{P h^2}{2\nu} \frac{y}{h}\Big(1 - \frac{y}{h}\Big).$$

Se $U < 0$ dire se esistono y per i quali $u > 0$, cioe' vale l'inversione del moto (reversal flows).
Calcolare il flusso di massa Q nella sezione $(0, h)$ verificare che

$$Q = \int_0^h \rho\, u\, dy = \frac{\rho\, U\, h}{2}\Big(1 + \frac{P h^2}{6\nu\, U}\Big).$$

13.1.3 Moto tra piani inclinati

Moto tra due linee parallele (a) e (b), a distanza h tra loro, in un piano verticale, le linee sono inclinate di un angolo α rispetto alla linea orizzontale. Si fissi il riferimento con l'asse x sulla linea (a) piu' bassa, e l'asse y sia rivolto verso l'alto. Le pareti non sono porose $V = 0$. Sulla retta $y = h$ vi sono le condizioni di **frontiera libera**, su $y = 0$ la condizione di aderenza

$$u = v = 0, \qquad\qquad y = 0,$$

$$\frac{\partial\, u}{\partial y} = 0, \qquad\qquad y = h.$$

Il fluido e' pesante $\mathbf{b} = \mathbf{g}$. Verificare che

$$p = p(x) = -g \sin\alpha\, x + c, \qquad\qquad y = h,$$

$$u(y) = \frac{g h^2 \sin\alpha}{2\nu} \frac{y}{h}\Big(1 - \frac{y}{2h}\Big),$$

e' una soluzione del problema dei valori al bordo con frontiera libera dove h e' incognita.
L velocita' della superficie libera V e la quantita' di moto in $(0, h)$ sono date da

$$V = \frac{g h^2 \sin\alpha}{2\nu}, \qquad\qquad Q = \frac{g h^3 \sin\alpha}{3\nu}.$$

13.1.4 Moto con forza periodica

Moto tra due linee parallele (a) e (b), a distanza h tra loro, in un piano verticale, le linee sono orizzontali. La forza esterna e' data da

$$\mathbf{b} = \gamma \sin\Big(\frac{\pi\, y}{h}\Big).$$

Le rette sono rigide fisse ed impermeabili. Verificare che

$$p = cost., \qquad u(y) = \frac{\gamma\, h^2}{\pi^2 \nu} \sin\big(\frac{\pi\, y}{h}\big),$$

fornisce una soluzione esatta del BVP. Verificare che il flusso attraverso $(0, h)$ e' nullo.
Questo e' un esempio di moto periodico in corrispondenza di forze spazialmente periodiche.

13.1.5 Moti stazionari in canali rettangolari o triangolari

I **moti stazionari in canali rettangolari o triangolari** di un fluido viscoso sono retti dalle **equazioni di Navier-Stokes in coordinate cartesiane** (3carte ??). Sia (x, y) il piano contenente una sezione di taglio del canale di asse z perperdicolare ad (x, y). Si cerca una soluzione esatta in condizioni di aderenza $\mathbf{v} = 0$, nella classe di moti

$$\mathbf{v} \equiv (u(y, z), 0, 0).$$

Esercizio 13.1.1 *La sezione del canale e' rettangolare $x \in (0, l)$, $y \in (0, h)$. Verificare che la funzione*

$$u(y, z) = \frac{Ph^2}{2\nu}\frac{y}{h}\Big(1 - \frac{y}{h}\Big) - \frac{4Ph^2}{\nu\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\sinh(\frac{(2n+1)\pi\, z}{h}) + \sinh\frac{(2n+1)\pi(l-z)}{h}]\sin(\frac{(2n+1)\pi\, y}{h})}{(2n+1)^3 \sinh(\frac{(2n+1)\pi\, l}{h})}, \tag{13.1.9}$$

retg

e' una soluzione esatta e che il flusso di massa e' dato da

$$Q = \int_0^l \int_0^h u(y, z)\, dy dz = \frac{Ph^3 l}{12\nu} - \frac{16\, Ph^4}{\pi^5 \nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\cosh(\frac{(2n+1)\pi\, l}{h}) - 1]}{(2n+1)^5(\sinh\frac{(2n+1)\pi\, l}{h})}.$$

Esercizio 13.1.2 *La sezione del canale e' triangolare $y \in (0, h)$, $z \in (-\frac{h}{\sqrt{3}}, \frac{h}{\sqrt{3}})$. Verificare che la funzione*

$$u(y, z) = \frac{P}{4\nu\, h}(y - h)(y^2 - 3z^2). \tag{13.1.10}$$

triang

e' una soluzione esatta In tal caso il ***triangolo e' equilatero*** *di lato $2h/\sqrt{3}$, il corrispondente flusso di massa e' dato da*

$$Q = \frac{Ph^4}{60\sqrt{3}\nu}.$$

Esercizio 13.1.3 *La sezione del canale e' un triangolo isoscele $z \in (0, l)$, $y = \pi$, $y = \pm\, z$. Verificare che la funzione*

$$u(y) = \frac{P}{2\nu}(y + z)(\pi - y) - \frac{P}{\pi\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Big(n + \frac{1}{2}\Big)^3 \sinh(2n+1)\pi} \times \tag{13.1.11}$$

triango

$$\Big[\sinh(\Big(n + \frac{1}{2}\Big)(2\pi - y + z))\sin(\Big(n + \frac{1}{2}\Big)(y + z) - \sinh\Big(n + \frac{1}{2}\Big)(y + z) \times \sin\Big(n + \frac{1}{2}\Big)(y - z)\Big],$$

e' una soluzione esatta. Verificare che il flusso di massa e' dato da

$$Q = \frac{P}{2\nu}\left(\frac{\pi^4}{6} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\coth(2n+1)\pi + \csc(2n+1)\pi\Big)\Big(n+\frac{1}{2}\Big)^{-5}\right).$$

$\rho = 1$, si scrivono come segue:

$$\begin{aligned} v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + b_x + \nu\Delta v_x \\ v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + b_y + \nu\Delta v_y \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \qquad (13.1.12) \quad \boxed{\texttt{eqnavsto}}$$

dove il Laplaciano è l'operatore lineare del secondo ordine

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$$

ν coefficiente di viscosità cinematica, p pressione, b_x e b_y sono le componenti della forza esterna ed infine v_x e v_y sono le componenti della velocità.
Le precedenti equazioni vanno completate aggiungendo i valori di aderenza al bordo per un bordo rigido, specificando così un *problema dei valori al contorno.*

In questa tesina ci occuperemo del moto di un fluido posto tra due linee porose nel piano, con particolare rilevanza al caso limite non poroso, di cui studieremo a fondo la stabilità attraverso stime della velocità e del suo gradiente, accenneremo alla regolarità della soluzione ed all'unicità della soluzione stazionaria, forniremo condizioni per la cosiddetta *inversione del moto*; infine daremo alcuni esempi numerici delle diseguaglianze trovate.

13.2 Moto in un layer tra piani mobili e porosi

13.2.1 Descrizione del moto in un layer tra piani mobili e porosi

Il moto trattato ha luogo tra due linee parallele (a) e (b), a distanza $h > 0$ tra di loro, in un piano verticale, le linee sono inclinate di un angolo α rispetto ad una linea orizzontale, per comodità da ora chiameremo la regione tra le due linee in cui si svolge il moto Ω.
Fissiamo il riferimento con l'asse x sulla linea (a) più bassa, e l'asse y sia rivolto verso l'alto.
Se la retta (b) trasla su se stessa con velocità U, le linee sono porose e le forze esterne sono nulle, il problema al bordo è dato dai seguenti valori al contorno

$$\begin{aligned} v_x = 0,\ v_y = V;\ \text{per } y = 0 \\ v_x = U,\ v_y = V;\ \text{per } y = h \end{aligned}$$

13.2.2 Soluzioni esatte

Noi cercheremo una soluzione della forma $v_x = v_x(y)$ $v_y = v_y(y)$, pertanto (eqnavsto 14.1.1) diventano

$$\begin{aligned}
v_y(y)\frac{\partial v_x(y)}{\partial y} &= -\frac{\partial p(x,y)}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 v_x(y)}{\partial y^2} \\
v_y(y)\frac{\partial v_y(y)}{\partial y} &= -\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 v_y(y)}{\partial y^2} \\
\frac{\partial v_y(y)}{\partial y} &= 0
\end{aligned}$$

la terza equazione ci dice che v_y è costante e poiche sul bordo deve essere uguale a V si avrà $v_y(y) = V$ in Ω.
Da questo la seconda equazione ora diventa

$$0 = -\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}$$

questo ci dice che la pressione dipende solo da x, $p = p(x)$, quindi dalla prima equazione

$$\nu\frac{\partial^2 v_x(y)}{\partial y^2} - V\frac{\partial v_x(y)}{\partial y} = \frac{\partial p(x)}{\partial x} \tag{13.2.1}$$

eqbase

il primo membro dipende solo da y e il secondo solo da x pertanto devono essere entrambi uguali ad una costante che poniamo $-P$ e che verra ad indicare il *salto di pressione*, così otteniamo

$$\begin{aligned}
\nu\frac{\partial^2 v_x(y)}{\partial y^2} - V\frac{\partial v_x(y)}{\partial y} &= -P \\
\frac{\partial p(x)}{\partial x} &= -P
\end{aligned}$$

dalla seconda si ricava

$$p(x) = -Px + c$$

con c opportuna costante.
Per la prima invece troviamo una soluzione particolare della non omogenea

$$v_x^*(y) = \frac{P}{V}\,y$$

mentre la generica soluzione dell'omogenea è

$$\overline{v}_x(y) = C_1 + C_2 e^{\frac{V}{\nu}y}$$

per cui la soluzione generale

$$v_x(y) = \frac{P}{V}\,y + C_1 + C_2 e^{\frac{V}{\nu}y}$$

e imponendo le condizioni al contorno si ha

$$v_x(y) = \frac{P}{V}\,y + \left(U - \frac{P}{V}\,h\right)\frac{e^{\frac{V}{\nu}y} - 1}{e^{\frac{V}{\nu}h} - 1}$$

e se ora facciamo tendere V a 0 (i.e. le linee tendono a diventare non porose) si ha

$$\begin{aligned} v_x(y) &= \frac{U}{h}\,y + \frac{Py(h-y)}{2\nu} \\ v_y(y) &= 0 \end{aligned} \tag{13.2.2}$$

sol0

che è anche la soluzione per $V = 0$ pertanto abbiamo la continuità della soluzione come funzione di V.

13.2.3 Inversione del moto

Prima di iniziare lo studio della regolarità e della stabilità, della soluzione limite, ci poniamo il problema di stabilire delle condizioni perchè avvenga la cosiddetta *inversione del moto*, cioè ci chiediamo se prendendo $U < 0$ sia possibile trovare $y \in [0, h]$ tale che $v_x(y) > 0$.
Vediamo subito che $v_x(y)$ può essere scritta come

$$v_x(y) = y\left[\left(\frac{U}{h} + \frac{Ph}{2\nu}\right) - \frac{P}{2\nu}\,y\right]$$

poichè $y \in [0, h]$, per ipotesi, è necessario che sia $0 < y \leq h$ e

$$\left(\frac{U}{h} + \frac{Ph}{2\nu}\right) - \frac{P}{2\nu}\,y > 0$$

noi sappiamo già che $\nu \geq 0$ per cui si verificano due casi: $P > 0$ e $P < 0$, infatti $P = 0$ non è possibile in quanto si dovrebbe avere $\frac{U}{h} > 0$ e questo per le ipotesi fatte è impossibile.

PRIMO CASO $P > 0$:
In questo caso dalla disuguaglianza ricaviamo

$$\begin{aligned} y &< \left(\frac{U}{h} + \frac{Ph}{2\nu}\right)\frac{2\nu}{P} \\ y &< \frac{2\nu U + Ph^2}{2\nu h}\cdot\frac{2\nu}{P} = \frac{2\nu U + Ph^2}{hP} \end{aligned} \tag{13.2.3}$$

invmoty

ora dato che si deve avere $y \in (0, h]$ deve valere

$$h \geq \frac{2\nu U + Ph^2}{hP} > 0$$

la prima disuguaglianza è soddisfatta per ipotesi mentre per la seconda si ha

$$Ph^2 > -2\nu U$$

quindi fissato h

$$P > \frac{-2\nu U}{h^2} \tag{13.2.4}$$ invmotP

mentre se fissiamo P

$$\begin{aligned}\sqrt{P}h &> \sqrt{-2\nu U}\\ h &> \sqrt{\frac{-2\nu U}{P}}\end{aligned}$$

SECONDO CASO $P < 0$:
In questo caso dalla disuguaglianza ricaviamo

$$\begin{aligned}y &> \left(\frac{U}{h} + \frac{Ph}{2\nu}\right)\frac{2\nu}{P}\\ y &> \frac{2\nu U + Ph^2}{2\nu h} \cdot \frac{2\nu}{P} = \frac{2\nu U + Ph^2}{hP}\end{aligned}$$

ora dato che si deve avere $y \in (0, h]$ deve valere

$$\frac{2\nu U + Ph^2}{hP} < h$$

che è soddisfatta se e solo se si ha

$$\begin{aligned}2\nu U + Ph^2 &> Ph^2\\ 2\nu U &> 0\end{aligned}$$

che è impossibile per le ipotesi su U e ν.

Riassumendo si ha *inversione del moto* solo nel caso in cui sia $P > 0$ e considerando h fissato $P > \frac{-2\nu U}{h^2}$ e l'inversione si ha per $0 < y < \frac{2\nu U + Ph^2}{hP}$.

Spiegazione fisica:
La velocità dipende in parte dallo spostamento della linea (b) per $\frac{Uy}{h}$ che ha lo stesso segno di $U(< 0)$ e in parte dal salto di pressione per $\frac{Py(h-y)}{2\nu}$ che ha lo stesso segno di P, pertanto se $P \leq 0$ la velocità ha solo componenti negative e non può esserci inversione del moto, mentre se $P > 0$ anzi $P > \frac{-2\nu U}{h^2}$ per $0 < y < \frac{2\nu U + Ph^2}{hP}$ la seconda componente risulta più grande della prima e pertanto si ha inversione del moto. Notiamo che al tendere di ν a 0 (i.e. fluido sempre meno viscoso, $\nu = 0$ corrisponderebbe al caso non viscoso) si ha che $P > 0$ tende a diventare l'unica condizione, infatti si vede che in questo caso la fascia degli y per cui si ha inversione tende ad occupare tutto Ω come ci si aspetta poichè un liquido non viscoso non risente dello spostamento della linea e quindi della componente di velocità data da U.
Lo spostamento di (b) per $U < 0$ induce un movimento del fluido verso il semiasse negativo per le condizioni di aderenza, mentre per $P > 0$ si ha un aumento di pressione andando verso il semiasse negativo e questo provoca uno spostamento dalla zona con più pressione a quella con meno pressione quindi verso il semiasse positivo, quando il secondo effetto supera il primo si ha inversione del moto.

13.2.4 Calcolo del flusso di massa

Svolgiamo ora per completezza il calcolo del flusso di massa per y tra 0 e h

$$
\begin{aligned}
Q = \int_0^h \rho v_x(y)dy &= \int_0^h \rho\frac{Uy}{h} + \rho\frac{Ph^2}{2\nu}\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)dy = \\
&= \left(\frac{\rho U}{h} + \frac{\rho Ph^2}{2\nu h}\right)\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h - \frac{\rho Ph^2}{2\nu h^2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h \\
&= \frac{\rho U}{h}\frac{h^2}{2} + \frac{\rho Ph^3}{4\nu} - \frac{\rho Ph^3}{6\nu} = \frac{\rho Uh}{2}\left(1 + \frac{Ph^2}{6\nu U}\right)
\end{aligned}
$$

13.2.5 Stima e unicità della soluzione

Daremo ora una stima del modulo della soluzione, prima ricavandolo per la soluzione generale e poi per $V \to 0$, da queste ne dedurremo l'unicità della soluzione (senza scendere però nei dettagli delle dimostrazioni).

13.2.6 Stima della soluzione per $V \neq 0$

La soluzione generale è

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_b &= v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y \\
v_x(y) &= \frac{P}{V}\,y + \left(U - \frac{P}{V}\,h\right)\frac{e^{\frac{V}{\nu}y} - 1}{e^{\frac{V}{\nu}h} - 1} \\
v_y(y) &= V
\end{aligned}
$$

pertento si ha

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{v}_b|^2 = |v_x|^2 + |v_y|^2 &\leq \left(\left|\frac{P}{V}\right|h + \left(|U| + \left|\frac{P}{V}\right|h\right)\cdot 1\right)^2 + |V|^2 \leq \\
&\leq \left(2h\left|\frac{P}{V}\right| + |U|\right)^2 + |V|^2 + 2|V|\left(2h\left|\frac{P}{V}\right| + |U|\right) = \\
&= \left(2h\left|\frac{P}{V}\right| + |U| + |V|\right)^2 \\
&\Rightarrow |\mathbf{v}_b| \leq 2h\left|\frac{P}{V}\right| + |U| + |V|
\end{aligned}
$$

più precisamente una stima più accurata seppure meno elegante sarebbe

$$
|\mathbf{v}_b| \leq \sqrt{\left(2h\left|\frac{P}{V}\right| + |U|\right)^2 + |V|^2}
$$

queste ci danno una stima per $V \neq 0$ ma sono inutili nel caso limite.

13.2.7 Stima della soluzione per $V = 0$

Troviamo una stima per

$$v_x(y) = \frac{U}{h}\,y + \frac{Py(h-y)}{2\nu}$$
$$v_y(y) = 0$$

teniamo presente che $|y| \leq h$ in Ω $f(y) = yh - y^2 \geq 0$ inoltre $f'(y) = h - 2y$ e $f''(y) = -2$ questo implica che $f\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{4} = \frac{h^2}{4}$ è valore massimo per $f(y)$ in Ω.

$$|\mathbf{v}_b| = |v_x| \leq \left|\frac{Uy}{h} + \frac{Py(h-y)}{2\nu}\right| \leq \frac{|U||y|}{h} + \frac{|P||f(y)|}{2\nu} \leq$$
$$\leq \frac{|U|h}{h} + \frac{h^2}{8\nu}|P| = |U| + \frac{h^2}{8\nu}|P| \qquad (13.2.5)$$

regsol

Fisicamente la stima ribadisce la dipendenza della velocità da U e da P, tanto più è grande h tanto più è rilevante P, mentre tanto più è grande ν tanto meno è rilevante P.

13.2.8 Unicità della soluzione

Richiamiamo ora un risultato che abbiamo visto a lezione e che è presente negli appunti per stabilire l'unicità del moto stazionario da noi trovato.

Tma di Unicità per la soluzione stazionarie di fluidi viscosi incomprimibili 1 *Se le forze esterne ed i dati ai limiti sono sufficientemente piccoli allora la soluzione di Dirichlet è l'unica soluzione corrispondente a dette forze ed ai dati al bordo.*

Osserviamo che:
i)Per i fluidi incomprimibili, vale un terorema di esistenza per dati grandi se il dominio è semplicemente connesso. Il teorema di esistenza non vale più nel caso in cui il dominio sia limitato e non semplicemente connesso. Nella realtà è possibile osservare moti stazionari per flussi ϕ_i grandi (fontane), matematicamente si sa provare l'esistenza solo per flussi piccoli.
ii)Per provare l'unicità di $\mathbf{v}_b$, matematicamente, è sufficiente richiedere che sia piccolo, ma noi nella realtà possiamo controllare solo le forze e i dati al bordo.
Dalla seconda osservazione e dalle stime che abbiamo riportato discende che è possibile controllare il modulo della velocità tramite la forze ed i dati iniziali in modo da renderla piccola e far si che la soluzione stazionaria sia unica.

13.2.9 Regolarità della soluzione

Spendiamo ora qualche parola per quel che riguarda la regolarità della soluzione non stazionaria che soddisfa

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v} = -\nabla p$$
$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \text{ in } \Omega\times(0,\infty)$$
$$\mathbf{v}(\mathbf{x},0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$$
$$\mathbf{v}_{|\partial\Omega} = U\mathbf{e}_x$$

per avere senso tali equazioni è necessario che $\mathbf{v} \in C^{2,1}(\Omega \times (0,+\infty)) \cap C(\overline{\Omega} \times [0,+\infty))$ tuttavia è possibile anche esprimere queste equazioni in *forma variazionale* moltiplicandole per una funzione test $\varphi \in C_0$ (i.e. una funzione continua e nulla fuori da un compatto) ed integrando in Ω in questo modo poi con l'integrazione per parti è possibile trasferire le derivate sulla funzione test, che verra presa con regolarità adeguata, in modo da liberare la soluzione. Non approfondiremo tale argomento poichè non riteniamo di averne le competenze, tuttavia è possibile affermare che è sufficiente avere $\mathbf{v}, \nabla\mathbf{v} \in L^2(\Omega)$ e che v sia derivabile rispetto al tempo, quindi sostanzialmente $\mathbf{v} \in W_2^1(\Omega) \cap C^{0,1}(\Omega \times (0,+\infty)) \cap C(\overline{\Omega} \times [0,+\infty))$.

