

Meccanica del Continuo I

Equazioni del moto

1

M. Padula,
Universita' di Ferrara

*e comincio', raggiandomi d'un riso tal,
che nel foco faria l'uom felice
canto 7, verso 17 s. Dante, Paradiso*

¹Edited on 20/10/2010

Pre-print, not yet submitted. This work is licensed under the Creative Commons Attribution-Noncommercial-No Derivative Works 2.5 Italy License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/it/>

Indice

1	Algebra tensoriale	7
1.1	Algebra vettoriale	7
1.1.1	Spazio vettoriale E_3	7
1.1.2	Prodotto scalare in E_3	8
1.1.3	Spazio puntuale su E_3	9
1.1.4	Operazioni tra vettori liberi	10
1.1.5	Cambiamento di base	14
1.1.6	Cambiamento di riferimento	16
I.2	Algebra tensoriale	17
I.2.1	Tensori in E_3	17
I.2.2	Prodotto tensoriale	20
I.2.3	Cambiamento di base per un tensore	20
I.2.4	Invarianti	21
I.2.5	Tensori particolari	21
I.2.6	Decomposizione in somma di un tensore	23
I.2.7	Tensore emisimmetrico	24
I.2.8	Equazione agli autovalori	26
I.2.9	Decomposizione in prodotto di un tensore	28
I.2.10	Funzioni a valori tensoriali	31
2	Geometria analitica	33
2.1	Curve	33
2.1.1	Proprietà differenziali di una curva.	33
2.2	Superficie	37
2.2.1	Proprietà differenziali di una superficie.	37
2.3	Volumi	39
3	Analisi funzionale	41
3.1	Spazi funzionali	41
3.1.1	Funzioni definite in $\Omega \subseteq R^n$	41
3.1.2	Spazio lineare	43
3.1.3	Spazio normato	43
3.1.4	Spazio duale	44
3.1.5	Spazio di Hilbert	45
3.2	Spazi di Lebesgue	46
3.2.1	Spazio $L^2(\Omega)$	46

3.2.2	Spazi L^p	47
3.2.3	Successioni di funzioni	49
3.2.4	Completezza di L^p	50
3.2.5	Convergenza debole	51
3.2.6	Convoluzioni	52
3.2.7	Regolarizzazione	53
3.2.8	Separabilita' di L^p	54
3.4	Distribuzioni	55
3.4.1	Spazio delle distribuzioni	55
3.4.2	Funzioni localmente sommabili	56
3.4.3	Derivate di distribuzioni	56
3.5	Spazi di Sobolev	57
3.5.1	Derivate generalizzate	57
3.5.2	Convergenza in $W_p^1(\Omega)$	58
3.5.3	Traccia di funzione	59
3.5.4	Teoremi d'immersione	60
3.5.5	Compattezza di Rellich-Kondrashov	62
3.5.6	Spazi H^1 ed $H^{1/2}$	63
3.5.7	Alcune disequaglianze	65
3.6	Equazioni differenziali	66
3.6.1	Problema dei valori iniziali ed al bordo per ODE	66
3.6.2	Equazioni alle derivate parziali PDE	68
3.7	Funzioni vettoriali.	71
3.7.1	Spazio di funzioni solenoidali	71
3.7.2	Decomposizione di L^2 in somma diretta di J e G	72
3.7.3	Disequaglianza di Poincare' per funzioni solenoidali	73
3.8	Funzioni tensoriali	74
3.8.1	Spazi di funzioni tensoriali	74
3.8.2	Derivate di funzioni tensoriali di piu' variabili	75
3.8.3	Esercizi su funzioni vettoriali di piu' variabili	78
3.8.4	Integrali di funzioni tensoriali di piu' variabili	80
4	Cinematica di sistemi continui	83
4.1	Deformazione e moto di un corpo	83
4.1.1	Spostamenti e velocita'	87
4.2	Geometria di un corpo	90
4.2.1	Tensori di Cauchy-Green e di stiramento	90
4.2.2	Deformazioni omeogenee	91
4.2.3	Esempi di deformazioni omogenee	92
4.3.4	Analisi delle deformazioni elementari	95
4.3.5	Gradienti di spostamento, stiramenti	101
4.3.6	Spostamenti elementari e stiramenti	102
4.3.7	Analisi degli spostamenti elementari.	104
4.3	Cinematica di un continuo	105
4.3.1	Notazioni	105
4.3.2	Identita' fondamentali	108
4.3.3	Gradienti velocita' di deformazione e di rotazione	109
4.3.4	Moti rigidi	111

4.3.5	Teoremi del trasporto	117
4.3.6	Atto di moto locale	119
4.3.7	Cinematica relativa	120
4.3.8	Esercizi	123
5	Equazioni della Meccanica	131
5.1	Densita' materiale	131
5.1.1	Massa, momento statico e momento d'inerzia.	132
5.1.2	Conservazione della massa	134
5.1.3	Teorema del trasporto materiale	135
5.2	Grandezze cinematiche	137
5.2.1	Quantita' e momento della quantita' di moto.	137
5.2.2	Energia cinetica	138
5.2.3	Identita' cinematiche	139
5.2.4	Esercizi di cinematica	139
5.3	Forze agenti su un sistema continuo	142
5.3.1	Forze a distanza	142
5.3.2	Forze di contatto	144
5.3.3	Principio di Cauchy sugli sforzi	144
5.4	Equazioni del moto: formulazione Euleriana	147
5.4.1	Equazioni cardinali della meccanica.	147
5.4.2	Equazioni del moto: altre forme	148
5.4.3	Teorema degli sforzi di Cauchy	150
5.4.4	Equazioni indefinite: descrizione spaziale.	153
5.4.5	Teorema!Energia cinetica	154
5.5	Equazioni del moto: formulazione Lagrangiana	154
5.5.1	Prima equazione cardinale della meccanica	154
5.5.2	Equazioni indefinite: descrizione materiale	155
5.5.3	Teorema dell'energia cinetica	156
5.6.4	Esercizi sul tensore degli sforzi.	156
6	Termodinamica	161
6.1	Termodinamica	162
6.1.1	Prima legge della termodinamica	163
6.1.2	Seconda legge della termodinamica	165
6.1.3	Diseguaglianza di Clausius-Duhem	167
6.2	Assiomi costitutivi	167
6.2.1	Assiomi costitutivi	168
6.2.2	Assioma di oggettivita' dell'osservatore	172
6.2.3	Fluidi linearmente viscosi	174
6.3	Disequazione di Clausius-Duhem	176
6.3.1	Dissipazione ridotta	176
6.3.2	Fluidi non-Newtoniani	179
6.3.3	Leggi fenomenologiche	180

7	Problema di buona posizione	183
7.1	Eulero incomprimibile	184
7.1.1	Moto non stazionario	184
7.1.2	Moto stazionario	186
7.1.3	Moti particolari	186
7.2	Eulero comprimibile	189
7.2.1	Moto non stazionario	189
7.2.2	Moto stazionario	191
7.2.3	Moti particolari	192
7.4	Fluido viscoso	193
7.4.1	Fluidi linearmente viscosi	193
7.4.2	Equazioni di Navier-Stokes in vari riferimenti	194
7.5	Condizioni al bordo	196
7.5.1	Classi di condizioni al bordo	196
7.5.2	Condizioni al bordo sulla velocita'	197
7.5.3	Condizioni dinamiche al bordo	200
7.5.4	Condizioni al contorno sulla temperatura	202
7.5.5	Condizioni sulla densita'	203

Capitolo 1

Algebra tensoriale

1.1 Algebra vettoriale

1.1.1 Spazio vettoriale E_3

Definizione 1.1.1 Un insieme E con elementi \mathbf{v} si dice dotato della struttura di **spazio vettoriale**, o **spazio lineare** reale se e' un dotato di due operazioni una interna tra elementi \mathbf{v}, \mathbf{u} di E , detta somma, una esterna tra un numero reale $\alpha \in R$ ed un elemento $\mathbf{v} \in E$, detta prodotto, verificanti le seguenti proprieta'

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{u} &= \mathbf{u} + \mathbf{v}, & \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in E, \\ \mathbf{v} + \mathbf{0} &= \mathbf{v}, & \forall \mathbf{v} \in E, \\ \mathbf{v} - \mathbf{v} &= \mathbf{0}, & \forall \mathbf{v} \in E, \\ (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{w} &= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}), & \forall \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in E, \\ \alpha(\beta\mathbf{v}) &= \beta(\alpha\mathbf{v}) = \alpha\beta\mathbf{v}, & \forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall \mathbf{v} \in E, \\ (\alpha + \beta)\mathbf{v} &= \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}, & \forall \alpha, \beta \in R, \quad \mathbf{v} \in E, \\ \alpha(\mathbf{v} + \mathbf{u}) &= \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{u}, & \forall \alpha \in R, \quad \mathbf{v}, \mathbf{u} \in E. \end{aligned} \quad (1.1.1) \quad \boxed{\text{vespa}}$$

La **dimensione** n di E e' determinata dal numero di vettori linearmente indipendenti e si pone E_n , si chiama **base** di E_n un insieme di n vettori linearmente indipendenti.

In E_3 la base e' data da tre vettori linearmente indipendenti \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$ ed il vettore \mathbf{v} e' determinato dai tre numeri v^i dette componenti di \mathbf{v}

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v^i \mathbf{e}_i =: v_i \mathbf{e}_i,$$

dove si e' usata la **convenzione di Einstein sulla somma** che omette il segno di sommatoria, esso si intende che risulta sommato da 1 a 3. Nell'espressione precedente l'indice i e' detto indice muto in quanto esso non compare a primo membro. In una stessa formula si devono usare indici diversi per indicare diverse somme.

Notazione Nel seguito si introdurranno operazioni su tensori e vettori **indipendenti** dalla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ nella quale si calcolano le componenti. In particolare, i tensori ed i vettori sono enti intrinseci, che prescindono dalla base. Con il termine **notazione tensoriale** intendiamo **notazione intrinseca**, che prescinde dalla base. Al contrario la **notazione estrinseca** dipende dalla base.

1.1.2 Prodotto scalare in E_3

Definizione 1.1.2 Un operazione τ

$$\tau : E_3 \times E_3 \longrightarrow X,$$

dove X e' uno spazio vettoriale, si dice **bilineare** se e' lineare rispetto alle due variabili, cioe' se

$$\begin{aligned}\tau(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \alpha \tau(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta \tau(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \\ \tau(\mathbf{w}, \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) &= \alpha \tau(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + \beta \tau(\mathbf{w}, \mathbf{v}).\end{aligned}$$

Un operazione τ bilineare risulta univocamente determinata qualora si fissino i suoi valori $\tau(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ nei vettori di base \mathbf{e}_i di E_3 , tali valori sono nove valori indipendenti.

Qualora l'operazione bilineare sia fissata mediante i valori della matrice $\tau(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, l'operazione e' introdotta in maniera estrinseca. In tal caso bisogna dimostrare che la definizione e' indipendente dalla base.

Definizione 1.1.3 Un operazione τ

$$\tau : E_3 \times E_3 \longrightarrow X,$$

dove X e' uno spazio vettoriale, si dice **commutativa** se

$$\tau(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \tau(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Un operazione τ

$$\tau : E_3 \times E_3 \longrightarrow X,$$

dove X e' uno spazio vettoriale, si dice **anticommutativa** se

$$\tau(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = -\tau(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Definizione 1.1.4 Si chiama **prodotto scalare** l'operazione \cdot bilineare, e commutativa, definita in $E_3 \times E_3$ ed a valori in R :

$$\cdot : (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in E_3 \times E_3 \longrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \in R.$$

Stante la bilinearita' si trova

$$(\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = \alpha \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \beta \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}.$$

La commutativita' implica

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Definizione 1.1.5 Lo spazio vettoriale E_3 si dice **Euclideo** se e' munito di prodotto scalare che verifica le seguenti proprieta'

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in E_3;$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \longrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

In E_3 Euclideo si definisce **modulo di un vettore** la quantita' reale

$$|\mathbf{v}| := \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

Due vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} si definiscono **ortogonali** se e solo se il loro prodotto scalare si annulla,

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{u} \iff \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Da $(\mathbf{v} \pm \mathbf{u})^2 \geq 0$ segue la **diseguaglianza di Cauchy**

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}| \leq \frac{1}{2}(\mathbf{v}^2 + \mathbf{u}^2). \quad (1.1.2) \quad \boxed{\text{cau}}$$

La $\boxed{\text{cau}}$ e' equivalente alla disequaglianza

$$0 \leq |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2 - 2 \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}|}{|\mathbf{v}||\mathbf{u}|} |\mathbf{v}||\mathbf{u}|.$$

Questa disequaglianza e' una forma quadratica nelle incognite $|\mathbf{v}|, |\mathbf{u}|$, essa risulta vera per ogni $|\mathbf{v}|, |\mathbf{u}|$ se e solo se

$$\frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}|}{|\mathbf{v}||\mathbf{u}|} \leq 1. \quad (1.1.3) \quad \boxed{\text{schwa}}$$

La $\boxed{\text{schwa}}$ implica la **diseguaglianza di Schwartz**

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}| \leq |\mathbf{v}||\mathbf{u}|. \quad (1.1.4) \quad \boxed{\text{schw}}$$

Il prodotto scalare e' un'operazione bilineare, in particolare nella base $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \dots, n$, dette $v^i = v_i$, $u^i = u_i$ le componenti di \mathbf{v}, \mathbf{u} , si ha

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \left(\sum_{i=1}^n u_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n v_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i,j=1}^n u_i v_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = u_i v_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j. \quad (1.1.5) \quad \boxed{\text{scal}}$$

dove, nell'ultima identita', si e' usata la convenzione di somma.

1.1.3 Spazio puntuale su E_3

Sia E_3 uno spazio vettoriale munito di prodotto scalare, e sia \mathcal{E}_3 l'insieme dei punti dello spazio geometrico, **spazio euclideo** su E_3 .

E' noto che, indicati con P, Q gli elementi di \mathcal{E}_3 , e con \mathbf{v}, \mathbf{u} gli elementi di E_3 , valgono le seguenti proprieta'

$$(1) (P - Q) = -(Q - P);$$

$$(2) (P - Q) + (Q - R) = (P - R);$$

$$(3) \forall O \in \mathcal{E}_3, \mathbf{v} \in E_3, \exists \text{ unico } P \in \mathcal{E}_3 : (P - O) = \mathbf{v}.$$

Notazione Data una retta r si dicono **versori** della retta r i vettori unitari paralleli ad r . Ad ogni **retta**, **direzione** restano associati due versori, ciascuno di essi determina un verso su r . Ogni vettore unitario individua una direzione (retta orientata), quindi un versore determina un fascio di rette parallele orientate.

Notazione Un vettore $\mathbf{v} \in E_3$ si dice **vettore libero**. Fissato $P \in \mathcal{E}_3$ ad arbitrio, l'insieme costituito da un punto ed un vettore (P, \mathbf{v}) si dice **vettore applicato**. Detto Q il punto tale che $Q - P = \mathbf{v}$, P e Q sono detti **origine** ed **estremo** del vettore \mathbf{v} applicato in P . Dato il vettore applicato (P, \mathbf{v}) , la retta parallela a \mathbf{v} passante per P si dice **retta di applicazione** di (P, \mathbf{v}) .

Notazione Nello spazio fisico si definisce **angolo retto** l'angolo formato dalla verticale con una qualsiasi retta nel piano orizzontale. Due rette o due direzioni nello spazio fisico si dicono **perpendicolari** se formano tra loro un angolo retto.

Notazione Sia $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ un **riferimento** cartesiano ortonormale di origine O e di assi orientati secondo i versori $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3$ della base ortonormale $\mathbf{e}_i, i = 1, \dots, 3$ di E_3 .

Le componenti di $\mathbf{v} = P - O$ in \mathbf{e}_i si dicono le **coordinate rettilinee, cartesiane** di P in \mathcal{R} . Inoltre, il riferimento \mathcal{R} si dira' **orientato in senso levogiro** se la rotazione di \mathbf{e}_1 su \mathbf{e}_2 , secondo l'angolo retto $\pi/2$ nel piano ortogonale ad \mathbf{e}_3 , appare levogira al verso di \mathbf{e}_3 .

Nel seguito sceglieremo solo riferimenti levogiri. D'ora in poi, riterremo definite le operazioni di somma tra vettori, la moltiplicazione di un vettore per uno scalare e di prodotto scalare.

Se \mathbf{e}_i rappresentano tre vettori dello spazio fisico, allora un vettore in E_3 e' equivalentemente determinato da un **modulo**, una **direzione** ed un **verso**.

1.1.4 Operazioni tra vettori liberi

Definiamo ora un prodotto scalare nello spazio fisico. A tal fine, consideriamo nella classe dei vettori liberi due vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} aventi la stessa origine O . Siano r_u ed r_v le rette parallele ai vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} e passanti per O . Ricordando (I.I.3) ^(Schw) ha senso introdurre l'angolo θ tra le due rette attraverso il coseno tra i due vettori mediante la formula

$$\cos \theta := \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{u}|} \leq 1.$$

Ricordando le proprieta' del coseno si ricavano gli usuali risultati:

- i) due rette, di direzioni \mathbf{v}, \mathbf{u} si dicono parallele se l'angolo θ tra le direzioni e' zero o π , in questo caso il coseno dei versori $\mathbf{u}/|\mathbf{u}|, \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ vale piu' a meno uno;
- ii) due rette si dicono perpendicolari se l'angolo θ tra le direzioni e' $\pi/2$, o $3\pi/2$ in questo caso il coseno dei versori $\mathbf{u}/|\mathbf{u}|, \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ vale zero.

Il prodotto scalare tra vettori e' definito dalla seguente applicazione (definizione intrinseca)

$$\cdot : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E_3 \times E_3 \longrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta.$$

Per una base ortonormale valgono le seguenti identita'

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad (1.1.6) \quad \boxed{\text{delta}}$$

dove δ_{ij} rappresenta il simbolo di Kronecker, uguale ad uno se $i = j$, uguale a zero se $i \neq j$.

Il simbolo o tensore di Kronecker e' rappresentato da

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se la base \mathbf{e}_i e' ortonormale, cioe' costituita da versori ortogonali, da $\boxed{\text{scal}}$ (1.1.5) deduciamo

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_i v_i.$$

Geometricamente il modulo del prodotto scalare corrisponde al prodotto del modulo del primo vettore per la proiezione ortogonale del secondo sulla direzione del primo.

Il prodotto scalare tra due vettori e' nullo se e solo se i due vettori sono tra loro ortogonali.

1.1 **Esercizio 1.1.1** *Dati i seguenti vettori liberi*

$$\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2,$$

si chiede di:

- (i) determinare le coordinate dei punti P_i tali che risulti $\mathbf{v}_i = P_i - O$;
- (ii) determinare le componenti dei vettori \mathbf{v}_i ;
- (iii) calcolare i prodotti scalari $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$, $i, j = 1, 2, 3$.

Risposta

- (i) Le coordinate dei punti P_i sono: $P_1 \equiv (0, -2, 0)$, $P_2 \equiv (1, 0, 5)$, $P_3 \equiv (1, -3, 0)$.
- (ii) Le componenti dei vettori \mathbf{v}_i coincidono con le coordinate dei punti P_i .
- (iii) $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$; $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 6$; $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 1$.

Introduciamo ora un nuovo simbolo.

Definizione 1.1.6 *Si chiama **indice di Ricci** la tabella di valori a tre indici ϵ_{ijk} , i, j, k ciascuno a valori 1, 2, 3 definita da:*

1. $\epsilon_{ijk} = 0$ se c'e' una coppia di indici uguali;
2. $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$, *combinazione pari degli indici 123*;
3. $\epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1$, *combinazione dispari degli indici 123*.

Con l'indice di Ricci si introduce la seguente operazione tra i vettori di una base ortonormale \mathbf{e}_i ,

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j =: \epsilon_{hkl} \delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{e}_h, \quad (1.1.7) \quad \boxed{\text{vect}}$$

dove il segno di somma e' sottinteso.

Usando (1.1.7) possiamo definire l'operazione bilineare anticommutativa detta **prodotto vettoriale** ed indicata con \times

$$\times : \mathbf{v}, \mathbf{u} \in E_3 \times E_3 \longrightarrow \mathbf{v} \times \mathbf{u}.$$

In particolare, dati due vettori $\mathbf{v} \equiv (v_k)$, $\mathbf{u} \equiv (u_j)$ la componente i -ma del prodotto vettoriale dei due vettori e' data da

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = v_i u_j \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = v_i u_j \epsilon_{hkl} \delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{e}_h = \epsilon_{hij} v_i u_j \mathbf{e}_h. \quad (1.1.8) \quad \boxed{\text{vect1}}$$

Verificare che

$$\epsilon_{lmn} = \mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l,$$

dove \mathbf{e}_i sono vettori di una terna ortonormale.

E' sufficiente scegliere nella (1.1.8) $\mathbf{v} = \mathbf{e}_m$, $\mathbf{u} = \mathbf{e}_n$ e moltiplicarla per \mathbf{e}_l , si trova

$$\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_l = \epsilon_{hij} \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{hl} = \epsilon_{lmn}. \quad (1.1.9) \quad \boxed{\text{vect2}}$$

Si prova che il prodotto vettoriale tra due vettori dianzi definito e' equivalente alla seguente applicazione bilineare (definizione *intrinseca*)

$$\times : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E_3 \times E_3 \longrightarrow \mathbf{u} \times \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \theta \mathbf{w},$$

dove θ denota l'angolo tra i due vettori e \mathbf{w} e' il versore perpendicolare ai due vettori e diretto in modo che la terna $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ risulti levogira.

Il prodotto vettoriale e' un'operazione bilineare, in particolare, nella base $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, 2, 3$ ortonormale, dette v^i , u^i le componenti di \mathbf{v} , \mathbf{u} , si ha

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \sum_{i,j=1}^n u^i v^j \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$$

Ancora, le componenti di $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ si trovano calcolando i minori della matrice

$$\begin{pmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{pmatrix},$$

con segni alterni.

Geometricamente il modulo del prodotto vettoriale corrisponde all'area del parallelogramma avente come lati i vettori.

Il prodotto vettoriale e' nullo se e solo se i due vettori sono paralleli.

Operando in una base si verifica che vale l'identita'

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w}.$$

Il doppio prodotto vettoriale tra tre vettori e' definito dalla seguente applicazione trilineare (definizione *intrinseca*)

$$\tau : (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in E_3 \times E_3 \times E_3 \longrightarrow \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w} \in E_3.$$

1.2 **Esercizio 1.1.2** *Dati i seguenti vettori liberi*

$$\mathbf{v}_1 = 4\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{v}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{v}_3 = -\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2,$$

si chiede di:

- (i) determinare le coordinate dei punti P_i tali che risulti $\mathbf{v}_i = P_i - O$;
- (ii) determinare le componenti dei vettori \mathbf{v}_i ;
- (iii) calcolare i prodotti vettoriali $\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_j$, $i, j = 1, 2, 3$.

Risposta

- (i) Le coordinate dei punti P_i sono: $P_1 \equiv (0, -2, 0)$, $P_2 \equiv (1, 0, 5)$, $P_3 \equiv (1, -3, 0)$.
- (ii) Le componenti dei vettori \mathbf{v}_i coincidono con le coordinate dei punti P_i .
- (iii) $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$; $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 6$; $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 1$.

Il prodotto misto tra tre vettori e' definito dalla seguente applicazione trilineare (definizione *intrinseca*)

$$\sigma : (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in E_3 \times E_3 \times E_3 \longrightarrow \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \sin \theta \cos \varphi \in R,$$

dove θ denota l'angolo tra i vettori \mathbf{u} , \mathbf{v} e φ l'angolo tra \mathbf{w} e $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Nella base $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, 2, 3$ ortonormale, dette v_i , u_i , w_i le componenti di \mathbf{v} , \mathbf{u} , \mathbf{w} il prodotto misto $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ si trova calcolando il determinante della matrice (definizione *estrinseca*)

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Geometricamente il valore assoluto del prodotto misto corrisponde al volume del parallelepipedo avente come lati i tre vettori.

1.3 **Esercizio 1.1.3** *Dati i seguenti vettori liberi*

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{v}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{v}_3 = -5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2,$$

si chiede di:

- (i) determinare le coordinate dei punti P_i tali che risulti $\mathbf{v}_i = P_i - O$;
- (ii) determinare la componenti dei vettori \mathbf{v}_i ;
- (iii) calcolare i prodotti misti $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_2$ e verificare che sono l'uno l'opposto dell'altro.

Risposta

- (i) Le coordinate dei punti P_i sono: $P_1 \equiv (1, 0, 0)$, $P_2 \equiv (-1, 0, 1)$, $P_3 \equiv (-5, -1, 0)$.
- (ii) Le componenti dei vettori \mathbf{v}_i coincidono con le coordinate dei punti P_i .
- (iii) $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = 1$; $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_2 = -1$.

1.4 **Esercizio 1.1.4** *Dati i vettori liberi \mathbf{v} , \mathbf{e} , verificare che sussiste la seguente identita', decomposizione di \mathbf{v} lungo il vettore \mathbf{w} ,*

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^2} \mathbf{w} + \frac{\mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}{|\mathbf{w}|^2} = \mathbf{v}^{\parallel} + \mathbf{v}^{\perp}.$$

Risposta Scriviamo l'identità del doppio prodotto vettoriale

$$\mathbf{e} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{e}) = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e})\mathbf{v} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} := \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|},$$

e sostituiamola a secondo membro della relazione di partenza

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^2} \mathbf{w} + \frac{\mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}{|\mathbf{w}|^2} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} + \mathbf{v} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v})\mathbf{e} = \mathbf{v}.$$

Esercizio 1.1.5 *Dati i vettori liberi \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} tali che $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$, verificare che sussistono le seguenti identità'*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}.$$

Suggerimento Basta sostituire a \mathbf{b} il valore $-\mathbf{a} - \mathbf{c}$, ricordare che $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ ed usare l'anticommutatività del prodotto vettoriale. La rimanente relazione si ottiene in modo analogo.

1.1.5 Cambiamento di base

Siano $\{\mathbf{e}'_i\}$, $\{\mathbf{e}_j\}$, $i, j = 1, \dots, 3$, due basi ortonormali, sia \mathbf{Q} la **matrice del cambiamento di base**

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^3 \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j =: \sum_{j=1}^3 Q_{ij} \mathbf{e}_j =: Q_{ij} \mathbf{e}_j, \quad (1.1.10) \quad \boxed{\mathbf{e}'_i}$$

dove gli indici di Q_{ij} , denotano il primo l'indice di riga ed il secondo l'indice di colonna

$$[Q_{ij}] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{e}'_1 = Q_{11}\mathbf{e}_1 + Q_{12}\mathbf{e}_2 + Q_{13}\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}'_2 = Q_{21}\mathbf{e}_1 + Q_{22}\mathbf{e}_2 + Q_{23}\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}'_3 = Q_{31}\mathbf{e}_1 + Q_{32}\mathbf{e}_2 + Q_{33}\mathbf{e}_3,$$

o ancora, in notazione indiciale

$$\mathbf{e}'_i = Q_{ij} \mathbf{e}_j.$$

Poiché entrambe le basi sono ortonormali, si deve avere

$$\delta_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = (Q_{ik} \mathbf{e}_k) \cdot (Q_{jl} \mathbf{e}_l) = Q_{ik} Q_{jl} \delta_{kl} = Q_{il} Q_{jl} = Q_{il} (Q^T)_{lj}.$$

Questa relazione mostra che \mathbf{Q}^T coincide con l'inversa \mathbf{Q}^{-1} di \mathbf{Q} . In particolare, si deriva la relazione inversa

$$\mathbf{e}_i = Q_{ji} \mathbf{e}'_j.$$

Definizione 1.1.7 Una matrice Q si dice **ortogonale**, se la sua inversa coincide con la trasposta,

$$Q^T = Q^{-1}.$$

In modo analogo, stante la commutativita' del prodotto scalare le componenti di e_j si possono esprimere nella base e'_i come

$$e_j = \sum_{i=1}^3 e_j \cdot e'_i e'_i =: \sum_{i=1}^3 Q_{ij} e'_i =: Q_{ij} e'_i =: (Q^T)_{ji} e'_i, \quad (1.1.11) \quad \boxed{\text{e-j}}$$

dove Q^T denota la trasposta di Q . La matrice del cambiamento di base e' invertibile ed ortogonale.

Rotazione di una base

Siano $\{e'_i\}$, $\{e_j\}$, $i, j = 1, \dots, 3$, due basi ortonormali, ottenute tramite la **rotazione** di e_1 , e_2 attorno ad $e_3 = e'_3$ di un angolo α . La matrice del cambiamento di base Q e' data da

Provare che la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.1.12) \quad \boxed{\text{rotazi}}$$

e' ortogonale. Inoltre, per $u \in E_3$, $Q \cdot u$ fornisce la rotazione di u di angolo α nel piano ortogonale ad e_3 .

Cambiamento di base per un vettore

Siano v_i e v_j le componenti di v nelle suddette basi

$$v = v_i e_i = v'_j e'_j. \quad (1.1.13) \quad \boxed{\text{vec}}$$

Utilizzando la matrice Q si ha

$$v = v_i e_i = v_i Q_{ji} e'_j$$

che implica

$$\begin{aligned} v'_i &= v_j Q_{ij}, & v_i &= v'_j Q_{ji}, \\ v' &= Qv, & v &= v'Q. \end{aligned} \quad (1.1.14) \quad \boxed{\text{changecomp}}$$

Si noti che il prodotto scalare e' un **invariante**, vale a dire non varia il valore del prodotto scalare al variare del riferimento. Cio' comporta

$$v' \cdot w' = v'_j w'_j = v_i Q_{ji} w_k Q_{jk} = \delta_{ik} v_i w_k = v \cdot w.$$

E' noto che ogni terna cartesiana \mathcal{R} e' univocamente individuata da un vettore esprimente la posizione dell'origine e da un tensore ortogonale esprimente una rotazione rigida.