13.2.10 Stabilità della soluzione

Per un gerico moto abbiamo che valgono

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} &= -\nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \text{ in } \Omega \times (0,\infty) \\ \mathbf{v}(\mathbf{x},0) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v}_{|\partial\Omega} &= U\mathbf{e}_x \end{aligned}$$

mentre il nostro moto soddisfa

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_b \cdot \nabla \mathbf{v}_b - \nu \Delta \mathbf{v}_b &= -\nabla p_b \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_b &= 0 \text{ in } \Omega \\ \mathbf{v}_{b|\partial\Omega} &= U\mathbf{e}_x \end{aligned}$$

se ora chiamiamo $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_b$ la perturbazione data da $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathbf{v}_b$ ($\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_b + \mathbf{u}_0$), essa soddisfa

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} &= -\nabla(p - p_b) - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}_b \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \text{ in } \Omega \times (0,\infty) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x},0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \\ \mathbf{u}_{|\partial\Omega} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

moltiplicando la prima equazione per $\mathbf{u}$ e integrando su Ω ottengo

$$\int_\Omega (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} = \int_\Omega \nu \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} - \int_\Omega \nabla(p - p_b) \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x}$$

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} d\mathbf{x} = -\nu \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} \tag{13.2.6}$$

eneq

il primo addendo al secondo membro si trasforma per il teorema della divergenza applicato a $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ e tenendo conto che $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sul bordo, il secondo si annulla perchè $\mathbf{u} \in J$ e perciò è ortogonale alle funzioni tipo gradiente (vedi capitolo 1 dispense). Quindi si ha la stabilità se

$$-\nu \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} \leq 0$$

il primo addendo sappiamo che è negativo perciò dobbiamo valutare il secondo di cui non conosciamo il segno, rispetto al primo, cioè trovare un $c \geq 0$ tale che

$$\left| \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} \right| \leq c \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}$$

tenendo conto che

$$\nabla \mathbf{v}_b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{U}{h} + \frac{Ph}{2\nu} - \frac{Py}{\nu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{u}| &= \left| \frac{U}{h} + \frac{Ph}{2\nu} - \frac{Py}{\nu} \right| |u_x||u_y| \\ \leq \left| \frac{2\nu U + Ph^2 - 2Pyh}{2h\nu} \right| &\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \text{ (disug. di Cauchy)} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{|U|}{h} + \frac{|P|h}{2\nu} \right) |\mathbf{u}|^2 \end{aligned}$$

perciò

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} \right| &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{|U|}{h} + \frac{|P|h}{2\nu} \right) \int_\Omega |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} \leq \\ \leq \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{|U|}{h} + \frac{|P|h}{2\nu} \right) &\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} \text{ (disug. di Poincaré)} \end{aligned}$$

nell'ultimo passaggio abbiamo usato il lemma VIII.4.2 degli appunti per dire che la costante di Poincarè è $c = h^2$. Se ora imponiamo

$$\nu \geq \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{|U|}{h} + \frac{|P|h}{2\nu} \right)$$

siamo sicuri che il secondo membro di (eneq 14.2.6) sia negativo e per tanto il moto è stabile, perciò

$$\begin{aligned} 4\nu^2 &\geq 2\nu h|U| + |P|h^3 \\ 4\nu^2 - 2\nu h|U| - |P|h^3 &\geq 0 \\ \frac{\Delta}{4} &= h^2 U^2 + 4|P|h^3 \geq 0 \end{aligned}$$

e poichè $h|U| - h\sqrt{U^2 + 4|P|h} < 0$ mentre $\nu \geq 0$ si deve avere

$$\nu \geq \frac{h|U| + h\sqrt{U^2 + 4|P|h}}{4} = \frac{h}{4}(|U| + \sqrt{U^2 + 4|P|h}) \quad (13.2.7)$$ stab1

quindi se ν soddisfa la disuguaglianza il moto e stabile.
Vediamo ora un'altra via possibile. Riprendendo quanto scritto sopra vogliamo ottenere

$$-\nu \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} \leq 0$$

ora notiamo che con l'integrazione per parti si può scrivere

$$\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}_b\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla(\mathbf{v}_b\cdot\mathbf{u})d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_b d\mathbf{x} = -\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_b d\mathbf{x}$$

dove il primo addendo al secondo membro scompare poichè $u\in J$ è ortogonale alle funzioni di tipo gradiente.
Così si vuole

$$-\nu\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_b d\mathbf{x} \le 0$$

dobbiamo perciò stimare il secondo addendo

$$\left|\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_b d\mathbf{x}\right| \le \int_\Omega |\mathbf{u}||\nabla\mathbf{u}||\mathbf{v}_b|d\mathbf{x} \le \sup_\Omega|\mathbf{v}_b|\left(\int_\Omega u^2 d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}} \le$$
$$\le \left(|U| + \frac{h^2}{8\nu}|P|\right)\left(\int_\Omega u^2 d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato la disuguaglianza di Schwartz e nell'ultimo la stima (regsol 14.2.5).
Ricapitolando ora vogliamo

$$-\nu||\nabla\mathbf{u}||^2 + \left(|U| + \frac{h^2}{8\nu}|P|\right)||\mathbf{u}||||\nabla\mathbf{u}|| = -||\nabla\mathbf{u}||\left[\nu||\nabla\mathbf{u}|| - \left(|U| + \frac{h^2}{8\nu}|P|\right)||\mathbf{u}||\right] \le 0$$

cioè

$$\nu||\nabla\mathbf{u}|| - \left(|U| + \frac{h^2}{8\nu}|P|\right)||\mathbf{u}|| \ge 0$$

ma per la disuguaglianza di Poincarè si ha

$$\nu||\nabla\mathbf{u}|| - \left(|U| + \frac{h^2}{8\nu}|P|\right)||\mathbf{u}|| \ge ||\nabla\mathbf{u}||\left[\nu - h\left(|U| + \frac{h^2}{8\nu}|P|\right)\right]$$

perciò basta imporre

$$\nu - h\left(|U| + \frac{h^2}{8\nu}|P|\right) \ge 0$$
$$\Rightarrow \nu \ge h\left(|U| + \frac{h^2}{8\nu}|P|\right)$$

ora, similmente a quanto visto nella precedente stima, si ottiene

$$\nu \ge \frac{h}{4}(|U| + \sqrt{4U^2 + 2|P|h}) \qquad (13.2.8)$$ stab2

Vediamo che le due disuguaglianze ottenute per ν sono molto simili. Naturalmente a noi interessa quella meno restrittiva che permette maggiore scelta per quanto riguarda ν, si vede subito che per capire quale delle due è meno restrittiva bisogna confrontare $3U^2$ e $2|P|h$ e si ottiene:

- se $3U < 2|P|h$ allora (14.2.8) è meno restrittiva;
- se $3U > 2|P|h$ allora (14.2.7) è meno restrittiva;
- se $3U = 2|P|h$ allora le due coincidono

Il diverso risultato discende dal fatto che per ottenerle nella prima si è data una stima del gradiente della soluzione, mentre nella seconda una stima della soluzione, le stime che noi abbiamo dato sono ulteriormente migliorabili ponendo ad esempio condizioni sul segno di U e di P comunque non scendiamo ulteriormente nei dettagli.

Il caso della soluzione generale è più complesso a causa della presenza del esponenziale nel gradiente; in particolare il primo approccio risulta difficoltoso si può tuttavia procedere con il secondo ottenendo

$$\nu \geq h\sqrt{\left(2h\left|\frac{P}{V}\right| + |U|\right)^2 + |V|^2} \qquad (13.2.9)$$

stab3

in entrambi si nota come per avere maggiore libertà di scelta sulla viscosità sia sufficiente prendere h più piccolo.

13.2.11 Esempi numerici

Esempio 1: Inversione del moto

Siano $h = 2,\ U = -1 < 0,\ \nu = 0.5$ allora da (14.2.4) deve essere

$$P > \frac{-2\nu U}{h^2} = \frac{1}{4}$$

poniamo ad esempio $P = 1$, allora da (14.2.3) si ha inversione per

$$0 < y < \frac{2\nu U + Ph^2}{2\nu h} \cdot \frac{2\nu}{P} = \frac{2\nu U + Ph^2}{hP} = \frac{3}{2}$$

prendiamo ad esempio $y = 1$, da (14.2.2) $v_x(1) = \frac{1}{2} > 0$.

Esempio 2: stima della soluzione

Mettiamo di voler ottenere una soluzione con modulo minore di 2 per $h = 2$ e $\nu = 0.5$ allora da (14.2.5) deve essere

$$|U| + \frac{h^2}{8\nu}|P| = |U| + |P| \leq 2$$

allora potremmo ad esempio prendere $U = -1$ e $P = 1$.

Esempio 3: stabilità del moto al limite

Dati $h = 2,\ U = 1,\ P = 1$, da (14.2.7) si ha moto sicuramente stabile per

$$\nu \geq \frac{h}{4}(|U| + \sqrt{U^2 + 4|P|h}) = 2$$

mentre da (stab2 14.2.8) si ha moto sicuramente stabile per

$$\nu \geq \frac{h}{4}(|U| + \sqrt{4U^2 + 2|P|h}) = \frac{1+\sqrt{8}}{2} \approx 1.914214$$

come avevamo previsto nelle considerazioni precedenti la stima migliore è la seconda infatti $3U^2 < 2|P|h$.

Esempio 4: stabilità del moto per $V \neq 0$

Dati $h = 2$, $U = 1$, $P = 1$, $V = 1$, da (stab3 14.2.9) si ha moto sicuramente stabile per

$$\nu \geq h\sqrt{\left(2h\left|\frac{P}{V}\right| + |U|\right)^2 + |V|^2} = 2\sqrt{26} \approx 10.19804$$

qui si vede come con gli stessi dati ma con $V = 1 \neq 0$ (pareti porose) per avere la stabilità sia necessario avere una viscosità significativamente più grande rispetto a quella richiesta nel caso non poroso e che tanto più le linee sono porose (i.e. al crescere di $|V|$) tanto più questa aumenterà.

13.3 Stabilita' di Moti Fluidi Stazionari piani

sectionMoti piani Sia Ω un dominio bidimensionale limitato da due curve regolari, chiuse e non intersecantisi C_0, C_1, che denotano una frontiera interna ed una esterna, rispettivamente. Denotiamo con (x, y) le variabili nel piano π contenente Ω, e con $\mathbf{k}$ una direzione ortogonale a π.

Si dicono **moti piani** di giacitura π, quei moti di fluidi la cui velocita' e' descritta dalla seguente equazione

$$\mathbf{v} = v(x, y, t)\mathbf{i} + u(x, y, t)\mathbf{j},$$

dove $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, sono i versori degli assi coordinati ed x, y sono le coordinate.

Per un fluido incomprimibile un moto piano e' espresso solo da una funzione $\Psi(x, y, t)$ detta **funzione corrente** nel seguente moto

$$v(x, y, t) = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad u(x, y, t) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

In forma intrinseca, indicando con $\mathbf{k}$ la normale al piano π, si potra' anche scrivere

$$\mathbf{v} = \nabla \psi \times \mathbf{k}.$$

La velocita' angolare locale e' data da

$$\omega = curl\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = \partial_x v_y - \partial_y v_x,$$

dove $(v_x,\, v_y)$ denotano le componenti di $\mathbf{v}$ su π.

Siano $\mathbf{v}_b$, p_b la velocita', e la pressione soluzioni del sistema stazionario di **Eulero** dato da BVP

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{v}_b \cdot \nabla \mathbf{v}_b = -\nabla p_b, \\
&\nabla \cdot \mathbf{v}_b = 0, \qquad\qquad \text{in } \Omega; \\
&\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}|_{C_i} = v_i, \\
&\int_{C_i} v_i ds = 0, \qquad\qquad i = 0, 1.
\end{aligned}
\tag{13.3.1} \quad \boxed{\texttt{crit}}
$$

Indicando con ψ_b la funzione di corrente $\mathbf{v}_b = \nabla\psi_b \times \mathbf{k}$, e' noto che ogni funzione di $\Delta\psi_b = 0$ e' costante lungo i cammini delle particelle del fluido. Inoltre dalle equazioni del motio $(13.3.1)_1$ sappiamo anche che

$$
\mathbf{v}_b \cdot \nabla\omega_b = \nabla\psi_b \times \mathbf{k} \cdot \nabla\Delta\psi_b = 0. \tag{13.3.2} \quad \boxed{\texttt{rot}}
$$

Il parallelismo tra $\nabla\psi_b \times \nabla\Delta\psi_b$ e $\mathbf{k}$ implica

$$
\nabla\psi_b \times \nabla\Delta\psi_b \;=\; 0.
$$

Il parallelismo tra i gradienti di ψ_b, $\Delta\psi_b$, se $\nabla\Delta\psi_b \neq 0$, comprta un dipendenza funzionale tra queste due funzioni, espressa da

$$
\psi_b = \aleph(\Delta\psi_b). \tag{13.3.3} \quad \boxed{\texttt{dep}}
$$

Pertanto tutti i moti base debbono soddisfare (13.3.3).

Un fluido incomprimibile ammette infiniti profili lineari in una striscia orizzontale. Inoltre, questo profilo puo' essere descritto da una funzione corrente ψ. Sappiamo che la stabilita' fornisce un criterio per selezionare quale di questi moti sia osservabile. Mostriamo qui che i profili ψ_b verificanti la condizione

$$
\frac{\partial\psi_b}{\partial y}\Big(\frac{\partial\Delta\psi_b}{\partial y}\Big)^{-1} > 0
$$

sono non linearmente stabili rispetto pertubazioni finite. Per semplicita' ammetteremo che la vorticita' del moto di base sia costante sulla frontiera.

Sia $\psi_b(x, y)$ la funzione corrente del profilo stazionario $\mathbf{v}_b$ del quale vogliamo indagare le proprieta' di stabilita'.

Per moti piani vale la seguente identita'

$$
\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla(\nabla \times \mathbf{v}) = 0, \tag{13.3.4} \quad \boxed{\texttt{rot}}
$$

che esprime la conservazione del rotore lungo le linee materiali. Poiche' $\nabla \times \mathbf{v} = \Delta\psi\mathbf{k}$, moltiplicando scalarmente per $\mathbf{k}$ la (13.3.4), troviamo

$$
\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + \mathbf{v} \cdot \nabla\Delta\psi = 0. \tag{13.3.5} \quad \boxed{\texttt{rot1}}
$$

Indicando con $F(\Delta\psi)$ una qualsiasi funzione di $\Delta\psi$, da (13.3.5) ricaviamo

$$
\frac{\partial}{\partial t}F(\Delta\psi) + \mathbf{v} \cdot \nabla F(\Delta\psi) = 0. \tag{13.3.6} \quad \boxed{\texttt{rot2}}
$$

La (13.3.6) esprime la proprieta' molto piu' forte che una qualsiasi funzione del rotore si conserva durante il moto. Terminiamo osservando che per i moti piani stazionari $\mathbf{v}_b(x, y, t) = \nabla\psi_b(x, y) \times \mathbf{k}$ la (13.3.5) comporta

$$(\nabla\psi_b \times \mathbf{k}) \cdot \nabla\Delta\psi_b = (\nabla\Delta\psi_b \times \nabla\psi_b) \cdot \mathbf{k} = 0. \tag{13.3.7}$$ rot3

Poiche' $\nabla\Delta\psi_b \times \nabla\psi_b$ e' parallelo a $\mathbf{k}$, la (13.3.7) implica il parallelismo tra $\nabla\psi_b$ e $\nabla\Delta\psi_b$. Vale la proprieta' che due funzioni hanno gradienti paralleli se e solo se sono funzionalmente dipendenti, cioe' esiste una funzione $\mathcal{H}$ tale che

$$\psi_b = \mathcal{H}(\Delta\psi_b). \tag{13.3.8}$$ rot4

13.3.1 Stabilita' di moti laminari

Consideriamo una soluzione non stazionaria del sistema di Eulero con forze nulle (??) Scriviamo la soluzione nel seguente modo

$$\mathbf{v}(x, y, t) = \nabla(\psi_b(x, y) + \varphi(x, y, t)) \times \mathbf{k},$$

dove φ denota la perturbazione alla funzione di corrente. Osserviamo che $\psi_b + \varphi$ soddisfa la seguente equazione

$$\frac{\partial}{\partial t} F(\Delta(\psi_b + \varphi)) + \mathbf{v} \cdot \nabla F(\Delta(\psi_b + \varphi)) = 0. \tag{13.3.9}$$ rot5

L'equazione di conservazione dell'energia fornisce

$$0 = \frac{d}{dt}\|\mathbf{v}_b + \mathbf{u}\|_2^2 = \frac{d}{dt}(\|\mathbf{u}\|_2^2 + 2(\mathbf{v}_b, \mathbf{u})). \tag{13.3.10}$$ rot6'

Quindi l'equazione dell'energia cinetica non fornisce piu' un controllo della perturbazione. D'altra parte, dall'equazione (13.3.9) otteniamo

$$0 = \frac{d}{dt}\int_\Omega F(\Delta(\psi + \varphi))dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega [F(\Delta(\psi + \varphi)) - F(\Delta\psi)]dx \tag{13.3.11}$$ rot6

Il teorema di Lyapunov richiede la costruzione di un funzionale opportuno, in Meccanica classica abbiamo imparato che tale funzionale puo' essere ricavato dalle leggi di conservazione. Sommando (13.3.10)diviso 2 ad (13.3.11) otteniamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|_2^2 + \frac{d}{dt}\int_\Omega \{\nabla\psi_b \cdot \nabla\varphi + [F(\Delta(\psi_b + \varphi) - F(\Delta\psi_b)]\}dx = 0. \tag{13.3.12}$$ rot7

con $(\mathbf{v}_b, \mathbf{u}) = (\nabla\psi_b, \nabla\varphi)$. In (13.3.12) aggiungiamo e sottraiamo $F'(\Delta\psi_b)\Delta\varphi$ e troviamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|_2^2 + \frac{d}{dt}\int_\Omega \{\nabla\psi_b \cdot \nabla\varphi + F'(\Delta\psi_b)\Delta\varphi[F(\Delta(\psi_b + \varphi) - F(\Delta\psi_b) - F'(\Delta\psi_b)\Delta\varphi]\}dx = 0. \tag{13.3.13}$$ rot8

Da (13.3.7) sappiamo che $\psi_b = \mathcal{H}(\Delta\psi_b)$ e quindi scegliendo $F'(\Delta\psi_b) = \mathcal{H}(\Delta\psi_b) = \psi_b$ in (13.3.13) deduciamo

$$\int_\Omega (\nabla\psi_b \cdot \nabla\varphi + \psi\Delta\varphi)dx = \int_\Omega (\nabla\psi_b \cdot \nabla\varphi - \nabla\psi_b\nabla\varphi)dx + \int_{\partial\Omega} \psi_b \mathbf{n} \cdot \nabla\varphi d\sigma.$$

L'integrale di superficie ha derivata temporale nulla, in quanto per le ipotesi fatte la circolazione e' costante. D'altra parte, si ha per la formula del polinomio di Taylor

$$[F(\Delta(\psi_b + \varphi) - F(\Delta\psi_b) - F'(\Delta\psi_b)\Delta\varphi] = F''(\Delta\chi)(\Delta\varphi)^2,$$

dove $\Delta\chi$ e' un opportuno punto tra $\Delta(\varphi + \psi_b)$ e $\Delta\psi_b$. Sostituendo queste informazioni in (13.3.13) abbiamo

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\varphi\|_2^2 + + \frac{d}{dt}\int_\Omega \mathcal{H}'(\Delta\chi)(\Delta\varphi)^2 dx = 0. \tag{13.3.14}$$

rot9

Da (13.3.14) si ottiene il previsto risultato infatti

$$\nabla\psi_b = \mathcal{H}'(\Delta\psi_b)\nabla(\Delta\psi_b).$$

Se $\mathcal{H}' > c > 0$ la (13.3.13) prova un controllo globale della perturbazione $\nabla\varphi$ nella norma di W_2^1.

Esercizio Analizzare il significato geometrico dell'ipotesi di stabilita' nelle ipotesi $\psi_b = \psi_b(y)$.

Capitolo 14.

Moti piani

14.1 Moti stazionari piani di fluidi incomprimibili

I moti *stazionari piani* di un fluido viscoso incomprimibile sono rette dalle equazioni di Navier-Stokes, che in coordinate cartesiane piane, ponendo $\rho = 1$, si scrivono come segue:

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + b_x + \nu \Delta v_x \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + b_y + \nu \Delta v_y \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{14.1.1}$$

eqnavsto

dove il Laplaciano è l'operatore lineare del secondo ordine

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$$

ν coefficiente di viscosità cinematica, p pressione, b_x e b_y sono le componenti della forza esterna ed infine v_x e v_y sono le componenti della velocità.
Le precedenti equazioni vanno completate aggiungendo i valori di aderenza al bordo per un bordo rigido, specificando così un *problema dei valori al contorno.*

In questa tesina ci occuperemo del moto di un fluido posto tra due linee porose nel piano, con particolare rilevanza al caso limite non poroso, di cui studieremo a fondo la stabilità attraverso stime della velocità e del suo gradiente, accenneremo alla regolarità della soluzione ed all'unicità della soluzione stazionaria, forniremo condizioni per la cosiddetta *inversione del moto*; infine daremo alcuni esempi numerici delle diseguaglianze trovate.

14.2.1 Descrizione del moto in esame

Il moto trattato ha luogo tra due linee parallele (a) e (b), a distanza $h > 0$ tra di loro, in un piano verticale, le linee sono inclinate di un angolo α rispetto ad una

linea orizzontale, per comodità da ora chiameremo la regione tra le due linee in cui si svolge il moto Ω.
Fissiamo il riferimento con l'asse x sulla linea (a) più bassa, e l'asse y sia rivolto verso l'alto.
Se la retta (b) trasla su se stessa con velocità U, le linee sono porose e le forze esterne sono nulle, il problema al bordo è dato dai seguenti valori al contorno

$$\begin{aligned} v_x = 0,\ v_y = V;\ \text{per } y = 0 \\ v_x = U,\ v_y = V;\ \text{per } y = h \end{aligned}$$

14.2.2 Soluzioni

Noi cercheremo una soluzione della forma $v_x = v_x(y)$ $v_y = v_y(y)$, pertanto (eqnavsto 14.1.1) diventano

$$\begin{aligned} v_y(y)\frac{\partial v_x(y)}{\partial y} &= -\frac{\partial p(x,y)}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 v_x(y)}{\partial y^2} \\ v_y(y)\frac{\partial v_y(y)}{\partial y} &= -\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 v_y(y)}{\partial y^2} \\ \frac{\partial v_y(y)}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

la terza equazione ci dice che v_y è costante e poiche sul bordo deve essere uguale a V si avrà $v_y(y) = V$ in Ω.
Da questo la seconda equazione ora diventa

$$0 = -\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}$$

questo ci dice che la pressione dipende solo da x, $p = p(x)$, quindi dalla prima equazione

$$\nu\frac{\partial^2 v_x(y)}{\partial y^2} - V\frac{\partial v_x(y)}{\partial y} = \frac{\partial p(x)}{\partial x} \qquad (14.2.1)$$ eqbase

il primo membro dipende solo da y e il secondo solo da x pertanto devono essere entrambi uguali ad una costante che poniamo $-P$ e che verra ad indicare il *salto di pressione*, così otteniamo

$$\begin{aligned} \nu\frac{\partial^2 v_x(y)}{\partial y^2} - V\frac{\partial v_x(y)}{\partial y} &= -P \\ \frac{\partial p(x)}{\partial x} &= -P \end{aligned}$$

dalla seconda si ricava

$$p(x) = -Px + c$$

con c opportuna costante.
Per la prima invece troviamo una soluzione particolare della non omogenea

$$v_x^*(y) = \frac{P}{V}\, y$$

mentre la generica soluzione dell'omogenea è

$$\overline{v}_x(y) = C_1 + C_2 e^{\frac{V}{\nu} y}$$

per cui la soluzione generale

$$v_x(y) = \frac{P}{V}\, y + C_1 + C_2 e^{\frac{V}{\nu} y}$$

e imponendo le condizioni al contorno si ha

$$v_x(y) = \frac{P}{V}\, y + \left(U - \frac{P}{V}\, h\right) \frac{e^{\frac{V}{\nu} y} - 1}{e^{\frac{V}{\nu} h} - 1}$$

e se ora facciamo tendere V a 0 (i.e. le linee tendono a diventare non porose) si ha

$$\begin{aligned} v_x(y) &= \frac{U}{h}\, y + \frac{Py(h-y)}{2\nu} \\ v_y(y) &= 0 \end{aligned} \tag{14.2.2}$$

sol0

che è anche la soluzione per $V = 0$ pertanto abbiamo la continuità della soluzione come funzione di V.

14.2.3 Inversione del moto

Prima di iniziare lo studio della regolarità e della stabilità, della soluzione limite, ci poniamo il problema di stabilire delle condizioni perchè avvenga la cosiddetta *inversione del moto*, cioè ci chiediamo se prendendo $U < 0$ sia possibile trovare $y \in [0, h]$ tale che $v_x(y) > 0$.
Vediamo subito che $v_x(y)$ può essere scritta come

$$v_x(y) = y\left[\left(\frac{U}{h} + \frac{Ph}{2\nu}\right) - \frac{P}{2\nu}\, y\right]$$

poichè $y \in [0, h]$, per ipotesi, è necessario che sia $0 < y \leq h$ e

$$\left(\frac{U}{h} + \frac{Ph}{2\nu}\right) - \frac{P}{2\nu}\, y > 0$$

noi sappiamo già che $\nu \geq 0$ per cui si verificano due casi: $P > 0$ e $P < 0$, infatti $P = 0$ non è possibile in quanto si dovrebbe avere $\frac{U}{h} > 0$ e questo per le ipotesi fatte è impossibile.