1.5 **Esercizio 1.1.6** Determinare l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 2)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 2, -1)$.

(Risp. $\sqrt{17}/2$)

Determinare il volume del parallelepipedo avente vertici $(1, 2, 3)$, $(1, 0, 1)$, $(3, 1, -1)$, $(0, 0, 0)$. (Risp. 10)

Determinare il prodotto misto $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3$ per i vettori dati nell'esercizio 1.2. (Risp. -4)

1.6 **Esercizio 1.1.7** Siano dati i vettori

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3; \quad \mathbf{b} = -2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3; \quad \mathbf{c} = 5\mathbf{e}_1 - 10\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3,$$

dimostrare che \mathbf{c} e' parallelo ai vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} .

Suggerimento Basta calcolare $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ e verificare che uguagliano il vettore nullo.

1.7 **Esercizio 1.1.8** Nello spazio vettoriale E_2 , scrivere la matrice di passaggio dalla base $\{\mathbf{e}_1 \equiv (1, 0), \mathbf{e}_2 \equiv (0, 1)\}$ alla base $\{\mathbf{a}_1 \equiv (2, 0), \mathbf{a}_2 \equiv (0, 2)\}$, ed alla base $\{\mathbf{b}_1 \equiv (1, -1), \mathbf{b}_2 \equiv (1, 1)\}$. Verificare che le nuove basi sono ortonormali.

Risposta Indicate con \mathbf{A} , \mathbf{B} le matrici del cambiamento di base si ha

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$[B_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per l'ortogonalita' delle basi basta calcolare i prodotti $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2$ e verificare che sono nulli.

1.1.6 Cambiamento di riferimento

Siano $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ e $\mathcal{R}' = (O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ due riferimenti, con $O' - O = x_{O'i} \mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}'_j = Q_{ji} \mathbf{e}_i$, allora vale la seguente legge del cambiamento di riferimento

$$P - O = x_i \mathbf{e}_i = P - O' + (O' - O) = x'_j \mathbf{e}'_j + x_{O'i} \mathbf{e}_i,$$

$$x_i = x_{O'i} + x'_j Q_{ij}, \quad (1.1.15) \quad \boxed{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}$$

$$x'_j = x_{O'j} + x_i Q_{ij}.$$

2.2 **Esercizio 1.1.9** Si provi che la matrice \mathbf{Q} e' ortogonale.

Risposta Basta osservare che vale la catena di identita'

$$\delta_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = (Q_{ih} \mathbf{e}_h) \cdot (Q_{jk} \mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_h \cdot \mathbf{e}_k (Q_{ih} Q_{jk}) = Q_{ih} Q_{jh} = Q_{ih} Q_{hj}^T.$$

- 2 **Esercizio 1.1.10** Siano e_i, e'_j due basi ottenute ruotando attorno ad $e_3 = e'_3$ i versori e_1, e_2 dell'angolo $\pi/4$. Si calcoli il valore di λ affinché le due terne $(1, 1, 3)$ $(\lambda, \sqrt{2}, 3)$ siano le componenti dello stesso vettore \mathbf{v} rispettivamente nelle due basi e_i, e'_j .

Risposta La matrice del cambiamento di base è data da

$$[Q_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

quindi si ha

$$(1, 1, 3) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0, \sqrt{2}, 3).$$

Il valore da dare a λ è zero.

I.2 Algebra tensoriale

Questa sezione è dedicata prevalentemente allo studio dei **tensori** doppio indice, o del secondo ordine detti semplicemente tensori. Ricordiamo esplicitamente che il termine tensore sta ad indicare più generalmente un elemento di uno spazio vettoriale E_n . Se $n = 1$ otteniamo uno scalare, se $n = 3$ un vettore, se $n = 3^2 = 9$ un tensore su E_3 a due indici se $n = 3^4$ un tensore su E_3 a quattro indici.

I.2.1 Tensori in E_3

2.1 Tensori affini del secondo ordine

I.2.0 **Definizione I.2.1** L'insieme delle applicazioni lineari dello spazio vettoriale E_3 in se stesso è detto **omomorfismo**.

L'insieme delle applicazioni lineari in E_3

$$\mathbf{T} : \mathbf{v} \in E_3 \rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{T}\mathbf{v} \in E_3,$$

può essere munito di struttura di spazio vettoriale, introducendo le seguenti operazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{T} + \mathbf{S} : \mathbf{v} \in E_3 &\rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{v}) + \mathbf{S}(\mathbf{v}) \in E_3; \\ \alpha\mathbf{T} : \mathbf{v} \in E_3 &\rightarrow \alpha\mathbf{T}(\mathbf{v}) \in E_3. \end{aligned} \tag{I.2.1} \quad \boxed{\text{ten}}$$

in tal caso la struttura: $\{ \text{applicazioni lineari più le operazioni di somma e di prodotto (I.2.1)} \}$ verrà denotata con $\text{Lin}(E_3)$ e chiamata **spazio tensoriale** su E_3 . Si chiama **tensore affine del secondo ordine**, o due indici, e si indica con \mathbf{T} il generico elemento di $\text{Lin}(E_3)$ ¹.

¹Le applicazioni lineari sono anche chiamate *operatori lineari*.

In una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ \mathbf{T} e' rappresentato da una matrice 3×3 indicata con $[\mathbf{T}]$:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix},$$

dove il primo indice indica quello di riga ed il secondo quello di colonna. Se \mathbf{w} e' un vettore con la notazione

$$\mathbf{w} = \mathbf{T}\mathbf{v} = v_i T_{ij} \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{w} =: w_j = v_i \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_i =: v_i T_{ji}$$

intendiamo

$$w_1 = T_{11}v_1 + T_{12}v_2 + T_{13}v_3$$

$$w_2 = T_{21}v_1 + T_{22}v_2 + T_{23}v_3$$

$$w_3 = T_{31}v_1 + T_{32}v_2 + T_{33}v_3,$$

equivalentemente, utilizzando la convenzione di somma,

$$w_i = T_{ij}v_j.$$

In termini intrinseci, vale la notazione

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{T} = T_{ij}u_i \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{w} = \mathbf{T}\mathbf{u} = T_{ij}u_j \mathbf{e}_i.$$

Per ogni tensore \mathbf{T} esiste il **trasposto** \mathbf{T}^T , che verifica

$$(\mathbf{T}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T}^T \mathbf{v}),$$

in componenti

$$T_{ij} = T_{ji}^T.$$

Abbiamo gia' introdotto il **simbolo di Kronecker** come rappresentante della matrice unitaria (I.1.6), ora affermiamo che il simbolo di Kronecker e' un **tensore**. Precisamente, il simbolo di Kronecker e' il tensore unitario di componenti

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (\text{I.2.2})$$

Il simbolo $tr\mathbf{T}$, detto **traccia** del tensore, denota la somma delle componenti di \mathbf{T} ad indici uguali, cioe' lungo la diagonale principale,

$$tr\mathbf{T} := T_{ii}.$$

I simboli $\cdot, :$ definiscono il **prodotto dei tensori**, traccia del prodotto di tensori, e **la saturazione dei tensori** \mathbf{A}, \mathbf{B} , e sono dati rispettivamente dal tensore \mathbf{C} , e dagli scalari $tr\mathbf{C}, c$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{A}\mathbf{B}, & C_{ij} &= A_{ik}B_{kj}, & (\text{I.2.3}) & \boxed{\text{contra}} \\ tr\mathbf{A}\mathbf{B} &= tr\mathbf{C} = A_{ik}B_{ki} \in R \\ c &= \mathbf{A} : \mathbf{B} \in R, & c &= A_{ik}B_{ik} \in R. \end{aligned}$$

Qualche volta usando un abuso di notazione, si scrive

$$\mathbf{T}^2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}, \quad T^2 = \mathbf{T} : \mathbf{T}.$$

In generale si pone

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{n-1}, \quad \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}.$$

Con queste notazioni segue

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}).$$

Infatti si ha

$$A_{ik}B_{ik} = A_{ki}^T B_{ik} = A_{ik}B_{ki}^T.$$

2.1 **Esercizio I.2.1** *Detta $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base di E_3 , dire quali della seguenti applicazioni e' lineare, quindi e' un tensore*

$$\mathbf{A} : \mathbf{x} \in E_3 \longrightarrow \mathbf{x} + \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{B} : \mathbf{x} \in E_3 \longrightarrow x_2\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_3.$$

Risposta: Solo \mathbf{B} e' lineare. Infatti

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{e}_1 \neq \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + 2\mathbf{e}_1.$$

2.2 **Esercizio I.2.2** *Assegnato il tensore*

$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{A}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{A}(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

calcolare il valore di \mathbf{A} nel vettore $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$.

Risposta;

$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3.$$

2.3 **Esercizio I.2.3** *Si provi che le operazioni*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{u}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}) \quad (\lambda\mathbf{A})\mathbf{u} = \lambda\mathbf{A}(\mathbf{u}),$$

muniscono Lin di struttura di spazio vettoriale.

Suggerimento: Basta verificare che risultano verificate le relazioni ($\overset{\text{vespa}}{\text{I.I.I}}$).

I.2.2 Prodotto tensoriale

Sia E_3 uno spazio vettoriale euclideo.

I.2.1 **Definizione I.2.2** Si definisce **prodotto tensoriale** di \mathbf{v} per \mathbf{u} , o **diade** formata dai vettori \mathbf{v} e \mathbf{u} , e si indica con $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, il tensore (operatore lineare) che al vettore \mathbf{x} , fa corrispondere $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})\mathbf{u}$

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{x} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})\mathbf{u}.$$

In una base la diade è espressa dalla matrice

$$[\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}]_{ij} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{bmatrix},$$

2.6 **Lemma I.2.1** Sia \mathbf{e}_i , $i = 1, \dots, 3$, una base di E_3 . Ogni tensore \mathbf{T} di Lin può essere espresso in un unico modo come combinazione lineare delle diadi $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, $i, j = 1, \dots, 3$.

Dim. Si ha

$$\mathbf{T}\mathbf{e}_j = \mathbf{w}_j = T_{ij}\mathbf{e}_i, \quad T_{kj} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j = T_{ij}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k.$$

Dalla definizione di prodotto tensoriale discende che

$$\mathbf{T}\mathbf{v} = v_j\mathbf{T}\mathbf{e}_j = T_{ij}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_i = T_{ij}(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i)\mathbf{v}.$$

Segue da ciò che il tensore \mathbf{T} ammette la seguente rappresentazione

$$\mathbf{T} = T_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad (\text{I.2.4}) \quad \boxed{\text{diad}}$$

e si dirà la **rappresentazione tensoriale** di \mathbf{T} nella base. \square

Esercizio I.2.4 Si ricavino le componenti di \mathbf{T} nella nuova rappresentazione.

Risposta Ricordando la definizione di diade, basta moltiplicare la relazione $\boxed{\text{diad}}$ (I.2.4) a destra ed a sinistra per i vettori di base per trovare e si trova

$$\mathbf{e}_h \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_k = T_{ij}(\mathbf{e}_h \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j) = T_{hk}.$$

I.2.3 Cambiamento di base per un tensore

Indichiamo con T_{ij} ed T'_{hk} le componenti di \mathbf{T} nelle basi $\{\mathbf{e}_i\}$, e $\{\mathbf{e}'_j\}$, $i, j = 1, \dots, 3$. Ripetendo un ragionamento analogo a quello adoperato per i vettori, si può mostrare che per i tensori vale la seguente legge del cambiamento di base

$$T'_{hk} = Q_{ih} Q_{jk} T_{ij}. \quad (\text{I.2.5}) \quad \boxed{2.2'}$$

In notazione tensoriale

$$\mathbf{T}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T$$

2.4 **Esercizio I.2.5** Si provi la relazione (I.2.5)

Risposta Si parti dalla identita'

$$T'_{hk} e'_h \otimes e_k = T_{ij} e_i \otimes e_j,$$

e si sostituiscano le relazioni $e'_l = Q_{lm} e_m$, per $l = h, k$ ed $m = i, j$.

3.1 **Esercizio I.2.6** Si provi che ogni trasformazione lineare L tra vettori \mathbf{v} e' un tensore.

Risposta Vale la seguente catena di indentita'

$$L'(\mathbf{v}') = \mathbf{Q}^T L(\mathbf{Q}^T \mathbf{v}) = \mathbf{Q}^T L(\mathbf{v}\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^T L(\mathbf{v})\mathbf{Q}.$$

I.2.4 Invarianti

Definizione I.2.3 Si dice **invariante** di un tensore di ordine n \mathbf{T} una funzione delle sue componenti indipendente dalla scelta del riferimento.

Per il tensore di ordine due \mathbf{T} sono invarianti

$$tr\mathbf{T} = T_{ii}$$

$$tr(\mathbf{T}\mathbf{T}) = T_{ij}T_{ji}$$

$$T : T = T_{ij}T_{ij} = \sum_{i,j=1}^3 (T_{ij})^2,$$

dove tr definisce l'operatore traccia. Altri esempi di invarianti principali di un tensore sono il suo determinante, e la somma dei determinanti dei complementi algebrici (minori) degli elementi della diagonale principale, cf. Sottosezione I.2.8.

inv **Definizione I.2.4** Sono chiamati **invarianti fondamentali** del tensore \mathbf{T} gli scalari I_j , $j = 1, \dots, 3$,

$$I_1 = T_{ii}^i = tr\mathbf{T},$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ij}) = \frac{1}{2}((tr\mathbf{T})^2 - \mathbf{T} : \mathbf{T}) =$$

$$\left| \begin{array}{cc} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{array} \right|,$$

$$I_3 = \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnp}T_{im}T_{jn}T_{kp} = det\mathbf{T}.$$

I.2.5 Tensori particolari

Definizione I.2.5 Il tensore \mathbf{T} e' detto **invertibile**, se esiste un tensore \mathbf{T}^{-1} , detto inverso, tale che

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{I}.$$

L'inverso \mathbf{T}^{-1} , se esiste, e' univocamente determinato. Inoltre, \mathbf{T}^{-1} e \mathbf{T}^T sono anch'essi invertibili, e vale

$$(\mathbf{T}^{-1})^{-1} = \mathbf{T}, \quad (\mathbf{T}^{-1})^T = (\mathbf{T}^T)^{-1} = \mathbf{T}^{-T}.$$

Se \mathbf{A} e \mathbf{B} sono invertibili, la loro composizione e' invertibile, e vale

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Definizione I.2.6 *Il tensore \mathbf{Q} si dice ortogonale se conserva il prodotto scalare, per ogni \mathbf{u}, \mathbf{v} :*

$$\mathbf{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

In particolare, un tensore ortogonale conserva i moduli dei vettori.

Dalla definizione di trasposto segue

$$\mathbf{u}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Stante l'arbitrarieta' dei vettori \mathbf{v}, \mathbf{u} , si puo' provare che \mathbf{Q} e' ortogonale se e solo se

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}.$$

In una base ortogonale si ha, in particolare,

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}.$$

In notazioni indiciali

$$(Q^{-1})_{ij} = (Q^T)_{ij}.$$

2.1 Lemma I.2.2 *Condizione necessaria e sufficiente perche' un tensore sia ortogonale e' che risulti*

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I} \iff \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$$

Pertanto, si ha

$$\det\mathbf{Q}\det\mathbf{Q}^T = \det\mathbf{I} = (\det\mathbf{Q})^2 = 1,$$

e si ricava

$$\det\mathbf{Q} = \pm 1.$$

Il tensore \mathbf{Q} e' detto una **rotazione propria** se $\det\mathbf{Q} = 1$, un **inversione centrale** se $\det\mathbf{Q} = -1$. In seguito supporremo $\det\mathbf{Q} = 1$.

Particolari tensori sono:

- (1) il **tensore unitario** il tensore unitario \mathbf{I} verifica

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in E_3;$$

- (2) il **tensore nullo** il tensore nullo \mathbf{O} verifica

$$\mathbf{O}\mathbf{u} = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in E_3;$$

- (3) il **tensore simmetrico**: \mathbf{T} e' detto **simmetrico** se verifica

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in E_3,$$

o anche

$$\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{T}_{ji}; \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^T$$

(4) il **tensore emisimmetrico**: \mathbf{T} e' detto **emisimmetrico** se verifica

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} = -\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in E_3,$$

o anche

$$T_{ji} = -T_{ij};$$

(5) il **tensore isotropo**: \mathbf{T} e' detto isotropo se

$$\mathbf{T} = p\mathbf{I}, \quad T_{ij} = p\delta_{ij}.$$

(6) il **tensore definito positivo**: \mathbf{V} si dice *definito positivo* se

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{u} \geq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in E_3,$$

ed il segno di uguale vale se e solo se $\mathbf{u} = 0$.

I.2.6 Decomposizione in somma di un tensore

Teorema di decomposizione in somma

Per ogni tensore \mathbf{T} esistono, univocamente determinati, i due tensori

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T), \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T), \quad (I.2.6) \quad \boxed{\text{deco}}$$

detti la parte simmetrica ed emisimmetrica di \mathbf{T} , nella base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ si avra'

$$\mathbf{S}_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{T}_{ij} + \mathbf{T}_{ji}), \quad \mathbf{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{T}_{ij} - \mathbf{T}_{ji}).$$

Ogni tensore puo' decomporsi in un unico modo nella somma di un tensore simmetrico ed uno emisimmetrico.

2.4 **Esercizio I.2.7** *Provare le seguenti proprieta'.*

$$(1) \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} = 0 \quad \forall \mathbf{L} \in \text{Lin} \iff \mathbf{T} = 0;$$

$$(2) \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = 0 \quad \forall \mathbf{S} \in \text{Sym} \iff \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{T} \in \text{Emy};$$

$$(3) \mathbf{T} \cdot \mathbf{e} = 0 \quad \forall \mathbf{E} \in \text{Emy} \iff \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{T} \in \text{Sym}.$$

Suggerimento Utilizzando la definizione ^{contra} (I.2.3) basta esprimere le relazioni in termini di componenti.

I.2.7 Tensore emisimmetrico

Definizione I.2.7 Dato un tensore emisimmetrico Ω il **vettore aggiunto** ω e' definito da

$$\mathbf{a} \cdot \Omega = \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \forall \mathbf{a}. \quad (\text{I.2.7})$$

In particolare usando l'indice di Ricci troviamo

$$a_i \Omega_{li} = \epsilon_{ikj} a_k \omega_j, \quad \forall a_k.$$

Questa formula permette di calcolare il vettore $\boldsymbol{\omega}$ aggiunto in funzione del tensore emisimmetrico Ω , ed il tensore emisimmetrico Ω in funzione del vettore $\boldsymbol{\omega}$. Per esercizio ricaviamo le componenti Ω_{12} , ed Ω_{21} . Dall'arbitrarieta' di \mathbf{a} scegliamo $a_k = \delta_{k1}$ e calcoliamo la componente secondo \mathbf{e}_2 , $i = 2$, si ha

$$\delta_{k1} \Omega_{k2} = \Omega_{12} = \epsilon_{2kj} \delta_{k1} \omega_j = \epsilon_{213} \omega_3 = -\omega_3.$$

In modo analogo scegliamo $a_k = \delta_{k2}$ e calcoliamo la componente secondo \mathbf{e}_1 , $i = 1$, si ha

$$\delta_{k2} \Omega_{k1} = \Omega_{21} = \epsilon_{1kj} \delta_{k2} \omega_j = \epsilon_{123} \omega_3 = \omega_3.$$

Per ogni tensore emisimmetrico Ω

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

esiste univocamente determinato un vettore $\boldsymbol{\omega} \equiv (\omega^1, \omega^2, \omega^3) = (\Omega_{23}, \Omega_{13}, \Omega_{21})$, detto **l'aggiunto** di Ω e risulta

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per il vettore trasposto Ω^T si puo' affermare che il vettore $\boldsymbol{\omega}$, per ogni vettore \mathbf{u} verifica la seguente identita'

$$\Omega^T \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}.$$

Il vettore $\boldsymbol{\omega}$ e' detto il vettore associato ad Ω e risulta

$$\Omega^T = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

In notazioni indiciali si scrive

$$\Omega_{ij} = \epsilon_{ijk} \omega_k, \quad \omega_i = (1/2) \epsilon_{ijk} \Omega_{jk}.$$

Il prodotto vettoriale $\mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ si esprime in notazione indiciale

$$w_i = \epsilon_{ijk} v_j u_k.$$

2.10 **Esercizio I.2.8** Verificare che, dati due vettori $\mathbf{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{a} \equiv (a_1, a_2, a_3)$ si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \mathbf{v} \times \mathbf{a}.$$

2.11 **Esercizio I.2.9** Provare che la matrice emisimmetrica sopra definita in termini di \mathbf{v} si trasforma con legge tensoriale.

Risposta Ponendo un apice alle componenti nella nuova base si calcola

$$\begin{aligned} -\Omega_{ij} &= \epsilon_{ijk} v_k = \left(Q_{il} Q_{jm} Q_{kn} \epsilon'_{lmn} \right) \left(Q_{kr} v'_r \right) = Q_{il} Q_{jm} Q_{kn} Q_{kr} \epsilon'_{lmn} v'_r \\ &= Q_{il} Q_{jm} \left(\epsilon'_{lmn} v'_n \right) = -Q_{il} Q_{jm} \Omega'_{lm}. \end{aligned}$$

Si puo' verificare che

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{w} &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} \\ (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{z}) &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{z}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{z})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \end{aligned}$$

2.9 **Esercizio I.2.10** In una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ siano dati i tensori del secondo ordine

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

si chiede di:

- (1) calcolare la parte simmetrica \mathbf{A}_S di \mathbf{A} e quella emisimmetrica \mathbf{B}_E di \mathbf{B} ;
- (2) verificare che $\mathbf{A}_S \mathbf{B}_E = 0$;
- (3) calcolare \mathbf{AB} , $\text{tr} \mathbf{AB}$, $\mathbf{A} : \mathbf{B}$;
- (4) gli scalari invarianti di \mathbf{A} .

Risposta

(1)

$$\mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5/2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_E = \begin{bmatrix} 0 & -3/2 & 1 \\ 3/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

(3)

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -4 & 12 & 3 \\ 6 & -4 & 2 \\ -5 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{tr} \mathbf{AB} = -10, \quad \mathbf{A} : \mathbf{B} = -12.$$

(4)

$$I_3 = \det \mathbf{A} = -9, \quad I_2 = -3, \quad I_1 = \text{tr} \mathbf{A} = 3.$$

I.2.8 Equazione agli autovalori

2.8

Problema -Dato un tensore \mathbf{T} non nullo, si chiede trovare un vettore $\mathbf{v} \neq 0$ ed uno scalare λ , detti rispettivamente **autovettore** ed **autovalore** di \mathbf{T} , soluzioni dell'equazione detta **equazione agli autovalori**

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}. \quad (\text{I.2.8}) \quad \boxed{\text{eigen}}$$

Proprieta'

- 1) Esistono infiniti autovettori.
- 2) Il numero degli autovalori coincide con la dimensione dello spazio vettoriale, nel nostro caso vi sono tre autovalori.
- 3) Ad autovalori distinti corrispondono autovettori distinti.
- 4) Sia \mathbf{S} un tensore simmetrico:
 - i) Gli autovalori di \mathbf{S} sono reali;
 - ii) Si puo' costruire una base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ ortonormale di E_3 costituita da autovettori di \mathbf{S} ;
 - iii) In $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ \mathbf{S} si esprime in forma diagonale

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori dell'equazione $\boxed{\text{eigen}}$ (I.2.8) si trovano risolvendo l'*equazione secolare*

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (\text{I.2.9}) \quad \boxed{\text{sec}}$$

Risolvendo la $\boxed{\text{sec}}$ (I.2.9) ricaviamo un'equazione algebrica $P(\lambda)$ in λ di grado 3 dove P e' il *polinomio caratteristico* di grado 3. Sviluppando $\boxed{\text{sec}}$ (I.2.9) ricaviamo

$$P(\lambda) = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnp} (T_{im} - \lambda \delta_{im})(T_{jn} - \delta_{jn})(T_{kp} - \delta_{kp}) = 0$$

o anche

$$P(\lambda) = I_3 - \lambda I_2 + \lambda^2 I_1 - \lambda^3 = 0,$$

con

$$I_1 = T_i^i = \text{tr} \mathbf{T},$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (T_{ii} T_{jj} - T_{ij} T_{ji}) = \frac{1}{2} ((\text{tr} \mathbf{T})^2 - \mathbf{T} : \mathbf{T}) =$$

$$\left| \begin{array}{cc} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{array} \right|,$$

$$I_3 = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnp} T_{im} T_{jn} T_{kp} = \det \mathbf{T}.$$

Gli scalari I_j , $j = 1, \dots, 3$, sono gli **invarianti fondamentali** del tensore \mathbf{T} .

aley-hamilton

Lemma I.2.3 Teorema di Caley-Hamilton Ogni tensore soddisfa la sua *equazione caratteristica*

$$\mathbf{T}^3 - I_1 \mathbf{T}^2 + I_2 \mathbf{T} - I_3 \mathbf{I} = 0. \quad (\text{I.2.10}) \quad \boxed{\text{eqcar}}$$

Se \mathbf{T} e' invertibile allora moltiplicando ^{eqcar} (I.2.10) per \mathbf{T}^{-1} si ricava

$$\mathbf{T}^2 = I_1 \mathbf{T} - I_2 \mathbf{I} + I_3 \mathbf{T}^{-1}. \quad (\text{I.2.11}) \quad \boxed{\text{T}^2}$$

Proprieta' elementari Ricordiamo che il tensore ortogonale \mathbf{Q} e' detto una **rotazione propria** se $\det \mathbf{Q} = 1$, un'**inversione centrale** se $\det \mathbf{Q} = -1$.

- 1) Esistono infiniti autovettori.
- 2) Il numero degli autovalori coincide con la dimensione dello spazio vettoriale, nel nostro caso vi sono tre autovalori.
- 3) Ad autovalori distinti corrispondono autovettori distinti.
- 4) Sia \mathbf{S} un tensore simmetrico: i) Gli autovalori di S sono reali; ii) Si puo' costruire una base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ ortonormale di E_3 costituita da autovettori di \mathbf{S} ; iii) In $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ \mathbf{S} si esprime in forma diagonale

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

- (5) Se \mathbf{Q} e' ortogonale si puo' provare che $I_2 = I_1$, $I_3 = 1$ ed inoltre

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)(-1 - \lambda - \lambda^2 - I_1 \lambda).$$

Quindi, $\lambda = 1$ e' un autovalore di \mathbf{Q} , vale a dire la trasformazione contiene una direzione fissa \mathbf{u} (autovalore corrispondente)

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

I restanti autovalori, in generale, non sono reali. Se sono reali si dovra' avere $\lambda_2 \lambda_3 = 1$, e quindi essi sono entrambi o positivi (rotazione di angolo 0°) o negativi (rotazione di angolo π). Se invece λ_2, λ_3 sono complessi, e' sempre possibile trovare una terna nella quale \mathbf{Q} si esprima attraverso una matrice del tipo ^{rotazi} (I.1.12). Una matrice del tipo ^{rotazi} (I.1.12) esprime una **rotazione** attorno al vettore \mathbf{e}_3 .

Esempio Dato il tensore

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}.$$

L'equazione caratteristica e' data da

$$(\sqrt{5} - \lambda)(1 - \lambda)(3 - \lambda) - (\sqrt{5} - \lambda)3 = 0,$$

che ammette come soluzioni

$$\lambda_1 = \sqrt{5}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 4.$$

Gli infiniti autovettori \mathbf{u}_i associati a λ_i sono

$$\mathbf{u}_1 = \alpha \mathbf{e}_1, \quad \forall \alpha \in R,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_2 &= \beta \left(\mathbf{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \mathbf{e}_3 \right), & \forall \beta \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{u}_3 &= \gamma (-\sqrt{3} \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), & \forall \gamma \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Gli autovettori sono ortogonali.

Esercizio I.2.11 Calcolare gli autovettori di

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Risposta $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = \sqrt{-1}$, $\lambda_3 = -\sqrt{-1}$.

Esercizio I.2.12 Calcolare gli autovettori ed una base di autovettori ortogonali di

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Risposta $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 4$.

$$\mathbf{e}_1 \equiv \left(x, \frac{x}{2}, 0 \right), \quad \mathbf{e}_2 \equiv (x, -x, 0), \quad \mathbf{e}_3 \equiv (0, 0, z).$$

I.2.9 Decomposizione in prodotto di un tensore

Enunciamo ora un teorema che sarà utile per lo studio del moto di un sistema continuo noto come **Teorema di decomposizione polare** o in prodotto.

Dec **Teorema I.2.4** Ogni tensore \mathbf{F} invertibile può decomporre univocamente nel seguente modo

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{V} = \mathbf{U}\mathbf{R}, \quad (\text{I.2.12}) \quad \text{deco}$$

dove i tensori \mathbf{V} , \mathbf{U} , sono simmetrici e definiti positivi e sono detti tensori di decomposizione destro e sinistro rispettivamente. Inoltre il tensore \mathbf{R} è ortogonale ed è detto **tensore rotazione**.

Dim. Proviamo la prima identità, la seconda è provata in modo analogo.

Iniziamo con l'osservazione che il prodotto $\mathbf{F}\mathbf{F}^T$ è simmetrico ed è definito positivo. Infatti risulta

$$\begin{aligned}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T)_{ij} &= F_{il}F_{jl} = F_{jl}F_{li}^T = (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)_{ji}. \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}\mathbf{F}^T \mathbf{v} &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F})^2 \geq 0 \quad \forall \mathbf{v}.\end{aligned}$$

Sappiamo quindi che $\mathbf{F}\mathbf{F}^T$ ammette una base di autovettori \mathbf{a}_i nella quale si scrive in forma diagonale mediante gli autovalori $\lambda_i > 0$. Sia \mathbf{V} il tensore che nella base \mathbf{a}_i è espresso dalla matrice

$$\tilde{V}_{ij} = \sqrt{\lambda_i} \delta_{ij}.$$

Possiamo calcolare le componenti di \mathbf{V} nella base di partenza \mathbf{e}_i con la formula del cambiamento di base

$$\mathbf{V} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{Q}^T,$$

dove \mathbf{Q} e' la matrice del cambiamento di base data da

$$Q_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}_j.$$

Abbiamo cosi' completamente calcolato \mathbf{V} . Da (I.2.12)^{deco} calcoliamo \mathbf{R} moltiplicando a destra per \mathbf{V}^{-1}

$$\mathbf{R} = \mathbf{FV}^{-1}.$$

Resta da verificare che \mathbf{R} e' ortogonale

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = (\mathbf{FV}^{-1})^T \mathbf{FV}^{-1} = \mathbf{V}^{-T} \mathbf{F}^T \mathbf{FV}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{FV}^{-1} = (\mathbf{V}^{-1})^2 \mathbf{F}^T \mathbf{F}.$$

Ora ricordiamo la definizione di \mathbf{V} e notiamo che il calcolo di questa espressione puo' essere svolto in una base a nostro piacimento. Scegliamo la base \mathbf{a}_i degli autovettori di $\mathbf{F}\mathbf{F}^T$. In questa base si ha

$$[(\mathbf{V}^{-1})^2]_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} \end{bmatrix}.$$

$$[\mathbf{F}^T \mathbf{F}]_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Pertanto il prodotto di queste matrici fornisce la matrice unitaria come voluto. \square

Per comprendere il notevole significato geometrico della decomposizione polare (I.2.12)^{deco} ricordiamo che una matrice \mathbf{V} simmetrica ammette, una base ortonormale di autovettori $\{\mathbf{a}_i\}$, e che in essa \mathbf{V} si esprime in forma diagonale tramite i suoi 3 autovalori reali, cf. Sottosezione I.2.8,

$$\mathbf{V} = \lambda_i \delta_{ij} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j.$$

Inoltre gli autovalori λ_i sono positivi se \mathbf{V} e' definita positiva.

E' poi chiaro che la base $\{\mathbf{a}_i\}$, a seguito della trasformazione ortogonale \mathbf{Q} subisce una rotazione che la porta nella nuova base $\{\mathbf{e}_i\}$ ancora ortonormale

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{Q}\mathbf{a}_i.$$

Indichiamo con \mathbf{u} un generico vettore, e con u_i le sue componenti nella base $\{\mathbf{a}_i\}$. Per il valore del vettore \mathbf{v} corrispondente di \mathbf{u} tramite \mathbf{F} si ha

$$\mathbf{v} = \mathbf{F}\mathbf{u} = \mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{u} = \mathbf{Q}\lambda_i u_i \mathbf{a}_i = \lambda_i u_i \mathbf{Q}\mathbf{a}_i = \lambda_i u_i \mathbf{e}_i.$$

Di conseguenza, il teorema di decomposizione polare afferma che ogni isomorfismo \mathbf{F} ammette due basi speciali $\{\mathbf{a}_i\}$, e $\{\mathbf{e}_i\}$, ottenute l'una dall'altra tramite una rotazione. In questo modo dato un vettore \mathbf{u} , le componenti del vettore trasformato $\mathbf{v} = \mathbf{F}\mathbf{u}$ in $\{\mathbf{e}_i\}$ sono ottenute moltiplicando le componenti del vettore di partenza \mathbf{u} nella base $\{\mathbf{a}_i\}$ per delle costanti positive assegnate λ_i , indipendenti da \mathbf{u} . Un'applicazione fisicamente piu' significativa sara' fornita nel seguito.

2.12 **Esercizio I.2.13** Calcolare la decomposizione in somma e la decomposizione polare per il tensore \mathbf{A} avente nella base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Risposta

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo poi che per $\mathbf{F}^2 = [F_{ik}F_{kj}]$ si ha

$$\mathbf{F}^2 = \mathbf{V}^2 = \mathbf{I}.$$

Per applicare la decomposizione polare dobbiamo innanzitutto calcolare il tensore $\mathbf{F}\mathbf{F}^T = [F_{ik}F_{jk}]$ che risulta

$$\mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare gli autovalori si considera l'equazione secolare

$$\det(\mathbf{F}\mathbf{F}^T - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0,$$

nell'incognita λ . Le radici sono

$$\lambda_1 = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2, \quad \lambda_2 = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2.$$

Gli autovettori sono

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}(\sqrt{2}-1, 1), \quad \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}(-(\sqrt{2}+1), 1).$$

Introduciamo la matrice del cambiamento di base

$$Q_{ij} := \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}_j.$$

La parte simmetrica \mathbf{U} della decomposizione nella base \mathbf{a}_i e' scritta in forma diagonale

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix}.$$

Per trovare \mathbf{U} nella base \mathbf{e}_i e' sufficiente applicare la formula del cambiamento di base

$$\mathbf{Q}\mathbf{U}\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}} & \frac{-(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}} \\ \frac{-(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} \end{bmatrix}.$$

Sviluppando l'operazione di prodotto tra matrici due volte si ricava

$$\mathbf{U} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dalla definizione di decomposizione polare si ha

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Verificare che \mathbf{R} e' ortogonale.

I.2.10 Funzioni a valori tensoriali

Definizione I.2.8 Una funzione definita in Lin si dice:

(a) *funzione scalare a valori tensoriali*,

$$\mathcal{L} : \mathbf{T} \in \text{Lin}(E_3) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{T}) \in R,$$

(b) *funzione vettoriale a valori tensoriali*,

$$\mathcal{L} : \mathbf{T} \in \text{Lin}(E_3) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{T}) \in E_3,$$

(c) *funzione tensoriale a valori tensoriali*,

$$\mathcal{L} : \mathbf{T} \in \text{Lin}(E_3) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{T}) \in \text{Lin}(E_3).$$

Come esempi di funzioni a valori tensoriali si pensi a:

I) Polinomio tensoriale di grado p

$$\mathcal{P}(\mathbf{T}) := a_m \mathbf{T}^p + \dots + a_2 \mathbf{T}^2 + a_1 \mathbf{T} + \mathbf{I},$$

dove $a_i, i = 1, \dots, p$ sono costanti reali.

II) $\mathcal{L}(\mathbf{T})$ e' il trasposto di \mathbf{T} , $\mathcal{L}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}^T$;

III) $\mathcal{L}(\mathbf{T})$ e' la traccia di \mathbf{T} , $\mathcal{L}(\mathbf{T}) = \text{tr} \mathbf{T}$; una saturazione del tipo $\mathcal{L}(\mathbf{T}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$, dove \mathbf{v} e' un vettore fissato; una saturazione del tipo $\mathcal{L}(\mathbf{T}) = \mathbf{T} : \mathbf{T} \mathbf{T}$.

Definizione I.2.9 Una funzione a valori tensoriali si dice *isotropa* se soddisfa la condizione

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(T_{rs}) &= \mathcal{L}(Q_{rk}Q_{sq}T_{kq}), & \forall \mathbf{Q} \text{ ortogonale} \\ Q_{il}Q_{jm}\mathcal{L}_{lm}(T_{rs}) &= \mathcal{L}_{ij}(Q_{rk}Q_{sq}T_{kq}), & \forall \mathbf{Q} \text{ ortogonale.} \end{aligned} \quad (\text{I.2.13}) \quad \boxed{\text{isotr}}$$

La funzione scalare isotropa risulta un invariante.

Lemma I.2.5 Sia $\mathcal{L}(\mathbf{S})$ una funzione a valori tensoriali simmetrica, definita nel sottospazio dei tensori \mathbf{S} simmetrici. Vale la seguente rappresentazione della funzione a valori tensoriali

$$\mathcal{L}(\mathbf{S}) = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{S} + \alpha_2 \mathbf{S}^2, \quad (\text{I.2.14}) \quad \boxed{\text{isotr}}$$

dove i coefficienti $\alpha_i, i = 1, 2, 3$ sono funzioni scari degli invarianti principali di \mathcal{L} .

Capitolo 2

Geometria analitica

In R^n introduciamo la **metrica euclidea** e definiamo la distanza tra due punti $x, y \in R^n$ nel modo usuale

$$|x - y| = d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2}.$$

E' noto che vale la **diseguaglianza triangolare**

$$|x - y| \leq |x| + |y|.$$

2.1 Curve

2.1.1 Proprieta' differenziali di una curva.

Come esempio geometrico di campo vettoriale, consideriamo ora un punto variabile o curva:

$$\gamma: t \in \mathcal{I} \subseteq R \longrightarrow P(t) \in \mathcal{E}_3.$$

Data una curva resta naturalmente associato ad essa un riferimento variabile col il punto P , che riflette le proprieta' geometriche della curva detto **triedro di Frenet**. Il triedro di Frenet rappresenta un sistema di riferimento variabile con il punto $P \in \mathcal{E}_3$ in grado di descrivere bene alcune proprieta' geometriche della curva.

II.3.0 **Definizione 2.1.1** La curva $P: t \in \mathcal{I} \subset R \longrightarrow P(t) \in \mathcal{E}_3$ si dice **curva regolare** se: 1) $P(t) \in C^1(\mathcal{I})$; 2) $\left| \frac{dP(t)}{dt} \right| \neq 0$.

L'espressione $P = P(t)$ si dice anche *rappresentazione parametrica* della curva. E' noto che il vettore derivato di $P(t)$ e' tangente alla curva, quindi un curva regolare e' dotata di tangente in ogni punto.

Esempi

- (1) *Linea retta* Assegnati i vettori \mathbf{v} \mathbf{v}_0 la curva $P : t \in R \rightarrow P(t) = t\mathbf{v} + \mathbf{v}_0$ e' una curva regolare se e solo se $\mathbf{v} \neq 0$, e rappresenta un linea retta parallela a \mathbf{v} e passante per \mathbf{v}_0 .
- (2) *Cerchi, ellissi, ed eliche* Dati a, b, c costanti, la curva

$$P : t \in R \rightarrow P(t) \equiv (a \cos t, b \sin t, ct)$$

rappresenta: 1) $a = b, c = 0$, una circonferenza; 2) $c = 0$, un'ellissi; 3) $a = b$, un'elica circolare; 4) in generale una curva appoggiata ad un cilindro che ha come sezione ortogonale un'ellissi.

- (3) *Cuspide* La curva piana $P(t) \equiv (t^2, t^3)$ e' regolare per $t \neq 0$ e rappresenta una cuspide. Verificare che $P(t)$ e' regolare per $t \neq 0$.
- (4) *Linea retta* La curva piana $P(t) \equiv (t^3, t^3)$ e' la bisettrice del primo e terzo quadrante. Si noti che la rappresentazione parametrica $x = t^3, y = t^3$ e' regolare solo per $t \neq 0$, mentre la rappresentazione $x = s, y = s$ e' regolare anche per $s = 0$. La regolarita' dipende dalla rappresentazione parametrica $s = s(t)$.

Osservazione La curva

$$P(t) \equiv \begin{cases} (-\exp(-1/t^2), 0), & t < 0, \\ (\exp(-1/t^2), \exp(-1/t^2)), & t > 0, \\ (0, 0), & t = 0 \end{cases}$$

non e' regolare in $(0, 0)$. La curva e' l'unione di due semirette.

Ascissa Curvilinea

Data la rappresentazione parametrica $P = P(t)$ ci poniamo il problema del cambiamento di parametro sulla curva. La funzione

$$s : t \in \mathcal{I} \rightarrow s(t) \in \mathcal{J} \in R$$

di classe $C^1(\mathcal{I})$ tale che $\frac{ds(t)}{dt} \neq 0$ determina un cambiamento di parametro $s = s(t)$ per $P(t)$ che lascia la curva regolare.

Definizione 2.1.2 Si chiama **ascissa curvilinea** quel parametro s tale che il vettore derivato di $P(s)$ risulti in piu' unitario $|\frac{dP}{ds}|^2 = 1$.

Tale condizione richiede

$$\left| \frac{dP(t)}{dt} \right| = \left| \frac{dP(s)}{ds} \right| \left| \frac{ds}{dt} \right| = \left| \frac{ds}{dt} \right| \quad (2.1.1)$$

Togliendo i moduli ed integrando (II.3.1) tra $a \in \mathcal{I}$ e t si trova

$$s(t) = s(a) \pm \int_a^t \left| \frac{dP(t)}{dt} \right| dt, \quad (2.1.2)$$

dove il segno \pm dipende dall'essere o meno s funzione crescente di t . In particolare, il modulo dell'intervallo $s(t) - s(a)$ denota la lunghezza dell'arco di curva che va da $P(s(a))$ a $P(s(t))$.

Da quanto detto segue che, su una curva regolare γ di rappresentazione parametrica $P = P(t)$ si puo' sempre fissare un sistema di ascisse curvilinee nel seguente modo.

- (1) Fissiamo un'origine $P(s(a)) = A$;
- (2) Scegliamo un senso di percorrenza sulla curva: il segno positivo o negativo davanti all'integrale in (II.3.2),
- (3) Fissiamo un'unita' di misura data dalla lunghezza $s(t) - s(a)$.

Diremo cosi' che abbiamo introdotto un **sistema di ascisse curvilinee** avente origine nel punto $P(a)$, verso quello concorde o discorde al verso di t , e come unita' di misura quella che misura la lunghezza dell'arco di curva tra $P(a)$ e $P(t)$. $\mathbf{t}(s)$ denota il versore tangente alla curva nel sistema di ascisse dianzi fissato.

II.3.2 **Definizione 2.1.3** *La curva $P(t)$ si dice **curva biregolare** se:*

$$1) P(t) \in C^2(\mathcal{I}); \quad 2) \left| \frac{dP(t)}{dt} \times \frac{d^2P(t)}{dt^2} \right| \neq 0.$$

Piano osculatore

Sia $P(t)$ una curva biregolare, si chiama **angolo di contingenza** $\Delta\alpha$ in s a $P(s)$ l'angolo tra che la tangente in $P(s+h)$ forma con la tangente in $P(s)$.

Si chiama **curvatura** $1/r$ della curva in s il seguente limite

$$\frac{1}{r} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{h},$$

l'inverso r si dice **raggio di curvatura**. Per una retta si assume $r = \infty$.

Per una curva biregolare $P(t)$ esiste il piano passante per $P(s)$ e parallelo alle tangenti in $P(s)$ ed in $P(s + \Delta s)$, che indichiamo con $\Delta\pi(s)$ in s . Il piano $\Delta\pi(s)$ e' tangente a γ ed e' univocamente determinato da $P(s)$, e dalle direzioni dei vettori $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{t}(s + \Delta s)$.

Definizione 2.1.4 *Il piano limite di $\Delta\pi(s)$ per $\Delta s \rightarrow 0$ si chiama **piano osculatore** alla curva biregolare in s , esso contiene i punti Q soluzioni della seguente equazione*

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} (Q - P(s)) \cdot \mathbf{t}(s) \times \mathbf{t}(s + \Delta s) = 0 \quad (2.1.3)$$

La (II.3.3) e' equivalente a

$$(Q - P(s)) \cdot \mathbf{t}(s) \times \left[\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{t}(s + \Delta s) - \mathbf{t}(s)}{\Delta s} \right] = (Q - P(s)) \cdot \mathbf{t}(s) \times \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = 0. \quad (2.1.4)$$

La definizione di piano osculatore puo' far uso di altro parametro, infatti essa risulta indipendente dalla rappresentazione parametrica usata.

Definizione 2.1.5 Si definisce **normale principale** alla curva in s il versore $\mathbf{n}(s)$ normale a $\mathbf{t}(s)$, appartenente al piano osculatore in s e rivolta verso la concavità della curva.

Il vettore $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ normale alla tangente ed alla normale principale e' detto vettore **binormale**.

Si chiama **triedro di Frenet** alla curva in s il riferimento ortonormale $\{P(s), \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$.

Il triedro di Frenet costituisce un'esempio di riferimento variabile col punto.

3.1 **Lemma 2.1.1** Sia γ una curva biregolare, allora vale la **prima formula di Frenet**

$$\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \frac{1}{r}\mathbf{n}.$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} &= 0; & \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} &= 0; & \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} &= 0; \\ \mathbf{t} \times \mathbf{n} &= \mathbf{b}; & \mathbf{n} \times \mathbf{b} &= \mathbf{t}; & \mathbf{b} \times \mathbf{t} &= \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Pertanto, da

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \frac{d}{ds}\mathbf{t} + \mathbf{t} \cdot \frac{d}{ds}\mathbf{b} = \mathbf{t} \cdot \frac{d}{ds}\mathbf{b} = 0,$$

si deduce

$$\frac{d}{ds}\mathbf{b} = \frac{1}{T}\mathbf{n}, \quad (2.1.5)$$

e lo scalare T e' detto la **torsione**.

Inoltre, si ha

$$\frac{d}{ds}\mathbf{n} = \frac{d}{ds}(\mathbf{b} \times \mathbf{t}) = \frac{d}{ds}\mathbf{b} \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \frac{d}{ds}\mathbf{t} = -\frac{1}{T}\mathbf{b} - \frac{1}{r}\mathbf{t} \quad (2.1.6)$$

Esercizio 3.1 **Esercizio 2.1.1** Calcolare il triedro di Frenet, e l'equazione del piano osculatore per la seguente curva:

$$(P(t) - O) = (t+1)\mathbf{e}_1 + (2t-5)\mathbf{e}_2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Suggerimento

$$s = \sqrt{5}t, \quad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2}{\sqrt{5}}, \quad \mathbf{n} = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\sqrt{5}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2\sqrt{5}.$$

Esercizio 3.2 **Esercizio 2.1.2** Calcolare il triedro di Frenet, e l'equazione del piano osculatore per la seguente curva:

$$(P(t) - O) = (t-1)\mathbf{e}_1 + \sin t\mathbf{e}_2 + \cos t\mathbf{e}_3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Suggerimento L'ascissa curvilinea s e' data da $s = \sqrt{2}t$, e si trova

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{e}_1 + \frac{\cos s}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_2 - \frac{\sin s}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_3 \right), \\ \mathbf{n} &= - \left(\frac{\sin s}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_2 + \frac{\cos s}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_3 \right), \\ \mathbf{b} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\mathbf{e}_1 + \frac{\cos s}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_2 - \frac{\sin s}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_3 \right). \end{aligned}$$

Esercizio 3.3

Esercizio 2.1.3 Calcolare il triedro di Frenet, e l'equazione del piano osculatore per le seguenti curve:

$$\begin{aligned} (P(t) - O) &= (t - 1)\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}, \quad \text{in } t = \frac{\pi}{4}; \\ (P(t) - O) &= \frac{1}{2}(1 + t^2)\mathbf{i} + (a + t)\mathbf{j} + (t - 1)\mathbf{k}, \quad \text{in } t = 1; \\ (P(t) - O) &= (1 + t)\mathbf{i} + (2t - 5)\mathbf{j}, \quad \forall t; \\ (P(t) - O) &= 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad t = 0; \\ (P(t) - O) &= \sin^2 t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}, \quad \text{in } t = 0, \text{ paraboloidi}; \\ (P(t) - O) &= a \sin t\mathbf{j} + b \cos t\mathbf{k}, \quad \text{in } t = \frac{\pi}{4}, \text{ ellisse}; \\ (P(t) - O) &= t^3\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j}, \quad t = -1. \end{aligned}$$

Esercizio 3.4

Esercizio 2.1.4 Nel piano siano (r, θ) un sistema di coordinate polari. Calcolare la curvatura delle seguenti curve:

- (1) spirale logaritmica $r = e^{a\theta}$;
- (2) spirale di Archimede $r = a\theta$;
- (3) cardioide $r = a(1 - \cos \theta)$.

Suggerimento Si ricordi che

$$\int_0^t \sqrt{1 + \tau^2} d\tau = (1/2)t\sqrt{1 + t^2} + (1/2)\ln(t + \sqrt{1 + t^2}).$$

2.2 Superficie

2.2.1 Proprieta' differenziali di una superficie.

Come ulteriore esempio geometrico di campo vettoriale, consideriamo ora un punto funzione di due variabili o superficie:

$$\Gamma : (t_1, t_2) \in T \subseteq R^2 \longrightarrow P(t_1, t_2) \in \mathcal{E}_3,$$

dove T e' un dominio di R^2 . Nel seguito noi fissiamo T come rettangolo.

II.3.1 **Definizione 2.2.1** La superficie Γ si dice **superficie regolare** se per ogni coppia dei parametri (t_1, t_2) si verifica:

1)

$$P(t_1, t_2) \in C^1(\mathbb{T});$$

2)

$$\left| \frac{\partial P}{\partial t_i}(t_1, t_2) \right| \neq 0, \quad i = 1, 2;$$

3)

$$\frac{\partial P}{\partial t_1} \times \frac{\partial P}{\partial t_2}(t_1, t_2) \neq 0.$$

In altri termini una superficie regolare è dotata di piano tangente in ogni suo punto. I vettori

$$\frac{\partial P}{\partial t_1}(t_1, t_2), \quad \frac{\partial P}{\partial t_2}(t_1, t_2),$$

sono vettori tangenti alla superficie.

Alle curve $\gamma_1 \equiv P(t_1, \bar{t}_2)$, $\gamma_2 \equiv P(\bar{t}_1, t_2)$, su Γ restano associate le ascisse curvilinee $(s_1, s_2) \in \Sigma$ dette **linee coordinate** su Γ e si ha $\gamma \equiv P(s_1, s_2)$. Per una superficie regolare le linee coordinate sono biregolari, in particolare sono dotate di normali principali. Per una superficie regolare deve risultare

$$\frac{\partial P}{\partial s_1} \times \frac{\partial P}{\partial s_2}(s_1, s_2) =: \mathbf{t}_1(s_1, s_2) \times \mathbf{t}_2(s_1, s_2) = \mathbf{n}(s_1, s_2) \quad \forall (s_1, s_2) \in \Sigma.$$

\mathbf{n} è la **normale alla superficie** Γ ed individua un **orientamento** su Γ .

Si noti che la definizione di superficie regolare *non dipende* dalla rappresentazione parametrica.

Il riferimento $\{P(s_1, s_2), \mathbf{t}_1(s_1, s_2), \mathbf{t}_2(s_1, s_2), \mathbf{n}(s_1, s_2)\}$ offre un esempio di riferimento ortonormale variabile con il punto P sulla superficie Γ .

Data una superficie orientata resta naturalmente associato ad essa un riferimento variabile con il punto P , che riflette le proprietà geometriche della superficie.

L'espressione $P = P(s_1, s_2)$ si dice anche *rappresentazione parametrica* della superficie.

Esempi

(1) *Piano* Assegnati i vettori \mathbf{i}, \mathbf{j} , ed il punto P_0 , la superficie $P : (s_1, s_2) \in \Sigma \rightarrow P(t) = s_1 \mathbf{i} + s_2 \mathbf{j} + P_0$ rappresenta un piano passante per P_0 e parallelo a \mathbf{i}, \mathbf{j} .

(2) *Sfere, ellipsoidi, ed cilindri* Dati a, b, c costanti, la curva

$$P : (s_1, s_2) \in \Sigma \rightarrow P(s_1, s_2) \equiv (a \sin s_2 \cos s_1, b \sin s_2 \sin s_1, c \cos s_2)$$

rappresenta: 1) $a = b = c = r$, una sfera di centro l'origine e raggio r ; 2) $a \neq b \neq c$, un'ellissoide; 3)

$$P : (s_1, s_2) \in \Sigma \rightarrow P(s_1, s_2) \equiv (a \cos s_1, b \sin s_1, c s_2)$$

un cilindro di sezione ellittica.

Definizione 2.2.2 Si dicono **geodetiche** di una superficie regolare Γ quelle linee biregolari su Γ la cui normale principale e' normale a Γ .

Come esempio di geodetica si pensi alle circonferenze massime su una sfera.

2.3 Volumi

Sia Ω un insieme di punti di R^n . Dato Ω si indica con Ω^c il suo **complementare** in R^n . Si ritengono noti i concetti di **insiemi limitati**, **insiemi aperti**, **insiemi chiusi**, **insiemi compatti** (chiusi e limitati), **insiemi connessi**. Inoltre, un insieme $\Omega \subseteq R^n$ si dice **dominio** se e' un aperto connesso e si ha $\Omega = (\bar{\Omega})^\circ$. Ω indichera' generalmente un dominio.

La chiusura del dominio Ω si indica con $\bar{\Omega}$ ed e' ottenuta nel seguente modo

$$\partial\Omega := \bar{\Omega} \cap \overline{(R^n - \Omega)}.$$

Definizione 2.3.1 Dato $S \subseteq R^n$ ed $x \in R^n$, la **distanza di x da S** e' indicata con $d(x, S)$, ed e' definita da

$$d(x, S) := \inf\{|x - y| : y \in S\}.$$

Si puo' provare che

$$\left|d(x, S) - d(y, S)\right| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in R^n.$$

Definizione 2.3.2 Dato $S \subseteq R^n$ il **diametro** di S e' indicato con $diam(S)$, ed e' definito da

$$diam(S) := \sup\{|x - y| : x, y \in S\}.$$

Capitolo 3

Analisi funzionale

In questo capitolo si introducono alcuni concetti di Analisi Funzionale, per funzioni scalari e vettoriali. Inoltre si studiano alcune proprietà matematiche di semplici equazioni e disequazioni differenziali.

3.1 Spazi funzionali

Sia Ω un dominio di R^n , ed

$$f: \mathbf{x} \in \Omega \longrightarrow f(\mathbf{x}) \in R,$$

una funzione scalare definita in Ω . In questa sezione introduciamo diversi spazi vettoriali costituiti da funzioni scalari reali.

3.1.1 Funzioni definite in $\Omega \subseteq R^n$

Definizione 3.1.1 Sia $f: \Omega \rightarrow R$, si definisce **supporto** di f , l'insieme

$$\text{supp } f := \Omega \cap \overline{\{x : f(x) \neq 0\}},$$

dove la chiusura di un insieme S è indicata con \overline{S} .

Se $S \subseteq \Omega$, ed Ω è limitato, \overline{S} è compatto.

Notazioni

Se $\alpha \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ è un n-pla di interi non negativi, α è chiamato **multi-indice** e la lunghezza $|\alpha|$ di α è definita da

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Per gli operatori alle derivate parziali $D_i = \partial/\partial x_i = \partial_{x_i}$, $i = 1 \dots, n$ le derivate di ordine maggiore di uno saranno indicate nel seguente modo

$$D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

La **notazione** $C^k(\Omega)$ denota l'insieme delle funzioni a valori reali, differenziabili k -volte in Ω e con la k -ma derivata D^k continua.

La notazione $C^\infty(\Omega)$ descrive lo spazio delle funzioni definite su Ω infinitamente differenziabili.

La notazione $C^\omega(\Omega)$ descrive lo spazio delle funzioni definite su Ω analitiche¹

La notazione $C_0^k(\Omega)$ descrive lo spazio

$$C_0^k(\Omega) := \{f \in C^k(\Omega) : \text{supp } f \subseteq \Omega \text{ compatto}\}.$$

Definizione 3.1.2 Per $\alpha \in (0, 1)$, diciamo che la **funzione f e' Hölderiana, o Hölder continua di esponente α** , e scriviamo $f \in C^{0,\alpha}(\Omega) \equiv C^\alpha(\Omega)$, se esiste una costante positiva C tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha, \quad x, y \in \Omega.$$

Per $\alpha = 1$ diciamo che la **funzione f e' Lipschitziana**, e scriviamo $f \in \text{Lip}(\Omega) \equiv C^{0,1}(\Omega)$.

L'insieme delle funzioni di classe C^k aventi la k -ma derivata Hölderiana, si indica con $C^{k,\alpha}(\Omega)$.

Definizione 3.1.3 Si definisce **funzione caratteristica dell'insieme Ω** la funzione χ_Ω definita dalla relazione

$$\chi_\Omega : x \in R^n \longrightarrow \chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega, \\ 0, & x \in R^n - \Omega. \end{cases}$$

A.2.2 **Definizione 3.1.4** Una funzione si dice **convessa** se

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Ogni funzione convessa e' continua.

Esempio di spazio funzionale Sia X l'insieme delle funzioni $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ non negative a valori reali con la proprieta'

$$\int_{R^n} \varphi(x) dx = 1, \quad \text{supp } \varphi \subseteq \{\mathbf{x} \in R^n : |\mathbf{x}| \leq 1\} =: \overline{B_1(0)}. \quad (3.1.1) \quad \boxed{\text{test}}$$

Esempio di funzione $C^\infty(R^n)$ non analitica La funzione

$$\vartheta(x) = \begin{cases} C e^{-1/(1-|x|^2)} & |x| < 1, \\ 0 & |x| \geq 1, \end{cases} \quad (3.1.2) \quad \boxed{\text{moll}}$$

Se C e' scelto in modo da rendere vera la (3.1.1) allora $\vartheta \in X$.

Si noti che ϑ non e' analitica!

¹Una funzione f si dice analitica in \mathbf{x} se e' sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di \mathbf{x} . Una funzione f si dice analitica in Ω se e' analitica in tutti i punti di Ω .

3.1.2 Spazio lineare

Consideriamo un insieme $A(\Omega)$ i cui elementi sono funzioni reali definite nello stesso insieme Ω

$$f \in X \iff \{f : x \in \Omega \longrightarrow f(x) \in R\}.$$

Sia $\alpha \in R$, le operazioni

$$f + g := \{f + g : x \in \Omega \longrightarrow f(x) + g(x) \in R\}, \quad (3.1.3) \quad \boxed{\text{line}}$$

$$\alpha f := \{\alpha f : x \in \Omega \longrightarrow \alpha f(x) \in R\}, \quad (3.1.4)$$

muniscono l'insieme $A(\Omega)$ di struttura di spazio vettoriale, o lineare.