PRIMO CASO $P > 0$:
In questo caso dalla disuguaglianza ricaviamo

$$\begin{aligned} y &< \left(\frac{U}{h} + \frac{Ph}{2\nu}\right)\frac{2\nu}{P} \\ y &< \frac{2\nu U + Ph^2}{2\nu h} \cdot \frac{2\nu}{P} = \frac{2\nu U + Ph^2}{hP} \end{aligned} \tag{14.2.3}$$

invmoty

ora dato che si deve avere $y \in (0, h]$ deve valere

$$h \geq \frac{2\nu U + Ph^2}{hP} > 0$$

la prima disuguaglianza è soddisfatta per ipotesi mentre per la seconda si ha

$$Ph^2 > -2\nu U$$

quindi fissato h

$$P > \frac{-2\nu U}{h^2} \tag{14.2.4}$$

invmotP

mentre se fissiamo P

$$\begin{aligned} \sqrt{P}h &> \sqrt{-2\nu U} \\ h &> \sqrt{\frac{-2\nu U}{P}} \end{aligned}$$

SECONDO CASO P¡0:
In questo caso dalla disuguaglianza ricaviamo

$$\begin{aligned} y &> \left(\frac{U}{h} + \frac{Ph}{2\nu}\right)\frac{2\nu}{P} \\ y > \frac{2\nu U + Ph^2}{2\nu h} \cdot \frac{2\nu}{P} &= \frac{2\nu U + Ph^2}{hP} \end{aligned}$$

ora dato che si deve avere $y \in (0, h]$ deve valere

$$\frac{2\nu U + Ph^2}{hP} < h$$

che è soddisfatta se e solo se si ha

$$\begin{aligned} 2\nu U + Ph^2 &> Ph^2 \\ 2\nu U &> 0 \end{aligned}$$

che è impossibile per le ipotesi su U e ν.

Riassumendo si ha *inversione del moto* solo nel caso in cui sia $P > 0$ e considerando h fissato $P > \frac{-2\nu U}{h^2}$ e l'inversione si ha per $0 < y < \frac{2\nu U + Ph^2}{hP}$.

Spiegazione fisica:
La velocità dipende in parte dallo spostamento della linea (b) per $\frac{Uy}{h}$ che ha lo stesso segno di $U(< 0)$ e in parte dal salto di pressione per $\frac{Py(h-y)}{2\nu}$ che ha lo stesso segno di P, pertanto se $P \leq 0$ la velocità ha solo componenti negative e non può esserci inversione del moto, mentre se $P > 0$ anzi $P > \frac{-2\nu U}{h^2}$ per $0 < y < \frac{2\nu U + Ph^2}{hP}$ la seconda componente risulta più grande della prima e pertanto si ha inversione del moto. Notiamo che al tendere di ν a 0 (i.e. fluido sempre meno viscoso, $\nu = 0$ corrisponderebbe al caso non viscoso) si ha che $P > 0$ tende a diventare l'unica

condizione, infatti si vede che in questo caso la fascia degli y per cui si ha inversione tende ad occupare tutto Ω come ci si aspetta poichè un liquido non viscoso non risente dello spostamento della linea e quindi della componente di velocità data da U.
Lo spostamento di (b) per $U < 0$ induce un movimento del fluido verso il semiasse negativo per le condizioni di aderenza, mentre per $P > 0$ si ha un aumento di pressione andando verso il semiasse negativo e questo provoca uno spostamento dalla zona con più pressione a quella con meno pressione quindi verso il semiasse positivo, quando il secondo effetto supera il primo si ha inversione del moto.

14.2.4 Calcolo del flusso di massa

Svolgiamo ora per completezza il calcolo del flusso di massa per y tra 0 e h

$$\begin{aligned} Q = \int_0^h \rho v_x(y)dy = \int_0^h \rho\frac{Uy}{h} + \rho\frac{Ph^2}{2\nu}\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)dy = \\ = \left(\frac{\rho U}{h} + \frac{\rho Ph^2}{2\nu h}\right)\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h - \frac{\rho Ph^2}{2\nu h^2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h \\ = \frac{\rho U}{h}\frac{h^2}{2} + \frac{\rho Ph^3}{4\nu} - \frac{\rho Ph^3}{6\nu} = \frac{\rho Uh}{2}\left(1+\frac{Ph^2}{6\nu U}\right) \end{aligned}$$

14.2.5 Stima e unicità della soluzione

Daremo ora una stima del modulo della soluzione, prima ricavandolo per la soluzione generale e poi per $V \to 0$, da queste ne dedurremo l'unicità della soluzione (senza scendere però nei dettagli delle dimostrazioni).

Stima della soluzione per $V \neq 0$

La soluzione generale è

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_b = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y \\ v_x(y) = \frac{P}{V}\,y + \left(U - \frac{P}{V}\,h\right)\frac{e^{\frac{V}{\nu}y}-1}{e^{\frac{V}{\nu}h}-1} \\ v_y(y) = V \end{aligned}$$

pertento si ha

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_b|^2 = |v_x|^2 + |v_y|^2 \leq \left(\left|\frac{P}{V}\right|h + \left(|U| + \left|\frac{P}{V}\right|h\right)\cdot 1\right)^2 + |V|^2 \leq \\ \leq \left(2h\left|\frac{P}{V}\right| + |U|\right)^2 + |V|^2 + 2|V|\left(2h\left|\frac{P}{V}\right| + |U|\right) = \\ = \left(2h\left|\frac{P}{V}\right| + |U| + |V|\right)^2 \\ \Rightarrow |\mathbf{v}_b| \leq 2h\left|\frac{P}{V}\right| + |U| + |V| \end{aligned}$$

più precisamente una stima più accurata seppure meno elegante sarebbe

$$|\mathbf{v}_b| \leq \sqrt{\left(2h\left|\frac{P}{V}\right| + |U|\right)^2 + |V|^2}$$

queste ci danno una stima per $V \neq 0$ ma sono inutili nel caso limite.

Stima della soluzione per $V = 0$

Troviamo una stima per

$$v_x(y) = \frac{U}{h}\,y + \frac{Py(h-y)}{2\nu}$$
$$v_y(y) = 0$$

teniamo presente che $|y| \leq h$ in Ω $f(y) = yh - y^2 \geq 0$ inoltre $f'(y) = h - 2y$ e $f''(y) = -2$ questo implica che $f\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{4} = \frac{h^2}{4}$ è valore massimo per $f(y)$ in Ω.

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_b| = |v_x| \leq \left|\frac{Uy}{h} + \frac{Py(h-y)}{2\nu}\right| &\leq \frac{|U||y|}{h} + \frac{|P||f(y)|}{2\nu} \leq \\ &\leq \frac{|U|h}{h} + \frac{h^2}{8\nu}|P| = |U| + \frac{h^2}{8\nu}|P| \end{aligned} \tag{14.2.5}$$

regsol

Fisicamente la stima ribadisce la dipendenza della velocità da U e da P, tanto più è grande h tanto più è rilevante P, mentre tanto più è grande ν tanto meno è rilevante P.

Unicità della soluzione

Richiamiamo ora un risultato che abbiamo visto a lezione e che è presente negli appunti per stabilire l'unicità del moto stazionario da noi trovato.

Teorema 14.2.1 Unicità per la soluzione stazionarie di fluidi viscosi incomprimibili *Se le forze esterne ed i dati ai limiti sono sufficientemente piccoli allora la soluzione di Dirichlet è l'unica soluzione corrispondente a dette forze ed ai dati al bordo.*

Osserviamo che:
i)Per i fluidi incomprimibili, vale un terorema di esistenza per dati grandi se il dominio è semplicemente connesso. Il teorema di esistenza non vale più nel caso in cui il dominio sia limitato e non semplicemente connesso. Nella realtà è possibile osservare moti stazionari per flussi ϕ_i grandi (fontane), matematicamente si sa provare l'esistenza solo per flussi piccoli.
ii)Per provare l'unicità di $\mathbf{v}_b$, matematicamente, è sufficiente richiedere che sia piccolo, ma noi nella realtà possiamo controllare solo le forze e i dati al bordo.
Dalla seconda osservazione e dalle stime che abbiamo riportato discende che è possibile controllare il modulo della velocità tramite la forze ed i dati iniziali in modo da renderla piccola e far si che la soluzione stazionaria sia unica.

14.2.6 Regolarità della soluzione

Spendiamo ora qualche parola per quel che riguarda la regolarità della soluzione non stazionaria che soddisfa

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} &= -\nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \text{ in } \Omega \times (0, \infty) \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v}_{|\partial\Omega} &= U \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

per avere senso tali equazioni è necessario che $\mathbf{v} \in C^{2,1}(\Omega \times (0, +\infty)) \cap C(\overline{\Omega} \times [0, +\infty))$ tuttavia è possibile anche esprimere queste equazioni in *forma variazionale* moltiplicandole per una funzione test $\varphi \in C_0$ (i.e. una funzione continua e nulla fuori da un compatto) ed integrando in Ω in questo modo poi con l'integrazione per parti è possibile trasferire le derivate sulla funzione test, che verra presa con regolarità adeguata, in modo da liberare la soluzione. Non approfondiremo tale argomento poichè non riteniamo di averne le competenze, tuttavia è possibile affermare che è sufficiente avere $\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v} \in L^2(\Omega)$ e che v sia derivabile rispetto al tempo, quindi sostanzialmente $\mathbf{v} \in W_2^1(\Omega) \cap C^{0,1}(\Omega \times (0, +\infty)) \cap C(\overline{\Omega} \times [0, +\infty))$.

14.2.7 Stabilità della soluzione

Per un gerico moto abbiamo che valgono

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v} &= -\nabla p \\ \nabla\cdot\mathbf{v} &= 0 \text{ in } \Omega\times(0,\infty) \\ \mathbf{v}(\mathbf{x},0) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v}_{|\partial\Omega} &= U\mathbf{e}_x \end{aligned}$$

mentre il nostro moto soddisfa

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_b\cdot\nabla\mathbf{v}_b - \nu\Delta\mathbf{v}_b &= -\nabla p_b \\ \nabla\cdot\mathbf{v}_b &= 0 \text{ in } \Omega \\ \mathbf{v}_{b|\partial\Omega} &= U\mathbf{e}_x \end{aligned}$$

se ora chiamiamo $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_b$ la perturbazione data da $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathbf{v}_b$ ($\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_b + \mathbf{u}_0$), essa soddisfa

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} &= -\nabla(p-p_b) - \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}_b \\ \nabla\cdot\mathbf{u} &= 0 \text{ in } \Omega\times(0,\infty) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x},0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \\ \mathbf{u}_{|\partial\Omega} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

moltiplicando la prima equazione per $\mathbf{u}$ e integrando su Ω ottengo

$$\int_\Omega (\partial_t\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x} = \int_\Omega \nu\Delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x} - \int_\Omega \nabla(p-p_b)\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}_b\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x}$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}d\mathbf{x} = -\nu\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}_b\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x} \tag{14.2.6}$$

eneq

il primo addendo al secondo membro si trasforma per il teorema della divergenza applicato a $\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}$ e tenendo conto che $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sul bordo, il secondo si annulla perchè $\mathbf{u} \in J$ e perciò è ortogonale alle funzioni tipo gradiente (vedi capitolo 1 dispense). Quindi si ha la stabilità se

$$-\nu\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}_b\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x} \leq 0$$

il primo addendo sappiamo che è negativo perciò dobbiamo valutare il secondo di cui non conosciamo il segno, rispetto al primo, cioè trovare un $c \geq 0$ tale che

$$\left|\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}_b\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x}\right| \leq c\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}$$

tenendo conto che

$$\nabla\mathbf{v}_b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{U}{h} + \frac{Ph}{2\nu} - \frac{Py}{\nu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha

$$|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}_b\cdot\mathbf{u}| = \left|\frac{U}{h}+\frac{Ph}{2\nu}-\frac{Py}{\nu}\right||u_x||u_y|$$
$$\le \left|\frac{2\nu U + Ph^2 - 2Pyh}{2h\nu}\right|\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 \text{ (disug. di Cauchy)}$$
$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{|U|}{h}+\frac{|P|h}{2\nu}\right)|\mathbf{u}|^2$$

perciò

$$\left|\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}_b\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x}\right| \le \frac{1}{2}\left(\frac{|U|}{h}+\frac{|P|h}{2\nu}\right)\int_\Omega|\mathbf{u}|^2d\mathbf{x}\le$$
$$\le \frac{1}{2}h^2\left(\frac{|U|}{h}+\frac{|P|h}{2\nu}\right)\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}|^2d\mathbf{x} \text{ (disug. di Poincaré)}$$

nell'ultimo passaggio abbiamo usato il lemma VIII.4.2 degli appunti per dire che la costante di Poincarè è $c = h^2$. Se ora imponiamo

$$\nu \ge \frac{1}{2}h^2\left(\frac{|U|}{h}+\frac{|P|h}{2\nu}\right)$$

siamo sicuri che il secondo membro di (eneq 14.2.6) sia negativo e per tanto il moto è stabile, perciò

$$4\nu^2 \ge 2\nu h|U| + |P|h^3$$
$$4\nu^2 - 2\nu h|U| - |P|h^3 \ge 0$$
$$\frac{\Delta}{4} = h^2U^2 + 4|P|h^3 \ge 0$$

e poichè $h|U| - h\sqrt{U^2+4|P|h} < 0$ mentre $\nu \ge 0$ si deve avere

$$\nu \ge \frac{h|U| + h\sqrt{U^2+4|P|h}}{4} = \frac{h}{4}(|U| + \sqrt{U^2+4|P|h}) \qquad (14.2.7)$$ stab1

quindi se ν soddisfa la disuguaglianza il moto e stabile.
Vediamo ora un'altra via possibile. Riprendendo quanto scritto sopra vogliamo ottenere

$$-\nu\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}|^2d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}_b\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x} \le 0$$

ora notiamo che con l'integrazione per parti si può scrivere

$$\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}_b\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla(\mathbf{v}_b\cdot\mathbf{u})d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_b d\mathbf{x} = -\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_b d\mathbf{x}$$

dove il primo addendo al secondo membro scompare poichè $u \in J$ è ortogonale alle funzioni di tipo gradiente.
Così si vuole

$$-\nu\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}|^2d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_b d\mathbf{x} \le 0$$

dobbiamo perciò stimare il secondo addendo

$$\left|\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_b d\mathbf{x}\right| \leq \int_\Omega |\mathbf{u}||\nabla\mathbf{u}||\mathbf{v}_b| d\mathbf{x} \leq \sup_\Omega |\mathbf{v}_b| \left(\int_\Omega u^2 d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$\leq \left(|U| + \frac{h^2}{8\nu}|P|\right)\left(\int_\Omega u^2 d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato la disuguaglianza di Schwartz e nell'ultimo la stima (14.2.5).
Ricapitolando ora vogliamo

$$-\nu||\nabla\mathbf{u}||^2 + \left(|U| + \frac{h^2}{8\nu}|P|\right)||\mathbf{u}||||\nabla\mathbf{u}|| = -||\nabla\mathbf{u}||\left[\nu||\nabla\mathbf{u}|| - \left(|U| + \frac{h^2}{8\nu}|P|\right)||\mathbf{u}||\right] \leq 0$$

cioè

$$\nu||\nabla\mathbf{u}|| - \left(|U| + \frac{h^2}{8\nu}|P|\right)||\mathbf{u}|| \geq 0$$

ma per la disuguaglianza di Poincarè si ha

$$\nu||\nabla\mathbf{u}|| - \left(|U| + \frac{h^2}{8\nu}|P|\right)||\mathbf{u}|| \geq ||\nabla\mathbf{u}||\left[\nu - h\left(|U| + \frac{h^2}{8\nu}|P|\right)\right]$$

perciò basta imporre

$$\nu - h\left(|U| + \frac{h^2}{8\nu}|P|\right) \geq 0$$
$$\Rightarrow \nu \geq h\left(|U| + \frac{h^2}{8\nu}|P|\right)$$

ora, similmente a quanto visto nella precedente stima, si ottiene

$$\nu \geq \frac{h}{4}(|U| + \sqrt{4U^2 + 2|P|h}) \tag{14.2.8}$$ stab2

Vediamo che le due disuguaglianze ottenute per ν sono molto simili. Naturalmente a noi interessa quella meno restrittiva che permette maggiore scelta per quanto riguarda ν, si vede subito che per capire quale delle due è meno restrittiva bisogna confrontare $3U^2$ e $2|P|h$ e si ottiene:
- se $3U < 2|P|h$ allora (14.2.8) è meno restrittiva;
- se $3U > 2|P|h$ allora (14.2.7) è meno restrittiva;
- se $3U = 2|P|h$ allora le due coincidono

Il diverso risultato discende dal fatto che per ottenerle nella prima si è data una stima del gradiente della soluzione, mentre nella seconda una stima della soluzione, le stime che noi abbiamo dato sono ulteriormente migliorabili ponendo ad esempio condizioni sul segno di U e di P comunque non scendiamo ulteriormente nei dettagli.

Il caso della soluzione generale è più complesso a causa della presenza del esponenziale nel gradiente; in particolare il primo approccio risulta difficoltoso si può tuttavia procedere con il secondo ottenendo

$$\nu \geq h\sqrt{\left(2h\left|\frac{P}{V}\right| + |U|\right)^2 + |V|^2} \tag{14.2.9}$$ stab3

in entrambi si nota come per avere maggiore libertà di scelta sulla viscosità sia sufficiente prendere h più piccolo.

14.2.8 Esempi numerici

Esempio 1: Inversione del moto

Siano $h = 2$, $U = -1 < 0$, $\nu = 0.5$ allora da (14.2.4) deve essere

$$P > \frac{-2\nu U}{h^2} = \frac{1}{4}$$

poniamo ad esempio $P = 1$, allora da (14.2.3) si ha inversione per

$$0 < y < \frac{2\nu U + Ph^2}{2\nu h} \cdot \frac{2\nu}{P} = \frac{2\nu U + Ph^2}{hP} = \frac{3}{2}$$

prendiamo ad esempio $y = 1$, da (14.2.2) $v_x(1) = \frac{1}{2} > 0$.

Esempio 2: stima della soluzione

Mettiamo di voler ottenere una soluzione con modulo minore di 2 per $h = 2$ e $\nu = 0.5$ allora da (14.2.5) deve essere

$$|U| + \frac{h^2}{8\nu}|P| = |U| + |P| \leq 2$$

allora potremmo ad esempio prendere $U = -1$ e $P = 1$.

Esempio 3: stabilità del moto al limite

Dati $h = 2$, $U = 1$, $P = 1$, da (14.2.7) si ha moto sicuramente stabile per

$$\nu \geq \frac{h}{4}(|U| + \sqrt{U^2 + 4|P|h}) = 2$$

mentre da (14.2.8) si ha moto sicuramente stabile per

$$\nu \geq \frac{h}{4}(|U| + \sqrt{4U^2 + 2|P|h}) = \frac{1 + \sqrt{8}}{2} \approx 1.914214$$

come avevamo previsto nelle considerazioni precedenti la stima migliore è la seconda infatti $3U^2 < 2|P|h$.

Esempio 4: stabilità del moto per $V \neq 0$

Dati $h = 2$, $U = 1$, $P = 1$, $V = 1$, da (14.2.9) si ha moto sicuramente stabile per

$$\nu \geq h\sqrt{\left(2h\left|\frac{P}{V}\right| + |U|\right)^2 + |V|^2} = 2\sqrt{26} \approx 10.19804$$

qui si vede come con gli stessi dati ma con $V = 1 \neq 0$ (pareti porose) per avere la stabilità sia necessario avere una viscosità significativamente più grande rispetto a quella richiesta nel caso non poroso e che tanto più le linee sono porose (i.e. al crescere di $|V|$) tanto più questa aumenterà.

Capitolo 15.

Propagazione ondosa

15.1 Fluidi elastici

Consideriamo ora fluidi comprimibili. Se la densita' non e' piu' costante, dalle equazioni del moto deduciamo le **equazioni di Eulero**

$$\begin{aligned} &\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \\ &\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{b} - \nabla p. \end{aligned} \tag{15.1.1}$$ eulco

Le equazioni che reggono il moto sono quattro, mentre le incognite sono cinque ρ, $\mathbf{v}$, p. Quindi, ancora il problema non e' completamente risolto. L'equazione restante viene ricavata in generale dalle leggi della termodinamica classica. Se non si vuole far ricorso alla teoria generale, si puo' restringere o la classe dei processi termodinamici cui il continuo e' sottoposto: adiabatici, isotermi, o altro, oppure la classe dei moti che il continuo puo' effettuare: vincolo di isocoricita'.

Nel primo caso, la termostatica fornisce precise leggi che consentono di determinare la pressione una volta nota la densita'. I fluidi sono detti *barotropici* se $p = p(\rho)$, in tal caso, obbediscono una delle seguenti *equazioni costitutive*,

$$p = k\rho \text{ isotermi;} \quad p = k\rho^{\gamma} \text{ isentropici,} \quad \gamma > 1. \tag{15.1.2}$$ cost

Sostituendo una delle (15.1.2), nelle (15.1.1) le incognite si riducono a quattro $\mathbf{v}$, ρ, e si ottiene finalmente il pareggiamento tra numero di incognite e di equazioni.