Definizione 3.1.5 Per *spazio funzionale*, o *spazio lineare* $X = X(\Omega)$ intendiamo l'insieme di funzioni A quando sia munito della struttura di spazio lineare. Al variare della regolarità delle funzioni varia lo spazio X .

3.1.3 Spazio normato

Definizione 3.1.6 Si definisce *norma* nello spazio lineare X , e si indica con $\|\cdot\|$, l'applicazione

$$\|\cdot\| : f \in X \implies \|f\|_X \in R_+,$$

che verifica le proprietà

$$\|\lambda f\|_X = |\lambda| \|f\|_X;$$

$$\|f + g\|_X \leq \|f\|_X + \|g\|_X;$$

$$\|f\|_X = 0, \iff f(x) = 0, \quad \text{per quasi tutti gli } x \in R_+.$$

Con la dizione *spazio normato* si indica uno spazio lineare normato.

Una norma si può sempre introdurre in uno spazio vettoriale Euclideo $X(\Omega)$ utilizzando il prodotto scalare (f, g) definito in 1.1.2 del Capitolo I. In particolare si ha

$$\|f\|_X := \sqrt{(f, f)}.$$

Definizione 3.1.7 Successione di Cauchy Una *successione* f_n di funzioni definite in uno spazio normato X si dice *di Cauchy* se e solo se

$$\lim_{n, k \rightarrow \infty} \|f_n - f_k\|_X = 0.$$

Ogni successione di Cauchy f_n di funzioni è convergente ed ammette limite f .

Definizione 3.1.8 Spazio completo Uno spazio normato X nel quale ogni successione di Cauchy f_n ammette limite $f \in X$, si dice *spazio completo*. In tal caso si scrive

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_X = 0,$$

e si dice che la successione f_n *converge in norma o forte* ad f .

Definizione 3.1.9 Spazio di Banach Uno spazio lineare, normato, completo X si dice *spazio di Banach*.

Definizione 3.1.10 Spazio separabile *Uno spazio lineare normato X si dice spazio separabile se esiste un insieme numerabile denso in esso.*

*In uno spazio separabile X esiste un insieme numerabile $\{a_i\}$, $i \in \mathbb{N}$ di funzioni linearmente indipendenti detto la **base dello spazio**. In tal caso per ogni funzione $f \in X$ esiste una successione f_n convergente ad f .*

Esempi di spazi di Banach

L'insieme $C^k(\Omega)$ diventa uno spazio di Banach se munito della norma

$$\|f\|_{C^k(\Omega)} := \max_{0 \leq l \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^l f(x)|$$

L'insieme $C^{k,\alpha}(\Omega)$ diventa uno spazio di Banach se munito della norma

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \sup_{|l|=k} \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|D^l f(x) - D^l f(y)|}{|x-y|^\alpha} + \max_{0 \leq l \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^l f(x)|.$$

3.1.4 Spazio duale

Definizione 3.1.11 Spazio duale *Dato lo spazio lineare X e si indica con X' l'insieme delle forme lineari*

$$F : f \in X \longrightarrow F(f) \in \mathbb{R}.$$

L'insieme X' possiede una struttura di spazio vettoriale se si munisce delle operazioni naturali di somma e di prodotto nell'insieme delle forme F . In tal caso X' si chiama lo spazio duale di X .

Definizione 3.1.12 Norma nello spazio duale *Nello spazio duale X' s'introduce la seguente **norma duale***

$$\|F\|_{X'} := \sup_{f \in X} \frac{|F(f)|}{\|f\|_X},$$

dove $|\cdot|$ denota il valore assoluto del numero $F(f)$.

Esercizio 3.1.1 *Provare che $\|F\|_{X'}$ verifica le proprietà di norma.*

Suggerimento Basta provare la disuguaglianza triangolare

$$\|F + G\|_{X'} := \sup_{f \in X} \frac{|F(f) + G(f)|}{\|f\|_X} \leq \sup_{f \in X} \frac{|F(f)|}{\|f\|_X} + \sup_{f \in X} \frac{|G(f)|}{\|f\|_X}.$$

Definizione 3.1.13 Convergenza debole *Data una successione di funzioni f_n convergente quasi ovunque ad $f \in X$, se accade*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(f_n - f) = 0, \quad \forall F \in X',$$

allora si dice che la successione f_n converge debolmente ad f .

Lemma 3.1.1 Successioni limitate hanno limiti deboli Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile, e f_i una **successione limitata** in $L^p(\Omega)$. Allora esiste una sottosuccessione f_{i_k} ed una funzione $f \in L^p(\Omega)$ tale che f_{i_k} converge debolmente ad f . Vale a dire

$$L(f_{i_k}) \rightarrow L(f), \quad i_k \rightarrow \infty.$$

Definizione 3.1.14 Spazio riflessivo Uno **spazio** si dice **riflessivo** se coincide con il duale del duale, cioè se

$$X = (X')'.$$

Sia X uno spazio lineare in X la dualità fornisce un concetto sostitutivo del concetto di prodotto scalare.

Definizione 3.1.15 Forma lineare Nello spazio X si introduce l'operazione esterna bilineare

$$\tau : (f, F) \in X \times X' \longrightarrow \tau(f, F) = F(f) \in \mathbb{R}. \quad (3.1.5) \quad \boxed{\text{bil}}$$

Esempio di funzione non derivabile

Sia g una funzione localmente sommabile in Ω e g_n una successione convergente a g . Per le funzioni $f, g_n \in C_0^k(\Omega)$ vale la seguente identità

$$\int_{\Omega} f(x) D^k g_n(x) dx = (-1)^k \int_{\Omega} D^k f(x) g_n(x) dx.$$

Per la funzione non differenziabile g definiamo la derivata k -esima mediante l'identità

$$\int_{\Omega} f(x) D^k g(x) dx := (-1)^k \int_{\Omega} D^k f(x) g(x) dx.$$

Questa identità definisce un esempio di funzionale lineare. Si noti che questo funzionale attribuisce una derivata alla funzione g , anche se g non è derivabile!

3.1.5 Spazio di Hilbert

In linea con quanto fatto in 1.1.2 Capitolo I, in alcuni spazi funzionali X si può introdurre un **prodotto scalare**

$$\tau : (f, g) \in X \times X \rightarrow \tau(f, g) \in \mathbb{R}.$$

Definizione 3.1.16 Spazio lineare Euclideo Uno spazio lineare munito di prodotto scalare τ si chiama **spazio lineare Euclideo**.

Definizione 3.1.17 Spazio di Hilbert Si definisce **spazio di Hilbert** H uno spazio lineare nel quale è stato definito un prodotto scalare τ e nel quale è stata definita la norma come $\|x\|^2 = \tau(x, x)$. Inoltre, H è **completo** nel senso che ogni successione f_i di Cauchy

$$\forall \epsilon \exists N : \forall i, j > N, \longrightarrow \|f_i - f_j\|_H < \epsilon$$

è convergente (ammette un limite forte $f \in H$).

In uno spazio di Hilbert si definisce il concetto di ortogonalita' e di sottospazio ortogonale nel modo solito.

Uno spazio di Hilbert e' uno spazio di Banach nel quale la norma e' stata introdotta dal prodotto scalare. Uno esempio di spazio di Hilbert e' fornito dallo spazio delle funzioni a quadrato sommabile.

3.2 Spazi di Lebesgue

In questa sezione studiamo gli spazi di funzioni integrabili secondo Lebesgue. Si ritiene nota la teoria dell'integrazione che viene brevemente richiamata alla fine del capitolo.

Partiamo dalla seguente osservazione

Sia Ω un dominio limitato, definiamo L^1 lo spazio delle funzioni scalari f definite, integrabili in valore assoluto su Ω , munito della norma

$$\|f\|_{L^1} := \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

Nello spazio L^1 le funzioni sono definite a meno di insiemi di misura nulla secondo Lebesgue, quindi $f \in L^1$ rappresenta una classe di funzioni. Per definire un elemento di questa classe f ragioniamo come segue.

Per quasi tutti gli $y \in \Omega$ esiste un $z \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{1}{|B_r(y)|} \int_{B_r(y)} f(\mathbf{x}) dx = z, \quad r \longrightarrow 0. \quad (3.2.1) \quad \boxed{\text{medi}}$$

dove $|B_r(y)|$ rappresenta la misura di $B_r(y)$. La quantita' a primo membro di (3.2.1) si dice **valor medio di f** .

Definiamo $f(y) := z$ come rappresentante delle funzioni f in L^1 verificanti (3.2.1).

3.2.1 Spazio $L^2(\Omega)$

Un esempio di spazio di Hilbert e' fornito dallo spazio $L^2(\Omega)$ delle funzioni, definite in Ω a quadrato sommabile.

Nello spazio delle funzioni di quadrato integrabile $L^2(\Omega)$, si introduce il seguente **prodotto scalare**

$$\tau : (f, g) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \tau(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx =: (f, g)_{L^2(\Omega)} \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3.2.1 Verificare che l'applicazione τ e' bilineare e verifica la definizione di prodotto scalare.

Suggerimento Basta ricordare le proprieta' dell'integrale

$$\int_{\Omega} fg dx = \int_{\Omega} gf dx, \quad \int_{\Omega} \lambda f dx = \lambda \int_{\Omega} f dx.$$

Il prodotto scalare definisce la norma o modulo nel seguente modo

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} f(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

E' semplice verificare che sono verificate le proprieta' di prodotto scalare (commutativo, bilineare, con elemento neutro).

Lo spazio $L^2(\Omega)$ e' uno spazio lineare Euclideo.

Lo spazio $L^2(\Omega)$ e' uno spazio di Hilbert.

Proviamo che vale la seguente **diseguaglianza di Schwartz**

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} f(x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} g(x)^2 dx \right)^{1/2}. \quad (3.2.2) \quad \boxed{\text{sch}}$$

Per provare la ^{sch}(3.2.2) basta usare le funzioni

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{\left(\int_{\Omega} f(x)^2 dx \right)^{1/2}} = \frac{f(x)}{\|f\|}, \quad g_1(x) = \frac{g(x)}{\left(\int_{\Omega} g(x)^2 dx \right)^{1/2}} = \frac{g(x)}{\|g\|},$$

che hanno norma unitaria $\|f_1\|_{L^2(\Omega)} = \|g_1\|_{L^2(\Omega)} = 1$. La seguente disequaglianza e' sempre vera

$$\int_{\Omega} (f_1(x) - g_1(x))^2 dx \geq 0. \quad (3.2.3) \quad \boxed{\text{sch}}$$

Sviluppando il quadrato in ^{sch}(3.2.3) e sostituendo le definizioni per f_1, g_1 si ricava

$$\int_{\Omega} f_1(x)^2 dx + \int_{\Omega} g_1(x)^2 dx - 2 \int_{\Omega} f_1(x)g_1(x)dx = 1 + 1 - 2 \int_{\Omega} \frac{f(x)}{\|f\|_{L^2(\Omega)}} \frac{g(x)}{\|g\|_{L^2(\Omega)}} dx \geq 0,$$

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Quest'ultima disequaglianza e' detta **diseguaglianza di Schwartz**

3.2.2 Spazi L^p

A.2.1 **Definizione 3.2.1 Funzioni p-sommabili** *L'insieme L^p , $p \geq 1$ e' l'insieme delle funzioni p-sommabili secondo Lebesgue,*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ e' misurabile e } |f|^p \text{ e' sommabile}\}.$$

Gli elementi dell'insieme $L^p(\Omega)$ non sono piu' funzioni ma classi di funzioni equivalenti, che denoteremo sempre con f , rappresentanti funzioni che coincidono eccetto insiemi di misura nulla. L'indice $q := p/(p-1)$ si dice **indice duale** di p .

Lemma 3.2.1 Diseguaglianza di Hölder *Siano $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, allora $fg \in L^1(\Omega)$ e vale la **diseguaglianza di Hölder***

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Il segno di uguale vale se e solo se

- (i) $1 < p < \infty$, $|g(x)| = \lambda|f(x)|^{p-1}$ quasi ovunque;
(ii) $p = 1$, $|g(x)| \leq \lambda$, e $|g(x)| = \lambda$ se $f(x) \neq 0$;
(iii) $p = \infty$, $|f(x)| \leq \lambda$, e $|f(x)| = \lambda$ se $g(x) \neq 0$.

Si esclude $p < 1$!

Lemma 3.2.2 *Lo spazio $L^p(\Omega)$ e' uno spazio lineare, vale a dire se $f, g \in L^p$ anche αf ed $f + g$ sono in L^p .*

Dim. Poiche' la proprieta' $\alpha f \in L^p$ e' ovvia, proviamo solo la somma e' un'operazione interna. Introduciamo i simboli

$$\binom{m}{0} = 1, \quad \binom{m}{i} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-i+1)}{i!}, \quad i \geq 1.$$

Sviluppando la potenza $(f + g)^m$ con la regola di Laplace si trova

$$\int_{\Omega} (f_1 + f_2)^m dx = \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} \int_{\Omega} f_1^{m-i} f_2^i dx$$

Applichiamo la disuguaglianza di Hölder alle funzioni

$$f = f_1^{m-i}, \quad g = f_2^i,$$

in ciascun integrale, con esponenti

$$\frac{1}{p} = \frac{m-i}{m}, \quad \frac{1}{q} = \frac{i}{m},$$

e ricaviamo

$$\left| \int_{\Omega} f_1^{m-i} f_2^i dx \right| \leq \|f_1\|_m^{m-i} \|f_2\|_m^i < \infty.$$

Allora L^m e' uno spazio vettoriale. \square

Lo spazio delle funzioni p-sommabili sara' denotato con lo stesso simbolo L^p .

Definizione 3.2.2 Norma in L^p *Definiamo norma di f in L^p*

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty. \quad (3.2.4) \quad \boxed{\text{normax}}$$

La $\boxed{\text{normax}}$ (3.2.4) definisce realmente una norma in quanto, per le funzioni f, g in $L^p(\Omega)$ valgono le seguenti disuguaglianze

- (i) $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p, \quad \lambda \in \mathbb{R}$;
(ii) $\|f\|_p = 0$ se e solo se $f(x) = 0$ quasi ovunque;
(iii) **disuguaglianza triangolare**

$$\|f(x) + g(x)\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

La **diseguaglianza triangolare** esprime la convessita' della norma

$$\|\lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x)\|_p \leq \lambda\|f\|_p + (1 - \lambda)\|g\|_p.$$

Si puo' anche definire lo spazio L^∞ come

$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow R, f \text{ e' misurabile ed esiste una costante } K \text{ tale che}$

$$|f(x)| \leq K \text{ quasi ovunque } x \in \Omega \},$$

e la norma come

$$\|f\|_\infty = \inf\{K; |f(x)| \leq K\}$$

che sara' anche detta l'**estremo superiore essenziale** di f , $ess \sup f$. L'estremo superiore essenziale trascura i valori della funzione su insiemi di misura nulla, ad esempio, se $\Omega = R$, ed $f(x) = 1$ se $x \in Q$, $f(x) = 0$ se $x \in Q^c$ si ha $ess \sup f = 0$, $\sup f = 1$. In generale, $ess \sup f \leq \sup f$. Per quanto riguarda gli spazi L^p si ha:

se Ω e' limitato, $f \in L^\infty$ comporta $f \in L^p$ (**provarlo**);

se Ω e' non limitato ed $f \in L^\infty$ non implica $f \in L^p$ (costruire un esempio di funzione in L^∞ ma non in L^1).

Se per un p $f \in L^p \cap L^\infty$ allora $f \in L^q$, $q > p$ e risulta

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p.$$

Lemma 3.2.3 Diseguaglianza di Young Se $f \in L^p$, $g \in L^q$, $1/p + 1/q = 1$, vale la *diseguaglianza di Young*

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q. \quad (3.2.5) \quad \boxed{\text{young}}$$

Per $p = 2$ la ^{young}(3.2.5) coincide con la nota **diseguaglianza di Cauchy**.

Si osservi che $\|f + tg\|_p^p = \int |f + tg|^p dx$ e' convessa e quindi esistono i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale in $t = 0$.

3.2.3 Successioni di funzioni

Convergenza di funzioni integrabili

Lemma 3.2.4 Convergenza monotona di Beppo-Levi Sia f_1, f_2, \dots , una successione monotona crescente di funzioni **non negative** misurabili su (Ω, Σ, μ) , e sia

$$f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x),$$

$$I = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_j(x)dx.$$

Allora, f e' misurabile, I e' finito e risulta $I = \int_{\Omega} f(x)dx$. Vale a dire,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_j(x)dx = \int_{\Omega} \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)dx = \int_{\Omega} f(x)dx \quad (3.2.6) \quad \boxed{\text{moconv}}$$

Lemma 3.2.5 Lemma di Fatou Sia f_1, f_2, \dots , una successione di funzioni **non negative** misurabili su (Ω, Σ, μ) , e sia $f(x) = \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$. Allora f e' misurabile e risulta

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_j(x) dx \geq \int_{\Omega} f(x) dx. \quad (3.2.7) \quad \boxed{\text{Fatou}}$$

Lemma 3.2.6 Convergenza dominata di Lebesgue Sia f_1, f_2, \dots , una successione di funzioni **sommabili** su (Ω, Σ, μ) e sia $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$. Se esiste una funzione $G(x)$ su (Ω, Σ, μ) tale che $|f_j(x)| \leq G(x), \forall j$, allora $|f(x)| \leq G(x)$ e risulta

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_j(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx. \quad (3.2.8) \quad \boxed{\text{doconv}}$$

Lemma 3.2.7 Termine mancante nel teorema di Fatou Sia f_1, f_2, \dots , una successione di funzioni **non negative** misurabili su (Ω, Σ, μ) e sia $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$. Se sono uniformemente di p -ma potenza, $0 < p < \infty$, sommabili

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_j(x)|^p dx \leq C,$$

allora risulta

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} ||f_j(x)|^p - |f_j(x) - f(x)|^p - |f(x)|^p| dx = 0. \quad (3.2.9) \quad \boxed{\text{mFatou}}$$

3.2.4 Completezza di L^p

Definizione 3.2.3 Differenziabilita' delle norme Siano f e g due funzioni in $L^p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$. La funzione definita da

$$N(t) = \int_{\Omega} |f(x) + tg(x)|^p dx$$

e' differenziabile e la sua derivata in $t = 0$ e' data da

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{t=0} = p \int_{\Omega} |f(x)|^{p-2} f(x) g(x) dx. \quad (3.2.10)$$

Questa nozione di derivata della norma e' detta la **derivata di Gateaux o direzionale**

Definizione 3.2.4 Completezza degli spazi L^p Sia $1 \leq p \leq \infty$, $f_i, i = 1, 2, \dots$ una successione di Cauchy in $L^p(\Omega)$, cioe' $\|f_i - f_j\|_p \rightarrow 0$, quando $j \rightarrow \infty, (\forall \epsilon, \exists N : \|f_i - f_j\|_p < \epsilon, \forall i, j > N)$. Allora esiste un'unica funzione $f \in L^p(\Omega)$ tale che $\|f_i - f\| \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$, e diremo che f_i **converge fortemente ad f** .

Inoltre, esiste una sottosuccessione f_{i_k} ed una funzione F tale che

- (i) $|f_{i_k}(x)| \leq F(x)$, quasi ovunque;
- (ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{i_k}(x) = f(x)$, quasi ovunque.

Gli spazi che godono della proprieta' di contenere i limiti di ogni successione fortemente convergente sono detti **completi**.

Gli spazi L^p sono spazi di Banach.

3.2.5 Convergenza debole

La nozione di convergenza forte non e' l'unica nozione di convergenza in $L^p(\Omega)$, a questa si aggiunge quella di convergenza debole che richiede il concetto di funzionale lineare, continuo su $L^p(\Omega)$. La nozione di **convergenza debole** e' spesso piu' utile, in quanto allarga il concetto di convergenza.

A.2.3 **Definizione 3.2.5 Funzionale lineare** *Un'applicazione $L : L^p(\Omega) \rightarrow R$ e' detta funzionale lineare se e solo se*

$$L(af + bg) = aL(f) + bL(g) \quad \forall f, g \in L^p(\Omega), \forall a, b \in R.$$

Si dice che L e' un funzionale lineare continuo se e solo se, per ogni successione f_i fortemente convergente ad f accade

$$L(f_i) \rightarrow L(f), \quad \text{se } f_i \rightarrow f.$$

Si dice che L e' un funzionale lineare limitato se e solo se, $\exists K$, indipendente da f , tale che

$$|L(f)| \leq K\|f\|_p, \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Lemma 3.2.8 *Se L e' lineare allora e' continuo se e solo se e' limitato.*

A.2.4 **Definizione 3.2.6** *L'insieme dei funzionali lineari continui su $L^p(\Omega)$ si dice duale di $L^p(\Omega)$ ed e' indicato con $L^*_p(\Omega)$. Esso e' uno spazio vettoriale, e si definisce come norma di L il numero*

$$\|L\| = \sup\{|L(f)| : \|f\|_p \leq 1\}.$$

A.2.5 **Definizione 3.2.7** *Se f_1, f_2, \dots e' una successione di funzioni di $L^p(\Omega)$ diciamo che converge debolmente ad $f \in L^p(\Omega)$ se e solo se*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} L(f_i) = L(f), \quad \forall L \in L^*_p(\Omega).$$

Lemma 3.2.9 Teorema di rappresentazione di Riesz *Il duale di $L^p(\Omega)$ coincide con $L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se $1 \leq p < \infty$, nel senso che per ogni $L \in L^*_p(\Omega)$ esiste un unico $v \in L^q(\Omega)$ tale che*

$$L(f) = \int_{\Omega} v(x)f(x)dx.$$

Inoltre si ha

$$\|L\| = \|v\|_q.$$

Il duale di L^∞ non è L^1 .

Osservazione La convergenza forte implica la convergenza debole

$$\|f_i - f\|_p \rightarrow 0 \longrightarrow |L(f_i) - L(f)| \rightarrow 0, \forall L \in L^p_*(\Omega).$$

La convergenza debole non implica quella forte!

Vi sono tre meccanismi in base ai quali f_i converge debolmente ma non fortemente ad f . Sia $\Omega = (0, 1)$

- (i) f_k oscilla con frequenza che cresce ad infinito, es. $f_k(x) = \sin(kx)$, $x \in \Omega$;
- (ii) f_k cresce indefinitamente, es. $f_k(x) = k^{1/p}g(kx)$, con $g \in L^p(\Omega)$, si fissi $y = kx \in \Omega$ per k che cresce ed x che va a zero, $g(y)$ ha sempre lo stesso valore ma il coefficiente tende ad infinito;
- (iii) f_k va ad infinito, es. $f_k(x) = g(x + k)$.

Proprieta' della convergenza debole

Lemma 3.2.10 Unicita' del limite *Il limite debole e' unico.*

Lemma 3.2.11 Debole semicontinuita' inferiore *Se f_i converge debolmente ad f allora*

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \|f_i\|_p \geq \|f\|_p.$$

Se $1 < p < \infty$ e se $\lim_{i \rightarrow \infty} \|f_i\|_p = \|f\|_p$ allora f_i converge fortemente ad f .

Lemma 3.2.12 Principio della uniforme limitatezza *Se $f_i \in L^p$ gode della proprieta' che la successione di numeri $L(f_i)$ e' limitata per ogni $L \in L^p_*$, allora esiste un numero K tale che $\|f_i\|_p \leq K$, $\forall i$.*

3.2.6 Convolutioni

A.2.6 **Definizione 3.2.8** *Siano f e g due funzioni in R^n . Si definisce **convoluzione** di f e g e si indica con $f * g$ la funzione*

$$(f * g)(x) = \int_{R^n} f(x - y)g(y)dy.$$

*Risulta cambiando le variabili $f * g = g * f$.*

Lemma 3.2.13 **Approssimazione con funzioni C^∞** Sia $j \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n} j(x) dx = 1$. Per $\epsilon > 0$ definiamo $j_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} j(x/\epsilon)$ e per $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ la convoluzione

$$f_\epsilon = j_\epsilon * f.$$

Allora,

$$\begin{aligned} f_\epsilon &\in L^p(\mathbb{R}^n) & \|f_\epsilon\|_p &\leq \|j\|_1 \|f\|_p \\ f_\epsilon &\rightarrow f \text{ forte in } L^p(\mathbb{R}^n) & \epsilon &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Se $j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$D^\alpha f_\epsilon = (D^\alpha j_\epsilon) * f.$$

Lemma 3.2.14 **Continuità delle convoluzioni in spazi di Lebesgue.** Siano $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1/p + 1/q = 1$. La convoluzione $f * g$ è una **funzione continua** e tende a zero ad infinito nel seguente modo: per ogni ϵ esiste un numero naturale $N \rightarrow \infty$ tale che

$$\sup_{|x| > N} |f * g(x)| < \epsilon.$$

Lemma 3.2.15 **Diseguaglianza di Young per le convoluzioni** Sia $p, q, r \geq 1$ e $1/p + 1/q + 1/r = 2$. Siano $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$, allora

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(g * h)(x) dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x-y)h(y) dx dy \right| \leq c \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

3.2.7 Regolarizzazione

Per $\epsilon > 0$, la funzione $\varphi_\epsilon := \epsilon^{-n} \varphi(x/\epsilon)$ dove φ verifica ^{test} (3.1.1) è detta il mollificatore, **mollifier** o **regolarizzatore**.

Data la funzione f definita in Ω si verifica che

$$f_\epsilon(x) := \varphi_\epsilon * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon(x-y) f(y) dy. \quad (3.2.11) \quad \boxed{\text{moll}}$$

Lemma 3.2.16 *Valgono le seguenti proprietà:*

1. Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, allora per ogni $\epsilon > 0$,

$$f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad D^\alpha(\varphi_\epsilon * f) = (D^\alpha \varphi_\epsilon) * f,$$

per ogni multi indice α .

2. $f_\epsilon(x) \rightarrow f(x)$ quasi ovunque. Se f è continua allora f_ϵ converge ad f uniformemente sui compatti di \mathbb{R}^n .

3. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, allora $f_\epsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f_\epsilon\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f_\epsilon - f\|_{L^p} = 0.$$

3.2.8 Separabilita' di L^p

Lemma 3.2.17 Negli spazi $L^p(\Omega)$ esiste un insieme numerabile di funzioni $a_k \in C_0^\infty(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, tale che per ogni funzione $f \in L^p(\Omega)$ esiste una successione di funzioni $f_m \in L^p(\Omega)$ del tipo

$$f_m(x) = \sum_{i=1}^m c_{im} a_i(x)$$

che **converge fortemente** ad f in $L^p(\Omega)$, cioe' verifica la relazione

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\|_p = 0.$$

La successione a_k sara' detta **base** in $L^p(\Omega)$.

Infine per $p = 2$ si puo' costruire una base godente dell'ulteriore **proprietà di ortonormalita'**

$$\int_{\Omega} a_k(x) a_h(x) dx = \delta_{kh}.$$

Gli spazi L^p sono spazi separabili.

Lemma 3.2.18 Separabilita' di $L^p(\mathbb{R}^n)$ Esiste una successione di funzioni ϕ_1, ϕ_2, \dots tale che per ogni $1 \leq p < \infty$, per ogni insieme misurabile $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e per ogni funzione $f \in L^p(\Omega)$ risulti

$$\forall \epsilon, \quad \exists j : \|f - \phi_j\|_p < \epsilon.$$

Esempio 1 La funzione

$$j(x) = \begin{cases} \exp[-\frac{1}{1-|x|^2}] & |x| < 1, \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

e' una funzione infinitamente differenziabile che ha supporto compatto in \mathbb{R}^n e contenuto in B_1 , sfera centrata in O e di raggio unitario.

Esempio 2 Sia $\Omega = (0, 1)$, sia χ_n la funzione caratteristica dell'intervallo $(0, 1/n)$. Si vede facilmente che la successione $f_n(x) = n\chi_n(x) = 0$ in $(1/n, 1)$ e quindi per $n \rightarrow \infty$ la successione tende puntualmente a zero. Se si considera pero' l'integrale di f_n su $(0, 1)$ si ricava

$$\int_0^1 n^p (\chi_n(x))^p dx = n^p \int_0^{1/n} dx = 1.$$

Quindi f_n converge ad uno nella norma di L^1 e diverge in L^p per $p > 1$.

Esempio 3 Sia $\Omega = (0, 2\pi)$, la successione $f_n(x) = 1 + \sin(nx)$ nella norma di L^1 converge a $f(x) = 1$. Ma e' evidente che non converge puntualmente. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f_n - f|(x) dx &= \sum_{0 \leq i \leq n-1} \int_{2i\pi/n}^{(2i+1)\pi/n} \sin(nx) dx - \sum_{0 \leq i \leq n-1} \int_{(2i+1)\pi/n}^{2(i+1)\pi/n} \sin(nx) dx \\ &= \sum_{0 \leq i \leq n-1} \frac{4}{n} = 4 \frac{n-1}{n} \neq 0. \end{aligned}$$

3.4 Distribuzioni

3.4.1 Spazio delle distribuzioni

Il concetto di **derivata debole** e' indispensabile per lo studio delle equazioni alle derivate parziali, in quanto non sempre vale la regola di Schwartz sull'ordine di derivazione. Il punto fondamentale e' rappresentato dal fatto che ogni funzione semplicemente integrabile (neanche continua!) puo' essere derivata in senso debole infinite volte (come se fosse in C^∞ !). Tale indebolimento rende semplice la costruzione di soluzioni *deboli*, resta da vedere quando esse siano anche differenziabili in senso ordinario. Un'analogia in algebra e' fornita dalla risoluzione di un'equazione polinomiale attraverso numeri razionali! Infatti nel limite si ottengono i numeri irrazionali. Quindi per il processo di limite e' necessario sapere che la soluzione esiste! cioe' conoscere un **teorema di esistenza**.

A.3.1 **Definizione 3.4.1 Funzioni test** Lo spazio delle **funzioni prova o test functions** denotato con $D(\Omega)$ consiste delle funzioni $C_0^\infty(\Omega)$ munite del seguente concetto di convergenza:

Una successione $\phi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ converge in $D(\Omega)$ a $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ se e solo se esiste un compatto $K \subseteq \Omega$ contenente il supporto di $\phi_i - \phi, \forall i$, nel quale le ϕ_i convergono a ϕ uniformemente con tutte le loro derivate. Ricordiamo che si dice che ϕ_i **converge uniformemente** a ϕ se

$$\forall \epsilon \exists N : \quad \forall j > N \quad \sup_{x \in K} |\phi_j - \phi| < \epsilon.$$

A.3.2 **Definizione 3.4.2 Spazio delle distribuzioni** Lo spazio delle **distribuzioni** $D'(\Omega)$ e' lo **spazio duale** di $D(\Omega)$, vale a dire lo spazio dei funzionali lineari e continui su $D(\Omega)$ $T : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ tali che (linearita')

$$T(a\phi + b\psi) = aT(\phi) + bT(\psi), \quad \forall \phi, \psi \in D(\Omega)$$

e se $\phi_n \rightarrow \phi$ (continuita')

$$T(\phi_n) \rightarrow T(\phi).$$

A.3.3 **Definizione 3.4.3 Convergenza di distribuzioni** Una successione di distribuzioni $T_n \in D'(\Omega)$ **converge** a $T \in D'(\Omega)$ se e solo se

$$T_n(\phi) \rightarrow T(\phi), \quad \forall \phi \in D(\Omega).$$

Questa convergenza e' molto debole, infatti per ogni successione di distribuzioni convergente convergono anche le loro derivate, in altre parole, la convergenza e' un'operazione continua! Questo non e' vero per l'ordinaria convergenza puntuale. Bisogna capire che significa che una funzione e' una distribuzione.

3.4.2 Funzioni localmente sommabili

A.3.4 **Definizione 3.4.4** Con $L^p_{loc}(\Omega)$ si indica l'insieme delle funzioni definite in Ω , L^p -integrabili su ogni dominio limitato Ω' , $u \in L^p(\Omega')$, la cui chiusura e' contenuta in Ω . Quindi, $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ se e solo se per ogni compatto $K \subseteq \Omega$

$$\|f\|_{L^p(K)} < \infty.$$

Una successione $f_n \in L^p_{loc}(\Omega)$ **converge (fortemente)**, rispettivamente **converge (debolmente)** ad $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ se converge nel senso usuale in $L^p(K)$ per ogni compatto contenuto in Ω .

Si noti che se $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ questo non implica $f \in L^p(\Omega)$.

Per ogni $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ha senso considerare la distribuzione $T \in D'(\Omega)$

$$T_f(\phi) = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx,$$

in quanto e' continua

$$|T_f(\phi_n) - T_f(\phi)| = \left| \int_{\Omega} f(\phi_n - \phi)dx \right| \leq \sup_{x \in K} |\phi_n(x) - \phi(x)| \int_K |f(x)|dx.$$

In tal caso, diremo che la **distribuzione T e' la funzione f** .

Un importante esempio di distribuzione e' la **funzione δ di Dirac** che non e' una funzione!

$$\delta_x(\phi) = \phi(x),$$

per x fissato in Ω . Si ricordi la misura concentrata in x di Dirac $\delta_x(A)$ essa puo' essere considerata una distribuzione.

Se due distribuzioni definite da $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ coincidono per ogni $\phi \in D(\Omega)$, $T_f(\phi) = T_g(\phi)$, allora si ha $f(x) = g(x)$ quasi ovunque.

3.4.3 Derivate di distribuzioni

A.3.5 **Definizione 3.4.5** Sia $T \in D'(\Omega)$ e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ numeri interi non negativi, definiamo **derivata distribuzionale o debole** la quantita'

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi)$$

dove

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Il simbolo ∂_i denota D^α quando $\alpha_i = 1$, $\alpha_j = 0$ per $i \neq j$.

Il simbolo $\nabla T = (\partial_1 T, \dots, \partial_n T)$ denota il **gradiente distribuzionale** di T .

Se $f \in C^\alpha(\Omega)$ allora integrando per parti si ha

$$(D^\alpha T_f)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x)(D^\alpha \phi)(x)dx = \int_{\Omega} \phi(x)(D^\alpha f)(x)dx = T_{D^\alpha f}(\phi). \quad (3.4.1)$$

Quindi per funzioni derivabili, si ritrova la classica definizione di derivata. In generale pero' la derivata distribuzionale non e' piu' una funzione!

dgen

Lemma 3.4.1 Lemma fondamentale del calcolo delle distribuzioni Sia $T \in D'(\Omega)$ una distribuzione e $\phi \in D(\Omega)$ una funzione test. Sia $\phi_{ty}(x) = \phi(x + ty) \in D(\Omega)$ (funzione traslata). Allora

$$T(\phi_y) - T(\phi) = \int_0^1 \sum_{j=1}^n y_j (\partial_j T)(\phi_{ty}) dt.$$

Inoltre per $f \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$, per ogni $y \in \mathbb{R}^n$, quasi ovunque in x

$$f(x + y) - f(x) = \int_0^1 y \cdot \nabla f(x + ty) dt.$$

In particolare, distribuzioni con derivate zero sono costanti.

A.3.8 **Definizione 3.4.6 Convoluzione di distribuzioni** Una convoluzione di una distribuzione $T \in D'(\Omega)$ con una funzione $j \in C_0^\infty(\Omega)$ e' definita da

$$(j * T)(\phi) = T(j_R * \phi) = T\left(\int_{\mathbb{R}^n} j(y)\phi(x + y) dx\right),$$

dove $j_R(x) = j(-x)$ e' la riflessione di j . Per $T = T_f$ si ritrova la definizione usuale di convoluzione.

Sia $j \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n} j(x) dx = 1$. Per $\epsilon > 0$ definiamo $j_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} j(x/\epsilon)$. Una distribuzione si puo' approssimare con funzioni C^∞ , un'approssimante e' data da $j_\epsilon * T$.

3.5 Spazi di Sobolev

3.5.1 Derivate generalizzate

A.3.6 **Definizione 3.5.1 Spazio di Sobolev** Lo spazio di Sobolev $W_p^1(\Omega) \subseteq D'(\Omega)$ (risp. $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$), $1 \leq p \leq \infty$ e' lo spazio lineare le cui distribuzioni sono definite dalle funzioni $f \in L^p(\Omega)$ (risp. $f \in L_{loc}^p(\Omega)$) aventi le derivate parziali prime $\partial_i f$ in $L^p(\Omega)$ (risp. $\partial_i f \in L_{loc}^p(\Omega)$), dette **derivate generalizzate**:

$$W_p^1(\Omega) = \{f : f \in L^p(\Omega), \partial_i f \in L^p(\Omega)\}.$$

In esso si introduce la **norma in $W_p^1(\Omega)$**

$$\|f\|_{1,p} := (\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p)^{(1/p)}.$$

Gli elementi dello spazio di Sobolev ora definito non sono piu' funzioni ma classi di funzioni equivalenti, che denoteremo sempre con f , rappresentanti funzioni che coincidono eccetto insiemi di misura nulla. Per funzioni $f \in W_p^1(\Omega)$ la derivata generalizzata coincide con la derivata $\partial_i f \in L^p(\Omega)$. Inoltre gode delle usuale proprieta' di linearita' per la combinazione lineare di funzioni e soddisfa la regola (di Leibniz) di derivazione per il prodotto di funzioni.

Il concetto di derivata generalizzata richiede quello di **assoluta continuita'**, o **uniforme continuita'**. Infatti, per $\alpha = 1$, $\Omega = (0, 1)$, se u ammette derivata generalizzata allora deve essere, quasi ovunque, con $\phi_u(y) := \frac{d}{dt}u(y + t(x - y))\Big|_{t=0}$ nei punti di regolarita',

$$u(x) = \int_0^1 \phi_u(y + t(x - y))dt + u(y), \quad x, y \in \Omega, \quad (3.5.1) \quad \boxed{\text{ass}}$$

che fornisce l'assoluta o uniforme continuita' di u .

Osservazione 3.5.1 *Si ponga attenzione a questa definizione data nei testi di analisi, essa differisce da quella data nel capitolo III alle quantita' fisiche macroscopiche!*

La funzione di Heaviside, o a gradino unitaria,

$$h(x) := \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0, \end{cases}$$

e' invece differenziabile quasi ovunque, avente derivata zero, ma non ha derivata generalizzata in quanto non e' assolutamente continua in $(-\epsilon, \epsilon)$. Per tale funzione vale la seguente identita'

$$\int_y^x D\varphi(t)h(t) = \varphi(x), \quad y < 0, \quad x > 0.$$

In tal caso, si dice che la funzione ammette **derivata nel senso delle distribuzioni**, in quanto non risulta piu' possibile definire la derivata generalizzata come funzione, nel senso ordinario di Lebesgue.

3.5.2 Convergenza in $W_p^1(\Omega)$

A.3.7 **Definizione 3.5.2** *Una successione $f_1, f_2, \dots \in W_p^1(\Omega)$ si dice che **converge fortemente** in $W_p^1(\Omega)$ ad $f \in W_p^1(\Omega)$ se converge fortemente in $L^p(\Omega)$ assieme alle sue derivate $\partial_i f_n$, cioe'*

$$\|f_n - f\|_p \rightarrow 0, \quad \|\partial_i f_n - \partial_i f\|_p \rightarrow 0,$$

per $n \rightarrow \infty$.

*Una successione $f_1, f_2, \dots \in W_p^1(\Omega)$ si dice che **converge debolmente** in $W_p^1(\Omega)$ ad $f \in W_p^1(\Omega)$ se converge debolmente in $L^p(\Omega)$ assieme alle sue derivate $\partial_i f_n$, cioe'*

$$\int_{\Omega} (f_n - f)(x)g(x)dx \rightarrow 0 \quad \int_{\Omega} (\partial_i f_n - \partial_i f)(x)g(x)dx \rightarrow 0,$$

per ogni funzione $g \in L^q$, $1/p + 1/q = 1$, quando $n \rightarrow \infty$.

Lo spazio di Sobolev e' uno spazio completo, ogni successione di Cauchy e' convergente.

Similmente si puo' introdurre lo spazio di Sobolev $W_p^m(\Omega)$ nel quale anche le derivate m -me sono sommabili.

Osservazione Si noti come sia necessaria la regolarita' spaziale e temporale simultanea per la successione \mathbf{v}_n . Infatti la successione

$$\varphi_n(x, t) = \sin(nt)f(x), \quad f(x) > 0,$$

ammette limite debole zero per ogni t fissato, in quanto e' limitata in $L^2(0, T; W_2^1) \cap L^\infty(0, T; L^2)$. Ma il $\sup_t \varphi_n(x, t) = f(x)$ non coincide con il limite debole e quindi non converge fortemente.

3.5.3 Traccia di funzione

Da (3.5.1) si deduce che per funzioni f aventi derivata generalizzata ϕ_f in $L^2(\Omega)$ ha senso quasi ovunque anche il valore puntuale della funzione f . Ci chiediamo cosa accade ad $f(x_n)$, se si considera una successione x_n di punti di Ω , nei quali f e' definita, che tende ad un valore $x \in \partial\Omega$ sulla frontiera di Ω . Proviamo che se Ω e' sufficientemente regolare e' possibile assegnare un valore alla funzione f sulla frontiera di Ω .

Problema: Per una funzione f in uno spazio di Sobolev $W_p^m(\Omega)$ e' ancora possibile definire un valore al bordo $\partial\Omega$? Se si, in che senso?

Gli elementi f di $W^{m,q}(\Omega)$ sono classi di equivalenza di funzioni che coincidono a meno di insiemi di misura nulla secondo la misura tridimensionale di Lebesgue, cioe' le superficie S . Chiariamo ora in che senso f possa essere considerata su S . Il valore di f su S e' detto la **traccia** di f su S . Precisamente la traccia della funzione f in $W^{m,q}(\Omega)$ su $W^{j,p}(S)$, per opportuni indici, e' definita come il limite della successione di funzioni regolari f_n convergente ad f in $W^{m,q}(\Omega)$.

Definizione 3.5.3 Sia data la successione di funzioni regolari f_n convergente ad f in $W^{m,q}(\Omega)$, $m \geq 1$. La funzione

$$\gamma_f : x \in \partial\Omega \longrightarrow \gamma_f(x) = \lim_n f_n(x),$$

e' detta la **traccia di f** .

La traccia ha l'ovvia proprieta' di regolarita' $\gamma_f \in L^2(\Omega)$. Per spiegare questa proprieta' supponiamo $\partial\Omega$ dotata di piano tangente in ogni punto e supponiamo che per $y \in \partial\Omega$ esiste una direzione $\mathbf{e}(y)$ ed un numero ϵ tale che il segmento $x = y + t\mathbf{e}$ con $t \in (0, \epsilon)$ sia tutto contenuto in Ω . In queste ipotesi e' sufficiente partire dalla relazione

$$\gamma_f(y) = f(x) + \int_0^1 \phi_f(x + t(y-x))dt. \tag{3.5.2} \quad \boxed{\text{tracc}}$$

Eleviamo al quadrato ambo i membri di (3.5.3) ed integriamo per $y \in \partial\Omega$, ed $x \in \Omega$, applicando la disuguaglianza di Cauchy a secondo membro troviamo

$$\begin{aligned} |\Omega| \|\gamma_f(y)\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 &\leq 2|\partial\Omega| \|f(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_{L^2(\partial\Omega)} \int_{L^2(\Omega)} \left(\int_0^1 \phi_f(x + t(y-x))dt \right)^2 dx dy, \\ &\leq 2|\partial\Omega| \|f(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2|\partial\Omega| \|\phi(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 < \infty. \end{aligned} \tag{3.5.3} \quad \boxed{\text{traccia}}$$

La ^{traccia} (3.5.3) fornisce un controllo della funzione sul bordo in termini della funzione nel dominio.

Dalla dimostrazione discende che il controllo e' fornito dalla conoscenza della funzione in un opportuno intorno della frontiera. Si osservi che per frontiere contenenti cuspidi il teorema ora provato non vale!

3.5.4 Teoremi d'immersione

Forniamo ora un teorema di immersione sufficientemente generale che include anche spazi di dimensione diversa.

Lemma 3.5.1 *Siano $\Omega \subseteq R^n$, ed Ω^k l'intersezione di Ω con un piano k -dimensionale di R^n , sufficientemente regolari, e sia $1 \leq p < \infty$, $j, m \geq 0$. Per $f \in W_p^m(\Omega)$ valgono le seguenti diseguaglianze:*

i) *Sia $mp < n$, $n - mp < k \leq n$, allora $W_p^{j+m}(\Omega) \rightarrow W_p^j(\Omega^k)$*

$$\|f\|_{W_q^j(\Omega^k)} \leq c \|f\|_{W_p^{m+j}}, \quad p \leq q \leq \frac{kp}{n - mp}.$$

ii) *Sia $mp = n$,*

$$\|f\|_{W_q^j(\Omega^k)} \leq c \|f\|_{W_p^{m+j}}, \quad p \leq q < \infty.$$

iii) *Sia $mp > n$,*

$$\max_{0 \leq |\alpha| \leq j} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)| \leq c \|f\|_{W_p^{m+j}}.$$

La diseguaglianza iii) afferma che se una funzione e' in uno spazio di Sobolev sufficientemente alto (o per derivate o per sommabilita') allora la funzione e' continua. Ad esempio se $n = 3$, f e' continua se $f \in W_2^2$.

Diseguaglianza di Ladyzhenskaja

Vogliamo dare alcune diseguaglianze che maggiorino una funzione di L^p con le sue derivate in L^q (tipo Poincare'), valide anche per domini non limitati. Queste diseguaglianze sono anche note come **teoremi d'immersione** in quanto consentono di affermare quando uno spazio di Sobolev sia immerso in uno spazio di Lebesgue di sommabilita' fissata. Qui proviamo una diseguaglianza che sara' utile in seguito.

Lemma 3.5.2 *Una funzione $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ appartiene ad $L^4(\Omega)$, infatti, vale la seguente diseguaglianza di Ladyzhenskaja*

$$\begin{aligned} \|u\|_4^4 &\leq c \frac{1}{2} \|u\|_2^2 \|\nabla u\|_2^2, & n = 2 \\ \|u\|_4^4 &\leq c \frac{1}{2} \|u\|_2 \|\nabla u\|_2^3, & n = 3. \end{aligned} \tag{3.5.4} \quad \boxed{\text{lady}}$$

Dimostrazione Proveremo il lemma per $\Omega = C$ un cubo centrato nell'origine di dimensione $2d$.

Supponiamo dapprima che C sia un quadrato ($n=2$). Dalle identità

$$\begin{aligned} u^2(x_1, x_2) &= \int_{-d}^{x_1} \frac{\partial u^2}{\partial \xi} d\xi \\ u^2(x_1, x_2) &= - \int_{x_1}^d \frac{\partial u^2}{\partial \xi} d\xi, \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} u^2(x_1, x_2) &\leq 2 \int_{-d}^{x_1} |u(\xi, x_2)| \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right| d\xi \\ u^2(x_1, x_2) &\leq 2 \int_{x_1}^d |u(\xi, x_2)| \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right| d\xi. \end{aligned} \tag{3.5.5} \quad \boxed{\text{due}}$$

Sommando (^{due}3.5.5) ed integrando in x_2 , per la disuguaglianza di Schwartz, si ha

$$\max_{x_1} \int_{-d}^d u^2(x_1, x_2) dx_2 \leq \int_{-d}^d \int_{-d}^d |u(x_1, x_2)| \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| dx_1 dx_2 \leq \|u\|_2 \|u_{x_1}\|_2.$$

Lo stesso vale per la variabile x_2 , cioè

$$\max_{x_2} \int_{-d}^d u^2(x_1, x_2) dx_1 \leq \int_{-d}^d \int_{-d}^d |u(x_1, x_2)| \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right| dx_1 dx_2 \leq \|u\|_2 \|u_{x_2}\|_2.$$

Calcoliamo ora l'integrale di u in L^4 , si ha

$$\int_{-d}^d \int_{-d}^d u^4(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \leq \int_{-d}^d \int_{-d}^d \max_{x_1} u^2(x_1, x_2) \max_{x_2} u^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \leq \|u\|_2^2 \|u_{x_1}\|_2 \|u_{x_2}\|_2.$$

Infine applicando la disuguaglianza di Cauchy si deduce

$$\|u\|_4^4 \leq \frac{1}{2} \|u\|_2^2 (\|u_{x_1}\|_2^2 + \|u_{x_2}\|_2^2) = \frac{1}{2} \|u\|_2^2 \|\nabla u\|_2^2.$$

Per C in R^3 si integra la disuguaglianza precedente in x_3

$$\int_{-d}^d \left[\int_{-d}^d \int_{-d}^d u^4(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right] dx_3 \leq \frac{1}{2} \int_{-d}^d \|u(x_3)\|_{L^2(C_*)}^2 \|\nabla_* u(x_3)\|_{L^2(C_*)}^2 dx_3, \tag{3.5.6} \quad \boxed{\text{diseg}}$$

dove con C_* e ∇_* si intende il dominio e il gradiente in R^2 . Notiamo ora che

$$\begin{aligned} u^2(x_1, x_2, x_3) &= \int_{-d}^{x_3} \frac{\partial u^2}{\partial \xi} d\xi \\ u^2(x_1, x_2, x_3) &= - \int_{x_3}^d \frac{\partial u^2}{\partial \xi} d\xi. \end{aligned}$$

Sommando queste relazioni ed integrando in x_1, x_2 si deduce

$$\begin{aligned} \max_{x_3} \int_{-d}^d \int_{-d}^d u^2(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 &\leq \int_{-d}^d \int_{-d}^d \int_{-d}^d |u(x_1, x_2, x_3)| \left| \frac{\partial u}{\partial x_3} \right| dx_1 dx_2 dx_3 \leq \\ &\|u(x_3)\|_{L^2(C)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_3} \right\|_{L^2(C)}. \end{aligned}$$

Sostituendo quest'ultima relazione in (3.5.6) si ha

$$\|u\|_4^4 = \int_{-d}^d \left[\int_{-d}^d \int_{-d}^d u^4(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right] dx_3 \leq \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(C)} \|\nabla_* u\|_{L^2(C)}^2 \|u_{x_3}\|_{L^2(C)}^2.$$

Dalla diseguaglianza di Young con esponenti 3 e 3/2 si ha

$$\|u\|_4^4 \leq \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(C)} \left(\frac{2}{3} \|\nabla_* u\|_{L^2(C)}^3 + \frac{1}{3} \|u_{x_3}\|_{L^2(C)}^3 \right) \leq \frac{1}{3} \|u\|_{L^2(C)} \|\nabla u\|_{L^2(C)}^3. \quad (3.5.7) \quad \boxed{\text{lady4}}$$

In (3.5.7) si e' usata la diseguaglianza $a^3 + b^3 \leq (a+b)^3$.

3.5.5 Compattezza di Rellich-Kondrashov

Un altro importante problema riguarda la convergenza di funzioni, vale a dire se una successione convergente debolmente in uno spazio di Sobolev possa convergere fortemente in uno spazio di Sobolev piu' largo. Qui riportiamo il risultato generale noto come **teorema di compattezza di Rellich-Kondrashov**

Lemma 3.5.3 *Sia $\Omega \subseteq R^n$ limitato e sufficientemente regolare, e sia f_1, f_2, \dots , una successione di funzioni che converge debolmente in $W_p^m(\Omega)$ ad una funzione $f \in W_p^m(\Omega)$. Per $1 < p < \infty$, $m \geq 1$, fissiamo $q \geq 1$, $1 \leq k \leq m$ valgono le seguenti diseguaglianze:*

i) *Sia $kp < n$, e $q < \frac{np}{n-kp}$*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j - f\|_{W_q^{m-k}} = 0.$$

ii) *Sia $kp = n$,*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j - f\|_{W_q^{m-k}} = 0, \quad \forall q < \infty.$$

iii) *Sia $kp > n$,*

$$\max_{0 \leq |\alpha| \leq m-k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha (f_j - f)(x)| \leq c \|f\|_{W_p^m}.$$

A.3.1 **Esercizio 3.5.1** *Si studino le proprieta' di convergenza delle successioni di funzioni*

$$f_n(x, t) = n^p x t \exp^{-nx}, \quad x \in [0, 1] \quad t \in [0, 1], \quad p \text{ fissato};$$

$$g_n(x, t) = \exp -n[x^2 + (t/x)^2] \quad x \in (0, +\infty), \quad t \in (r, +\infty).$$

Si provi che $f_n(x, t)$ converge ad $f(x, t) = 0$ in $K = [0, 1] \times [0, 1]$ puntualmente, $f_n \in L^1([0, 1] \times [0, 1])$ e

$$\int_0^1 \int_0^1 f_n(x, t) dx dt = \frac{1}{2} n^{p-2} (1 - (n+1)e^{-n}).$$

Pertanto il passaggio al limite sotto il segno d'integrale e' possibile solo se $p < 2$. Se $0 \leq p < 1$, f_n converge uniformemente alla funzione continua f ed il risultato segue dalle proprieta' dell'integrale di Riemann. Se $1 \leq p < 2$ non e' piu' detto che f sia continua.

La successione g_n e' in L^p per ogni p , e' continua in $A = (0, +\infty) \times (r, +\infty)$ e converge a zero puntualmente. Inoltre, le derivate parziali di g_n date da

$$\frac{\partial g_n}{\partial x} = 2n\left(-x + \frac{t^2}{x^3}\right) \exp -n[x^2 + (t/x)^2],$$

$$\left| \frac{\partial g_n}{\partial t} \right| = (2n) \frac{\exp -nx^2}{t} \frac{t^2}{x^2} \exp -n(t/x)^2 \leq 2 \frac{\exp -nx^2}{re}.$$

sono anch'esse in L^p per ogni p . Vedere se e' possibile il passaggio al limite sotto il segno d'integrale per le derivate.

Suggerimento Si applichi il teorema della convergenza dominata notando che per la derivata spaziale

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| \leq \frac{2}{n} na \exp^{-na} \leq \frac{2}{n}, \quad a = x^2 + \frac{t^2}{x^2}.$$

3.5.6 Spazi H^1 ed $H^{1/2}$

Lo spazio $W^{1,2}(\Omega)$ denota l'insieme delle funzioni di $L^2(\Omega)$ aventi derivata generalizzata in $L^2(\Omega)$. Lo spazio $W_0^{1,2}(\Omega)$ indica il completamento di $C_0^\infty(\Omega)$ nella norma $\|u\|_{1,2}$. Se una funzione u di $W_0^{1,2}$, e' regolare, allora e' in $W^{1,2}$ ed ha valore zero sul bordo.

Lo spazio H^1 e' lo spazio di Sobolev W_2^1 che diventa **spazio di Hilbert** se si introduce il prodotto scalare

$$((u, v)) = \int_{\Omega} (uv + \nabla u \cdot \nabla v)(x) dx.$$

La norma indotta dal prodotto scalare ora introdotto coincide con quella precedentemente definita.

Convessita' per i gradienti Per $f, g \in H^1(R^n)$

$$\int_{R^n} |\nabla \sqrt{f^2 + g^2}|^2(x) dx \leq \int_{R^n} (|\nabla f|^2 + |\nabla g|^2)(x) dx.$$

Per $g > 0$ l'uguaglianza vale se e solo se $f = cg$.

A.3.9 **Definizione 3.5.4 Trasformata di Fourier** Sia $f \in L^1(R^n)$, la trasformata di Fourier di f e' data da

$$\widehat{f}(k) = \int_{R^n} \exp^{-2i\pi(k,x)} f(x) dx, \quad (k, x) = \sum_{i=1}^n k_i x_i.$$

Proprieta' di \widehat{f}

L'applicazione $f \rightarrow \widehat{f}$ e' lineare.

$$\widehat{\tau_h f}(k) = \exp^{-2i\pi(k,h)} \widehat{f}(k), \quad \tau_h f(x) = f(x - h).$$

$$\widehat{\delta_\lambda f}(k) = \lambda^n \widehat{f}(\lambda k), \quad \delta_\lambda f(x) = f(x/\lambda).$$

$$\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

\widehat{f} e' una funzione continua e quindi misurabile.

Convoluzioni Per $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, sia $1 + 1/r = 1/p + 1/q$, $1 \leq p, q, r \leq 2$, allora

$$\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k).$$

La trasformata di Fourier della funzione gaussiana $g_\lambda(x) = \exp[-\pi\lambda|x|^2]$ e' data da

$$\widehat{g}_\lambda(k) = \lambda^{-n/2} \exp[-\pi|k|^2/\lambda]$$

Lemma 3.5.4 Lemma di Plancherel Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ allora $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e risulta

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Quindi l'applicazione $f \in L^2 \rightarrow \widehat{f} \in L^2$ e' un'isometria, si puo' vedere che e' anche invertibile si indichi con f^\vee l'inversa di \widehat{f} . Risulta

$$f = \widehat{f^\vee} \quad (f, g) = (\widehat{f}, \widehat{g}).$$

Caratterizzazione di H^1 Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ allora $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ se e solo se la funzione $k \rightarrow |k|\widehat{f}(k)$ e' in $L^2(\mathbb{R}^n)$. In tal caso,

$$\widehat{\nabla} f(k) = 2\pi i k \widehat{f}(k),$$

$$\|f\|_{H^1}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(k)|^2 (1 + 4\pi^2 |k|^2) dk. \quad (3.5.8) \quad \boxed{\text{four1}}$$

A.3.10 Definizione 3.5.5 Spazio $H^{1/2}$ Una funzione $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e' detta essere in $H^{1/2}$ se e solo se

$$\|f\|_{H^{1/2}}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + 2\pi|k|) |\widehat{f}(k)|^2 dk < \infty. \quad (3.5.9) \quad \boxed{\text{four1/2}}$$

Combinando $\boxed{\text{four1}}$, $\boxed{\text{four1/2}}$ si vede che

$$\|f\|_{H^{1/2}}^2 \leq \frac{3}{2} \|f\|_{H^1}^2.$$

Basi ortonormali in spazi di Hilbert Ricordiamo quanto abbiamo gia' detto prima, cioe' che esiste una base di funzioni $C^\infty(\Omega)$ $\{\mathbf{a}_k\}$ che sia ortogonale in H^1 ed ortonormale in L^2 , tale che $\forall u \in H^1(\Omega) \exists c_{in}$ tali che

$$u^2 = \lim_{i \rightarrow \infty} c_{in} a_i(x), \quad \|u\|_{L^2}^2 = \lim_{i \rightarrow \infty} c_{in}^2.$$

L'ultima relazione e' nota come **uguaglianza di Parsevall**.

3.5.7 Alcune diseguaglianze

Per le **funzioni scalari** vale la seguente **diseguaglianza di Poincare'**.

3.4.1 Lemma 3.5.5 *Sia $u \in W^{1,2}(\Omega)$ una funzione regolare definita in Ω regolare. Vale la seguente diseguaglianza*

$$\int_{\Omega} |u|^2 \leq c_P^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2, \quad (3.5.10) \quad \boxed{\text{ponc}}$$

se almeno una delle seguenti ipotesi risulta soddisfatta:

i) Ω e' contenuto tra piani paralleli (limitato in almeno una direzione) e la funzione e' nulla su uno dei piani frontiera;

ii) Ω di diametro $d = \sup_{\Omega} |x - y|$ finito e o u nulla su una parte di bordo; oppure u ha media nulla in Ω .

Dim. Forniamo la dimostrazione per Ω contenuto tra due piani paralleli, in seguito daremo la dimostrazione per il caso ii) per funzioni vettoriali. Scegliendo opportunamente il riferimento, sia Ω contenuto tra $x_1 = 0$, $x_1 = d$. La u e' una funzione in $W^{1,2}$ e quindi ammette derivate generalizzate prime.