In entrambi i casi si ottiene un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali non lineare del primo ordine nello spazio e nel tempo. Alle (15.1.1) vanno aggiunte oppurtune condizioni iniziali ed al contorno. Come dati iniziali si assegnera' il campo delle velocita' e di densita' in tutti i punti y di Ω, all'istante iniziale $t = 0$, vale a dire

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(y, 0) &= \mathbf{v}_0(y), \\ \rho(y, 0) &= \rho_0(y). \end{aligned} \tag{15.1.3}$$ condin

Inoltre, alle (15.1.1) dobbiamo assegnare delle condizioni alla frontiera $\partial\Omega$. Se il continuo non e' contenuto in un recipiente rigido, allora si impongono delle condizioni di continuita' tra gli sforzi e le forze superficiali esterne. In tal caso valgono le considerazioni dianzi fatte per i fluidi incomprimibili.Perche' il problema risulti ben posto, noi dobbiamo assegnare su $\partial\Omega$ un numero opportuno di condizioni al contorno che simultaneamente siano fisicamente controllabili, ed assicurino l'esistenza di una soluzione, almeno localmente nel tempo. Nel seguito si assume che la parete sia impermeabile, cio' si riflette sulla semplice condizione su $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (O,T). \tag{15.1.4}$$

Il sistema finale che regge i moti di fluido barotropico non viscoso si scrive

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(x,t) + \rho\nabla \cdot \mathbf{v}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ \rho\frac{d}{dt}\mathbf{v}(x,t) = \rho\mathbf{b} - \nabla p, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ p = p(\rho), \\ y(x,0) = x, \qquad \rho(x,0) = \rho_0(x), \qquad \mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x), \qquad x \in \Omega \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(x,t) = 0 \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T). \end{aligned} \tag{15.1.5}$$

Nel caso non viscoso l'espressione euleriana della densita' $\mathbf{D} : \mathbf{T}$ del lavoro delle forze interne dL^i, cf. (15.5), diviene

$$dL^i(x,t) = -p(x,t)\nabla \cdot \mathbf{v}(x,t)dx. \tag{15.1.6}$$

15.1.1 Moti in condotti circolari

Moti subsonici ed supersonici

Si pone

$$c_s^2(\rho) = \frac{dp(\rho)}{d\rho}, \qquad \epsilon(\rho) = \int_{\rho_*}^{\rho} \frac{c_s^2(s)}{s} ds,$$

dove ρ_* e' un valore arbitrario di densita'. La funzione $c_s^2(\rho)$ e' chiamata **velocita' del suono**. Vale l'identita'

$$\nabla\epsilon(\rho) = \frac{c_s^2(\rho)}{\rho}\nabla\rho = \frac{1}{\rho}\frac{dp(\rho)}{d\rho}\nabla\rho = \frac{1}{\rho}\nabla p.$$

Abbiamo gia' considerato moti in condotti piani, qui limitiamo la discussione studiando moti stazionari in condotti a due dimensioni quali nozzle (tubi con una strettoia) o jets (tubi con una variazione di sezione monotona) in modo abbastanza qualitativo. I condotti sono a simmetria cilindrica ed il moto e' determinato dalla sua conoscenza in una sezione (bidimensionale).

Il nozzle di de Laval ha un ruolo fondamentale nella costruzione di turbine, tunnels di vento, e rockets. Il nozzle di de Laval consiste in una sezione di ingresso convergente ed un'uscita divergente (exhaust section).

Quando un fluido ad alta pressione in un contenitore entra nel nozzle di de Laval vi sono due possibilita'. La prima e' che il fluido prima si espande nella sezione d'ingresso, viene quindi compresso nella sezione di uscita restando subsonico. Questo accade se il rapporto tra la pressione nel contenitore e quella del tubo rimane al di sotto di un dato valore critico R_c. La seconda alternativa e' che il moto diviene supersonico nel passare la gola e si espande fino alla sezione di uscita. Questo accade se il rapporto tra la pressione nel contenitore e quella del tubo supera il dato valore critico R_c.

Un punto importante consiste nel supporre il moto subsonico compresso, e quello supersonico espanso.

Per un moto stazionario si ha

$$\frac{d\rho(x,t)}{dt} = \dot{\overline{\rho(x,t)}} = \mathbf{v} \cdot \nabla \rho.$$

Inoltre, da (eulco 15.1.1)$_1$ si ha

$$\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = -\frac{c_s^2}{\rho}\mathbf{v} \cdot \nabla = -\frac{c_s^2}{\rho}\dot{\rho}. \qquad (15.1.7)$$ eu

D'altra parte, vale l'identita'

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt}\rho\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot (\rho\dot{\mathbf{v}} + \dot{\rho}\mathbf{v}) = \rho\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}(1 - m^2). \qquad (15.1.8)$$

Ancora, valgono le due identita'

$$\dot{\rho}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \dot{\rho}\nu\nu \qquad \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = \dot{\nu}\nu. \qquad (15.1.9)$$ eu2

Quindi

Lemma 15.1.1 *In un moto stazionario di un fluido elastico in assenza di forze di volume si ha*

$$\dot{\overline{\rho\nu}} = \rho\dot{\nu}(1 - m^2). \qquad (15.1.10)$$ eu3

Si ottiene cosi' una importante differenza tra i moti subsonici e supersonici: *un incremento in* ν e' associato ad:

(1) *un aumento* di quantita' di moto $\rho\nu$ (moto subsonico);

(2) *un decremento* di quantita' di moto $\rho\nu$ (moto supersonico).

Per i moti stazionari abbiamo anche provato che vale la conservazione della quantita' di moto attraverso le sezioni di un condotto, vale a dire

$$\int_{S_1} \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_2} \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Assumendo che la densita' e la velocita' siano costanti attraverso le sezioni, e notando che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \nu$ si ottiene la semplice informazione

$$A_1(\rho\nu)(x_1) = A_2(\rho\nu)(x_2),$$

dove A_i denota l'area di S_i. Questa relazione stabilisce una legge di variazione della quantita' di moto inversamente proporzionale all'area della sezione A. In un condotto subsonico un decremento nell'area a partire dall'ingresso A_1 corrisponde ad un aumento di quantita' di moto e di velocita' fino all'area di uscita. In un condotto supersonico un decremento nell'area a partire dall'ingresso A_1 corrisponde ad un aumento di quantita' di moto e di velocita' fino all'area A_0 nella quale $\nu = c_s$. In seguito risultera' $\nu > c_s$ e quindi la quantita' di moto deve diminuire comportando un aumento della sezione di area di uscita (de Laval nozzle).

15.2 Propagazione ondosa per soluzioni regolari

In questo numero studieremo alcuni fenomeni di propagazione ondosa nei fluidi comprimibili. Ci limiteremo ai fenomeni lineari che avvengono quando ad un moto base si sovrappongono piccoli moti, fenomeni oscillatori, che consentono di trascurare nelle equazioni i termini non lineari detti anche **onde sonore**.

Per il sistema (15.1.1), in corrispondenza a forze di volume nulle, ed a dati iniziali costanti, e' ammissibile la soluzione $\mathbf{v}_b$, ρ_b costante rispetto allo spazio ed al tempo. In corrispondenza di perturbazioni $\mathbf{u}_0(x)$, $\sigma_0(x)$ all'istante iniziale, insorgera' un nuovo moto $\mathbf{v}(x,t) = \mathbf{u}(x,t) + \mathbf{v}_b$, $\rho(x,t) = \sigma(x,t) + \rho_b$ la cui differenza $\mathbf{u}$, σ soddisfa il sistema seguente

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\sigma + \rho\nabla\cdot\mathbf{u}(x,t) = 0 \\ &\rho\Big(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{u}\Big) = -p'(\rho)\nabla\sigma. \end{aligned} \tag{15.2.1}$$

eulpert

L'ipotesi di piccoli moti comporta $|\mathbf{u}|^2 \ll p'(\rho_b) = c_s^2$, dove c e' detta la **velocita' del suono**. Se la perurbazione e' sufficientemente piccola, assieme alle sue derivate parziali, e' lecito trascurare i termini non lineari e studiare la **equazione della perturbazione linearizzata**

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial t} + \mathbf{v}_b\cdot\nabla\sigma + \rho_b\nabla\cdot\mathbf{u}(x,t) = 0 \\ &\rho_b\Big(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v}_b\cdot\nabla\mathbf{u}\Big) = -p'(\rho_b)\nabla\sigma. \end{aligned} \tag{15.2.2}$$

eullin

Il sistema (15.2.2) e' un sistema di equazioni lineare alle derivate parziali del primo ordine, nelle quattro incognite scalari $\mathbf{u}$, σ, esso si puo' ridurre ad una sola equazione scalare nell'incognita σ di ordine due. Infatti, applicando l'operatore $\frac{d}{dt}$ alla equazione $(15.2.2)_1$ ed applicando l'operatore divergenza alla $(15.2.2)_2$ si trova

$$\begin{aligned} &\Big[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_b\cdot\nabla\Big]^2\sigma(x,t) = -\rho_b\Big[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_b\cdot\nabla\Big]\nabla\cdot\mathbf{u}(x,t) \\ &\rho_b\Big[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_b\cdot\nabla\Big]\nabla\cdot\mathbf{u} = -p'(\rho_b)\Delta\sigma. \end{aligned} \tag{15.2.3}$$

eullin1

Sottraendo $(15.2.3)_2$ da $(15.2.3)_1$, deduciamo

$$\Big[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_b\cdot\nabla\Big]^2\sigma(x,t) - p'(\rho_b)\Delta\sigma(x,t) = 0. \tag{15.2.4}$$

eullin2

La (15.2.4) permette di studiare fenomeni ondosi in un fluido in moto. Quando la velocita' di un fluido diviene confrontabile o supera quella del suono, gli effetti dovuti alla compressibilita' del fluido diventano di primaria importanza e la dinamica di fluidi ad alta velocita' e' detta **gas dinamica**. In termini dimensionali, il numero di Reynolds $Re = Vd/\nu$ e' molto grande, infatti dalla teoria cinetica si misura $\nu = lc$, dove l e' dell'ordine del libero cammino medio delle molecole e c e' la velocita' del suono. Se le velocita' caratteristiche del moto V sono dell'ordine di c allora risulta $Re = d/l$, dove sappiamo che $l \ll d$. Abbiamo accennato nella sezione precedente al moto in condotti ed abbiamo notato che il moto di un gas e' profondamente diverso in condizioni subsoniche o supersoniche. Uno dei fattori caratterizzanti i moti supersonici e' quello delle onde d'urto, che analizzeremo nella sezione successiva. In questa sezione, consideriamo solo moti subsonici e ci porremo nel riferimento che segue il moto, esso e' in moto traslatorio uniforme con velocita' $\mathbf{v}_b$ ed e' anch'esso inerziale.

Per la perturbazione di uno stato omogeneo di quiete (la velocita' relativa e' nulla), $\mathbf{v}_b = 0$, si trova finalmente

$$\frac{1}{p'(\rho_b)} \frac{\partial^2 \sigma(x,t)}{\partial^2 t} - \Delta\sigma = 0. \qquad (15.2.5) \quad \boxed{\texttt{eulwav}}$$

La quantita' $c_s^2 = p'(\rho_b)$ ha le dimensioni di una velocita' v al quadrato, ricordiamo che c_s e' detta **velocita' del suono**. Se $c_s \to \infty$ si ricavano le equazioni dei fluidi incomprimibili, e si dice che i fenomeni retti dalle equazioni dei fluidi incomprimibili hanno velocita' infinita di propagazione.

Un moto in un tubo puo' considerarsi a volte unidimensionale, questo accade ad esempio quando il moto avviene in un tubo cilindrico di sezione variabile. Il **trattamento unidimensionale** consiste nel considerare la velocita' con la sola componente non nulla lungo l'asse del tubo, e nello studiare solo i valori medi delle incognite, ritendendo trascurabili le deviazioni da queste durante tutto l'intervallo del moto.

Esercizio 3.1 Si provi che per i moti unidimensionali, nella direzione x, la (15.2.4) si riduce a

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v_b \frac{\partial}{\partial x}\right]^2 \sigma(x,t) - p'(\rho_b) \frac{\partial^2 \sigma(x,t)}{\partial x^2} = 0. \qquad (15.2.6) \quad \boxed{\texttt{eullin3}}$$

Esercizio 3.2 Provare che se il campo e' irrotazionale, allora anche la funzione potenziale verifica un'equazione della forma (15.2.5).

Osservazione 3.1 I fenomeni non lineari sono molto piu' complessi, portano a fenomeni di distorsione dei segnali iniziali e anche a creazione di urti.

Osservazione 3.2 Nei moti isentropici l'entropia η deve essere constante, questo comporta

$$\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \eta(x,t) = 0. \qquad (15.2.7) \quad \boxed{\texttt{eulentr}}$$

Tali processi si dicono anche reversibili. Inoltre, per moti piani, calcolando il rotore di $(15.2.2)_2$ si trova

$$\frac{\partial \nabla \times \mathbf{v}(x,t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \nabla \times \mathbf{v}(x,t) = 0. \qquad (15.2.8) \quad \boxed{\texttt{eulrot}}$$

Da (15.2.7), (15.2.8) si deduce che nei fenomeni di propagazione ondosa vi sono quantita' fisiche, come l'entropia o il rotore che non viaggiano alla velocita' del suono.

15.2.1 Onde piane

Si dicono **onde piane** di giacitura $\pi = \{x_3 = cost.\}$, quei fenomeni di propagazione $u(x_1, x_2, x_3, t)$ che restano costanti rispetto ad $x_1, x_2 \in \pi$, e che variano solo rispetto al tempo su ogni piano $x_3 = costante$. L'asse x_3 si dice **direzione di propagazione**.

L'equazione indefinita delle onde unidimensionali o piane e' data da

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{15.2.9}$$

`onde`

essa e' un'equazione scalare alle derivate parziali del secondo ordine in entrambe le variabili, detta anche **equazione iperbolica del second'ordine**.

Osservazione 3.1 Si possono considerare soluzioni meno regolari a patto di introdurre opportune definizioni di soluzioni deboli. **Soluzione di D'Alambert**

La (onde 15.2.9) si puo' riportare ad una seconda forma canonica ponendo

$$\xi = x - at, \qquad \eta = x + at.$$

Infatti, effettuando il cambiamento di variabili $u(x,t) = \tilde{u}(\xi,\eta)$ nella (onde 15.2.9), si trova

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} - a\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + a\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}$$

ed esguendo le dovute semplificazioni, si ricava

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{15.2.10}$$

`onde2`

La soluzione piu' generale di (onde2 15.2.10) e' facilmente ottenuta osservando che essa puo' essere funzione o solo di ξ o solo di η e quindi si ricava

$$\tilde{u} = \psi_1(\xi) + \psi_2(\eta),$$

dove ψ_1, ψ_2 sono funzioni del tutto arbitrarie. Ritornando alle variabili x, t si ottiene la **soluzione di d'Alambert**

$$u = \psi_1(x - at) + \psi_2(x + at). \tag{15.2.11}$$

`dalambert`

Risolviamo ora il problema di Cauchy $x \in R$, corrispondente allo studio della propagazione in R con dati iniziali su u e sulla sua derivata temporale prima:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = u_1(x,0).$$

Dalla soluzione di d'Alambert si ricava

$$\psi_1(x) + \psi_2(x) = u_0(x), \qquad -a\frac{d\psi_1}{d\xi}\Big|_{\xi=x} + a\frac{d\psi_2}{d\eta}\Big|_{\eta=x} = u_1(x). \tag{15.2.12}$$

`Cauchy`

Integrando (Cauchy 15.2.12)$_2$ rispetto ad x troviamo

$$-a\psi_1(x) + a\psi_2(x) = \int_0^x u_1(y)dy + aC,$$

con C costante arbitraria. Ora si puo' risolvere il sistema lineare in ψ_1 e ψ_2, ottenendo

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{1}{2}\Big[u_0(x) - \frac{1}{a}\int_0^x u_1(y)dy - C\Big] \\ \psi_2(x) &= \frac{1}{2}\Big[u_0(x) + \frac{1}{a}\int_0^x u_1(y)dy + C\Big] \end{aligned} \tag{15.2.13}$$

soluz1

Per la soluzione esatta del problema di Cauchy associato ad (15.2.9) si ricava

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[u_0(x-at) - \frac{1}{a}\int_0^{x-at} u_1(y)dy - C + u_0(x+at) + \frac{1}{a}\int_0^{x+at} u_1(y)dy + C\Big], \tag{15.2.14}$$

o piu' semplicemente

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[u_0(x-at) + u_0(x+at) + \frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(y)dy\Big]. \tag{15.2.15}$$

lasoluz

Caso I

Se $u_1 = 0$, allora la soluzione e' data dalla soprapposizione di due perturbazioni ψ_1, ψ_2, **travelling waves**, che viaggiano ciascuna con velocita' $-a$ (progressiva) e a (retrograda), rispettivamente, di ampiezze meta' dell'ampiezza totale u_0. $u_0 = 0$, e u_1 e' diversa da zero solo nell'intervallo $(-k, k)$, allora la soluzione e' nuovamente data dalla sovrapposizione di due perturbazioni viaggianti con velocita' opposte $\pm a$, ma ora le due perturbazioni ψ_1, ψ_2 hanno segno opposto.

Se il dominio e' un intervallo $(0, L)$, allora bisognera' aggiungere ai valori iniziali (15.2.12) anche i dati al bordo. Per i dati al bordo si puo' considerare il problema dei dati al contorno di Dirichlet, fissare i valori della perturbazione,

$$\psi_1(-at) + \psi_2(at) = D_0(t), \qquad \psi_1(L-at) + \psi_2(L+at) = D_1(t); \tag{15.2.16}$$

Dirichlet

o il problema di Neumann, problema di trazione o frontiera libera,

$$-a\frac{d\psi_1}{d\xi}\Big|_{\xi=-at} + a\frac{d\psi_2}{d\eta}\Big|_{\eta=at} = N_0(t), \qquad -a\frac{d\psi_1}{d\xi}\Big|_{\xi=L-at} + a\frac{d\psi_2}{d\eta}\Big|_{\eta=L+at} = N_1(t); \tag{15.2.17}$$

Neumann

o infine il problema misto che assegna il valore della funzione in un estremo ed il valore della derivata nell'altro.

E' chiaro che in questo caso i dati iniziali debbono soddisfare delle condizioni di compatibilita'. Ad esempio per i dati omogenei di Dirichlet, $D_0 = 0$, $D_1 = 0$ ogni funzione periodica di periodo $2L$ e' possibile.

Osservazione 3.3 La (15.2.9) si puo' considerare formalmente come il prodotto dei seguenti due operatori lineari $L_+ = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}$, $L_- = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}$. Per $L_+ u = 0$, e $L_- u = 0$ sono ammesse rispettivamente onde retrogade e progressive.

Esercizio 3.3 Provare l'unicita' della soluzione.

15.2.2 Onde sferiche

Si dicono **onde sferiche** quelle perturbazioni $u(x,t)$ per le quali esiste un punto fisso O detto centro di propagazione tale che $u(x,t)$ dipenda da x solo attraverso la distanza r di x da O. Dalla (eulwav 15.2.5) scrivendo il Laplaciano in coordinate sferiche si ha

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\Big)-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \tag{15.2.18}$$ sferiche

che, con il cambiamento di variabile $v = ru$ comporta nuovamente la (onde 15.2.9) per v. Si puo' concludere che le onde sferiche si comportano come quelle piane a meno di un fattore $1/r$ detto fattore di smorzamento dell'onda. Per $r \to \infty$ la perturbazione tende a zero.

Esercizio 15.2.1 *Verificare che* (sferiche 15.2.18) *si scrive nella forma*

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(ru)=0. \tag{15.2.19}$$ sfere

15.2.3 Onde permanenti

Si dicono **onde permanenti** (**standing waves** quelle soluzioni di (onde 15.2.9) ricavate con il **metodo della separazione di variabili** detto anche **metodo di Fourier**. Si sostituisce in (onde 15.2.9) una soluzione della forma $u(x,t) = U(x)W(t)$ e si ha

$$\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{1}{a^2W}\frac{d^2W}{dt^2}=0. \tag{15.2.20}$$ staz

La (staz 15.2.20) puo' essere verificata solo se separatamente

$$\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dx^2}=\frac{1}{l^2}\lambda;\quad \frac{1}{W}\frac{d^2W}{dt^2}=\frac{a^2}{l^2}\lambda,$$

dove l e' un fattore dimensionale. La equazioni ottenute sono equazioni differenziali ordinarie lineari del secondo ordine ed ammettono soluzioni limitate per $t \in [0,\infty)$ solo se e' $\lambda = -\omega^2$. In tal caso, la soluzione e' composta da una combinazione lineare di semplici soluzioni prodotto

$$u_n(x,t)=\sin\frac{n\pi x}{L}\Big(A_n\cos\frac{n\pi at}{L}+B_n\sin\frac{n\pi at}{L}\Big),$$

dette **modi normali**. L'intensita' del suono dipende dall'**ampiezza** $\sqrt{A_n^2+B_n^2}$. Il numero di oscillazioni nell'intervallo temporale $(0, 1/2\pi)$ e' detta frequenza temporale ω_n ed e' data da $n\pi a/L$. Il suono e' prodotto da una sovrapposizione di un infinito numero di frequenze naturali. Il modo $n = 1$ e' detto la prima armonica o modo fondamentale. Maggiore e' il modo fondamentale, piu' alto e' l'altezza del suono prodotto. Un'onda permanente ammette punti immobili $u(x,t) = 0$ detti **nodi**, e punti di massima ampiezza ± 1 detti **ventri**.

Esercizio 3.4 Verificare che l'onda permanente si puo' anche scrivere come sovrapposizione delle *traveling waves* onde retrograde e progressive seguenti

$$\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi at}{L}=\frac{1}{2}\Big[\cos\frac{n\pi}{L}(x-at)-\cos\frac{n\pi}{L}(x+at)\Big].$$

15.2.4 Curve caratteristiche

Le curve caratteristiche sono curve che portano informazioni. Il metodo delle caratteristiche e' usato per risolvere equazioni alle derivate parziali semilineari della forma

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + c(\rho, x, t)\frac{\partial\rho}{\partial x} = Q(\rho, x, t). \tag{15.2.21}$$

burg0

Se poniamo

$$\frac{dx}{dt} = c(\rho, x, t) \tag{15.2.22}$$

bur1

la (15.2.21) si scrive nella forma

$$\frac{d\rho}{dt} = Q(\rho, x, t). \tag{15.2.23}$$

burg2

L'equazione (15.2.21) si e' cosi' ridotta alle due equazioni differenziali ordinarie (15.2.24), (15.2.25) accoppiate. La traiettoria definita da (15.2.22) e' detta **curva caratteristica**, la velocita' definita ivi e' detta **velocita' caratteristica** o **velocita' locale dell'onda**. Se $Q = 0$, si ricava

$$\frac{dx}{dt} = c(\rho, x, t) \tag{15.2.24}$$

burg1

la (15.2.25) si scrive nella forma

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{15.2.25}$$

burg2

La velocita' caratteristica si chiama anche densita' di velocita' dell'onda.

15.2 Onde d'urto

Se il fluido, in moto stazionario con velocita' elevate, riceve una perturbazione essa si propaga nel fluido con la velocita' del suono (velocita' relativa al gas). In un riferimento fisso la velocita' di propagazione e' ottenuta, per il prinicipio dei moti relativi, come la somma della velocita' $\mathbf{v}$ e di $c\mathbf{n}$ dove $\mathbf{n}$ e' la direzione di propagazione della perturbazione. Sia O un punto fisso dello spazio, si consideri il vettore $\mathbf{v} = P - O$ e si disegni una sfera $B_c(P)$ di centro P e raggio c.

ed il vettore $\mathbf{v} + c\mathbf{n}$ puo' raggiungere ogni punto della superficie di $B_c(P)$. In altre parole, per una perturbazione che parte da un moto subsonico e' possibile raggiungere ogni punto del gas. Se $c < |\mathbf{v}|$ il punto O e' esterno alla sfera $B_c(P)$, ed il vettore $\mathbf{v} + c\mathbf{n}$ puo' raggiungere solo i punti della superficie di $B_c(P)$ nel cono di ampiezza α tale che $sin\alpha = c/v$. In altre parole, per una perturbazione che parte da un moto supersonico e' possibile raggiungere solo i punti del gas nel cono di ampiezza α. L'angolo α e' detto **angolo di Mach**, il numero puro $M = v/c$ e' detto **numero di Mach**, la superficie limite che viene raggiunta dalla perturbazione e' detta **superficie di Mach**, ma piu' frequentemente **superficie caratteristica**. Il valore del numero di Mach varia al variare di v e di c. Notiamo che nei fenomeni supersonici non e' piu' possibile considerare costante la densita' di base e quindi la velocita' del suono c varia al variare del punto nel fluido ed e' detta **velocita' locale del suono**.