Poniamo

$$w^2(x_1) := \int_S u^2(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3,$$

dove S denota il piano $x_1 = \text{cost}$. E' semplice verificare che vale l'identita'

$$\int_0^d w^2(x_1) dx_1 = \int_0^d \int_S u^2(x) dx_2 dx_3 dx_1. \quad (3.5.11) \quad \boxed{\text{poin1}}$$

Notiamo ora che, essendo $w = 0$ sul piano $x_1 = 0$, risulta

$$w^2(x_1) = \int_0^{x_1} \frac{dw^2(t)}{dt} dt.$$

Integrando ambo i membri in $x_1 \in (0, d)$, ed utilizzando la diseguaglianza di Schwartz, si ricava

$$\int_0^d w^2(x_1) dx_1 \leq d \int_0^d 2|w|(x_1) \left| \frac{dw(x_1)}{dx_1} \right| dx_1 \leq d \left(\int_0^d |w|^2(x_1) dx_1 \right)^{1/2} \left(\int_0^d \left| \frac{dw(x_1)}{dx_1} \right|^2 dx_1 \right)^{1/2}.$$

Invocando l'identita' $\boxed{\text{poin1}}$ (3.5.11), otteniamo

$$\|u\|_2 \leq d \|\nabla u\|_2, \quad (3.5.12)$$

dove si e' maggiorata la derivata parziale di u rispetto ad x_1 con il modulo di tutte le sue derivate parziali ∇ . Quindi la $\boxed{\text{ponc}}$ (3.5.10) risulta vera per $c = d$. \square

Per le funzioni reali di una variabile reale vale il seguente lemma di Gronwall:

Lemma 3.5.6 Lemma di Gronwall Sia u una funzione positiva definita in $(0, T)$ ed ivi differenziabile, verificante la seguente disuguaglianza differenziale:

$$\frac{du}{dt} \leq f(t)u(t), \quad t \in (0, T) \quad (3.5.13)$$

dove f e' definita in $(0, T)$. Vale la seguente relazione

$$u(t) \leq u(0) \exp \int_0^t f(s) ds. \quad (3.5.14)$$

Dim. Moltiplichiamo ambo i membri di (21.7) per $\exp - \int_0^t f(s) ds$, otteniamo

$$\exp(-\int_0^t f(s) ds) \frac{du}{dt} - \exp(-\int_0^t f(s) ds) f(t)u(t) \leq 0. \quad (3.5.15)$$

Il che implica

$$\frac{d}{dt} \left[u(t) \exp \left(- \int_0^t f(s) ds \right) \right] \leq 0.$$

La decrescenza della funzione sotto il segno di derivata comporta

$$u(t) \exp \left(- \int_0^t f(s) ds \right) \leq u(0),$$

ed il lemma e' completamente dimostrato. \square

Si osservi che per $f(s) = -a^2$, con a costante, si ottiene un decadimento di tipo esponenziale.

3.6 Equazioni differenziali

3.6.1 Problema dei valori iniziali ed al bordo per ODE

Per l'equazione differenziale ordinaria ODE del secondo ordine

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + a(x) \frac{du(x)}{dx} + b(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad (3.6.1) \quad \boxed{\text{diffeq}}$$

si puo' porre sia il **problema dei valori iniziali di Cauchy**

$$u(x) = u_0, \quad \frac{du(0)}{dx} = u_1, \quad (3.6.2) \quad \boxed{\text{id}}$$

sia quello **dei valori al bordo**

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1. \quad (3.6.3) \quad \boxed{\text{bd}}$$

Tali problemi godono proprieta' estremamente diverse tra loro. Tratteremo nel seguito, a titolo di esempio, il problema dell'**unicita'** della soluzione.

Per le soluzioni regolari del problema di Cauchy $\boxed{\text{diffeq}}$ (3.6.1), $\boxed{\text{id}}$ (3.6.2) si puo' sempre provare l'unicita' utilizzando il lemma di Gronwall.

Proviamo qui che vi sono casi in cui il problema omogeneo ammette soluzioni non nulle e quindi la **soluzione nulla non e' unica**. Precisamente, sia $a(x) = 0$, $b(x) = (2\pi)^2$, $f(x) = 0$ la ^{diffeq}(3.6.7) si scrive

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + (2\pi)^2u(x) = 0, \quad x \in (0, 1). \quad (3.6.4) \quad \boxed{\text{difeq1}}$$

E' facile verificare che la funzione $\sin(2\pi x)$ verifica la ^{difeq1}(3.6.4) e le condizioni omogenee al contorno. Cio' fornisce appunto un esempio di non unicita'.

bpicco **Osservazione 3.6.1** Osserviamo che per l'equazione

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + bu(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (3.6.5)$$

il controesempio non sussiste (vale l'unicita') se $b \leq 0$, oppure se \sqrt{b} e' diverso da un multiplo di π , oppure se $\sqrt{b} < \pi$ cioe' per dati opportunamente piccoli. Si vede quindi che la non unicita' sussiste solo in casi particolari, vale a dire quando b assume particolari valori.

Per i suddetti motivi e' interessante lo studio dell'**equazione funzionale agli autovalori di Sturm-Liouville**. Il problema consiste nel cercare i valori numerici λ , **autovalori** per cui esiste una funzione $u(x)$, **autofunzione** che risulti soluzione non nulla del problema

$$\begin{aligned} \frac{d^2u(x)}{dx^2} &= \lambda u(x), \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.6.6) \quad \boxed{\text{equov}}$$

Lemma 3.6.1 Il problema di Cauchy ^{diffeq}(3.6.7), ^{id}(3.6.2) per f

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + a(x)\frac{du(x)}{dx} + b(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad (3.6.7) \quad \boxed{\text{diffeq}}$$

Come applicazione dei Lemma di Poincare' e di Gronwall diamo la dimostrazione del **teorema di unicita' per le equazioni differenziali ordinarie**.

Lemma 3.6.2 La soluzione del problema di Cauchy ^{diffeq}(3.6.7), ^{id}(3.6.2) e' unica nella classe di a, b, f funzioni continue²

Dim. La dimostrazione e' fornita con il metodo per assurdo. Siano v, w due soluzioni di ^{diffeq}(3.6.7), ^{id}(3.6.2) nell'intervallo $(0, X)$ corrispondenti agli stessi dati iniziali u_0, u_1 ed alla stessa forza f . La loro differenza $u = v - w$ soddisfa il sistema omogeneo

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + a(x)\frac{du(x)}{dx} + b(x)u(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (3.6.8) \quad \boxed{\text{difeq}}$$

$$u(0) = 0, \quad \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = 0. \quad (3.6.9)$$

²L'ipotesi su f puo' essere indebolita ad f Lipschitziana.

Moltiplichiamo la (3.6.8)₁^{difeg} per $u'(x)$, dove l'apice indica la derivata prima, si ha

$$\frac{1}{2} \frac{d|u'(x)|^2}{dx} = -a(x)|u'(x)|^2 - b(x)u(x)u'(x), \quad x \in (0, X). \quad (3.6.10) \quad \boxed{\text{inteq}}$$

Integrando (3.6.10)^{inteq} su $(0, x)$, $x \in (0, X)$, otteniamo

$$\frac{1}{2}|u'(x)|^2 = \int_0^x \left(|a(s)||u'(s)|^2 + |b(s)||u(s)||u'(s)| \right) ds, \quad x \in (0, X). \quad (3.6.11) \quad \boxed{\text{intiq}}$$

Notiamo quanto segue

Dalle condizioni iniziali segue

$$|u(x)| = \left| \int_0^x u'(s) ds \right| \leq \left(\int_0^x |u'(s)|^2 ds \right)^{1/2}. \quad (3.6.12) \quad \boxed{\text{poi}}$$

Pertanto elevando al quadrato ed integrando la (3.6.12)^{poi} si ha la disuguaglianza di Poincaré'

$$\left(\int_0^x |u(s)|^2 ds \right)^{1/2} \leq \sqrt{X} \left(\int_0^X |u'(s)|^2 ds \right)^{1/2}. \quad (3.6.13) \quad \boxed{\text{ppoi}}$$

Scriviamo $|u'(x)|^2$ come la derivata di $y(x) := \int_0^x |u'(s)|^2 ds$. Usando la disuguaglianza di Schwartz e (3.6.13)^{ppoi}, da (3.6.11)^{intiq} si ricava

$$\frac{dy^2(x)}{dx} = (A + B)y^2, \quad x \in (0, X), \quad (3.6.14) \quad \boxed{\text{intgr}}$$

dove

$$A := 2 \sup_{s \in (0, X)} |a(s)|, \quad B := 2 \sup_{s \in (0, X)} |b(s)|.$$

L'applicazione del Lemma di Gronwall implica $y(x) = 0$, il che comporta che sia $v(x) = w(x)$, per ogni $x \in (0, X)$ come volevasi dimostrare. \square

3.6.2 Equazioni alle derivate parziali PDE

Equazione ellittica

Si chiama **equazione di Poisson** la seguente equazione alle derivate parziali del secondo ordine

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in R^n \quad (3.6.15) \quad \boxed{\text{poisson}}$$

dove il **Laplaciano** Δ è definito da $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Vogliamo, per ultimo, risolvere in tutto R^n l'equazione di Poisson

Funzioni di Green per l'equazione di Poisson Le funzioni $G_y : R^n \rightarrow R$ definite da

$$\begin{aligned} G_y(x) &:= -|S|^{-1} \ln(|x - y|), & n = 2, \\ G_y(x) &:= [(n - 2)|S^{n-1}|^{-1} \frac{1}{|x - y|^{n-2}}, & n \neq 2, \end{aligned} \quad (3.6.16) \quad \boxed{\text{green}}$$

dove $|S^{n-1}|$ è l'area della sfera unitaria, $|S^0| = 2$, $|S^1| = 2\pi$, $|S^2| = 4\pi$, sono dette **funzioni di Green per** (3.6.15)^{poisson}.

Lemma 3.6.3 Laplaciano distribuzionale *Nel senso delle distribuzioni risulta*

$$-\Delta G_y(x) = \delta_y(x) = \delta(x - y), \quad x \neq y,$$

dove δ_y e' la misura di Dirac concentrata in y . Quindi G_y risolve la ^{poisson}(3.6.15) con $f = 0$ in $x \neq y$.

Lemma 3.6.4 Soluzione dell'equazione di Poisson *Sia $y \rightarrow G_y(x)f(y)$ sommabile quasi ovunque in x , allora la funzione*

$$u(x) = \int_{R^n} G_y(x)f(y)dy$$

soddisfa $u \in L^1_{loc}(R^n)$, e l'equazione ^{poisson}(3.6.15) in $D'(R^n)$. Inoltre, u ha le derivate distribuzionali date da

$$\partial_i u(x) = \int_{R^n} \frac{\partial G_y}{\partial x_i}(x)f(y)dy.$$

Se $n = 3$ allora

$$\frac{\partial G_y}{\partial x_i}(x) = -\frac{1}{4\pi}|x - y|^{-3}(x_i - y_i).$$

Si puo' sostituire ad R^n un insieme Ω , in tal caso, se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, e $y \rightarrow G_y(x)f(y)$ sommabile su Ω , allora

$$u(x) = \int_{\Omega} G_y(x)f(y)dy$$

e' in $L^1_{loc}(\Omega)$ e soddisfa ^{poisson}(3.6.15).

Ovviamente, se u e' soluzione di ^{poisson}(3.6.15) allora anche $u + h$ e' soluzione per ogni funzione **armonica**, (cioe' a Laplaciano nullo).

Cenno di prova

Moltiplichiamo ^{poisson}(3.6.15) per $G_y(x) = U(|x - y|)$ ed integriamo in $E_\epsilon := B_R - B_\epsilon(x)$. Effettuando diverse integrazioni per parti otteniamo

$$\int_{\partial B_R \cup \partial B_\epsilon} \left(\frac{\partial u(y)}{\partial n} U(|x - y|) - u(y) \frac{\partial U(|x - y|)}{\partial n} \right) d\sigma_y = \int_{E_\epsilon} U(|x - y|)f(y)dy. \quad (3.6.17)$$

prova

Supponiamo che la eventuale soluzione $u(x)$ sia limitata, continua e verifichi la seguente condizione

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} [|\nabla u(x)||x| + |u(x)|] = 0.$$

Sotto queste ipotesi possiamo calcolare i limiti in ^{prova}(3.6.17) per $R \rightarrow \infty$ e $\epsilon \rightarrow 0$. Notiamo che

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial u(y)}{\partial n} U(|x - y|)d\sigma_y &= 0 \\ \int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial U(|x - y|)}{\partial n} u(y)d\sigma_y &= \int_{\partial B_\epsilon} \epsilon^{n-1}|x - y|^{1-n}d\sigma_y u(\bar{y}), \end{aligned}$$

dove nell'ultimo integrale abbiamo applicato il teorema della media integrale. Essendo $|x - y| = \epsilon$, il secondo integrale per la continuita' di u tende a $\omega u(x)$, dove ω denota la misura della sfera unitaria. Nei limiti $R \rightarrow \infty$ ed $\epsilon \rightarrow 0$ troviamo, quindi,

$$-\omega u(x) = \int_{R^n} U(|x - y|)f(y)dy, \quad (3.6.18)$$

che fornisce la soluzione di ^{poisson}(3.6.15). Notiamo che per forze a supporto compatto, la funzione $u(x)$ verifica le ipotesi fatte a priori.

Limitiamoci al caso bidimensionale $\mathbf{x} \equiv (x, y)$, nella striscia $\Omega = \{\mathbf{x} : x \in R \ y \in (0, 1)\}$. Il problema omogeneo al bordo si scrive

$$\Delta u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Si vede subito che la funzione $\exp x \sin y$ costituisce un controesempio all'unicita' per il problema omogeneo. Tale non unicita' deriva dall'aver considerato un dominio non limitato. In tal caso, si perde il controllo della soluzione all'infinito, la soluzione infatti diverge per $x \rightarrow \infty$.

Equazione parabolica

Consideriamo l'**equazione del calore**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \Delta u(x, t), \quad x \in R^n, t > 0. \quad (3.6.19) \quad \boxed{\text{heat}}$$

La ^{heat}(3.6.19) e' detta equazione del calore in quanto un esempio fisico per la variabile u e' dato dalla distribuzione di temperatura nei punti x al variare del tempo t .

Vogliamo trovare una soluzione u di ^{heat}(3.6.19) che verifica all'istante iniziale $t = 0$ la condizione

$$u \Big|_{t=0} := u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R^n. \quad (3.6.20) \quad \boxed{\text{heatid}}$$

Questo problema e' chiamato **problema di Cauchy o dei dati iniziali**

Introduciamo il **kernel di Gauss**

$$G_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \quad x \in R^n, \quad t > 0.$$

Questa funzione e' infinitamente differenziabile ed per t fissato ha come grafico una curva a campana del tipo

Figura 3.1

Si puo' verificare che $G_t(x)$ verifica le seguenti proprieta'

$$\int_{R^n} G_t(x)dx = 1,$$

$$\forall \eta > 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_{|x| > \eta} G_t(x)dx = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{R^n} G_t(x)dx < \infty.$$

Queste ultime due proprietà ed il grafico fig. 3.1 affermano che la funzione di Gauss si concentra nell'origine $x = 0$ per $t \rightarrow 0$. Si può verificare che la funzione

$$u(x, t) = \int_{R^n} G_t(x - y)u_0(y)dy, \quad x \in R^n, \quad t > 0,$$

dove $x \equiv (x_1, \dots, x_n)$, $y \equiv (y_1, \dots, y_n)$, e' di classe $C^\infty(R^n \times (0, T))$ e risolve l'equazione parabolica (3.6.19). In particolare poiché il kernel di Gauss non e' definito per $t = 0$, si può provare, almeno per funzioni a supporto compatto, che la u soddisfa (3.6.20) in un senso limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) := u_0(x), \quad x \in R^n. \quad (3.6.21) \quad \boxed{\text{hetid}}$$

Inoltre quando $t \rightarrow \infty$ la u tende a zero.

Infine si può provare che non esistono alte soluzioni, almeno nella classe di soluzioni che non crescono troppo velocemente all'infinito. Il problema del determinismo della soluzione e' chiamato **problema di unicita'**.

Se u_0 e' una funzione a supporto compatto e continua allora e' sufficiente che la funzione cresca al più come $e^{|x|^2}$.

3.7 Funzioni vettoriali.

In questo numero introduciamo alcuni spazi di funzioni vettoriali usati nella idrodinamica.

Iniziamo con la definizione di **prodotto scalare per funzioni vettoriali**. Nello spazio $X = [L^2]^3$ delle funzioni vettoriali $\mathbf{v}(x) \equiv [v_i(x)]$ aventi le componenti v_i di quadrato integrabile X , si introduce il seguente prodotto scalare

$$\tau : (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in X \times X \rightarrow \tau(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{u}(x)dx = \sum_i \int_{\Omega} v_i(x)u_i(x)dx \in \mathbb{R}.$$

E' semplice verificare che sono verificate le proprietà di prodotto scalare (commutativo, bilineare, con elemento neutro).

3.7.1 Spazio di funzioni solenoidali

Con $D(\Omega)$ denotiamo lo spazio delle funzioni vettoriali \mathbf{u} , aventi componenti u^i in $C_0^\infty(\Omega)$, verificanti

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Tale spazio e' anche detto lo **spazio delle funzioni solenoidali**.

Indichiamo con J il completamento di $D(\Omega)$ nella norma di L^2 , e con H il suo completamento nella norma di $W^{1,2}(\Omega)$. Indichiamo con \mathbf{u}_n un'approssimante in C_0^∞ di una funzione $\mathbf{u} \in J$, per ogni $\Phi \in W_2^1(\Omega)$ si ha

$$0 = \int_{\Omega} \Phi \nabla \cdot \mathbf{u}_n dx = \int_{\partial\Omega} \Phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_n d\sigma - \int_{\Omega} \mathbf{u}_n \cdot \nabla \Phi dx.$$

Quindi, nel limite $n \rightarrow \infty$ si ricava

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} \tilde{\Phi} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_n d\sigma = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi dx,$$

dove $\tilde{\Phi}$ e' la **traccia di Φ** . Per l'arbitrarieta' di Φ ricaviamo che ha senso quasi ovunque su $\partial\Omega$ la quantita' $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{n} d\sigma$. Possiamo concludere che $\mathbf{u} \in J$ ammette una traccia nella sua componente ortogonale nel senso anzidetto.

3.7.2 Decomposizione di L^2 in somma diretta di J e G

Proviamo che, per ogni $\mathbf{u} \in J$ risulta

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi = 0, \quad (3.7.1)$$

per tutte le funzioni scalari $\varphi \in W^{1,2}$. In altre parole, J denota l'insieme di L^2 ortogonale alle funzioni di L^2 di tipo gradiente. Viceversa, si puo' provare che la piu' generale funzione ortogonale agli elementi di J e' lo spazio delle funzioni di tipo gradiente.

5.1 Lemma 3.7.1 *Sia Ω semplicemente connesso, $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)$. Supponiamo che, per ogni funzione $\mathbf{w} \in J(\Omega)$ si verifichi la seguente identita'*

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (3.7.2)$$

allora deve risultare $\mathbf{u} = \nabla p$.

Dim Poiche' ogni funzione di L^2 si puo' approssimare con funzioni di C_0^∞ noi ci limitiamo a dimostrare il Lemma per queste ultime, al limite il Lemma risultera' provato anche per funzioni meno regolari.

Scegliamo $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{h}$ con $\mathbf{h} \in C_0^\infty$, si ha $\mathbf{w} \in J(\Omega)$. Integrando per parti ricaviamo

$$\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{h} = 0.$$

Stante l'arbitrarieta' di \mathbf{h} in C_0^∞ , il teorema fondamentale del calcolo integrale comporta che $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. Dalla formula integrale di Stokes

$$\int_{\sigma} \nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} = \int_{\gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x},$$

dove σ denota una superficie aperta di bordo γ , \mathbf{N} la sua normale esterna e $d\mathbf{x}$ l'elemento di linea, si ricava che l'integrale di linea della forma differenziale $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}$ e' nullo lungo tutte le curve chiuse, di conseguenza $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}$ e' un differenziale esatto di potenziale p e sia ha $\mathbf{u} = \nabla p$.

Poniamo $G := \{\varphi \in L^2 : \exists p \in W^{1,2} \varphi = \nabla p\}$. Il lemma ^{5.1}5.7.1 comporta che L^2 si puo' decomporre come somma diretta dei due sottospazi ortogonali J, G . Tale decomposizione e' nota come decomposizione di Helmholtz in quanto e' stata data per la prima volta in elettromagnetismo per funzioni definite in tutto R^3 .

Sia $\mathbf{v} \in L^2$. Nel caso di tutto lo spazio si sa risolvere il problema di Poisson

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{v}.$$

L'identita'

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

implica quindi l'univoca decomposizione di \mathbf{v} mediante i due vettori $\mathbf{v}_1 := \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \in J$ e $\mathbf{v}_2 = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \in G$. Scriveremo allora

$$L^2 = J \oplus G.$$

3.7.3 Diseguaglianza di Poincare' per funzioni solenoidali

Lemma 3.7.2 Diseguaglianza di Poincare' Per funzioni $\mathbf{u} \in W_2^1$ che hanno traccia nulla sul bordo, a divergenza nulla definite in un dominio limitato di diametro d , vale la seguente disequaglianza di Poincare'

$$\alpha \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq d^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_2^2, \quad (3.7.3) \quad \boxed{\text{poincare}}$$

dove $\alpha = ((3 + \sqrt{13})/(2\pi^2))$.

Dim

Sia h una funzione arbitraria regolare definita in Ω , e' vera la disequaglianza

$$\begin{aligned} 0 \leq \left(\mathbf{u} \otimes \mathbf{h} + \nabla \mathbf{u} + \epsilon \nabla \mathbf{u}^T \right)^2 &\leq \sum_{i,j=1}^3 \left(u_i h_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \epsilon \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 = \\ \sum_{i,j=1}^3 \left[(1 + \epsilon^2) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}^2 + u^2 h^2 + h_j \frac{\partial u^2}{\partial x_j} + 2\epsilon \left(u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} h_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.7.4) \quad \boxed{\text{square}}$$

Valgono le seguenti identita'

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 h_i \frac{\partial u^2}{\partial x_i} &= \nabla \cdot (u^2 \mathbf{h}) - u^2 \nabla \cdot \mathbf{h}; \\ \sum_{i,j=1}^3 u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} h_j &= \nabla \cdot [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{h}) \mathbf{u}] - \sum_{i,j=1}^3 u_i \frac{\partial h_j}{\partial x_i} u_j; \\ \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} &= \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}), \end{aligned}$$

dove si e' utilizzata l'ipotesi di solenoidalita'. Integrando $\boxed{\text{square}}$ (3.7.4) su Ω e ricordando che \mathbf{u} si annulla sul bordo si ricava

$$\int_{\Omega} \left[(\nabla \cdot \mathbf{h} - h^2) u^2 + 2\epsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{u} \right] dx \leq (1 + \epsilon^2) \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx. \quad (3.7.5) \quad \boxed{\text{inequ}}$$

Scegliendo \mathbf{h} di componenti $h_i = C \tan(Cx_i)$, $C = \pi/d$ ed ottimizzando rispetto ad ϵ si ottiene $\boxed{\text{poincare}}$ (3.7.3).

Osservazione La costante α in $\boxed{\text{poincare}}$ (3.7.3) e' ottimale per funzioni in V in quanto sfrutta anche la condizione di solenoidalita', pero' essa richiede l'annullamento di tutto il campo \mathbf{u} sul bordo.

(i) Per funzioni vettoriali si puo' provare $\boxed{\text{poincare}}$ (3.7.3) con costante α diversa ammettendo solo che

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

nell'ipotesi che \mathbf{n} assuma per $x \in \partial\Omega$ almeno tre direzioni indipendenti (Ω limitato).

(ii) Per funzioni scalari si puo' provare (3.7.3) con costante α diversa ammettendo solo che

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \, dx = 0,$$

nell'ipotesi Ω limitato; o che la funzione si annulli solo su una parte della frontiera nell'ipotesi Ω limitato solo in un'opportuna direzione.

3.8 Funzioni tensoriali

3.8.1 Spazi di funzioni tensoriali

Iniziamo con la definizione di **prodotto scalare per funzioni vettoriali**.

Con $[L^2(\Omega)]^3, [W^{1,2}(\Omega)]^3$ denotiamo gli spazi delle funzioni vettoriali $\mathbf{v}(x) \equiv [v_i(x)]$ aventi le componenti v_i di quadrato integrabile su Ω , e le derivate prime delle componenti di quadrato sommabile, rispettivamente,

$$\int_{\Omega} |\mathbf{v}(x)|^2 \, dx = \int_{\Omega} v_i(x)v_i(x) \, dx < \infty.$$

$$\int_{\Omega} (|\mathbf{v}(x)|^2 + |\nabla \mathbf{v}|^2) \, dx = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^3 |v_i(x)|^2 + \sum_{i,j=1}^3 |\partial_{x_i} v_j|^2 \right) \, dx < \infty.$$

Definizione 3.8.1 Siano \mathbf{v}, \mathbf{u} in $[L^2(\Omega)]^3$, allora possiamo introdurre il seguente prodotto scalare

$$\tau : (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in X \times X \rightarrow \tau(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{u}(x) \, dx = \int_{\Omega} v_i(x)u_i(x) \, dx \in \mathbb{R}.$$

E' semplice verificare che sono verificate le proprieta' di prodotto scalare (commutativo, bilineare, con elemento neutro).

Con $D(\Omega)$ denotiamo lo spazio delle funzioni vettoriali \mathbf{u} , aventi componenti u_i in $C_0^\infty(\Omega)$, verificanti

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Tale spazio e' anche detto il **sottospazio di $C_0^\infty(\Omega)$ delle funzioni solenoidali**.

Indichiamo con J e con J_1 i sottospazi di $[L^2(\Omega)]^3$ e di $[W^{1,2}(\Omega)]^3$ costituiti dalle funzioni solenoidali e nulle al bordo,. Per una funzione $\mathbf{u} \in J$, e per ogni $\phi \in W_2^1(\Omega)$ si ha

$$0 = \int_{\Omega} \phi \nabla \cdot \mathbf{u} \, dx = \int_{\partial\Omega} \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, d\sigma - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \, dx.$$

Quindi, per ogni $\mathbf{u} \in J$, risulta

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0, \quad (3.8.1)$$

per tutte le funzioni scalari $\phi \in W^{1,2}$. In altre parole, J denota l'insieme di L^2 ortogonale alle funzioni di L^2 di tipo gradiente. Viceversa, si puo' provare che la piu' generale funzione ortogonale agli elementi di J e' lo spazio delle funzioni di tipo gradiente.

an1 **Lemma 3.8.1** *Sia Ω semplicemente connesso, $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)$. Supponiamo che, per ogni funzione $\mathbf{w} \in J(\Omega)$ si verifichi la seguente identita'*

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (3.8.2) \quad \text{proscia}$$

allora deve risultare $\mathbf{u} = \nabla p$.

Dim. Poiche' ogni funzione di $L^2(\Omega)$ si puo' approssimare con funzioni di C_0^∞ noi ci limitiamo a dimostrare il lemma per queste ultime, al limite il Lemma risultera' provato anche per funzioni meno regolari.

Scegliamo $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{h}$ con $\mathbf{h} \in C_0^\infty$, si ha $\mathbf{w} \in J(\Omega)$. Integrando per parti ricaviamo

$$\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{h} = 0.$$

Stante l'arbitrarieta' di \mathbf{h} in C_0^∞ , il teorema fondamentale del calcolo integrale comporta che $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. Dalla formula integrale di Stokes

$$\int_{\sigma} \nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} = \int_{\gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x},$$

dove σ denota una superficie aperta di bordo γ , \mathbf{N} la sua normale esterna e $d\mathbf{x}$ l'elemento di linea, si ricava che l'integrale di linea della forma differenziale $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}$ e' nullo lungo tutte le curve chiuse, di conseguenza $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}$ e' un differenziale esatto di potenziale p e sia ha $\mathbf{u} = \nabla p$.

Poniamo $G := \{\varphi \in L^2 : \exists p \in W^{1,2}(\Omega) \varphi = \nabla p\}$. Il lemma **an1** 3.8.1 comporta che $L^2(\Omega)$ si puo' decomporre come somma diretta dei due sottospazi ortogonali J , G . Tale decomposizione e' nota come decomposizione di Helmholtz in quanto e' stata data per la prima volta in elettromagnetismo per funzioni definite in tutto R^3 .

Sia $\mathbf{v} \in L^2(R^3)$. Nel caso di tutto lo spazio si sa risolvere il problema di Poisson

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{v}.$$

L'identita'

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

implica quindi l'univoca decomposizione di \mathbf{v} mediante i due vettori $\mathbf{v}_1 := \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \in J$ e $\mathbf{v}_2 = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \in G$. Scriveremo allora

$$L^2 = J \oplus G.$$

□

3.8.2 Derivate di funzioni tensoriali di piu' variabili

Definizione 3.8.2 *Un insieme Ω di R^n , $n = 2, 3$, aperto e connesso e' chiamato **dominio** di R^n .*

*Dicesi **campo scalare** α , **vettoriale** \mathbf{v} , **tensoriale** \mathbf{T} definito nel dominio Ω rispettivamente la funzione scalare, vettoriale, tensoriale*

$$\begin{aligned}\alpha : \mathbf{x} \in \Omega &\longrightarrow \alpha(\mathbf{x}) \in R, \\ \mathbf{v} : \mathbf{x} \in \Omega &\longrightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x}) \in E_3, \\ \mathbf{T} : \mathbf{x} \in \Omega &\longrightarrow \mathbf{T}(\mathbf{x}) \in \text{Lin}(E_3),\end{aligned}$$

che corrisponde alla funzione scalare³,

$$\alpha : \mathbf{x} \in \Omega \longrightarrow \alpha(\mathbf{x}) \in R,$$

alle tre funzioni scalari

$$v_i : \mathbf{x} \in \Omega \longrightarrow v_i(\mathbf{x}) \in R.$$

alle nove funzioni scalari

$$T_{ij} : \mathbf{x} \in \Omega \longrightarrow T_{ij}(\mathbf{x}) \in R.$$

Definizione 3.8.3 Un campo \mathbf{T} è di **classe** $C^k(\Omega)$ se le sue componenti sono funzioni continue assieme alle derivate di ordine k incluse.

omo **Definizione 3.8.4** Una funzione tensoriale $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{X})$ che verifica l'identità'

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathbf{T}(\mathbf{Y}), \quad \forall X, Y \in C_*,$$

si dice **funzione tensoriale omogenea**, più brevemente **tensore omogeneo**, o **uniforme**.