Consideriamo un moto stazionario comprimibile in tutto lo spazio retto dalle equazioni

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, \\
\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\nabla p.
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

steady

Supponiamo che vi sia una transizione dallo stato 1 per $x < 0$ allo stato 2 in $x > 0$. Studiamo la possibilita' di una discontinuita' in $x = 0$ compatibile con le condizioni di equilibrio ora scritte. Si dicono **onde d'urto** le onde che ammettono una discontinuita' nella velocita' e nella densita'.

15.2.1 Fenomeni stazionari discontinui

Vogliamo provare che le onde d'urto non sono possibili in processi adiabatici, e che, in processi non adiabatici sono possibili solo onde di compressione.

Le equazioni di moti stazionari adiabatici obbediscono alle seguenti equazioni

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0, \\
\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) &= -\nabla p,
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

urto

con $p = p(\rho)$. Introdotta l'entalpia, per un processo barotropico,

$$
\frac{dh(\rho(x))}{dx} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho(x)}{dx},
$$

si ha anche

$$
\nabla \cdot (v^2 \rho \mathbf{v}) = -2\nabla \cdot (h(\rho)\rho \mathbf{v}). \tag{4.3}
$$

urto1

Supponiamo che vi sia una transizione dallo stato 1 per $x < 0$ allo stato 2 in $x > 0$. Studiamo la possibilita' di una discontinuita' in $x = 0$ compatibile con le condizioni di equilibrio ora scritte. A tal fine, integriamo le (4.2), (4.3) nel parallelepipedo avente le facce S_1 ed S_2 parallele ad $x = 0$. Applicando il teorema di Gauss, poiche' il moto e' costante nelle altre direzioni, non e' difficile vedere che l'integrale di volume coincide con quello calcolato sulla superficie $S_1 \cup S_2$. Indicando con $\mathbf{n}$ la normale esterna ad S_2 risulta essere $-\mathbf{n}$ la normale esterna ad S_2. Si ricava infine,

$$
\begin{aligned}
\int_{S_1} \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v}) &= \int_{S_2} \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v}), \\
\int_{S_1} \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + p\mathbf{I}) &= \int_{S_2} \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + p\mathbf{I}), \\
\int_{S_1} \mathbf{n} \cdot (v^2(x) + 2h(\rho))\rho \mathbf{v} &= \int_{S_2} \mathbf{n} \cdot (v^2(x) + 2h(\rho))\rho \mathbf{v}.
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

urti

Le condizioni (4.4) note come **condizioni di Rankine-Hugoniot** richiedono che si annullino i salti dei flussi di massa, di quantita' di moto e di energia, cioe' ponendo $u = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$

$$
\begin{aligned}
\rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2 = j; \\
\rho_1 |u_1|^2 + p_1 &= \rho_2 |u_2|^2 + p_2; \\
j\mathbf{v}_1 \times \mathbf{n} &= j\mathbf{v}_2 \times \mathbf{n}; \\
|v_1|^2 + 2h_1 &= |v_2|^2 + 2h_2.
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

salti

Le quantita' in 1 si intendono assegnate, mentre quelle nello stato 2 sono da determinare.

Le incognite sono quattro mentre le equazioni da soddisfare sono cinque! E' quindi impossibile avere transizioni di stato senza prendere in considerazione la termodinamica, vi e' un passaggio di calore: **gli urti non sono rappresentabili con processi adiabatici**, quindi i fenomeni di urto sono **irreversibili**. La relazione $dh = \rho^{-1}dp$ non vale. I valori h_1, h_2 si riferiscono a diverse entropie η_1, η_2.

Distinguiamo i due casi:

(i) $j = 0$, in questo caso p, h, debbono essere continui nel passaggio da 1 a 2, mentre le componenti tangenziali di $\mathbf{v}$ possono avere discontinuita';

(ii) $j \neq 0$, in tal caso le componenti di $\mathbf{v} \times \mathbf{n}$ si manterranno continue, mentre la componente della velocita' nella direzione dell'urto u puo' presentare discontinuita'.

Si prova che ad ogni punto con velocita' supersonica $u > a$ in uno stato corrisponde un punto con velocita' subsonica $u < a$ nell'altro stato. Da $u_1^2 + 2h_1 = u_2^2 + h_2$, si constata che l'entropia e' maggiore per $u < a$ e viceversa. Quindi per il secondo principio della termodinamica possiamo concludere che u diminuisce lungo l'urto e quindi la pressione e la densita' aumentano dando luogo ad un'onda di compressione.

15.2.2 Intersezione delle caratteristiche

Il metodo delle caratteristiche non funziona quando due caratteristiche si incontrano in un certo punto x, t, in tal caso bisogna introdurre il concetto di onda d'urto. Spieghiamo questo problema con un esempio. Sia dato il problema dei valori iniziali di Cauchy ($x \in R$) per l'equazione di Burgers

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{4.6}$$ burgs

$$\rho(y,0) = \begin{cases} 3 & y < 0, \\ 4 & y > 0. \end{cases} \tag{4.7}$$ burg

La densita' e' costante lungo le caratteristiche $\rho(x(y,t),t) = \rho(y,0)$

$$\frac{dx}{dt} = 2\rho.$$

Integrando quest'ultima si ha

$$x = 2\rho(y,0)t + y, \qquad y \in R.$$

Se $y > 0$, allora $\rho(y,0) = 4$, se $y < 0$ $\rho(y,0) = 3$, quindi si ottiene

$$\rho(x,t) = \begin{cases} 3 & x < 6t, \\ 4 & x > 8t. \end{cases} \tag{4.8}$$ burg

Si vede che la distanza tra i punti nei quali $\rho = 3$ ed i punti dove e' $\rho = 4$ aumenta con t. Chiamiamo questa **un'onda di rarefazione**.

Nell'intervallo $6t < x < 8t$ le caratteristiche debbono partire tutte da $y = 0$. si ha allora

$$x = 2\rho t, \qquad 3 < \rho < 4.$$

e per la densita' si trova

$$\rho(x,t) = \frac{x}{2t}.$$

Se i valori iniziali per la densita' sono invertiti le due rette $x = 6t$ e $x = 8t$ sono invertite di posizione nel piano x, t e si incontrano in un punto (x, t). Se continuiamo ad applicare il metodo delle caratteristiche, la caratteristica piu' veloce oltrepassa quella piu' lenta. in questo caso, la densita' puo' divenire una funzione a piu' valori, cf. Haberman p.553. Per spiegare questo risultato, fisicamente inaccettabile, si deve controllare se le ipotesi di regolarita' fatte inizialmente restano valide dopo l'incontro delle caratteristiche. In effetti si verifica che la velocita' e la densita' hanno un salto nel punto (x_s, t_s), detto **urto**.

15.2.3 Velocita' dell'urto per equazioni scalari unidimensionali

In questa sottosezione vogliamo mostrare un metodo per il calcolo della velocita' dell'urto. Si consideri l'equazione

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{4.9}$$

burg

dove $c(\rho) = q'(\rho)$. Supponiamo che su una curva $\Gamma := \{x, t : \quad x_\gamma = x_\gamma(t)\}$, dello spazio tempo, la soluzione (4.9) abbia una discontinuita'. E' quindi lecito affermare che la (4.9) sia valida da entrambi i lati della curva e che perda di signignificato solo sulla curva Γ. Se la massa si conserva anche durante l'urto, allora la quantita' di moto rispetto a Γ da una parte di Γ deve uguagliare la quantita' di moto rispetto a Γ dall'altra parte di Γ, cioe' deve essere

$$\rho(x_l, t)\Big[u(x_l, t) - \frac{dx_\gamma}{dt}\Big] = \rho(x_r, t)\Big[u(x_r, t) - \frac{dx_\gamma}{dt}\Big], \tag{4.10}$$

flow

dove $\frac{dx_\gamma}{dt}$ e' la velocita' dell'urto. Risolvendo (4.10), per $q = \rho u$ troviamo

$$\frac{dx_\gamma}{dt} = \frac{q(x_r, t) - q(x_l, t)}{\rho(x_r, t) - \rho(x_l, t)}\Big] = \frac{[q]}{[[\rho]}. \tag{4.11}$$

velurto

In (4.11) abbiamo introdotto la notazione $[f]$ per indicare il salto della quantita' f. In gas dinamica le (4.11) sono dette condizioni di Rankine Hugoniot.

Capitolo 16.

Apparato cardiovascolare

L'obiettivo e' rendere lo studente familiare con le notazioni di Analisi Lineare e di rendere lo studente in grado di formulare modelli matematici per alcuni problemi relativi la circolazione del sangue nelle arterie e nelle vene.

16.1 Anatomia

L'**apparato cardiovascolare** un sistema chiuso che veicola il sangue in tutto il corpo. Ci sono due gruppi di vasi sanguigni: uno raggiunge i polmoni (**circolo polmonare**) e l'altro il resto del corpo (**circolo sistemico**).
Il *circolo polmonare* porta sangue ricco di anidride carbonica dal cuore alle superfici atte agli scambi gassosi dei polmoni e riporta sangue ricco di ossigeno al cuore.
Il *circolo sistemico* trasporta sangue ricco di ossigeno dal cuore alle cellule corporee e riporta sangue ricco di anidride carbonica. Il sangue spinto dal cuore nell' aorta e nell' arteria polmonare simultaneamente. Le **arterie polmonari**, che originano dal tronco polmonare, trasportano il sangue ai polmoni per gli scambi gassosi. Le **arterie sistemiche**, che originano dall'aorta, distribuiscono il sangue a tutti gli altri organi per gli scambi di gas, sostanze nutritizie e sostanze di rifiuto. Questi vasi si ramificano formando numerosi vasi piu' piccoli che irrorano le varie regioni ed organi.
Ulteriori suddivisioni avvengono all'interno degli organi, determinando il raggiungimento di diverse centinaia di milioni di sottili arterie che forniscono il sangue ad oltre 10 miliardi di capillari. Tutti gli scambi chimici e gassosi tra il sangue e i fluidi interstiziali avvengono tramite la parete dei capillari. Il sangue che lascia i capillari entra in una rete di piccole vene polmonari (circolo polmonare) o nella vena cava superiore o inferiore (circolo sistemico). Ciascuna circolazione inizia e termina nel cuore.
Le **arterie** trasportano il sangue che si allontana dal cuore, mentre le **vene** riportano il sangue al cuore. ($Figura 1.1$)

16.1.1 Vasi sanguigni

Le **pareti delle arterie** e delle vene sono costituite da tre strati: la *tonaca intima*; la *tonaca media* e la *tonaca avventizia.*

La **tonaca intima** lo strato piu' interno di un vaso ematico. Nelle arterie il margine esterno della tonaca intima contiene uno spesso strato di fibre elastiche, detto *membrana elastica interna.* Nelle arterie piu' grandi, il tessuto connettivo piu' esteso e la tonaca intima piu' spessa rispetto alle arterie piu' piccole.

La **tonaca media**, lo strato intermedio, contiene fasci concentrici di tessuto muscolare liscio immersi in una rete di tessuto connettivo. In seguito ad uno stimolo, queste fibrocellule possono contrarsi e ridurre il diametro del vaso, un meccanismo detto *vasocostrizione.* Il rilasciamento delle fibrocellule, invece, aumenta il diametro del lume, meccanismo detto *vasodilatazione.* Le arterie possiedono un sottile strato di fibre elastiche, la *membrana elastica esterna*, che si trova tra la tonaca media e la tonaca avventizia.

La **tonaca avventizia**, lo strato piu' esterno, forma una guaina di tessuto connettivo intorno al vaso. Questo strato molto spesso e le sue fibre generalmente si disperdono in quelle dei tessuti adiacenti, fornendo cos stabilita' e ancoraggio ai vasi ematici. Nelle vene questo strato di solito piu' spesso rispetto alla tonaca media.

Possiamo vedere questa struttura nella $Figura 1.2$

Figura 16.1: *Raffronto di una tipica arteria e di una tipica vena*

La disposizione a strati della parete conferisce ad arterie e vene una considerevole resistenza. Le componenti elastiche e muscolari permettono anche di controllarne le modificazioni del diametro al mutare, ad esempio, della pressione o del volume del sangue. Inoltre la parete delle arterie e delle vene troppo spessa per permettere gli scambi tra le sostanze contenute nella corrente ematica e nei tessuti circostanti, ma anche, a volte, tra il sangue e i tessuti della parete del vaso stesso.

Viaggiando dal cuore verso la periferia, il sangue scorre attraverso una serie di arterie di diametro sempre minore: *arterie elastiche, arterie muscolari* e *arteriole.* Le **arterie elastiche** (tra cui l'aorta) trasportano grandi volumi di sangue lontano dal cuore. Esse sono capaci di stirarsi e ritornare normali in seguito a cambiamenti di pressione. Le **arterie muscolari** distribuiscono il sangue agli organi e ai muscoli scheletrici. Le **arteriole** possono variare per il loro diametro in risposta alle diverse condizioni del corpo. Man mano che si procede verso i capillari, il numero dei vasi aumenta, ma il diametro dei vasi si restringe e la parete si assottiglia. ($Figura 1.3$)

Diametro interno, spessore della parete e quantita' relative ai vari costituenti della parete dei diversi vasi sanguigni che formano il sistema circolatorio

Le **vene** raccolgono il sangue dai tessuti e dagli organi per riportarlo al cuore. La parete delle vene piu' sottile rispetto a quella delle arterie corrispondenti perch la pressione del sangue nelle vene piu' bassa che nelle arterie. Le vene sono classificate sulla base della loro dimensione e, generalemnte, hanno un diametro maggiore delle arterie corrispondenti. Si distinguono in *vene di grosso calibro, vene di medio calibro* e *venule.*

Infine i **capillari** sono i vasi ematici piu' piccoli e piu' delicati; essi sono funzionalmente importanti perch sono i soli vasi la cui parete permette gli scambi tra il sangue e i fluidi interstiziali circostanti. Un tipico capillare formato da un *cilindro* *endoteliale* contornato da una sottile membrana. Il diametro medio di un capillare di circa $8\mu m$. Il volume totale del sangue non distribuito uniformemente tra arterie, capillari e vene. Il cuore, le arterie e i capillari, infatti, contengono di norma il 30-35% del volume ematico (circa 1,5 litri di sangue), mentre il sistema venoso contiene la restante quota (65-70 %, circa 3,5 litri). $(Figura 1.4)$

Distribuzione del sangue nel sistema cardiovascolare

16.1.2 Distinzione tra le arterie e le vene

Le vene e le arterie che vascolarizzano la stessa regione viaggiano tipicamente fianco a fianco in una sottile banda di tessuto connettivo.

In generale, le pareti delle **arterie** sono piu' spesse di quelle delle **vene**. La *tonaca media* delle arterie contiene piu' fibre muscolari lisce ed elastiche rispetto a quella delle vene. Queste componenti contrattili ed elastiche offrono resistenza alla pressione generata dal cuore mentre espelle il sangue in circolo.

Quando non sottoposte alla pressione del sangue, le pareti arteriose si contraggono; ne deriva che, se viste in sezione, le **arterie** appaiono piu' piccole delle **vene** corrispondenti. Poich le pareti delle **arterie** sono relativamente piu' spesse e piu' resistenti, esse mantengono la loro forma circolare in sezione. Le **vene**, sezionate, tendono a collassare e spesso appaiono schiacciate o grossolanamente distorte.

Il rivestimento endoteliale (lo strato che ricopre i vasi ematici) di una **arteria** non puo' contrarsi, cos che quando una arteria si contrae, l'endotelio si solleva in pieghe che danno alle arterie in sezione un aspetto ripiegato. Il rivestimento di una **vena** appare invece come un classico strato endoteliale.

Una delle caratteristiche principali del sistema vascolare che tutti i vasi sanguigni sono distensibili: in presenza di un incremento della pressione il flusso risulta essere il doppio di quanto ci si aspetterebbe, perch insieme all'aumento del gradiente pressorio si ha anche una riduzione della resistenza. La *distensibilita' vascolare* ha altri ruoli importanti nella funzione circolatoria, ad esempio permette alle arterie di accogliere la gittata pulsatoria del cuore e di smorzare le pulsazioni pressorie; cio' consente al flusso ematico di essere continuo a livello dei piu' piccoli vasi.
Tra tutti i vasi, quelli con la maggiore distensibilita' sono le vene, nelle quali anche piccoli aumenti pressori consentono notevoli accumuli di sangue. Le vene hanno, percio', una funzione di riserva che consente l'accumulo di grandi quantita' di sangue utilizzabili al bisogno da altri settori dell'apparato circolatorio. Piu' precisamente le pareti arteriose sono molto piu' robuste di quelle venose e, in media, circa 8 volte meno distensibili. Pertanto, per uno stesso aumento di pressione, una vena si riempie 8 volte di piu' rispetto a un'arteria di calibro corrispondente.

16.1.3 Il sangue

Il **sangue** oltre ad essere un tessuto liquido, anche una sostanza organica insostituibile, di color rosso opaco e costituisce circa il 7-8% del peso corporeo di un individuo. Questo fluido corporeo talmente fondamentale che, se anche soltanto un'area del corpo ne resta priva per un certo numero di minuti, inizia a 'morire'. L'essere umano non puo' vivere essendone privo.
Scientificamente definito come un vero e proprio organo composto per il 45% da una parte solida costituita da cellule di grandezze variabili che sono i globuli rossi

(detti anche eritrociti o emazie), i globuli bianchi (o leucociti) e le piastrine, tutte queste cellule sono prodotte dal midollo osseo; per il restante 55% da un liquido chiamato plasma.
Ogni componente del sangue costituisce e svolge una funzione indispensabile per la vita del corpo umano.

Nel **plasma** di ogni individuo sono presenti anticorpi contro le proteine mancanti sui suoi globuli rossi, per questa ragione per una trasfusione indispensabile conoscere il gruppo sanguigno per non causare una reazione di rigetto da parte degli anticorpi.
Il plasma, essendo formato per quasi il 90% d'acqua, ha una densita' appena superiore di questa. In questa parte del fluido sanguigno sono disciolte numerose sostanze: proteine, ormoni, sostanze nutritive (glucosio, vitamine, amminoacidi, lipidi), gas (diossido di carbonio, ossigeno), ioni (sodio, cloruro, calcio, potassio, magnesio) e l'urea. Le sostanze presenti in maggiore quantita' sono le proteine, di tre tipi: le *albumine*, con importanti funzioni osmotiche; le *globuline*, che trasportano i grassi e sono essenziali nei processi immunitari e il *fibrogeno*, fondamentale nella coagulazione del sangue.

Le componenti cellulari del sangue, invece, sono i globuli rossi, i globuli bianchi e le piastrine.
Il **globulo rosso**, la cui produzione avviene nel midollo delle ossa brevi o piatte, ha una forma biconcava che gli conferisce una superficie maggiore di quella di una normale cellula sferica di pari volume, oltre ad esaltarne la capacita' d'assorbimento e cessione d'ossigeno. Contribuiscono al volume totale del sangue per circa il 40% nella donna e 45% per l'uomo. La caratteristica saliente il colore rosso dovuto all'*emoglobina*, molecola proteica contenente ferro che viene utilizzato dall'ematocrito per fissare l'ossigeno da trasportare. I **globuli bianchi** o leucociti sono le difese immunitarie dell'organismo. I leucociti si dividono in cinque gruppi: linfociti, monociti, neutrofili, basofili, eosinofili. Queste cellule si distinguono per il colore, le dimensioni e la forma del nucleo.
Infine le **piastrine** sono in realta' frammenti di megacariociti, grosse cellule nel midollo osseo che producono le piastrine come gemmazioni citoplasmatiche; quando esse si staccano, entrano nella circolazione sanguigna. Sono prive di nucleo quindi incapaci di riprodursi e la loro vita di circa una decina di giorni. Sono la base per la coagulazione del sangue, un processo che ha inizio quando le piastrine, con la partecipazione di altri fattori, giungono nei punti lesionati, qui tendono ad aderire alle superfici che presentano irregolarita' accumulandosi l'una sull'altra.

Componenti del sangue La viscosita' del sangue circa 5 volte quella dell'acqua. Il sangue, in base a particolari sostanze presenti nei globuli rossi, si differenzia in quattro tipi fondamentali (sangue di tipo A, di tipo B, di tipo AB e di tipo 0); tale suddivisione determinata da specifiche proteine presenti sulla membrana dei globuli rossi.

16.2 Fisiologia

Le leggi dell'idrostatica e dell'idrodinamica permettono di comprendere i principi fisici che sono alla base del funzionamento del sistema cardio-vascolare, anche se le caratteristiche particolari di questo sistema non permettono una descrizione quantitativa precisa.

16.2.1 Sistema cardio-circolatorio

Infatti il **sistema cardio-circolatorio** presenta:

- Condotti elastici e non rigidi
- Tratti (capillari) che consentono la fuoriuscita e l'ingresso di liquido
- Una pompa con attivita' intermittente a ritmo variabile
- Variazioni della pressione esterna ai condotti da distretto a distretto e da momento a momento, variazioni che, essendo i condotti elastici, modificano il calibro del condotto
- Il sangue non un fluido newtoniano, cio caratterizzato da una viscosita' che varia anche al variare della velocita'.

16.2.2 Flusso e velocita' di flusso

Secondo la legge della continuita', in un sistema di tubi a sezione trasversale diversa, il flusso deve essere costante in qualsiasi sezione, indipendentemente dalla sezione del singolo tubo. Questo comporta variazioni della velocita' in funzione della sezione trasversa.

L'area della sezione trasversa aumenta dall'aorta verso i capillari dove raggiunge il massimo valore e si riduce poi dai capillari fino alle vene cave. ($Figura\,1.6$)

Area sezione trasversa

Con l'aumentare della sezione trasversa, la velocita' del sangue diminuisce. Essa, pertanto, sara' minima a livello dei capillari. Questo favorisce i processi di scambio. ($Figura\,1.7$) *Rapporto velocita' del sangue-sazione trasversa*

Nella sezione del condotto a diametro minore la velocita' lineare v minore rispetto a quella delle sezioni con diametro maggiore.

La legge che descrive il flusso attraverso tubi cilindrici stata ricavata da **Hagen-Poiseuille** la cui trattazione matematica e' stata affrontata nei prossimi capitoli, paragrafo 3.10.2). Questa legge valida per il flusso laminare e stazionario di un liquido omogeneo in un tubo rigido.

Nella maggior parte dei vasi, il flusso non stazionario ma *pulsatile*, inoltre l'albero circolatorio ramificato ed, essendo i vasi elastici, il diametro dei vasi puo' variare al variare della pressione.

Infatti, indicato con $\Phi(t)$ il flusso sanguigno funzione del tempo e con $\Sigma_a(t)$ la sezione trasversa dell'aorta, Σ_c la sezione trasversa dei capillari, allora il flusso nell'aorta lo stesso che nei capillari, cio

$$\Phi(t) = \Sigma_a(t)\,\bar{v}_a(t) \;=\; \Sigma_c(t)\,v_c$$

dove $\bar{v}_a(t)$ la velocita' media nell'aorta e v_c la velocita' nei capillari. Osserviamo che da $\bar{v}_a(t)$ pulsatile, con $\Sigma_a(t)$ costante nel tempo, si ricava che nei capillari v_c costante nel tempo e $\Sigma_c(t) = \dfrac{\Phi(t)}{v_c}$.

Abbiamo visto che il sangue costituisce una sospensione di corpuscoli in un liquido, quindi un liquido etereogeneo (non Newtoniano).

La viscosita' del sangue viene definita, in modo intuitivo, dalla **Legge di attrito di Newton**. La forza tangenziale di attrito che si oppone allo scorrimento di due lamine di liquido adiacenti l'una sull'altra, espressa per unita' di superficie della lamina, proporzionale al gradiente di velocita' e alla viscosita' e rappresenta la resistenza che si oppone allo scorrimento di strati adiacenti di liquido.
La viscosita' del sangue aumenta, inoltre, anche all'aumentare dell'ematocrito che la percentuale del volume di un campione di sangue occupato dai globuli rossi. La relazione non lineare, infatti la viscosita' cresce rapidamente per valori dell'ematocrito $> 45\%$. ($Figura$1.8)

Viscosita' del sangue

L'aumento della viscosita' determina un aumento della resistenza al flusso, con conseguente aumento del lavoro cardiaco (questo caso verra' trattato in 3.10.1). Questa aumenta al diminuire della velocita' del sangue (ref 3.9.1), per aggregazione reversibile dei globuli rossi (forma a rouleaux o pila di monete). Nelle condizioni di stasi circolatoria, l'aumento di viscosita' comporta un aumento della resistenza al flusso.
La risultante delle forze propulsive e viscose provoca la rotazione del globulo rosso che avviene in senso antiorario nella parte superiore del vaso e in senso orario nella parte inferiore.
I globuli rossi, dispersi in un fluido che scorre con moto laminare a velocita' sufficientemente elevata, vengono spinti verso l'asse centrale del vaso, dove la velocita' di scorrimento maggiore (accumulo assiale). La velocita' di migrazione del globulo rosso direttamente proporzionale al gradiente di velocita'.
Poich questo gradiente maggiore vicino alla parete del vaso e si riduce dalla periferia verso il centro, i globuli rossi si accumulano al centro del vaso. L'accumulo assiale rende la viscosita' relativa del sangue maggiore al centro del vaso (elevato ematocrito) e minore alla periferia. La viscosita' media risulta cos inferiore a quella attesa dal valore dell'ematocrito. ($Figura$1.9)

Il gradiente di velocita' per i globuli rossi posti in periferia maggiore nei vasi piccoli che in quelli piu' grandi. Questo fa s che la porzione periferica di sangue, povero di globuli rossi, rappresenti una quota percentualmente maggiore nei vasi di calibro ridotto.
Lo strato periferico di plasma , rispetto al calibro del vaso, maggiore in un grosso vaso che in uno piccolo. Quindi, nelle arteriole, lo strato relativamente privo di globuli rossi (bassa viscosita') proporzionalmente via via maggiore al decrescere del calibro del vaso. Questo fa s che la viscosita' apparente del sangue diminuisca ($Figura$1.10).

Risulta sperimentalmente che la viscosita' del sangue diminuisce con il calibro del condotto (**Effetto Fahraeus-Lindqvist**). La viscosita' apparente tende nuovamente ad aumentare nei vasi con diametro vicino a quello dei globuli rossi. ($Figura$1.11)

La riduzione di viscosita' nel microcircolo comporta anche una riduzione della resistenza al flusso. Questo permette un mantenimento del flusso con pressioni propulsive minori. Inoltre la riduzione di viscosita' dovuta all'accumulo assiale, permette di mantenere la fluidita' del sangue anche con ematocriti superiori al 60%. Si nota che nelle patologie associate a riduzione dell'elasticita' dei globuli rossi, come le anemie emolitiche (anemia falciforme), l'accumulo assiale ridotto con conseguente aumento periferico della viscosita' del sangue.

Le Resistenze al flusso nel sistema circolatorio dipendono quindi da:

- Calibro dei vasi
- Tipo di scorrimento (laminare o turbolento)
- Viscosita' del sangue
- Disposizione in serie e in parallelo

Nel sistema circolatorio, la resistenza maggiore al flusso si incontra a livello delle arteriole, che hanno un calibro ridotto rispetto alle arterie. I capillari, pur avendo calibro inferiore a quello delle arteriole, non offrono elevata resistenza perch in numero molto elevato e disposti in parallelo. Misurando la caduta pressoria che si verifica nei vari distretti, si ha un indice della resistenza complessiva che il flusso di sangue incontra nel passare da un distretto all'altro.
Vasi di calibro ridotto, come i capillari, sono in grado di sostenere pressioni intravasali relativamente elevate, senza rompersi.

Facciamo un'osservazione qualitativa: nell'aneurisma arterioso la tensione parietale non riesce piu' a controbilanciare la forza distendente, con conseguente dilatazione del vaso.
Per *forza distendente* intendiamo la pressione dovuta al gradiente di velocita'. L'aumento di diametro del vaso, accompagnato da riduzione dello spessore della parete, rende l'aneurisma permanente. Inoltre la tensione parietale diventa sempre piu' insufficiente a contrastare la pressione interna e il vaso va incontro a rottura.

16.2.3 Funzione circolatoria

La **gittata cardiaca** regolata fondamentalmente dalla sommatoria di tutti i flussi locali dei tessuti. Quando il sangue fluisce in un tessuto, ritorna immediatamente attraverso le vie venose al cuore. Il cuore risponde automaticamente all'aumento di afflusso di sangue immettendo subito tutto il sangue ricevuto nel circolo arterioso, da dove esso proviene.

La **pressione arteriosa** controllata in generale in modo indipendente dai controlli locali di flusso e dalla gittata cardiaca. L'apparato circolatorio dotato di un'ampia serie di meccanismi per il controllo della pressione arteriosa. ($Figura$ 1.12)

I principali fattori fisici e fisiologici che determinano la pressione arteriosa

Il **flusso** di sangue in ogni tessuto dipende quasi totalmente dalle necessita' tissutali; poich i tessuti in attivita' richiedono un maggiore apporto di nutrienti, necessario molto piu' sangue rispetto alla condizione di riposo. I volumi di sangue possono raggiungere, in particolari condizioni, valori $20 - 30$ volte maggiori rispetto al normale. Tuttavia, poich il cuore non puo' aumentare la sua gittata piu' di $4 - 7$ volte in condizioni normali, non possibile incrementare il flusso sanguigno in modo uguale in tutto il corpo in risposta alle maggiori richieste di un particolare distretto tissutale. Quindi si ha una dilatazione o restringimento dei vasi che consente un preciso controllo del flusso locale da parte dell'attivita' tissutale. ($Figura\,1.13$)

Pressione e velocita' nelle diverse parti del sistema vascolare

16.2.4 Relazione tra pressione, flusso e resistenza

Il **flusso** in un vaso sanguigno dipende dalla *differenza di pressione* tra le due estremita' del vaso che spinge il sangue attraverso il vaso stesso e dall'*ostacolo* che trova il sangue nello scorrere attraverso il vaso. La resistenza al flusso il risultato degli attriti che si sviluppano lungo tutto il vaso tra il sangue che scorre e l'endotelio vascolare. In generale il flusso sanguigno direttamente proporzionale alla differenza di pressione ed inversamente proporzionale alla resistenza.

Il sangue, che si muove a velocita' costante in un vaso lungo e liscio, scorre a strati secondo linee di flusso. Ciascuno strato rimane alla stessa distanza dalla parete del vaso e la porzione centrale del sangue resta al centro del vaso (tratteremo questo caso in seguito). Questo modo di scorrere del fluido chiamato **moto laminare** ($Figura\,1.14$) ed opposto al **moto turbolento** ($Figura\,1.15$) , in cui il sangue si muove all'interno del vaso in tutte le direzioni rimescolandosi continuamente. Nel *flusso laminare*, la velocita' al centro del vaso di gran lunga maggiore rispetto a quella ai lati.

*Nel **flusso laminare** tutti gli elementi del fluido si muovono in lamine concentriche parallele all'asse del condotto; non si verifica movimento in direzione del raggio della circoonferenza del condotto. La lamina di fluido a contatto con la parete e' stazionaria; il fluido che si trova lungo l'asse centrale del condotto si muove con la massima velocita'*

*Nel **flusso turbolento**, gli elementi del fluido si muovono in modo irregolare: assialmente, radialmente, circolarmente. Si verificano spesso i vortici.*

Questo comportamento detto *profilo parabolico della velocita' del flusso ematico* ed determinato dal fatto che le molecole dello strato di fluido che toccano la parete si possono muovere soltanto di poco per l'aderenza alla parete vasale; il secondo strato di molecole scivola sul primo e cos via. Il moto del sangue puo' cambiare da laminare a turbolento quando la velocita' del sangue aumenta notevolmente, compaiono ostruzioni vasali, la superficie del vaso diviene ruvida oppure sono presenti brusche deviazioni nel percorso dei vasi. Piu' precisamente la tendenza allo sviluppo della turbolenza direttamente proporzionale alla velocita' del flusso, al diametro del vaso ematico e alla densita' del sangue ed inversamente proporzionale alla sua viscosita'.

Il passaggio da moto laminare a turbolento dipende dalle caratteristiche del condotto, dalla velocita' di scorrimento e dalla natura del liquido. L'aumento della velocita' di scorrimento v, al di sopra di una certa velocita critica v_c, l'aumento del raggio r o la diminuzioni della viscosita' determinano una turbolenza. In due condotti in cui scorre lo stesso liquido, in uno con moto laminare e nell'altro con moto turbolento, l'aumento di flusso maggiore nel primo che nel secondo caso.

Infatti nel moto turbolento i vortici dissipano una maggior quota di energia negli urti tra le molecole di liquido.

Il cuore costituito da due pompe disposte in serie: il **ventricolo destro**, che spinge il sangue attraverso i polmoni per assicurare lo scambio di ossigeno e anidride carbonica e il **ventricolo sinistro**, che spinge il sangue in tutti gli altri tessuti del corpo. L'unidirezionalita' del flusso sanguigno attraverso il cuore assicurata dall'appropriata disposizione di efficaci valvole. Alla periferia il flusso si trasforma da *PULSATILE* (intermittente) a *CONTINUO* (remittente), in virtu' della dilatazione dell'aorta e delle sue branche, che si verifica nel corso della contrazione ventricolare (**sistole**), e del successivo ritorno elastico delle pareti delle grosse arterie, che spinge in avanti il sangue durante il rilasciamento ventricolare (**diastole**).

Procedendo dall'aorta (arteria elastica) alle piccole arterie e arteriole, le *resistenze frizionali* (VISCOSITA') al flusso sono relativamente piccole e anche la caduta di pressione tra la radice dell'aorta e l'inizio di questi vasi di entita' relativamente modesta ($Figura$1.16), mentre la velocita' del sangue progressivamente si riduce.

Caduta di pressione attraverso il sistema vascolare. PA: pressione arteriosa media, PV: pressione venosa

Viceversa, nelle piccole arterie e nelle arteriole, la resistenza al flusso elevata e in questi vasi anche elevata la caduta della pressione. Le arteriole sono la sede principale delle resistenze al flusso sanguigno nel sistema circolatorio. Le variazioni dello stato di contrazione della muscolatura circolare di questi piccoli vasi regolano il flusso sanguigno nei tessuti e svolgono un ruolo importante nella regolazione della pressione arteriosa. Oltre a una rapida caduta di pressione, attraverso le arteriole, il flusso si trasforma da pulsatile a continuo.
Il carattere pulsatile del flusso arterioso, dovuto all'intermittenza dell'eiezione cardiaca, smorzato a livello dei capillari dall'azione combinata della distenzione delle grosse arterie e della resistenza frizionale nelle piccole arterie e nelle arteriole. Da ciascuna arteriola originano diversi capillari, per cui l'area totale della sezione traversa del letto capillare molto piu' ampia di quella dell'arteriola di origine, anche se l'area di sezione traversa di ciascun capillare inferiore. Si avra' , di conseguenza, che il flusso sanguigno attraverso il letto capillare rallenta e a ciascun livello dell'albero circolatorio, la velocita' del flusso sanguigno e l'area di sezione trasversa sono l'immagine speculare l'una dell'altra.

Nel suo ritorno al cuore, il sangue passa prima dai capillari alle venule e poi in vene di diametro maggiore. Progredendo verso il cuore, il numero delle vene si riduce progressivamente e si modificano sia lo spessore che la struttura delle loro pareti. L'area di sezione trasversa delle vene si riduce, mentre la velocita' del flusso sanguigno aumenta (tradurremo questo fenomeno introducendo la *Legge di Castelli*)
.

In un condotto con sezioni di diametro diverso, la velocita' del fluido in ogni sezione del condotto sara' inversamente proporzionale all'area della sezione trasversa ($Figura$ 1.17).

In un condotto con un segmento ampio e uno ristretto, le velocita' del fluido nei due segmenti sono inversamente proporzionali alle aree della sezione trasversa dei segmenti.

L'area totale della sezione trasversa di tutti i capillari sistemici in parallelo notevolmente superiore all'area totale della sezione trasversa di ogni altra sezione in serie del letto vascolare. Quindi la velocita' del flusso sanguigno nei capillari notevolmente inferiore a quella di ogni altro segmento vascolare ($Figura$1.18).

Relazione inversa tra velocita' del flusso sanguigno e area della sezione trasversa dei vasi sanguigni: la principale caduta di pressione attraverso le piccole arterie e le arteriole; la massima *area di sezione trasversa e la minima velocita' di flusso attraverso i capillari. AO: aorta, GA: grosse arterie, PA: piccole arterie, ART: arteriole, CAP: capillari, VEN: venule, PV: piccole vene, GV: grosse vene.*

Questa sezione verra' sviluppata in seguito in ambito matematico.

16.2.5 Aneurisma

Un **aneurisma** una dilatazione della parete di un'arteria.
Gli aneurismi arteriosi si manifestano come dilatazioni pulsanti del vaso: la localizzazione piu' importante a carico dell'aorta e nel 75% dei casi colpisce l'aorta addominale. La causa principale l'aterosclerosi.

L'**arteriosclerosi**, o aterosclerosi, una malattia infiammatoria cronica delle arterie di grande e medio calibro che si instaura a causa dei fattori di rischio cardiovascolare: fumo, ipercolesterolemia, diabete, ipertensione, obesita'; si sospetta che possano esservi anche altre cause, in particolare di natura infettiva e immunologica. Anatomicamente, la lesione caratteristica dell'aterosclerosi l'ateroma o placca aterosclerotica, ossia un ispessimento dell'intima (lo strato piu' interno delle arterie, che rivestito dall'endotelio ed in diretto contatto con il sangue) delle arterie dovuto principalmente all'accumulo di materiale lipidico (grasso) e a proliferazione del tessuto connettivo.

Clinicamente l'aterosclerosi puo' essere asintomatica oppure manifestarsi, di solito dai 40-50 anni in su, con fenomeni ischemici acuti o cronici, che colpiscono principalmente cuore, encefalo, arti inferiori e intestino.

Le lesioni, che hanno come caratteristica specifica la componente lipidica piu' o meno abbondante, si evolvono con il tempo: iniziano nell'infanzia come strie lipidiche (a carattere reversibile) e tendono a divenire vere e proprie placche aterosclerotiche, che nelle fasi avanzate possono restringere (stenosi) il lume arterioso oppure ulcerarsi e complicarsi con una trombosi sovrapposta, che puo' portare ad una occlusione dell'arteria.

Per **arteriosclerosi** si intende invece un indurimento (sclerosi) della parete arteriosa che compare con il progredire dell'eta'. Questo indurimento arterioso la conseguenza dell'accumulo di tessuto connettivale fibroso a scapito della componente elastica.

Per Poiseuille, il flusso al centro dell'arteria ha una velocita' massima; intuitivamente, nella dilatazione del vaso sanguigno, il flusso da lineare diventa turbolento perch aumenta il calibro del condotto rispetto al tratto precedente, quindi la pressione diminuisce sulle pareti e il flusso turbolento perch arriva veloce e poi frena.

Le turbolenze fanno ristagnare il sangue, quindi si crea trombosi; cos le pareti dell'aneurisma sono rivestite da trombi. La **trombosi** una coagulazione intravascolare localizzata, che compare in un soggetto vivente. Esistono trombosi venose ed arteriose

L'aneurisma asintomatico; l'unico segno alla visita una massa pulsante in tutte le direzioni nella zona ombelicale sinistra. L' aorta l'arteria piu' grande dell'organismo e trasporta il sangue dal cuore ai vari organi. Subito dopo il cuore, nella parte intratoracica prende il nome di **aorta toracica**; nell'addome prende il nome di **aorta addominale**; qui si divide in due branche che vanno ciascuna agli arti inferiori (**arteria iliaca destra e sinistra**). L'aorta addominale la piu' coinvolta dall'aneurisma perch la parete vascolarizzata da capillari (vasa vasorum) che diminuiscono nel tratto sottorenale, che quindi meno vascolarizzato. Quando la parete dell'aorta addominale cede e si dilata, questa dilatazione chiamata aneurisma dell' aorta addominale (AAA). ($Figura$ 1.19)

Rappresentazione dell'aneurisma dell'aorta addominale

La pressione del sangue all'interno dell'aorta produce una rottura delle fibre muscolari della tunica media e l'aorta, che normalmente ha un diametro di 2 cm in un adulto, aumenta fino a raggiungere dimensioni di 5 - 6 -7 cm.
Con il tempo questo tratto sclerotizza e il flusso diminuisce, soprattutto per fattori di rischio quali fumo, diabete, ipertensione, per cui facile che l'arteria si sfianchi. Quindi la AAA puo' andare incontro a rottura con grave emorragia interna che conduce allo shock. La AAA puo' causare anche un altro grave problema: coaguli e frammenti di fibrina presenti nella sacca aneurismatica possono staccarsi ed embolizzare in vari organi dando dolore o perdita dell' organo. Ogni anno in Europa sono diagnosticati circa 200.000 casi di AAA. Di questi, 15.000 sono a rischio di rottura se non trattati. Fortunatamente gli AAA diagnosticati precocemente possono essere trattati o curati con ottimi risultati.

Il calibro dell'aorta sottoaddominale 1,5-2cm; quando maggiore di due volte e mezzo questo valore (quindi 4cm) si parla di **aneurisma**; se inferiore ai 4 cm si parla di **ectasia**. Per quanto riguarda il trattamento, si diffusa la metodologia mini-invasiva: non si esegue la incisione xifopubica come nella chirurgia tradizionale, ma se ne fanno due trasversali all'inguine, sulle arterie femorali comuni. Poi con dei cateteri, con la protesi all'interno, si entra, si posiziona a livello dell'aorta e si sfila il catetere; quindi la protesi rimane, escludendo le pareti del flusso. ($Figura$ 1.20)

Rappresentazione della protesi

000000000000000000000000000000000000000000000

16.2 Modello matematico di una fibra elastica

16.2.1 Modello di una fibra elastica

Vogliamo creare un modello matematico che schematizzi il comportamento di una **fibra elastica**. Semplifichiamo il piu' possibile lo studio senza, pero', ledere la generalita'.
Supponiamo inoltre il tessuto elastico omogeneo. Inoltre adottiamo l'ipotesi di **simmetria assiale** per il moto che si sviluppa. Precisamente prendiamo come asse di simmetria quello passante per il centro dell'arteria e studiamo la regione che va da questo asse alla parete esterna dell'arteria. Se facciamo fare un giro completo a questa *faccia* intorno all'asse, ricostruiamo il vaso sanguigno. In tal caso, possiamo limitare lo studio a questa *striscia bidimensionale* perch le proprieta' che osserviamo su questa fascia, sono le stesse che riscontreremmo sulle altre facendo variare l'angolo di rotazione.
Quindi il dominio del fluido $\Omega(t)$ descritto da un tratto di striscia orizzontale di larghezza a, delimitata da una linea rigida retta sotto e una linea deformabile sopra. Per quanto riguarda il dominio della parete arteriosa, schematizziamo gli

strati dell'arteria con un unico tratto di strato $\mathcal{R}(t)$, contiguo alla striscia $\Omega(t)$ occupata dal fluido, e limitata da una parete di carattere elastico, di spessore d.

Introduciamo un sistema di riferimento bidimensionale $\mathcal{R} = (0, bfi, \mathbf{j})$ ed un sistema di coordinate con l'origine e il vettore $\mathbf{i}$ sulla retta indeformabile.
In questo sistema, la base di $\Omega(t)$ descritta da

$$\Gamma_b = \{(x_1, x_2)\,\text{tali che}\, x_1 \in [0, a]\,, x_2 = 0\}$$

e la frontiera deformabile da

$$\Gamma(t) = \{(x_1, x_2)\,\text{tali che}\, x_1 \in [0, a]\,, x_2 = x_2(t) = R + \eta(x_1, t)\}\ .$$

Inoltre definiamo le pareti

$$\Sigma_{out} = \{(x_1, x_2)\ \text{tali che}\ x_1 = 0,\ x_2 \in (0, R)\}\ ,$$

$$\Sigma_{in} = \{(x_1, x_2)\ \text{tali che}\ x_1 = a,\ x_2 \in (0, R)\}\ .$$

In ciascun istante di tempo $t \in (0, T)$ il fluido occupa il dominio

$$\Omega(t) = \{(x_1, x_2)\,\text{tali che}\, x_1 \in [0, a]\,, 0 \le x_2 \le R + \eta(x_1, t)\} \subseteq \mathbb{R}^2\,.$$

Analogamente l'elastico occupa la regione $\mathcal{R}(t)$, con

$$\mathcal{R}(t) = \{(x_1, x_2)\,\text{tali che}\, x_1 \in [0, a]\,, R \le x_2 \le R + \eta(x_1, t)\} \subseteq \mathbb{R}^2\,.$$

La sua frontiera superiore definita da

$$\Gamma_+ = \{(x_1, x_2)\,\text{tali che}\, x_1 \in [0, a]\,, x_2 = R + d\}$$

e quella inferiore da

$$\Gamma_- = \{(x_1, x_2)\,\text{tali che}\, x_1 \in [0, a]\,, x_2 = R\}\ ,$$

notiamo che

$$\Gamma(t) = \Gamma_+$$

a meno dell'orientamento. Le pareti verticali entro le quali supponiamo di studiare il moto sono:

$$\Sigma_0 = \{(x_1, x_2)\ \text{tali che}\ x_1 = 0, x_2 \in [R, R + d]\}\ ,$$

$$\Sigma_a = \{(x_1, x_2)\ \text{tali che}\ x_1 = a, x_2 \in [R, R + d]\}\ .$$

Possiamo schematizzare la situazione presa in esame nella $Figura$4.1.

Rappresentazione della striscia di fibra considerata

Abbiamo visto che le pareti delle arterie possono essere considerate come materiale elastico deformabile, data la presenza di uno strato spesso di fibre elastiche nella tonaca intima e media.
Ricordiamo la definizione di materiale elastico ($Paragrafo$ 3.8):

Definizione 16.2.1 (Materiale elastico) *Un corpo materiale $\mathcal{B}$ si dice* ***elastico*** *se lo sforzo ha come classe costitutiva la funzione di risposta*

$$\widehat{T}(\cdot, t) : \mathcal{L}^{+} \times \mathcal{B} \longrightarrow Sim$$

tale che

$$\boldsymbol{T}(x,t) = \widehat{T}(\boldsymbol{F}(x,t), \overrightarrow{X})$$

cio lo sforzo noto non appena il gradiente di deformazione $\boldsymbol{F}$ dato.