Definizione 3.8.5 Sia ϕ una funzione scalare di classe $C^1(\Omega)$

$$\phi : \mathbf{x} \in \Omega \longrightarrow \phi(\mathbf{x}) \in R,$$

si chiama **gradiente** di ϕ e si scrive $\nabla\phi$, il campo vettoriale definito da

$$\nabla\phi := \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \mathbf{e}_3.$$

Dall'equazione (I.I.15) che regola il cambiamento di coordinate si deduce

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_j} = Q_{ji}, \quad (3.8.3) \quad \boxed{\text{px}}$$

e quindi per la regola di derivazione delle funzioni composte si deduce

$$\frac{\partial\phi}{\partial x'_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \frac{\partial\phi}{\partial x_i} = Q_{ji} \frac{\partial\phi}{\partial x_i}. \quad (3.8.4) \quad \boxed{\text{xf'}}$$

La (3.8.4) regola il cambiamento delle componenti del gradiente, ed afferma che l'operatore lineare ∇ è un vettore. Pertanto la definizione data ha senso.

Da ora in poi, per le derivate parziali del prim'ordine si pone

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i} =: \partial_{x_i}\phi.$$

Una funzione tensoriale omogenea ha gradiente nullo.

³In analisi la funzione scalare α si chiama anche funzione reale di tre variabili reali.

1.2 **Definizione 3.8.6** Siano date le funzioni vettoriale $\mathbf{v}(x)$ di classe $C^1(\Omega)$, e scalare ϕ di classe $C^2(\Omega)$, si definiscono operatori **rotore**, **divergenza** e **Laplaciano** rispettivamente le seguenti operazioni

$$\nabla \times \mathbf{v} =: \text{rotore}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} =: \text{divergenza}, \quad \Delta \phi := \nabla \cdot \nabla \phi =: \text{Laplaciano}.$$

In componenti si scrivono

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= (\partial_{x_2} v_3 - \partial_{x_3} v_2) \mathbf{e}_1 + (\partial_{x_3} v_1 - \partial_{x_1} v_3) \mathbf{e}_2 + (\partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1) \mathbf{e}_3 \\ &= \epsilon_{ijk} \partial_{x_j} v_k \mathbf{e}_i \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= \partial_{x_1} v_1 + \partial_{x_2} v_2 + \partial_{x_3} v_3, \\ \Delta \phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2}. \end{aligned} \quad (3.8.5) \quad \boxed{\text{xf}}$$

1.2 **Definizione 3.8.7** Sia dato il campo tensoriale $\mathbf{T}(x)$ di classe $C^1(\Omega)$, si definisce operatore divergenza di \mathbf{T} la seguente operazione

$$\nabla \cdot \mathbf{T}, \quad \text{divergenza}.$$

Il vettore $\nabla \cdot \mathbf{T}$ in componenti si scrive

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{T})_i &= \partial_{x_1} T_{1i} + \partial_{x_2} T_{2i} + \partial_{x_3} T_{3i}, \\ \nabla \cdot \mathbf{T} &= \partial_{x_j} T_{ji} \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (3.8.6) \quad \boxed{\text{xf1}}$$

1.3 **Definizione 3.8.8** Un campo di vettori $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ e' detto **irrotazionale** se e solo se ha rotore nullo

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0.$$

Il rotore del campo di velocita' e' anche detto **vettore vortice**.

Per i **moti irrotazionali** definiti in un dominio semplicemente connesso esiste un campo scalare $\phi(\mathbf{x})$ tale che

$$\mathbf{v} = \nabla \phi.$$

Tali moti irrotazionali sono detti anche **moti potenziali**⁴.

1.4 **Definizione 3.8.9** Un campo di velocita' $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ e' detto **solenoidale** se e solo se ha divergenza nulla.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

In un dominio dimensionale $\Omega \subseteq R^2$, consideriamo il **campo piano** bidimensionale

$$\mathbf{v} : \mathbf{x} \in \Omega \quad \longrightarrow \quad (v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2)) \in R^2.$$

Il campo piano

$$\mathbf{w} := \mathbf{Rv} := \mathbf{e}_3 \times \mathbf{v} \text{ equiv}(-v_2, v_1),$$

rappresenta una rotazione di $\pi/2$ di \mathbf{v} , ed e' posto in corrispondenza biunivoca con \mathbf{v} . Verificare che il campo soddisfa l'identita'

$$\nabla \times \mathbf{w} = \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{e}_3 = \text{div } \mathbf{v} \mathbf{e}_3.$$

⁴Per il vettore velocita' se esiste ϕ e' detto *potenziale cinetico*.

Definizione 3.8.10 Per un campo piano \mathbf{v} solenoidale il vettore \mathbf{w} , ruotato di $\pi/2$, e' irrotazionale. Se Ω e' semplicemente connesso esiste un campo scalare ϕ soddisfacente

$$\mathbf{w} = \nabla\phi.$$

Il campo ϕ si chiama **funzione di corrente** o di Stokes.

Nei moti irrotazionali solenoidali risulta

$$\Delta\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = 0$$

vale a dire il potenziale e' una **funzione armonica**.

Per un campo vettoriale \mathbf{v} di classe $C^1(\Omega)$ e' possibile estendere la definizione di gradiente e si ottiene un campo tensoriale, $\nabla\mathbf{v}$ avente componenti

$$\begin{aligned} (\nabla\mathbf{v})_{ij} &= \partial_{x_i}v_j, \\ [(\nabla\mathbf{v})_{ij}] &= \begin{bmatrix} \partial_{x_1}v_1 & \partial_{x_1}v_2 & \partial_{x_1}v_3 \\ \partial_{x_2}v_1 & \partial_{x_2}v_2 & \partial_{x_2}v_3 \\ \partial_{x_3}v_1 & \partial_{x_3}v_2 & \partial_{x_3}v_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.8.7) \quad \boxed{\text{xf2}}$$

Per il teorema di decomposizione in somma di un tensore della sottosezione 2.4 discende

$$S_{ij} = \frac{\partial_{x_i}v_j + \partial_{x_j}v_i}{2}, \quad E_{ij} = \frac{\partial_{x_i}v_j - \partial_{x_j}v_i}{2}.$$

Infine, dalla definizione di vettore aggiunto di un tensore antisimmetrico si ricava

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{u} \times \text{rot}\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u} \in E_3. \quad (3.8.8) \quad \boxed{\text{curl}}$$

3.8.3 Esercizi su funzioni vettoriali di piu' variabili

I.1.1 **Esercizio 3.8.1** Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1e^{x_2} - x_2e^{x_1}, & x_1 &= 0, & x_2 &= 1; \\ g(x_1, x_2, x_3) &= \sin(x_1x_2^2x_3^3), & x_1 &= 0, & x_2 &= \frac{1}{2}, & x_3 &= 2; \\ h(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \sin(\pi x_2) + x_2 \cos(\pi x_3), & x_1 &= 0, & x_2 &= 1, & x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Risposta

$$\nabla f(0, 1) \equiv \left(e^{x_2} - x_2 e^{x_1}, x_1 e^{x_2} - e^{x_1} \right) \Big|_{(0,1)} = (e - 1, -1).$$

$$\nabla g\left(0, \frac{1}{2}, 2\right) \equiv \cos(x_1x_2^2x_3^3) \Big|_{(0, \frac{1}{2}, 2)} \left(x_2^2x_3^3, 2x_1x_2x_3^3, 3x_1x_2^2x_3^2 \right) \Big|_{(0, \frac{1}{2}, 2)} = (2, 0, 0).$$

$$\nabla h(0, 1, 2) \equiv \left(\sin \pi x_2, \pi x_1 \cos \pi x_2 + \cos \pi x_3, -\pi x_2 \sin \pi x_3 \right) \Big|_{(0,1,2)} = (0, 1, 0).$$

1.2 **Esercizio 3.8.2** Calcolare il gradiente della seguente funzione

$$\rho(x_1, x_2, x_3) = k e^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)},$$

nella direzione

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2),$$

cioè $\mathbf{u} \cdot \nabla \rho$.

Risposta

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -\sqrt{2} k e^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}(x_1 - 1 + x_2).$$

I.1.3 **Esercizio 3.8.3** Calcolare la divergenza ed il rotore di

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{u} = -x_2 \mathbf{e}_1 + x_1 \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{w} = x_1^2 x_2 \mathbf{e}_1 + x_2^2 x_3 \mathbf{e}_2 + x_3^2 x_1 \mathbf{e}_3.$$

Risposta

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 2, \quad \nabla \times \mathbf{v} = 0;$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{u} \equiv (0, 0, 2);$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 2(x_1 - 1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3), \quad \nabla \times \mathbf{w} = -(x_2^2, x_3^2, x_1^2).$$

1.4 **Esercizio 3.8.4** Data l'equazione

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta^2 x_1 = F \cos(\gamma t),$$

verificare che

a)

$$x_1(t) = \frac{F}{\beta^2 - \gamma^2} \cos(\gamma t), \quad (\beta \neq \gamma);$$

b)

$$x_1(t) = \frac{F}{\beta} t \sin(\beta t), \quad (\beta = \gamma);$$

risultano soluzioni particolari dell'equazione data.

1.5 **Esercizio 3.8.5** Verificare che sono tutti nulli i Laplaciani delle funzioni sottolencate

$$f = x_1^3 - 3x_1x_2^2;$$

$$g = e^{x_1} \sin x_2;$$

$$\mathbf{v} = (e^{-x_2} \cos x_2, \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}).$$

3.8.4 Integrali di funzioni tensoriali di piu' variabili

Definizione 3.8.11 Una funzione o campo tensoriale definita nel dominio Ω di classe $C^0(\Omega)$ si dice **integrabile** su Ω se lo sono tutte le sue componenti in una base e_i , $i = 1, 2, 3$.

Ricordiamo alcune **identita' integrali**.

Lemma 3.8.2 Lemma di Gauss Se il dominio Ω ha frontiera regolare, allora vale la seguente proprieta'

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} n_i f dS,$$

dove n_i e' la i -ma componente del versore normale ad $\partial\Omega$ diretto verso l'esterno di Ω .

Ripetendo il Lemma di Gauss per le componenti di un vettore si ha

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} n_i v_i dS,$$

e sommando su i troviamo

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS. \quad (3.8.9) \quad \boxed{\text{Gauss}}$$

Analogamente per le componenti di un tensore si ricava

$$\int_{\Omega} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} n_i T_{ij} dS,$$

e quindi

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{T} dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS. \quad (3.8.10)$$

Ancora, scegliendo $f = \epsilon_{ijk} v_j$ otteniamo

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \epsilon_{ijk} v_j}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} n_i v_j \epsilon_{ijk} dS,$$

e quindi

$$\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{v} dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \times \mathbf{v} dS. \quad (3.8.11)$$

Lemma 3.8.3 Lemma di Stokes La formula integrale di Stokes stabilisce la seguente identita'

$$\int_{\Gamma} \nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} = \int_{\gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x},$$

dove Γ denota una superficie aperta, regolare ed orientata di bordo γ , \mathbf{N} la sua normale esterna e $d\mathbf{x}$ l'elemento di linea.

Lemma 3.8.4 Lemma del valor medio

Sia Ω un dominio limitato, ed f una funzione scalare definita, integrabile su Ω , e di classe $C^0(\Omega)$, esiste un punto $\bar{\mathbf{x}}$ in Ω tale che

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) dx = f(\bar{\mathbf{x}}), \quad (3.8.12) \quad \boxed{\text{medio}}$$

dove $|\Omega|$ rappresenta la misura di Ω . La quantita' a primo membro di (3.8.12) si dice **valor medio di f** .

Poiche' la funzione integrale e' lineare il teorema del valor medio vale anche per ciascuna componente della funzione vettoriale \mathbf{v} di classe $C^0(\Omega)$

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v_i(\mathbf{x}) dx = v_i(\bar{\mathbf{x}}_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.8.13) \quad \boxed{\text{medio}}$$

Purtroppo i punti \mathbf{x}_i saranno in generale distinti e quindi il teorema del valor medio non vale per funzioni vettoriali.

Esercizio 3.8.6 Verificare che il teorema del valore medio non vale per la funzione vettoriale

$$\mathbf{v} = x_2^3 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + x_1 \mathbf{e}_3.$$

Vale bensì un risultato limite

$$\lim_{\Omega \rightarrow \bar{\mathbf{x}}} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}) dx = \mathbf{v}(\bar{\mathbf{x}}). \quad (3.8.14) \quad \boxed{\text{medlim1}}$$

Il teorema limite vale anche per integrali su superfici

$$\lim_{\Gamma \rightarrow \bar{\mathbf{x}}} \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \mathbf{v}(\mathbf{x}) dS = \mathbf{v}(\bar{\mathbf{x}}). \quad (3.8.15) \quad \boxed{\text{medlim2}}$$

Capitolo 4

Cinematica di sistemi continui

La cinematica di un corpo continuo studia il moto dei corpi a prescindere dalle cause che determinano tale moto. In questo capitolo si introducono alcuni concetti di cinematica dei sistemi continui.

4.1 Deformazione e moto di un corpo

Definizione 4.1.1 Moto di un continuo. *Il moto del sistema continuo \mathcal{S} , nell'intervallo temporale $\mathcal{I} = (0; T)$, \mathcal{S} da $C_0 = \chi(C_*, 0)$ a $C(t) = \chi(C_*, t)$, vedi fig.4.1, e' descritto dall'insieme ad un parametro di deformazioni*

$$\chi: (\mathbf{X}, t) \in C_* \times \mathcal{I} \longrightarrow \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \in C(t).$$

$C(t)$ rappresenta la **configurazione attuale** del sistema continuo \mathcal{S} all'istante t , mentre C_* e' una **configurazione di riferimento** scelta a piacere tra quelle possibili. In un sistema cartesiano ortonormale $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, con \mathbf{X} ed $\mathbf{x}(t)$ denotiamo le posizioni della stessa particella $P \in \mathcal{S}$, rispettivamente nelle due configurazioni C_* e $C_*(t)$.

Si dicono **equazioni finite del moto** di \mathcal{S} , nell'intervallo di tempo \mathcal{I} , le equazioni del moto di tutti i suoi punti, cioe' le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), & \mathbf{X} &\in C_*, & t &\in \mathcal{I}, \\ x_i &= x_i(X_1, X_2, X_3, t), & i &= 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{4.1.1} \quad \boxed{\text{finite}}$$

In $\boxed{\text{finite}}$ (4.1.1) le \mathbf{X} variano in C_* e fungono da variabili indipendenti, esse sono dette **variabili materiali o Lagrangeane**. Le immagini delle X all'istante attuale t sono dette **variabili spaziali o Euleriane**.

Definizione 4.1.2 Moto regolare *Il moto di \mathcal{S} e' detto **regolare** se le tre funzioni scalari x_i , $i = 1, 2, 3$ di $\boxed{\text{finite}}$ (4.1.1), al variare di $\mathbf{X} \in C_*$, $t \in \mathcal{I}$ verificano le seguenti proprieta'*

- (1) **regolarita' analitica:** sono differenziabili fino all'ordine due, continue assieme alle loro derivate parziali fino all'ordine due, $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \in C^2(C_* \times \mathcal{I})$;
- (2) **regolarita' geometrica:** il determinante Jacobiano $J(\mathbf{X}, t) = \det\{F_{ij}\} \equiv \left\{ \frac{\partial x_j}{\partial X_i} \right\}$ della matrice $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$, **gradiente di deformazione** e' invertibile, per ogni $t \in \mathcal{I}$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) := \{F_{ij}\} = \left\{ \frac{\partial \chi_j(\mathbf{X}, t)}{\partial X_i} \right\} \quad (4.1.2)$$

$$J(t) = \det[\{F_{ij}\}] = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_3} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \neq 0,$$

dove i denota l'indice di riga e j quello di colonna. (i) **Il determinante J di \mathbf{F} detto lo Jacobiano della deformazione e' sempre positivo;** (ii) La matrice simmetrica $\mathbf{F}\mathbf{F}^T$ e' definita positiva, cioe' esiste un tensore simmetrico \mathbf{V} tale che

$$\mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2.$$

- (3) **regolarita' globale:** c'e' corrispondenza biunivoca tra i contorni completi ∂C_* e $\partial C(t)$.

La condizione (1) assicura un certo grado di regolarita' del moto, in particolare esclude la eventualita' di lacerazioni e che non siano generati buchi o zone vuote in $C(t)$, nell'intervallo di moto, mentre le condizioni (2) e (3) assicurano che ci sia una corrispondenza biunivoca globale tra le due configurazioni, come atteso, peraltro, dal principio di impenetrabilita' della materia, vedi figura 4.1.

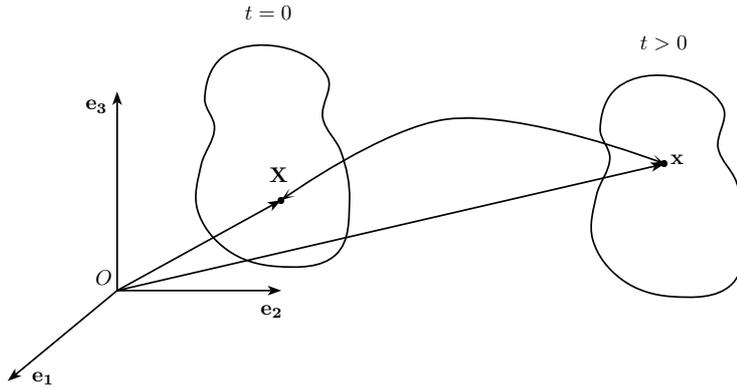


Figura 4.1: Deformazione

figII1

In genere si avra', senza confusione di simboli,

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t), \quad x_i = \chi_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad \mathbf{x}_0 = \chi(\mathbf{X}, 0). \quad (4.1.3)$$

lagr

L'assunzione (3) fornisce, per t fissato, una corrispondenza biunivoca tra le variabili X_i e le x_i . Di conseguenza la descrizione del moto puo' essere data considerando sia \mathbf{X} che \mathbf{x} come variabili indipendenti, denotiamo con $\chi^{-1}(\cdot, t)$ la sua inversa, si ha

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \in C(t), \quad \mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \in C_*. \quad (4.1.4) \quad \boxed{\text{formu}}$$

Notiamo che fissato un moto di \mathcal{S} restano fissate le due applicazioni

$$\chi(\cdot, t) : \mathbf{X} \in C_* \longrightarrow \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \in C(t), \quad \text{deformazione}$$

$$\chi(\mathbf{X}, \cdot) : t \in \mathcal{I} \longrightarrow \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \in C(t), \quad \text{traiettoria}$$

dette, rispettivamente, la **deformazione** di \mathcal{S} all'istante t e la **traiettoria** di \mathbf{X} di base \mathcal{I} .

Notazione

Per i fluidi sceglieremo come configurazione di riferimento C_* la configurazione $C_0 = \chi(C_*, 0)$ assunta da \mathcal{B} all'istante iniziale $t = 0$. In tal caso, C_0 e' anche detta la posizione iniziale di \mathcal{S} . Inoltre, con C_t intendiamo la configurazione di \mathcal{S} all'istante t , detta configurazione attuale, $C_t := \chi(C_0, t)$. In questo caso, ciascuna \mathbf{x} denota la posizione della particella materiale \mathbf{X} assunta all'istante t . Per ogni fissato t la funzione $\chi(\cdot, t)$ rappresenta la deformazione di \mathcal{S} all'istante t . Per semplicita' supporremo che il dominio occupato dal continuo non dipenda dal tempo, vale a dire si assume

$$C_t = C_0 =: \Omega.$$

Ricordiamo che usando \mathbf{X} come variabile indipendente si ottiene la descrizione *materiale* o *Lagrangiana*, altrimenti adoperando \mathbf{x} come variabile di base si utilizza la descrizione *spaziale* o *Euleriana*. In tal modo una quantita' fisica \mathcal{N} potra' essere espressa in funzione della particella \mathbf{X} e di t o equivalentemente in funzione della posizione spaziale \mathbf{x} e di t . Noi useremo sempre la notazione

$$\tilde{\mathcal{N}}(\mathbf{X}, t) = \mathcal{N}(\mathbf{x}, t).$$

In generale, per il gradiente di deformazione ometteremo la notazione $\tilde{\cdot}$, che verra' usata solo se necessario.

Tenendo presente la definizione di funzione omogenea data in [A.T.1](#) del Capitolo III, introduciamo la seguente definizione

4.1.2 **Definizione 4.1.3 Deformazione omogenea** Una deformazione $C(t)$ all'istante t fissato, si dice **omogenea** se e solo se

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{Y}, t), \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in C_*. \quad (4.1.5) \quad \boxed{\text{defd}}$$

4.2.2 **Definizione 4.1.4 Deformazione rigida** Una deformazione $C(t)$ all'istante t fissato si definisce **rigida** se e solo se

$$d\mathbf{x}^2 = d\mathbf{X}^2, \quad \forall \mathbf{X} \in C_*. \quad (4.1.6) \quad \boxed{\text{defd}}$$

4.3.2 **Definizione 4.1.5** **Deformazione elementare** Una deformazione $C(t)$ all'istante t fissato si definisce **elementare** se e' infinitesima, cioe' se e' descritta dal suo differenziale

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X}\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \quad \forall \mathbf{X} \in C_*. \quad (4.1.7) \quad \boxed{\text{defd}}$$

Per le deformazioni omogenee, integrando ^(defd)(4.3.18) tra \mathbf{X} e \mathbf{Y} , e quindi tra \mathbf{x} e \mathbf{y} si ricava

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (\mathbf{X} - \mathbf{Y})\mathbf{F}(t). \quad (4.1.8) \quad \boxed{\text{intom}}$$

Una deformazione rigida e' una particolare deformazione omogenea.

omo **Esercizio 4.1.1** Ricordando la legge del cambiamento di riferimento fornita nella sottosezione 1.1.6, ^(Lagr)(1.1.15), riconoscere che vale

$$\mathbf{F}^T = \mathbf{Q}.$$

Descrizione lagrangiana o materiale - Quando il moto e' descritto nelle coordinate (\mathbf{X}, t) , si dice che si adotta la descrizione lagrangiana o materiale. In tal caso tutte le funzioni, che intervengono nella trattazione meccanica del continuo, si intendono riferite alle variabili nella configurazione C_* di riferimento. La denominazione materiale si spiega in quanto le \mathbf{X} identificano la particella P con la sua posizione assunta nella configurazione di riferimento. Diciamo *variabili materiali* la coppia (\mathbf{X}, t) .

Il moto χ riporta alla configurazione attuale una qualsiasi grandezza inizialmente data nella configurazione di riferimento. Esempi tipici sono la funzione gradiente di deformazione e la velocita'. Infatti, per come vengono definite, esse sono riferite alla configurazione di riferimento

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \equiv \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}, t), \quad \dot{\chi} \equiv \frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{X}, t),$$

dove si e' omesso il segno $\tilde{\cdot}$ in quanto non si da' adito a confusione. Sia P la particella che in $t = 0$ occupa la posizione \mathbf{X} , la descrizione materiale segue ciascuna particella lungo il suo cammino: e determina la sua posizione $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ negli istanti successivi $t > 0$ tramite ^(Lagr)(5.1.6). In questa descrizione una quantita' fisica \mathcal{N} sara' funzione della particella P e di t

$$\mathcal{N} = \tilde{\mathcal{N}}(\mathbf{X}, t).$$

Descrizione euleriana o spaziale - Quando il moto e' descritto nelle coordinate $\mathbf{x} \in C(t)$, t , si dice che si adotta la descrizione euleriana o spaziale. In tal caso, tutte le funzioni del moto del continuo sono riferite alle \mathbf{x} variabili in $C(t)$ e si fissa l'attenzione sullo spazio geometrico \mathcal{E}_3 : in ogni istante t , ogni posizione $\mathbf{x} \in C(t)$ e' occupata da una particolare particella materiale. Le particelle del continuo vareranno in \mathbf{x} al variare del tempo t . Alla coppia (\mathbf{x}, t) si da' il nome di variabili spaziali. Per \mathbf{F} appare piu' naturale la descrizione materiale per questo non si e' sovrapposto il segno $\tilde{\cdot}$. Nell'osservazione che segue siamo obbligati a sovrapporre il segno tilde ad \mathbf{F} per evitare confusione.

Utilizzando la funzione di riferimento, otteniamo

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) &= \mathbf{F}(\chi(\mathbf{X}, t), t) =: \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \\ \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) &= \dot{\chi}(\mathbf{X}, t) =: \mathbf{v}(\mathbf{x}, t),\end{aligned}$$

dove, le funzioni \mathbf{F} , \mathbf{v} rappresentano la descrizione spaziale del gradiente di deformazione e della velocità, mentre $\tilde{\mathbf{F}}$ e $\tilde{\mathbf{v}}$ ne forniscono la descrizione materiale.

La descrizione euleriana è particolarmente usata in fluidodinamica, in quanto fornisce le caratteristiche del moto del fluido, quali il campo delle velocità o di pressione, in una fissata regione dello spazio, trascurando la conoscenza della particella che all'istante t si trova in \mathbf{x} .

Sia \mathbf{x} una posizione nello spazio, la descrizione spaziale ad ogni istante $t > 0$ misura la quantità fisica \mathcal{N} che corrisponde a quella particella P che all'istante t occupa la posizione \mathbf{x} . Al variare di \mathbf{x} varia anche \mathcal{N} e quindi scriviamo

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbf{x}, t).$$

Usando la biunivocità della rappresentazione possiamo scrivere, vedi figura 4.1,

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{N}(\chi(\mathbf{X}, t), t) = \tilde{\mathcal{N}}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) = \tilde{\mathcal{N}}(\mathbf{X}, t),$$

e viceversa

$$\tilde{\mathcal{N}}(\mathbf{X}, t) = \tilde{\mathcal{N}}(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \mathcal{N}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = \mathcal{N}(\mathbf{x}, t),$$

Definizione 4.1.6 *Curva, Superficie, Volume materiale* Una Curva, Superficie, Volume costituito durante il moto, sempre dalle stesse particelle è detta Curva, Superficie, Volume Materiale.

4.1.1 Spostamenti e velocità

Lo spostamento \mathbf{u} della particella $P \equiv (\mathbf{X})$ al tempo T è definito da

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}, \quad u_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) - X_i. \quad (4.1.9) \quad \boxed{\text{spos}}$$

Lo spostamento può essere dato sia nel formalismo Lagrangiano che in quello Euleriano.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t).$$

Notiamo, infine, che per un moto regolare risultano ben definiti i **vettori velocità ed accelerazione di una fissata particella** $P \equiv \mathbf{X}$ dati da

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t}; \quad \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2 \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2}.$$

Naturalmente, è possibile esprimere la velocità e l'accelerazione di \mathbf{X} in termini della variabile \mathbf{x} . Si ottengono così i due campi vettoriali

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{X}, t). \quad (4.1.10)$$

Derivata temporale -

Sia g una generica funzione del moto di \mathcal{S} . Per g si potranno adottare entrambe le descrizioni

$$\tilde{g}(\mathbf{X}, t) = g(\mathbf{x}, t). \quad (4.1.11)$$

Vogliamo calcolare ora la derivata temporale di g .

Definizione 4.1.7 Derivata materiale e spaziale

Si chiama **derivata temporale materiale** di \tilde{g} la quantità calcolata per \mathbf{X} fissato,

$$\frac{\partial \tilde{g}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}.$$

Si chiama **derivata temporale spaziale** di g la quantità calcolata per \mathbf{x} fissato,

$$\frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial t}.$$

Confronto

Fissando la descrizione materiale per \tilde{g} si calcola la seguente **relazione tra derivata temporale materiale e spaziale**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{g}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} &= \frac{dg(\chi(\mathbf{X}, t), t)}{dt} = \frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \\ &= \frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} v_i(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

In particolare per l'accelerazione $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{X}, t)$ si calcola la seguente relazione tra derivate temporali materiale e spaziale di \mathbf{v}

$$\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{d\mathbf{v}(\chi(\mathbf{X}, t), t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t). \quad (4.1.12) \quad \boxed{\text{acc}}$$

4.1.2 **Definizione 4.1.8** - Un moto di un continuo \mathcal{S} e' un **moto rigido** se e' costituito solo da deformazioni rigide, al variare di t .