L'equazione indefinita in coordinate Lagrangiane per un *continuo elastico* abbiamo visto essere della forma

$$\rho_0(\overrightarrow{X})\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}(\overrightarrow{X}, t) = \rho_0(\overrightarrow{X})\mathbf{b}(\overrightarrow{X}, t) + Div\mathbf{S}(\overrightarrow{X}, t) \qquad \text{in } \mathcal{R}(t) \ ,$$

dove $\mathbf{b}$ la *forza per unita' di massa*, ρ_0 la *densita'* e il tensore $\mathbf{S}$ detto *Tensore di Piola-Kirchoff* ed definito da

$$\mathbf{S} = det\mathbf{F}\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{T}(t, \mathbf{T})$$

con $det\mathbf{F}\,\mathbf{F}^{-T}$ matrice dei cofattori di $\mathbf{F}$.
In questa equazione in coordinate Lagrangiane l'incognita la posizione $\chi(t, \overrightarrow{X})$.
Imponiamo come **condizioni iniziali**

$$\chi(\overrightarrow{X}, 0) = \chi_0(\overrightarrow{X}) \, ,$$

$$\dot{\chi}(\overrightarrow{X}, 0) = \chi_1(\overrightarrow{X}) \, ;$$

mentre per le **condizioni al contorno**, supponiamo su Σ_{in} e Σ_{out} la **periodicita' in** X_2:

$$\Sigma_{in} = \Sigma_{out}$$

cio tutti i campi rimangono costanti, con i loro gradienti temporali e spaziali, vale a dire

$$\mathbf{v}(0, x_2, t) = \mathbf{v}(a, x_2, t),$$

$$grad\mathbf{v}(0, x_2, t) = grad\mathbf{v}(a, x_2, t),$$

$$\eta(0, x_2, t) = \eta(a, x_2, t),$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_1}(0, x_2, t) = \frac{\partial \eta}{\partial x_1}(a, x_2, t),$$

e tutti gli altri campi.
Mentre su Γ_- e Γ_+ supponiamo la seguente condizione

$$\mathbf{S} \cdot \overrightarrow{N} = \mathbf{S}_{est} \cdot \overrightarrow{N} \, ,$$

con $\overrightarrow{N}$ normale esterna alla curva.
Relativamente all'ordine di derivazione nella variabile spaziale notiamo che per la classe di continui elastici alla quale ci siamo limitati, il tensore degli sforzi $\mathbf{T}$ e quindi $\mathbf{S}$, dipende solo da $\mathbf{F}$ che contiene le derivate prime di $\chi(t, \overrightarrow{X})$. Quindi otteniamo un

sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine in t ed in x.

Per semplicita' supponiamo lo strato **omogeneo**, cio

$$\rho_0(\overrightarrow{X}) = 1$$

e

$$\mathbf{b}(\overrightarrow{X}, t) = 0\,,$$

in pratica trascuriamo la forza per unita' di massa (abbiamo studiato il caso piu' generale in cui la forza per unita' di massa non nulla nel paragrafo 3.7). Queste assunzioni ci permettono di supporre l'arteria non soggetta a forze esterne.
Quindi l'equazione indefinita nel nostro caso si riduce a

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}(\overrightarrow{X}, t) = Div\mathbf{S}(\overrightarrow{X}, t)\,.$$

In componenti scriviamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = (DivS)_1\,, \\ \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = (DivS)_2\,. \end{cases} \tag{16.2.1}$$

Come classe degli spostamenti $\mathbf{u} = u\boldsymbol{e}_2$ prendiamo gli scorrimenti lungo X_2

$$\begin{cases} x_1 = X_1\,, \\ x_2(t) = X_2 + u(X_1, X_2, t)\,, \end{cases} \tag{16.2.2}$$

con $\mathbf{u}(X_1, X_2, t)$ *spostamento*. Ossia supponiamo che la seconda coordinata X_2 del punto sulla frontiera deformabile sia soggetta ad uno spostamento $\mathbf{u}(X_1, X_2, t)$ e definiamo una nuova componente x_2 come somma di una quota fissa e di questo spostamento. Ricaviamo il *tensore Gradiente di deformazione* che ricordiamo essere

$$\mathbf{F}(\overrightarrow{X}, t) = \frac{\partial \chi}{\partial \overrightarrow{X}}(\overrightarrow{X}, t)\,.$$

Cio

$$\mathbf{F}(\overrightarrow{X}, t) = F_{ij} = \frac{\partial \chi_i\,(\overrightarrow{X}, t)}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}\,,$$

con $x_i = \chi_i(\overrightarrow{X}, t)\,,$
quindi

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\partial u}{\partial X_1} \\ 0 & 1 + \dfrac{\partial u}{\partial X_2}\,. \end{vmatrix}$$

Ricaviamo il *Tensore deformazione di Cauchy-Green*

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$$

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial\, u}{\partial\, X_1} & 1 + \dfrac{\partial\, u}{\partial\, X_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\partial\, u}{\partial\, X_1} \\ 0 & 1 + \dfrac{\partial\, u}{\partial\, X_2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\partial\, u}{\partial\, X_1} \\ \dfrac{\partial\, u}{\partial\, X_1} & \left(\dfrac{\partial\, u}{\partial\, X_1}\right)^2 + \left(1 + \dfrac{\partial\, u}{\partial\, X_2}\right)^2 \end{vmatrix} .$$

Per semplicita' nella scrittura indichiamo

$$\gamma = \frac{\partial\, u}{\partial\, X_1} = F_{12} ,$$

$$\lambda = \frac{\partial\, u}{\partial\, X_2} = F_{22} - 1 .$$

Quindi $\mathbf{C}$ puo' essere riscritto nella forma:

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & (\gamma)^2 + (1+\lambda)^2 \end{vmatrix} .$$

Ricaviamo il tensore di Piola-Kirckoff: per la definizione di **continuo iperelastico** esiste una funzione scalare $\epsilon = \epsilon(\mathbf{F})$ detta **densita' di energia elastica** tale che il Tensore di Piola-Kirchoff abbia la seguente forma

$$\mathbf{S} = \frac{\partial\, \epsilon}{\partial\, \mathbf{F}} \Longleftrightarrow S_{ij} = \frac{\partial\, \epsilon}{\partial\, F_{ij}} .$$

Vediamo che forma ha la densita' di energia elastica in termini degli invarianti principali di $\mathbf{C}$.
A questo scopo calcoliamo il determinante della matrice $\mathbf{C}$ che per una matrice quadrata 2×2 ricordiamo risulta essere la differenza tra il prodotto degli elementi sulla diagonale principale e il prodotto degli elementi sulla diagonale secondaria:

$$det\mathbf{C} = \gamma^2 + (1+\lambda)^2 - \gamma^2 = 1 + \lambda^2 + 2\lambda .$$

Calcoliamo anche la traccia di questa matrice che per una matrice quadrata 2×2 ricordiamo risulta essere la somma degli elementi sulla diagonale principale:

$$tr\mathbf{C} = 1 + \gamma^2 + (1+\lambda)^2 = 1 + \gamma^2 + 1 + \lambda^2 + 2\lambda = 2 + \gamma^2 + \lambda^2 + 2\lambda .$$

Da ora in poi considereremo la seguente **ipotesi costitutiva** per la densita' elastica ϵ:

$$\epsilon = \epsilon(\gamma, \lambda) = \frac{k}{2}\gamma^2 + \frac{l}{2}(\lambda + 1)^2 ,$$

dove k e l sono costanti elastiche positive.
Quindi

$$\mathbf{S} = \frac{\partial\, \epsilon(\gamma)}{\partial\, F_{ij}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\, \epsilon(\gamma)}{\partial\, F_{11}} & \dfrac{\partial\, \epsilon(\gamma)}{\partial\, F_{12}} \\ \dfrac{\partial\, \epsilon(\gamma)}{\partial\, F_{21}} & \dfrac{\partial\, \epsilon(\gamma)}{\partial\, F_{22}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial\, \epsilon(\gamma)}{\partial\, \gamma} \\ 0 & \dfrac{\partial\, \epsilon(\gamma)}{\partial\, \lambda} . \end{vmatrix}$$

Imponiamo, ora, le *condizioni iniziali*

$$\begin{cases} x_1(\overrightarrow{X},0) = X_1\,, \\ x_2(\overrightarrow{X},0) = X_2 + u_0(X_1,X_2)\,. \end{cases} \tag{16.2.3}$$

Le *condizioni al contorno* su Σ_0 e Σ_a sono di periodicita', cio

$$\Sigma_0 = \Sigma_a\,.$$

Consideriamo solo spostamenti piccoli, per i quali

$$\mathbf{u} \approx \delta$$

questa assunzione ci permettera' di semplificare i calcoli pur non imponendo restrizioni troppo forti alla generalita' dello studio.
Risolvendo il sistema $(4.1)_1$, si ha

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} = 0\,,$$

$$(DivS)_1 = \frac{\partial S_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial S_{21}}{\partial X_2} = 0 + 0\,,$$

dove abbiamo usato i valori del tensore di Piola-Kirckoff appena ricavati e considerato che X_1 non dipende dal tempo.
Questa equazione, allora, soddisfatta identicamente, non da' contributo e si ha

$$x_1 = X_1 \qquad \text{per ogni } t. \tag{16.2.4}$$

Per la seconda componente si ha

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X_2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}(X_1,X_2,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{u}(X_1,X_2,t)}{\partial t^2}\,,$$

$$(DivS)_2 = \frac{\partial S_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial S_{21}}{\partial X_2}\,,$$

quindi

$$\frac{\partial^2 \vec{u}(X_1,X_2,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial S_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial S_{21}}{\partial X_2}\,.$$

Si puo' vedere che una equazione differenziale del secondo ordine in t e anche in x.
Possiamo finalmente impostare il moto considerando la forma trovata della prima equazione indefinita, le condizioni iniziali e le condizioni al contorno. Vale a dire il problema dei valori iniziali ed al contorno per la **parete elastica**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(X_1,X_2,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial S_{11}}{\partial X_1} + \dfrac{\partial S_{21}}{\partial X_2} \\ u(X_1,X_2,0) = u_0(X_1,X_2) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(X_1,X_2,0) = u_1(X_1,X_2) \\ \mathbf{S}\cdot\overrightarrow{N} = \mathbf{S}_{est}\cdot\overrightarrow{N} \qquad \text{su } \Gamma_\pm \\ \Sigma_0 = \Sigma_a \end{cases} \tag{16.2.5}$$

con incognita u.

Per semplificare il problema prendiamo il **valore medio** rispetto a X_2 di $\vec{u}$ in $\Gamma(t)$ *Rappresentazione del valor medio preso per* $\vec{u}$ definito da

$$\bar{u} = \frac{1}{d}\int_R^{R+d} u(X_1, X_2, t)\, dX_2 = \eta(X_1, t)\,.$$

Integriamo la prima equazione indefinita per questo moto $(4.5)_1$ rispetto a X_2 tra R e $R+d$ e dividiamo per d ottenendo

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{d}\int_R^{R+d} u(X_1, X_2, t)\, dX_2 = \frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{1}{d}\int_R^{R+d} S_{12}\, dX_2\right) + \frac{1}{d}\int_R^{R+d} \frac{\partial S_{22}}{\partial X_2}\, dX_2\,.$$

Notiamo che la prima quantita' a sinistra dell'uguale proprio il valor medio di u e del secondo integrale a destra dell'uguale possiamo trovare una primitiva:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{u}(\overrightarrow{X}, t) = \frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{1}{d}\int_R^{R+d} S_{12}\, dX_2\right) + \frac{S_{22}(X_1,\, R+d,\, t) - S_{22}(X_1, R, t)}{d}\,. \tag{16.2.6}$$

Vogliamo ricavare da quest'ultima uguaglianza il valore di $\dfrac{S_{22}(X_1, R, t)}{d}$.

Ricordiamo la forma della densita' di energia elastica ϵ

$$\epsilon(\gamma) = \frac{k}{2}\gamma^2 + \frac{l}{2}(\lambda+1)^2\,,$$

con k e l costanti positive.
Quindi, sostituendo questa funzione in S_{12}, si ottiene

$$S_{12} = \frac{\partial\, \epsilon(\gamma^2)}{\partial\, \gamma} = k\gamma\,,$$

calcoliamo anche

$$\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{1}{d}\int_R^{R+d} S_{12}\, dX_2\right) = \frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{1}{d}\int_R^{R+d} k\frac{\partial u}{\partial X_1}\, dX_2\right)\,.$$

Notiamo che questo proprio il valore medio dello spostamento u, quindi

$$\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{1}{d}\int_R^{R+d} S_{12}\, dX_2\right) = k\frac{\partial^2}{\partial X_1^2}\bar{u}\,.$$

S_{12} compare nella formula (4.6). Dalle condizioni al contorno $(4.5)_4$, supponendo all'esterno dell'arteria una pressione uniforme p_e, si trova

$$\mathbf{S}\cdot \boldsymbol{e}_2 = -p_e \cdot \boldsymbol{e}_2 \qquad \text{su } \Gamma_+\,,$$

quindi in particolare

$$S_{22} = -p_e\,,$$

cio vogliamo che la sforzo si opponga alla pressione esterna.

Sostituiamo quanto trovato in (4.6) e otteniamo

$$\frac{S_{22}(X_1,R,t)}{d} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{u}(\overrightarrow{X},t) + k\frac{\partial^2}{\partial X_1^2}\bar{u} - \frac{p_e}{d}\,.$$

Moltiplichiamo per d

$$S_{22}(X_1,R,t) = -d\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{u}(\overrightarrow{X},t) + k\,d\frac{\partial^2}{\partial X_1^2}\bar{u} - p_e\,.$$

Ricordiamo che abbiamo indicato con η lo spostamento medio, allora

$$S_{22}(X_1,R,t) = -d\frac{\partial^2}{\partial t^2}\eta + dk\frac{\partial^2}{\partial X_1^2}\eta - p_e\,. \tag{16.2.7}$$

[**Relazione tra tensore di Cauchy e di Piola-Kirchoff**] Vediamo che forma assume il tensore di Piola-Kirckoff per l'elastico in questione. Dalla definizione abbiamo che

$$\mathbf{S} = \mathbf{J}\mathbf{T}(\mathbf{F}^{-1})^T$$

dove $\mathbf{T}$ il tensore degli sforzi di Cauchy che misura la forza di contatto per unita' di area nella configurazione attuale, o anche deformata e di cui ricordiamo la definizione

Associamo a $\mathbf{t}(\mathbf{x},t,\cdot)$ il **tensore degli sforzi di Cauchy** nel quale le 6 componenti dipendono solo dal tempo e dal punto.

In componenti

$$\mathbf{t}(\mathbf{x},t,.) = \sum_{i,j=1,2,3} T^{ij}(t,\mathbf{x})\alpha_i \boldsymbol{e}_j = \mathbf{n}\mathbf{T}\,.$$

Ricordiamo anche la classe degli scorrimenti considerata

$$\begin{cases} x_1 = X_1\,, \\ x_2(t) = X_2 + \mathbf{u}(X_1,X_2,t)\,. \end{cases} \tag{16.2.8}$$

Il tensore gradiente di deformazione puo' essere visto come la somma della matrice identita' piu' un'altra matrice

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial u}{\partial X_1} \\ 0 & 1+\frac{\partial u}{\partial X_2} \end{vmatrix} = \mathbb{I} + \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial X_1} \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial X_2} \end{vmatrix}\,.$$

Vogliamo **linearizzare** le equazioni attorno alla posizione di equilibrio

$$\eta = 0\,,$$

$$\mathbf{u} = 0\,.$$

Questo comporta che consideriamo le funzioni η e $\mathbf{u}$, assieme alle loro derivate spaziali e temporali, uniformemente piccole in $(x,\,t)$ rispetto all'unita'.

In termini analitici, detto $\epsilon > 0$ un valore costante molto piccolo, si ha

$$\vec{u} < \epsilon, \qquad \frac{\partial \vec{u}}{\partial X_1} < \epsilon\,,$$

quindi, se chiamiamo $\epsilon\mathbf{B}$ la matrice

$$\epsilon\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial u}{\partial X_1} \\ 0 & \dfrac{\partial u}{\partial X_2}\,, \end{vmatrix}$$

si ha che

$$\mathbf{F} = \mathbb{I} + \epsilon\mathbf{B}\,.$$

Per cui possiamo assumere

$$\mathbf{F} \approx \mathbb{I}$$

trascurando i piccoli spostamenti rispetto all'unita'.
Analogamente, per quanto riguarda il determinante del gradiente di deformazione, si osserva che

$$det\mathbf{F} = 1 + \frac{\partial u}{\partial X_2} \approx 1\,.$$

Vediamo che forma ha la componente normale del tensore degli sforzi di Cauchy.
A tal fine ricordiamo delle relazioni introdotte nel paragrafo (2.4.3):

$$dv \;=\; \mathbf{J}dV\,,$$

che la formula di trasformazione per l'elemento di volume, con $\mathbf{J} \;=\; det\mathbf{F}$ e

$$ds\,\mathbf{n} = \mathbf{J}dS\,\overrightarrow{N}\cdot\mathbf{F}^{-T}\,.$$

Adesso possiamo vedere che forma ha la componente normale del tensore degli sforzi di Cauchy che legato al tensore di Piola-Kirckoff dalla relazione

$$\mathbf{T} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{F}^T\,.$$

Quindi

$$\mathbf{T}_{el}ds\,\mathbf{n} = J^{-1}\mathbf{S}\mathbf{F}^T JdS\,\overrightarrow{N}\cdot\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{S}dS\,\overrightarrow{N}\,.$$

Ricapitoliamo le posizioni assunte finora:

$$\mathbf{F} \approx \mathbb{I}\,,$$

$$\mathbf{T}_{el}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{S}\cdot\overrightarrow{N}\,. \qquad (16.2.9)$$

In vista della linearizzazione adottata in precedenza, possiamo affermare che $\overrightarrow{N} = \boldsymbol{e}_2 = \mathbf{n}$ e quindi

$$\mathbf{T}_{el}\,\mathbf{n} = \mathbf{S}\,\mathbf{n}$$

dove

$$\mathbf{S}\,\mathbf{n} = \mathbf{S}_{22}\boldsymbol{e}_2\cdot\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{e}_2 \;=\; \mathbf{S}_{22}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 \approx \mathbf{S}_{22}\boldsymbol{e}_2\,,$$

con

$$S_{22}(X_1,R,t) = -d\frac{\partial^2}{\partial t^2}\eta + dk\frac{\partial^2}{\partial X_1^2}\eta - p_e\,.$$

Quindi abbiamo ricavato

$$\mathbf{S}\cdot\overrightarrow{N} = S_{22}(R,t)\cdot\boldsymbol{e}_2 = \left(-d\frac{\partial^2}{\partial t^2}\eta + dk\frac{\partial^2}{\partial X_1^2}\eta - p_e\right)\cdot\boldsymbol{e}_2\,.$$

Avendo considerato la striscia bidimensionale nel piano O_{x_1,x_2},dovremmo supporre, per semplicita', anche che la normale sia diretta perpendicolarmente verso l'esterno in ogni punto; vale a dire

$$\mathbf{n}\approx\boldsymbol{e}_2\,.$$

Nel seguito non faremo questa ipotesi per conservare una impostazione piu' generale.

16.2 Interazione fluido-elastico

Studiamo ora l'interazione del fluido con la struttura elastica appena modellizzata ($Figura\,4.3$).

Rappresentazione del problema semplificato
A questo scopo, ricordiamo

$$\Gamma_b = \{(x_1,x_2) \text{ tali che } x_1\in(0,a), x_2 = 0\}$$

la base della striscia considerata e sia

$$\Gamma_\eta(t) = \{(x_1,x_2) \text{ tali che } x_1\in(0,a), x_2 = X_2+\eta(x_1,t)\}$$

la frontiera deformabile.
Il fluido occupa il dominio compreso tra Γ_b e $\Gamma_{\eta(t)}$

$$\Omega_\eta(t) = \{(x_1,x_2) \text{ tali che } x_1\in(0,a), 0\le x_2\le X_2+\eta(x_1,t)\}\subseteq\mathbb{R}^2.$$

Abbiamo visto che il sangue un liquido viscoso incomprimibile costituito da cellule (globuli rossi, globuli bianchi e piastrine) disperse in un fluido: il plasma.

In generale il modello matematico piu' semplice per lo studio del moto di un fluido viscoso incomprimibile, consistente con il principio di conservazione della massa e con l'ipotesi di Stokes che le forze di attrito sono invarianti al variare del riferimento, fornito dalle **equazioni di Navier-Stokes** (cfr paragrafo 3.4.1):

$$\begin{cases} div\mathbf{v} = 0 \qquad (\mathbf{x},t)\in\Omega\times(0,T) \qquad \text{che la condizione di incomprimibilita'} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + v_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{v} = \mathbf{b} - \,grad\,p + 2\mu div\mathbf{D}\,. \end{cases} \tag{16.2.1}$$

Siamo arrivati a questa equazione partendo dalla prima equazione indefinita

$$\rho\frac{d\,\vec{v}}{dt} = \rho\mathbf{b} + div\mathbf{T}\,.$$

Teniamo conto che per un fluido incomprimibile la relazione sforzo deformazione data da

$$\mathbf{T} = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbf{D}\,,$$

dove μ il coefficiente di viscosita' e $\mathbf{D}$ il gradiente di deformazione. Calcoliamo la divergenza di $\mathbf{T}$ che in componenti

$$(div\mathbf{T})_i = T_{ij,j} = (-p)_{,j}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij,j} = (-p)_i + 2\mu D_{ij,j} = -(\,grad\,p)_i + 2\mu(div\mathbf{D})_i\,.$$

Alle equazioni di Navier-Stokes dobbiamo aggiungere le condizioni al contorno. Sulla porzione rigida della frontiera Γ_b assegniamo la **condizione di aderenza**

$$\vec{v} = \mathbf{0}\,,$$

mentre sulla parete deformabile $\Gamma_\eta(t)$ dobbiamo imporre due condizioni:

- una **condizione dinamica** che tiene conto del bilancio degli sforzi

$$\mathbf{T}_f \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}_{el} \cdot \mathbf{n}$$

  dove $\mathbf{T}_f = \mathbf{T}$ il tensore degli sforzi del fluido (il sangue) e $\mathbf{T}_{el}$ quello dell'elastico (la parete dell'arteria).

- una **condizione cinematica** per la continuita' della componente normale della velocita', detta anche **condizione di impermeabilita'**. In pratica sia $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}(P,t)$ la velocita', che supponiamo incognita, del punto$P$ con $P \in \Gamma_\eta(t)$. L'esperienza ci mostra che, se abbiamo a che fare con un fluido, le sue particelle non possono penetrare attraverso le pareti. Di conseguenza si impone al campo $\mathbf{v}$ la condizione

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \overrightarrow{V} \cdot \mathbf{n}\,,$$

  dove $\mathbf{n}$ il versore normale a $\Gamma_\eta(t)$ rivolto verso l'esterno.

Da come abbiamo definito la frontiera deformabile si ha che questa soggetta solo a spostamenti verticali. In particolare proviamo che, per uno scorrimento, l'atto di moto $\overrightarrow{V}$ della parete ha la forma

$$\overrightarrow{V} = \left(0, \frac{\partial \eta}{\partial t}\right)\,.$$

Infatti sia $P = (x_1, x_2)$, allora

$$\overrightarrow{V}(P,t) = \frac{\partial P}{\partial t} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial x_2}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial X_1}{\partial t}, \frac{\partial\,(X_2 + \eta(x_1,t))}{\partial t}\right) = \left(0, \frac{\partial \eta(x_1,t)}{\partial t}\right)\,.$$

Calcoliamo la normale a $\Gamma_\eta(t)$.
Sia $P = P(s)$ un punto su $\Gamma_\eta(t)$, con s parametro della curva, considerando un istante di tempo fisso. Allora, ricordando la classe degli spostamenti considerata

$$x_1 = X_1\,,$$

$$x_2 = X_2 + \eta(x_1,t)\,,$$

il vettore unitario tangente **t**

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(s) = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial s}}{\left|\dfrac{\partial P}{\partial s}\right|} .$$

Prendiamo come parametro s su $\Gamma_\eta(t)$ la coordinata x_1, allora

$$\mathbf{t} = \frac{1}{|\cdot|}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}, \frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{|\cdot|}\left(1, \frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right) .$$

Quindi la normale si ottiene cambiando il segno a una delle coordinate

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{G}}\left(-\frac{\partial \eta}{\partial x_1}, 1\right) \qquad \text{con } G = 1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right)^2 .$$

Si nota che $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{e}_2 \geq 0$, quindi $\mathbf{n}$ la normale esterna alla curva $\Gamma_\eta(t)$.
Quindi

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x_1} v_1 + v_2\right) \frac{1}{\sqrt{G}}$$

e

$$\overrightarrow{V} \cdot \mathbf{n} = (0, \frac{\partial \eta}{\partial t}) \cdot \frac{1}{\sqrt{G}}\left(-\frac{\partial \eta}{\partial x_1}, 1\right)$$

A questo punto possiamo scrivere la condizione cinematica nella forma

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{G}} = \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x_1} v_1 + v_2\right) \frac{1}{\sqrt{G}}$$

Il modello matematico quindi governato dal seguente problema dei valori iniziali ed al bordo per il continuoVale a dire il problema dei valori iniziali ed al contorno per il **continuo fluido**

$$\begin{cases} div\mathbf{v} = 0 \qquad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T) \\ \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + grad\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b} - grad\,p + 2\mu div\mathbf{D} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial t} = -\dfrac{\partial \eta}{\partial x_1} v_1 + v_2 \\ \vec{v} = \vec{0} \qquad \text{su } \Gamma_b \\ \mathbf{T}_f \cdot \mathbf{n} = -d\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + dk\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} - p_e \cdot \boldsymbol{e}_2 \\ \mathbf{v}(x_1, x_2, 0) = \mathbf{v}_0 \\ \eta(x_1, 0) = \eta_0 \end{cases} \tag{16.2.2}$$

pafl

Abbiamo 5 equazioni in 5 incognite (le 3 componenti della velocita', la pressione e η). Questo problema detto **Problema ai valori iniziali e al contorno** ed impostato completamente e in maniera corretta.

16.2 Problema della buona posizione

Il problema di buona posizione per le equazioni di Navier-Stokes in un condotto elastico si propone di determinare, in corrispondenza ad un prefissato atto di moto regolare iniziale, e ad una posizione iniziale della parete un'unica soluzione regolare del sistema (16.2.2).
Questo problema ci conduce a ricavare stime sulla velocita' e sulla deformazione in termini di dati assegnati. In generale, tali stime sono necessarie anche per una dimostrazione di un teorema di esistenza globale nel tempo.
Purtroppo per le equazioni alle derivate parziali non lineari, non solo generalmente impossibile calcolare esattamente la soluzione, ma anche difficile provare in maniera teorica l'esistenza globale di tale soluzione.
D'altra parte l'ipotesi di esistenza globale fondamentale per molti problemi pratici. In particolare, essa preliminare allo studio della stabilita' del moto. Infatti, la stabilita' studia per $t \longrightarrow \infty$ la norma spaziale della differenza tra due soluzioni prefissate ed esse devono avere senso (esistere globalmente in t). Soluzioni di questo problema esistono ma solo per intervalli piccoli di tempo.
D'altro canto esistono soluzioni globali nel tempo ma esse non sono regolari e son o dette **soluzioni deboli**. Le soluzioni deboli verificano il sistema non piu' puntualmente e in ogni istante, ma in senso integrale o *generalizzato*. Prendiamo come regione entro la quale porci la stessa del paragrafo precedente, cio definiamo

$$\Gamma_b = \{(x_1, x_2) \text{ tali che } x_1 \in (0, a), x_2 = 0\}$$

la base della striscia considerata e

$$\Gamma_\eta(t) = \{(x_1, x_2) \text{ tali che } x_1 \in (0, a), x_2 = R + \eta(x_1, t)\}$$

la frontiera deformabile, ricordando che

$$\bar{u} = \frac{1}{d} \int_R^{R+d} \vec{u}(x_1, X_2, t)\, dX_2 = \eta(x_1, t)\,.$$

Il fluido occupa il dominio compreso da queste frontiere

$$\Omega_\eta(t) = \{(x_1, x_2) \text{ tali che } x_1 \in (0, a), 0 \le x_2 \le h + \eta(x_1, t)\} \subseteq \mathbb{R}^2\,.$$

Inoltre definiamo

$$\Sigma_{out} = \{(x_1, x_2) \text{ tali che } x_1 = 0,\ x_2 \in (0, R)\}\ ,$$

$$\Sigma_{in} = \{(x_1, x_2) \text{ tali che } x_1 = a,\ x_2 \in (0, R)\}\ .$$

Ora sia t un certo istante di tempo e P un punto nella regione $\Omega_\eta(t)$, allora la prima equazione indefinita

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + grad\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = div\mathbf{T}_f\,,$$

avendo supposto la densita' unitaria e la forze esterne nulle.
Ricordiamo la relazione sforzo-deformazione per il tensore di Cauchy

$$\mathbf{T}_f = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbf{D}\,,$$

dove p la pressione, μ il coefficiente di viscosita' e $\mathbf{D}$ il tensore gradiente di deformazione che della forma

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(grad\mathbf{v} + grad^T\mathbf{v}\right) .$$

Notiamo che, con le posizioni fatte, la prima equazione indefinita diventa una equazione alle derivate parziali parabolica, del primo ordine rispetto al tempo e del secondo ordine rispetto a x.
A questa equazione dobbiamo aggiungere la relazione che indica l'incomprimibilita' del fluido

$$div\mathbf{v} = 0 .$$

Su Σ_{in} e Σ_{out} supponiamo la **periodicita'**:

$$\Sigma_{in} = \Sigma_{out}$$

Come ulteriori condizioni al contorno, supponiamo su Γ_b la **condizione di aderenza**, cio

$$\vec{v} = \vec{0} \qquad \text{su } \Gamma_b$$

e su Γ_t la **condizione al bordo sugli sforzi**

$$\mathbf{T}_f \cdot \mathbf{n} \,=\, \mathbf{T}_{el} \cdot \mathbf{n} .$$

Supponiamo anche la **condizione di impermeabilita'**

$$\frac{\partial\,\eta}{\partial\,t} = -\frac{\partial\,\eta}{\partial\,x_1} v_1 \,+\, v_2 ,$$

dove $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}(P,t)$ l'atto di moto, che supponiamo noto, della parete presa in considerazione con $P \in \Gamma_\eta(t)$.

Infine abbiamo visto, dall'Osserazione 5 del paragrafo precedente, che possiamo scrivere

$$\mathbf{T}_{el} ds\, \mathbf{n} = \mathbf{S} dS\, \overrightarrow{N} ,$$

dove $\mathbf{T}_{el}$ il tensore di Caucky-Green e $\mathbf{S}$ il tensore di Piola-Kirckoff che abbiamo ricavato

$$\mathbf{S} \cdot \overrightarrow{N} = S_{22}(R,t) \cdot \boldsymbol{e}_2 = \left(-d\frac{\partial^2}{\partial\,t^2}\eta + dk\frac{\partial^2}{\partial\,X_1^2}\eta - p_e\right) \cdot \boldsymbol{e}_2 .$$

Inoltre, per le proprieta' della tangente e della normale, si ha

$$\boldsymbol{e}_2 \cdot \mathbf{t} \approx 0$$

e quindi per il fluido

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{T}_f \cdot \mathbf{n} = 0 . \tag{16.2.1}$$

Invece la componente normale

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_f \cdot \mathbf{n} = d\left(-\frac{\partial^2}{\partial\,t^2}\eta + k\frac{\partial^2}{\partial\,x_1^2}\eta - p_e\right) \boldsymbol{e}_2 \cdot \mathbf{n} = \frac{d}{\sqrt{G}}\left(-\frac{\partial^2}{\partial\,t^2}\eta + k\frac{\partial^2}{\partial\,x_1^2}\eta - p_e\right) . \tag{16.2.2}$$

dove $G = 1 + \left(\dfrac{\partial\,\eta}{\partial\,x_1}\right)^2$.

Come uniche condizioni iniziali imponiamo

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, 0) = \mathbf{v}_0\,,$$

$$\eta(x_1, 0) = \eta_0\,.$$

Si puo' osservare che errato imporre una condizione iniziale sulla velocita' dei punti della striscia deformabile. Infatti, per la condizione di impermeabilita',

$$\frac{\partial\,\eta}{\partial\,t}(x_1, t_0) = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}(\eta_0)\,.$$

Quindi il problema puo' essere impostato

$$\begin{cases} div\mathbf{v} = 0 \qquad \text{in } \Omega_\eta(t) \\ \dfrac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial\,t} + grad\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = div\mathbf{T}_f \\ \dfrac{\partial\,\eta}{\partial\,t} = -\dfrac{\partial\,\eta}{\partial\,x_1}v_1 + v_2(x, \eta, t) \\ \vec{v} = \vec{0} \qquad \text{su } \Gamma_b \\ \vec{v}\,|_{\Sigma_{in}} = \vec{v}\,|_{\Sigma_{out}} \\ \mathbf{T}_f \cdot \mathbf{n} = d\left(-\dfrac{\partial^2}{\partial\,t^2}\eta + k\dfrac{\partial^2}{\partial\,x_1^2}\eta - p_e\right)\boldsymbol{e}_2, \\ \mathbf{v}(x_1, x_2, 0) = \mathbf{v}_0 \\ \eta(x_1, 0) = \eta_0 \end{cases} \tag{16.2.3}$$

Notiamo che le incognite di questo problema sono $\mathbf{v}$, p, η. Queste variabili hanno una natura fisica profondamente diversa: la prima una *variabile cinematica*, la seconda una *variabile dinamica* e la terza una *variabile geometrica.* In effetti la pressione p per i fluidi incomprimibili risulta un'incognita ulteriore del problema derivante dal vincolo di incomprimibilita'. La pressione risulta, quindi, una reazione al vincolo cinematico di non variazione volumica.
E' utile paragonare la reazione vincolare Φ, che compare in Stereodinamica imponendo il vincolo di rigidita' sui corpi in esame, a *grad p* dovuta al vincolo di incomprimibilita' del continuo. Nel primo caso, si semplifica il problema cercando delle equazioni *pure*, vale a dire prive dell'incognita reazione vincolare. Si raggiunge detto risultato moltiplicando il sistema delle equazioni che reggono il moto del sistema materiale per una classe di vettori *ortogonali* alla reazione vincolare: gli *spostamenti virtuali.*
Con la direzione **ortogonale** si intende un prefissato prodotto scalare. Per un corpo rigido si richiede che *il lavoro risultante delle reazioni vincolari* corrispondente a tali vettori (somma di prodotti scalari tra usuali vettori) *si annulli.*
Per il continuo si segue una linea perfettamente simile. Precisamente, al fine di ricavare delle equazioni pure, determiniamo per le equazioni di Navier-Stokes, la classe di funzioni vettoriali che risultano ortogonali al gradiente di pressione, nel senso che *annullino il lavoro risultante del gradiente di pressione in corrispondenza a detti spostamenti.*
Tale classe corrisponde alla richiesta di *isocorita'.*
Le equazioni del sistema appena studiato sono equazioni alle derivate parziali del

primo ordine in t nella $\mathbf{v}$ e η, del secondo ordine in x per $\mathbf{v}$ e del primo ordine in x per η e p.
In particolare $(4.14)_2$ di tipo *parabolico* in $\mathbf{v}$, $(4.14)_3$ *iperbolico* in η e abbiamo visto che la pressione gioca un ruolo di 'forza di reazione' (reazione vincolare) associata al vincolo di isocorita'.
Per ottenere la pressione applichiamo l'operatore divergenza a entrambi i lati della $(4.14)_2$ e moltiplichiamo questa, calcolata su $\partial\Omega(t)$, per $\mathbf{n}$ ottenendo il seguente **Problema di Neumann**

$$\begin{cases} \Delta\, p = div(\mathbf{v}\cdot\ grad\,\mathbf{v}) & x \in \Omega(t) \\ \dfrac{\partial\, p}{\partial\, n} = -\mathbf{n}\cdot(\nu\Delta\mathbf{v}) & x \in \partial\Omega(t) \end{cases} \tag{16.2.4}$$

dove $\mathbf{n}$ denota la normale esterna in x alla frontiera in $\Omega(t)$.

16.2 Equazione dell'energia

Vediamo che forma ha l'energia del problema considerato.
Prendiamo in considerazione la relazione che traduce la prima equazione indefinita

$$\frac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial\, t} + grad\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = div\mathbf{T}_f\,.$$

Per ricavare il teorema di bilancio dell'energia, moltiplichiamo questa equazione per la velocita' $\mathbf{v}$ e integriamo su $\Omega(t)$ che la regione occupata dal fluido

$$\int_{\Omega(t)} \mathbf{v}\cdot\left(\frac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial\, t} + grad\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right)dx = \int_{\Omega(t)} \mathbf{v}\cdot div\mathbf{T}_f dx\,.$$

Notiamo che l'espressione tra parentesi tonde sotto il primo integrale la derivata materiale della velocita', quindi possiamo scrivere

$$\int_{\Omega(t)} \mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}dx = \int_{\Omega(t)} \mathbf{v}\cdot div\mathbf{T}_f dx\,.$$

Ricordiamo che, per il teorema del trasporto di materiale (cfr paragrafo (3.1))

$$\int_{\Omega(t)} \mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}dx = \frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \frac{\mathbf{v}^2}{2}dx\,.$$

Quindi possiamo scrivere

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \frac{\mathbf{v}^2}{2}dx = \int_{\Omega(t)} \mathbf{v}\cdot div\mathbf{T}_f dx\,.$$

La prima quantita' la variazione di energia cinetica associata alla velocita' che indichiamo con

$$\frac{d}{dt}E_v(t) = \frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \frac{\mathbf{v}^2}{2}dx\,.$$

Vediamo ora che forma ha l'integrale contenente la divergenza del tensore di Cauchy.
Per fare cio' ricordiamo delle proprieta' di analisi elementare:

Proposizione 16.2.1 *Sia* $\mathbf{v}$ *la velocita' di un punto materiale, allora*

$$div(\rho\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot grad\, \rho + \rho div\mathbf{v}\, .$$

Infatti

$$div(\rho\mathbf{v}) = \Sigma \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = \Sigma \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) = \mathbf{v} \cdot grad\, \rho + \rho div\mathbf{v}\, .$$

Quindi possiamo scrivere

$$\mathbf{v} \cdot div\mathbf{T}_f = div\,(\mathbf{v}\mathbf{T}_f) - \mathbf{T}_f \cdot grad\,\mathbf{v}\, .$$

Integriamo su $\Omega(t)$ e otteniamo

$$\int_{\Omega(t)} \mathbf{v} \cdot div\mathbf{T}_f dx = \int_{\Omega(t)} div\,(\mathbf{v}\mathbf{T}_f)\, dx - \int_{\Omega(t)} \mathbf{T}_f \cdot grad\,\mathbf{v} dx\, .$$

Per il teorema di Gauss, dato $C(t)$ un dominio materiale e $f(x,t)$ una funzione definita su $C(t)$, si ha

$$\int_C div f\, dC = \int_{\partial C} f \cdot \mathbf{n}\, dS\, ,$$

si nota che passiamo da un integrale di volume a un integrale di superficie. Quindi

$$\int_{\Omega(t)} div\,(\mathbf{v}\mathbf{T}_f)\, dx = \int_{\Gamma_\eta(t)} \mathbf{v}\mathbf{T}_f \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

dove $\Gamma_\eta(t)$ e' la frontiera deformabile. Vediamo, ora, che forma assume la parte contenente il gradiente della velocita', cioe' $\mathbf{T} \cdot grad\mathbf{v}$, ricordando che

$$\mathbf{T} = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbf{D}\, ,$$

quindi

$$\mathbf{T} \cdot grad\,\mathbf{v} = (-p\mathbb{I} + 2\mu\mathbf{D}) \cdot grad\,\mathbf{v} = -p\mathbb{I} \cdot grad\,\mathbf{v} + 2\mu\mathbf{D} \cdot grad\,\mathbf{v} = 2\mu\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}\, ,$$

dove abbiamo usato la condizione di incomprimibilita' per ottenere che

$$\mathbb{I} \cdot grad\,\mathbf{v} = \delta_{ij}\partial_i v_j = \partial_i v_i = div\,\mathbf{v} = 0$$

e

$$\mathbf{D} \cdot grad\,\mathbf{v} = \mathbf{D} \cdot \left(\frac{grad\ \mathbf{v}\ +\ grad^T\mathbf{v}}{2} \right) + \mathbf{D} \cdot \left(\frac{grad\ \mathbf{v}\ -\ grad^T\mathbf{v}}{2} \right) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}\, .$$

Chiamiamo **dissipazione** l'integrale

$$\mathcal{D}_v(t) = \int_\Omega 2\mu\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} dx\, .$$

Possiamo allora scrivere

$$\int_\Omega div\,(\mathbf{v}\mathbf{T}_f)\, dx = \int_{\Gamma_\eta(t)} \mathbf{v}\mathbf{T}_f \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \mathcal{D}_v(t)\, .$$

Decomponiamo la velocita' nelle sue componenti rispetto alla normale e la tangente

$$\mathbf{v} = v_n \mathbf{n} + v_t \mathbf{t} \,.$$

Quindi si ha

$$\int_\Omega div\,(\mathbf{v}\mathbf{T}_f)\,dx = \int_{\Gamma_\eta(t)} (v_n\mathbf{n} + v_t\mathbf{t})\mathbf{T}_f \cdot \mathbf{n}\,d\sigma + \mathcal{D}_v(t) =$$

$$= \int_{\Gamma_\eta(t)} v_n \mathbf{n}\mathbf{T}_f \cdot \mathbf{n}\,d\sigma + \int_{\Gamma_\eta(t)} v_t \mathbf{t}\mathbf{T}_f \cdot \mathbf{n}\,d\sigma + \mathcal{D}_v(t) \,.$$

Poiche' il prodotto scalare tra normale e tangente e' nullo, il secondo integrale non da' nessuna componente, mentre ricordiamo che la componente normale del tensore gradiente di Cauchy e'

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_{el} \cdot \mathbf{n} = d\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\eta + k\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\eta - p_e\right) \boldsymbol{e}_2 \cdot \mathbf{n}\mathbf{n} \,.$$

Inoltre ricordiamo che, in generale, per un cambiamento di variabile,

$$\int_l f\,dl = \int_0^a f \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right)^2}\, dx_1 \,,$$

avendo posto com lunghezza del tratto infinitesimo di curva dl

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right)^2}\, dx_1 = \sqrt{G} dx_1 \,.$$

Quindi, in definitiva,

$$\int_{\Omega(t)} div\,(\mathbf{v}\mathbf{T}_f)\,dx = \int_{\Gamma_\eta(t)} v_n d\left(-\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + k\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2}\right) \frac{1}{\sqrt{G}} d\sigma + \mathcal{D}_v(t) =$$

$$= \int_0^a \left(d\left(-\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + k\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} - p_e\right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{G}} \sqrt{G}\right) dx + \mathcal{D}_v(t) \,.$$

Notiamo che

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \dot{\eta} \,.$$

Sostituendo questa relazione e svolgendo i calcoli negli integrali si ha

$$\int_0^a \left(d(-\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - k\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2})\frac{\partial \eta}{\partial t}\right) dx = d\int_0^a -\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial t}\dot{\eta}\,dx + kd\int_0^a \frac{\partial \eta}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right) dx \,.$$

Utilizzando la relazione

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial t} f dx = \frac{1}{2}\int_S \frac{\partial f^2}{\partial t} dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_S f^2 dx \,,$$

troviamo

$$d\int_0^a -\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial t}\dot{\eta}\,dx - kd\int_0^a \frac{\partial \eta}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial \eta}{\partial x_1})\,dx =$$

$$= -\frac{d}{2}\int_0^a \frac{\partial \dot\eta^2}{\partial t}\,dx - \frac{kd}{2}\int_0^a \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right)^2 dx\,.$$

Portiamo la derivata fuori dal segno di integrale

$$-\frac{d}{2}\int_0^a \frac{\partial \dot\eta^2}{\partial t}\,dx - \frac{kd}{2}\int_0^a \frac{\partial}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right)^2 dx =$$

$$= -\frac{d}{2}\frac{d}{dt}\int_0^a \dot\eta^2\,dx - \frac{kd}{2}\frac{d}{dt}\int_0^a \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right)^2 dx =$$

$$= -\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{2}\int_0^a \dot\eta^2\,dx + \frac{kd}{2}\int_0^a \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right)^2 dx\right].$$

Indichiamo con **energia totale relativa all'elastico** la quantita'

$$E_\eta(t) = \frac{d}{2}\left[\int_0^a \left(\dot\eta^2 + k\left(\frac{\partial \eta}{\partial X_1}\right)^2\right) dx\right].$$

In particolare

$$\frac{d}{2}\int_0^a \dot\eta^2\,dx \qquad \text{e' l'}\textbf{energia cinetica}$$

e

$$\frac{d}{2}\int_0^a k\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right)^2 dx \qquad \text{e' l'}\textbf{energia interna}\,.$$

In definitiva la legge che lega le energie del problema preso in considerazione e'

$$\frac{d}{dt}\left(E_v(t) + E_\eta(t)\right) = -\mathcal{D}_v(t)$$

che esprime la decrescenza dell'energia totale al variare di t, infatti

$$0 \le E_v(t) + E_\eta(t) \le E_v(0) + E_\eta(0)\,.$$

Da questa relazione, in particolare, si ricava l'unicita' e la stabilita' della quiete.
In generale la relazione precedente fornisce una stima a priori globale, cioe' un controllo di alcune norme delle soluzioni al variare del tempo.

Index

Indice analitico