4.1.3 **Definizione 4.1.9** - L'atto di moto di \mathcal{S} all'istante t e' dato da $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\chi}(\mathbf{X}, t)$,

$$\mathbf{v}(\cdot, t) : \mathbf{x} \in \Omega \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \in E_3. \quad (4.1.13)$$

Precisamente, l'atto di moto all'istante t e' il campo vettoriale che ad ogni punto \mathbf{x} di Ω nello spazio geometrico \mathcal{E}_3 associa il vettore velocità di quella particella materiale \mathbf{X} di \mathcal{S} che all'istante t occupa la posizione \mathbf{x} .

piano **Definizione 4.1.10** - Un moto di un continuo \mathcal{S} e' un **moto piano** di giacitura π se esiste un riferimento ortonormale con l'asse x_3 normale a π , nel quale il campo delle velocità \mathbf{v} si esprime nella forma

$$\mathbf{v} \equiv (v_1(x_1, x_2, 0, t), v_2(x_1, x_2, 0, t), 0).$$

4.1.3 **Definizione 4.1.11** - *L'atto di moto di \mathcal{S} all'istante t e' dato da $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\chi}(\mathbf{X}, t)$,*

$$\mathbf{v}(\cdot, t) : \mathbf{x} \in \Omega \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \in E_3. \quad (4.1.14)$$

4.1.1 **Esercizio 4.1.2** *Consideriamo l'espansione anisotropa*

$$x_1 = X_1 \left(1 + \frac{t}{a}\right), \quad x_2 = X_2 \left(1 + \frac{t}{b}\right), \quad x_3 = X_3 \left(1 + \frac{t}{c}\right),$$

con a, b, c costanti positive. Si chiede di calcolare lo spostamento e la velocita' nei formalismi Lagrangiano ed Euleriano.

Risposta Lo spostamento nel formalismo Lagrangiano si scrive

$$u_1 = x_1 - X_1 = X_1 \frac{t}{a}, \quad u_2 = x_2 - X_2 = X_2 \frac{t}{b}, \quad u_3 = x_3 - X_3 = X_3 \frac{t}{c}.$$

Nel formalismo Euleriano si scrive

$$u_1 = x_1 \frac{t}{a(1+t/a)}, \quad u_2 = x_2 \frac{t}{b(1+t/b)}, \quad u_3 = x_3 \frac{t}{c(1+t/c)}.$$

Le componenti della velocita' nel formalismo Lagrangiano sono date da

$$\tilde{v}_1(y, t) = \frac{X_1}{a}, \quad \tilde{v}_2(y, t) = \frac{X_2}{b}, \quad \tilde{v}_3(y, t) = \frac{X_3}{c}.$$

Le componenti della velocita' nel formalismo Euleriano sono date da

$$v_1 = x_1 \frac{t}{a(1+t/a)}, \quad v_2 = x_2 \frac{t}{b(1+t/b)}, \quad v_3 = x_3 \frac{t}{c(1+t/c)}.$$

4.1.2 **Esercizio 4.1.3** *Si consideri il moto*

$$x_1 = X_1 + tX_2, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3.$$

Si chiede di calcolare lo spostamento e la velocita' nei formalismi Lagrangiano ed Euleriano.

Risposta La velocita' nel formalismo Lagrangiano si scrive

$$\tilde{v}_1 = X_2, \quad \tilde{v}_2 = 0, \quad \tilde{v}_3 = 0.$$

La velocita' nel formalismo Euleriano si scrive

$$v_1 = x_2, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0.$$

La velocita' ha la stessa dipendenza funzionale da \mathbf{X} e da \mathbf{x} .

4.2 Geometria di un corpo

In questo numero introdurremo i tensori gradiente di deformazione, di Cauchy-Green, i tensori di stiramento Lagrangiano ed Euleriano e ne studieremo il loro significato cinematico. Analizzeremo dapprima le deformazioni omogenee, ed in seguito gli spostamenti infinitesimi e le deformazioni elementari.

4.2.1 Tensori di Cauchy-Green e di stiramento

Siano \mathbf{x} , \mathbf{X} ed $\mathbf{y} = \chi(\mathbf{Y}, t)$, le posizioni attuale e di riferimento delle particelle P e Q appartenenti ad un intorno U della particella $P \equiv (X_1, X_2, X_3)$ di raggio r molto piccolo, $|\mathbf{X} - \mathbf{Y}| < r$, cf. fig. 4.2. L'elemento materiale $d\mathbf{x}$ rappresenta la deformazione dell'elemento materiale $d\mathbf{X}$ nel moto $\chi(\mathbf{X}, t)$, vedi figura 4.2

$$dx_i = \frac{\partial \chi_i(\mathbf{X}, t)}{\partial X_j} dX_j.$$

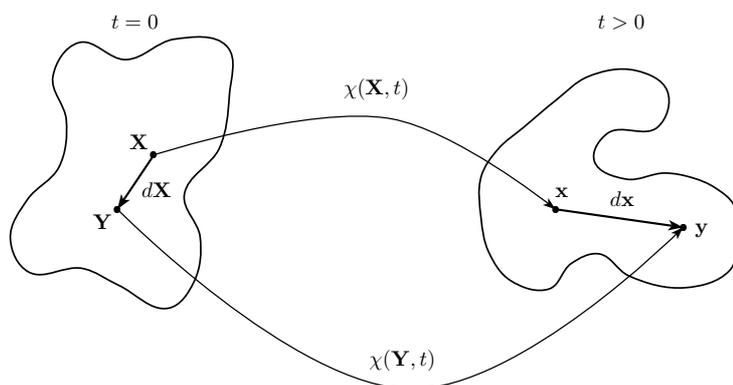


Figura 4.2: Deformazione infinitesima

figII3

Ricordando la definizione di tensore gradiente di deformazione

$$F_{ji} = \frac{\partial \chi_i(\mathbf{X}, t)}{\partial X_j}$$

possiamo scrivere

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}, t). \quad (4.2.1) \quad \text{def}$$

Dalla relazione (4.2.1) ricaviamo che il tensore \mathbf{F} permette di calcolare di quanto l'elemento $d\mathbf{X}$ si sia deformato durante il moto all'istante t . In altri termini il tensore \mathbf{F} fornisce la deformazione dell'elemento materiale $d\mathbf{X}$.

I tensori

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T, \quad \mathbf{B} = \mathbf{F}^T\mathbf{F},$$

sono detti **tensori deformazione di Cauchy-Green** destro e sinistro, essi sono responsabili delle deformazioni. Essi sono simmetrici.

I tensori

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}), \quad (4.2.2) \quad \boxed{\text{Ee}}$$

sono detti **tensori stiramento** *strain* Lagrangiano ed Euleriano rispettivamente. I tensori di stiramento \mathbf{E} , \mathbf{e} sono utili nello studio delle piccole deformazioni in elasticita' lineare.

Assi principali di stiramento

Poiche' il tensore $\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)$ di stiramento Lagrangiano e' simmetrico, in ogni punto \mathbf{X} esiste una base ortonormale $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ costituita da autovettori di \mathbf{E} nella quale \mathbf{E} si esprime in forma diagonale tramite i suoi autovalori E_1, E_2, E_3 . Gli autovettori sono detti **direzioni principali di stiramento**. Gli autovalori sono detti **stiramenti principali**.

In questa base non avvengono deformazioni angolari, cioe' un parallelepipedo rettangolo si trasforma in un parallelepipedo rettangolo con lati di lunghezze diverse.

4.2.2 Deformazioni omeogenee

4.2.1 **Definizione 4.2.1** *Un moto $x = \chi(\mathbf{X}, t)$ e' una **deformazione omogenea** se \mathbf{F} e' funzione unicamente del tempo $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$. In particolare, integrando (4.2.1) rispetto a $d\mathbf{x}$ da \mathbf{x} ad \mathbf{y} , $d\mathbf{X}$ da \mathbf{X} ad \mathbf{Y} otteniamo che la piu' generale deformazione omogenea e' della forma*

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{F}(t), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ corrispondente a } \mathbf{X}, \mathbf{Y}. \quad (4.2.3) \quad \boxed{\text{def1'}}$$

Un moto rigido appartiene alla classe delle deformazioni omogenee.

Proprieta' delle deformazioni omogenee

Operazioni sulle funzioni tensoriali

Dato il tensore costante non degenere \mathbf{F} , si consideri la seguente trasformazione di R^3 in R^3 biunivoca

$$\tau: \mathbf{X} \in C_* \subseteq R^3 \longrightarrow \tau(\mathbf{X}) = \mathbf{x} \in C \subseteq R^3.$$

Chiameremo C_* *configurazione di riferimento*. Se \mathbf{F} e' ortogonale questa trasformazione coincide con un cambiamento di riferimento ortonormale.

Osserviamo che integrando $d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}$, si trova la (4.2.3). per deformazioni omogenee, dati i vettori \mathbf{X}, \mathbf{Y} variabili in R^3 , i vettori \mathbf{x}, \mathbf{y} si fissano in base alla relazione

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (\mathbf{X} - \mathbf{Y})\mathbf{F}(t). \quad (4.2.4) \quad \boxed{\text{omodiff}}$$

(i) *Stiramento* Moltiplicando (4.2.4) per $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ ed estraendo la radice quadrata si ricava che la *lunghezza di un elemento materiale* $|\mathbf{X} - \mathbf{Y}|$ si modifica in $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ secondo la legge

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{((\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y})}.$$

Sia $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{X}-\mathbf{Y}}{|\mathbf{X}-\mathbf{Y}|}$. Lo stiramento λ nella direzione di \mathbf{a} e' dato da

$$\lambda = \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{|\mathbf{X}-\mathbf{Y}|} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T) \cdot \mathbf{a}}.$$

(ii) *Piani materiali* Π nella configurazione di riferimento C_* cambiano in piani π nella configurazione attuale $C(t)$. Sia Π_X un piano nella configurazione di riferimento di normale \mathbf{N} passante per \mathbf{X} , esso e' dato dall'equazione

$$\mathbf{Y} \in \Pi_X \iff (\mathbf{Y} - \mathbf{X}) \cdot \mathbf{N} = 0.$$

Il piano Π_X per la relazione $\mathbf{Y} - \mathbf{X} = (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}^{-1}$ si trasforma nel piano π_x di equazione

$$\mathbf{y} \in \pi_x \iff (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} := (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{N}) = 0,$$

che descrive l'equazione del piano π_x passante per \mathbf{x} ed ortogonale a $\mathbf{n} = (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{N})$.

(iii) *Due direzioni parallele* nella configurazione di riferimento si trasformano in direzioni parallele.

Forniamo ora due dimostrazioni di questa proprieta' una estrinseca, ed una intrinseca cf. Notazione in 1.1.1. Infatti, siano \mathbf{U} e \mathbf{V} due vettori paralleli nella configurazione di riferimento. Fissiamo l'asse X_1 parallelo ad essi. Siano \mathbf{u} e \mathbf{v} i due vettori deformati. Sempre per la (4.2.3) si trova

$$\epsilon_{ijk} u_j v_k = \epsilon_{ijk} (U_1 F_{1j}) (V_1 F_{1k}) = \epsilon_{ijk} U_1 \frac{\partial x_j}{\partial X_1} V_1 \frac{\partial x_k}{\partial X_1} = 0, \forall i = 1, 2, 3,$$

in quanto $\frac{\partial x_j}{\partial X_1}, \frac{\partial x_k}{\partial X_1}$ sono le componenti dello stesso vettore $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_1}$. Usando la notazione intrinseca si ha

$$\mathbf{U} = \lambda \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{U} \mathbf{F} = \lambda \mathbf{V} \mathbf{F} = \lambda \mathbf{v}.$$

(iv) Una superficie sferica cambia in una superficie ellissoidale. Infatti detti \mathbf{X} , R il centro ed il raggio della sfera vale la relazione

$$R^2 = (\mathbf{Y} - \mathbf{X})^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T} (\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Dal teorem di decomposizione polare ^{Dec} 1.2.4 segue l'asserto.

4.2.3 Esempi di deformazioni omogenee

(a) Estensioni uniformi (Uniform extension)

Il moto del continuo e' definito da

$$x_1(\mathbf{X}, t) = \lambda_1(t) X_1, \quad x_2(\mathbf{X}, t) = \lambda_2(t) X_2, \quad x_3(\mathbf{X}, t) = \lambda_3(t) X_3, \quad (4.2.5) \quad \boxed{\text{equo}}$$

con $\lambda_i(t)$ funzioni date del tempo, vedi figura ^{fig 117} 4.3.

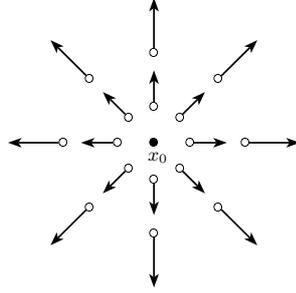


Figura 4.3: Estensione Uniforme

figII7

Integrando ^{def}(4.2.1) la deformazione si scrive nella forma intrinseca, globale

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{F}$$

dove il tensore gradiente di deformazione e' dato da

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

In questo caso risulta $\mathbf{F} = \mathbf{F}^T$ ed il tensore di Cauchy-Green e' dato da

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{F}^T\mathbf{F})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-2} \end{pmatrix}.$$

Infine, il tensore di stiramento (strain) Lagrangiano risulta essere

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Il tensore di stiramento (strain) Euleriano risulta essere

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda_2^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda_3^{-2} \end{pmatrix}.$$

(b) Estensioni nella direzione e_1 (Simple extension)

Il moto del continuo e' definito da

$$x_1(\mathbf{X}, t) = (1 + \lambda_1(t))X_1, \quad x_2(\mathbf{X}, t) = X_2, \quad x_3(\mathbf{X}, t) = X_3, \quad (4.2.6) \quad \text{equi}$$

con $\lambda_i(t)$ funzioni date del tempo, vedi figura ^{figII8}4.4.



Figura 4.4: Estensione Semplice

figII8

(c) Scorrimento semplice (Simple shear)

Il moto del continuo e' definito da

$$x_1(\mathbf{X}, t) = X_1 + X_2 \tan \gamma, \quad x_2(\mathbf{X}, t) = X_2, \quad x_3(\mathbf{X}, t) = X_3, \quad (4.2.7)$$

equi

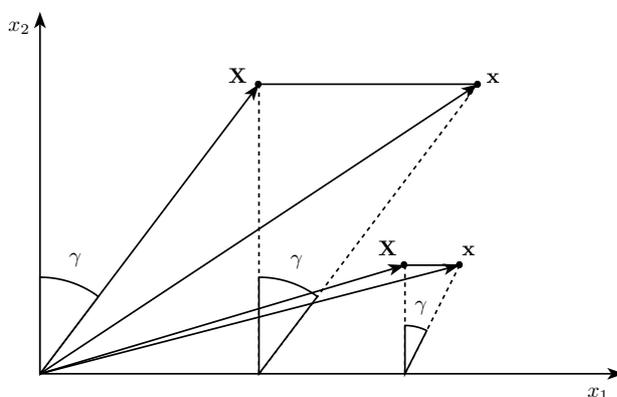
con $\gamma = \gamma(t)$ angolo di scorrimento, vedi figura ^{figII9}4.5.

Figura 4.5: Scorrimento Semplice

figII9

Da ^{equo}(4.2.5) la deformazione si scrive nella forma globale $\mathbf{x} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{F}$ dove il tensore gradiente di deformazione e' dato da

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tan \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In questo caso $\mathbf{F} \neq \mathbf{F}^T$ ed i tensori di Cauchy-Green sono dati da

$$\mathbf{C} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} 1 & \tan \gamma & 0 \\ \tan \gamma & 1 + \tan^2 \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 + \tan^2 \gamma & \tan \gamma & 0 \\ \tan \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infine, il tensore di stiramento (strain) Lagrangiano risulta essere

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \tan \gamma & 0 \\ \tan \gamma & \tan^2 \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.8) \quad \text{Esco}$$

Il tensore di stiramento (strain) Euleriano risulta essere

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \tan \gamma & 0 \\ \tan \gamma & -\tan^2 \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.3.4 Analisi delle deformazioni elementari

Studiamo qui i possibili cambiamenti in dimensioni e forma che una porzione infinitesima di continuo sperimenta in un dato moto. Studieremo le variazioni (i) in lunghezza, (ii) in angoli tra due direzioni, (iii) in volume in funzione del tensore di stiramento Lagrangiano \mathbf{E} , (iv) in superficie orientata.

In questo numero il punto di partenza e' la relazione ^(def)(4.2.1) tra gli spostamenti elementari,

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t). \tag{4.3.1} \quad \text{copydef}$$

Si confronti la ^(copydef)(4.3.1) con la ^(esa)(4.3.20).

(i) Cambiamenti in lunghezza

Sia $d\mathbf{X} = |dX|\mathbf{a}$ dove \mathbf{a} e' un vettore unitario. Al tempo $t > 0$ $d\mathbf{X}$ si deforma nell'elemento $d\mathbf{x}$.

4.2.3 **Definizione 4.3.2** Si definisce **coefficiente di allungamento, o dilatazione lineare** $\delta_a = \delta_a(\mathbf{X}, t)$, nella direzione $\mathbf{a} = d\mathbf{X}/|dX|$ nel punto \mathbf{X} al tempo t , la ^(fig111)quantita', vedi figura 4.6,

$$\delta_a = \frac{|d\mathbf{x}|^2 - |d\mathbf{X}|^2}{|d\mathbf{X}|^2}.$$

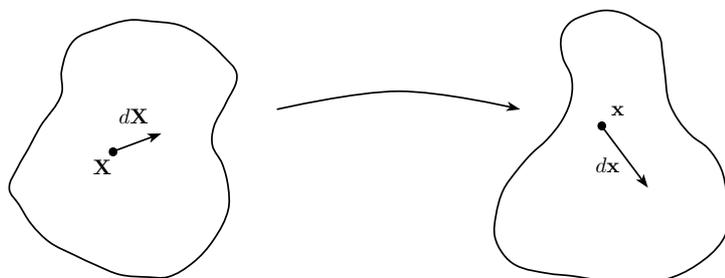


Figura 4.6: Dilatazione Lineare

fig111

Risulta $\mathbf{a} = d\mathbf{X}/|d\mathbf{X}|$, $d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}$ e' facile verificare che vale la seguente identita'

$$\delta_a = \frac{|d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot \mathbf{I} d\mathbf{X}|}{|d\mathbf{X}|^2} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T - \mathbf{I})\mathbf{a} = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}. \tag{4.3.2} \quad \text{all}$$

La ^(all)(4.3.2) afferma che il coefficiente di deformazione lineare nella direzione \mathbf{a} , e' collegato alla componente del tensore di stiramento Lagrangiano \mathbf{E} nella direzione \mathbf{a} . In particolare l'allungamento nella direzione del vettore di base \mathbf{e}_i , e' dato da E_{ii} .

4.2.2 **Esercizio 4.3.1** Il corpo \mathcal{S} è soggetto ad un semplice scorrimento con angolo di scorrimento $\gamma = \pi/4$, si vuole calcolare il coefficiente di allungamento δ_a per $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2$, con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Risposta In questo caso la deformazione è omogenea quindi δ_a è indipendente dal punto \mathbf{X} . Dalla (4.3.2), poiché \mathbf{a} è unitario, si ricava

$$\delta_a = 2(\alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{E} \cdot (\alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2) = 2(\alpha^2 E_{11} + 2\alpha\beta E_{12} + \beta^2 E_{22}).$$

Poiché $\tan \gamma = 1$, usando (4.2.8) ricaviamo

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

e quindi

$$\delta_a = 2\beta(2\alpha + \beta).$$

Esercizio 4.3.2 Ripetere l'esercizio precedente per lo scorrimento $\gamma = \pi/3$ e per $\mathbf{a} = 2^{-1/2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$.

Risposta $\delta_a = \sqrt{3} + 3/2$.

4.2.3 **Esercizio 4.3.3** Il corpo \mathcal{S} è soggetto alla deformazione non omogenea

$$x_1 = X_1 + X_2^2 + X_3^2, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3.$$

calcolare il coefficiente di allungamento δ_a per $\mathbf{a} = 3^{-1/2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$. Verificare che δ_a dipende da \mathbf{X} .

Suggerimento Applicare il teorema di decomposizione polare al gradiente di deformazione.

(ii) Cambiamenti in angolo

Siano $d\mathbf{X} = dX\mathbf{a}$, $d\mathbf{Y} = dY\mathbf{b}$ due elementi materiali infinitesimi, con \mathbf{a} , \mathbf{b} due direzioni nella configurazione di riferimento, e siano $d\mathbf{x} = dx\mathbf{u}$, $d\mathbf{y} = dy\mathbf{v}$ i due elementi materiali infinitesimi trasformati. Naturalmente \mathbf{a} , \mathbf{b} sono le direzioni nella configurazione di riferimento e \mathbf{u} , \mathbf{v} sono le direzioni corrispondenti nella configurazione trasformata (\mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{u} , \mathbf{v} hanno moduli unitari). Siano Θ e θ gli angoli tra \mathbf{a} e \mathbf{b} e tra \mathbf{u} , \mathbf{v} nella configurazione spaziale. Poiché sono unitari si ha

$$\cos \Theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad \cos \theta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Supponiamo nullo il coefficiente di allungamento, e consideriamo una deformazione puramente angolare.

4.2.4 **Definizione 4.3.3** Si definisce **coefficiente di deformazione angolare** $\delta_{\widehat{ab}}$ tra le direzioni \mathbf{a} e \mathbf{b} nel punto \mathbf{X} al tempo t , la quantità, vedi figura 4.7,

$$\delta_{\widehat{ab}} = \cos \theta - \cos \Theta.$$

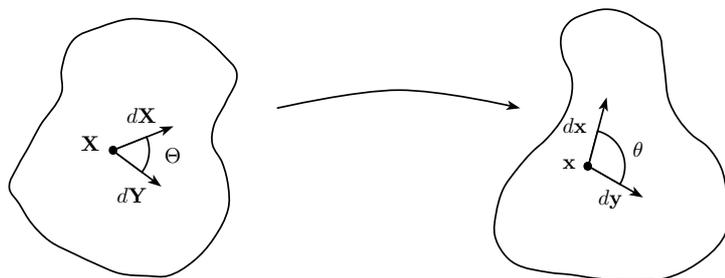


Figura 4.7: Dilatazione Angolare

figII12

Se consideriamo una pura deformazione angolare, non si hanno deformazioni lineari cioè vale $|d\mathbf{X}| = |d\mathbf{x}|$, $|d\mathbf{Y}| = |d\mathbf{y}|$, quindi risulta

$$\cos \Theta = \frac{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y}}{|d\mathbf{X}||d\mathbf{Y}|} \quad \cos \theta = \frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y}}{|d\mathbf{x}||d\mathbf{y}|} = \frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y}}{|d\mathbf{X}||d\mathbf{Y}|}.$$

Pertanto il coefficiente di deformazione angolare ammette l'espressione

$$\delta_{\widehat{ab}} = \frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y}}{|d\mathbf{X}||d\mathbf{Y}|}.$$

Usando $d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}$, $\mathbf{a} = d\mathbf{X}/|d\mathbf{X}|$, $d\mathbf{y} = d\mathbf{Y} \cdot \mathbf{F}$, $\mathbf{b} = d\mathbf{Y}/|d\mathbf{Y}|$, si può esprimere il coefficiente di deformazione angolare in termini del tensore di stiramento Lagrangiano \mathbf{E}

$$\delta_{\widehat{ab}} = \frac{|d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{Y} - d\mathbf{X} \cdot \mathbf{I} \cdot d\mathbf{Y}|}{|d\mathbf{X}||d\mathbf{Y}|} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T - \mathbf{I}) \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}. \quad (4.3.3) \quad \text{ang}$$

La (4.3.3) afferma che il coefficiente di deformazione angolare tra le direzioni \mathbf{a} , \mathbf{b} è collegato alla componente del tensore di stiramento Lagrangiano \mathbf{E} nelle direzioni \mathbf{a} e \mathbf{b} . In particolare il cambiamento di angolo nelle direzioni \mathbf{e}_i , \mathbf{e}_j di due vettori di base è dato da E_{ij} .

(iii) Cambiamenti in volume

Siano dV , dv due elementi dello stesso *volume materiale* infinitesimo nella configurazione di riferimento ed in quella attuale. Siano $d\mathbf{X}$, $d\mathbf{Y}$, $d\mathbf{Z}$, e $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{y}$, $d\mathbf{z}$, rispettivamente, i lati di questi volumetti.

4.2.5 **Definizione 4.3.4** Si definisce **coefficiente di deformazione volumica** $\delta_{dV} = \delta_{dV}(\mathbf{X}, t)$ al tempo t , la quantità, vedi figura 4.8

$$\delta_{dV} = \frac{dv - dV}{dV}.$$

Ricordiamo che il volume è dato da

$$dV = |d\mathbf{X} \times d\mathbf{Y} \cdot d\mathbf{Z}|, \quad dv = |d\mathbf{x} \times d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{z}|. \quad (4.3.4) \quad \text{vol}$$

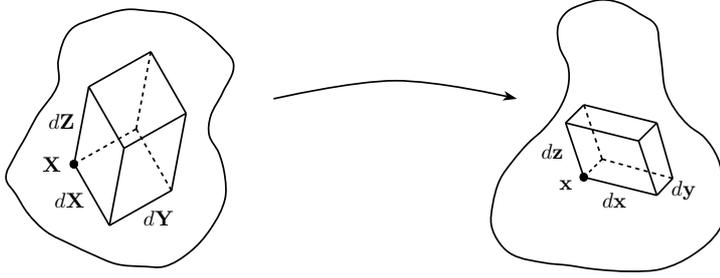


Figura 4.8: Dilatazione Volumica

figII13

Inoltre si ha $dx_l = dX_i F_{il}$, e dalla formula del prodotto misto si ricava

$$dV = |\epsilon_{ijk} dX_i dY_j dZ_k|, \quad dv = |\epsilon_{lrs} dx_l dy_r dz_s| = |\epsilon_{lrs} dX_i F_{il} dY_j F_{jr} dZ_s F_{sk}|. \quad (4.3.5)$$

volu

E' lungo ma diretto verificare che vale l'identita'

$$\epsilon_{lrs} F_{il} F_{jr} F_{ks} = \epsilon_{ijk} \det[\mathbf{F}] = J \epsilon_{ijk},$$

dove $J = \det \mathbf{F}$ e' lo **Jacobiano** della trasformazione. Moltiplichiamo questa relazione per $dX_i dX_j dX_k$ e sommiamo sui tutti e tre gli indici, ed otteniamo

$$dv = J dV. \quad (4.3.6)$$

vV

Infine per il coefficiente di deformazione volumica si ha

$$\delta_{dV} = (J - 1).$$

Esprimiamo ora δ_{dV} in termini del tensore di stiramento Lagrangiano \mathbf{E} . A tal fine usiamo l'identita'

$$\det[\mathbf{F}\mathbf{F}^T] = \det[\mathbf{F}]\det[\mathbf{F}^T] = \det[\mathbf{F}]^2 = J^2.$$

Pertanto da

$$\det[2\mathbf{E} + \mathbf{I}] = \det[\mathbf{F}\mathbf{F}^T] = J^2,$$

ricaviamo

$$\delta_{dV} = (J - 1) = \sqrt{\det[2\mathbf{E} + \mathbf{I}]} - 1.$$

4.2.6 **Definizione 4.3.5** Una deformazione si dice **isocora** se non subisce variazioni di volume.

Da quanto studiato possiamo affermare che un trasformazione e' isocora se e solo se

$$J = 1.$$

Si puo' provare che per gli spostamenti infinitesimi, anche chiamati *piccole deformazioni* risulta

$$\det[2\mathbf{E} + \mathbf{I}] \simeq 1 + 2(E_{011} + E_{022} + E_{033}) = 1 + 2\text{div}\mathbf{u}.$$

(iv) Cambiamenti in superficie

Sia dS un elemento di superficie nella configurazione di riferimento C_* di normale \mathbf{N} , vedi figura 4.9.

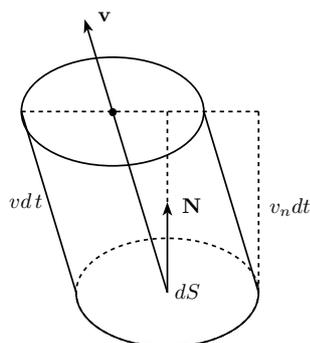


Figura 4.9: Superficie Orientata

figII14

Sia ds di normale \mathbf{n} l'elemento corrispondente nella configurazione attuale C_t . Vogliamo trovare la legge con la quale l'elemento orientato di superficie $dS\mathbf{N}$ si trasforma. A tale proposito utilizziamo la formula di trasformazione per l'elemento di volume $dv = JdV$ trovata precedentemente, applicandola al volume dV cilindretto di base $dS\mathbf{N}$ ed avente la generatrice nella direzione $d\mathbf{Z}$ che durante il moto si trasforma nel volume dv cilindretto di base $ds\mathbf{n}$ ed avente la generatrice nella direzione dz . Il volume di questi cilindretti e' dato da, vedi figura 4.10,

$$dV = dS\mathbf{N} \cdot d\mathbf{Z}, \quad dv = ds\mathbf{n} \cdot dz,$$

infatti il volume di un cilindro e' dato dal prodotto di base per altezza, le basi sono dS , e ds e le altezze sono $d\mathbf{N} \cdot d\mathbf{Z}$, $d\mathbf{n} \cdot dz$, rispettivamente. Utilizzando la relazione tra i volumi $dv = JdV$ e tra le lunghezze $dz = d\mathbf{Z} \cdot \mathbf{F}$, otteniamo

$$dv = ds\mathbf{n} \cdot d\mathbf{Z} \cdot \mathbf{F} = ds \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}^T d\mathbf{Z} = J dV = J dS \mathbf{N} \cdot d\mathbf{Z}. \quad (4.3.7) \quad \text{sup}$$

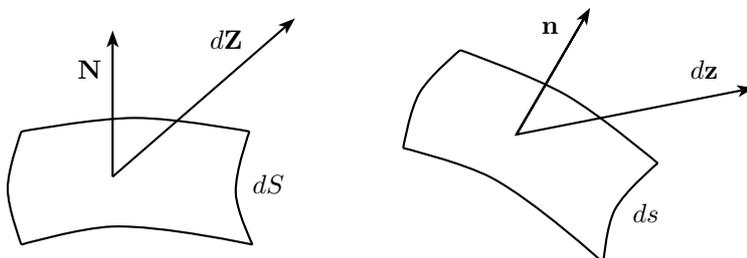


Figura 4.10: Dilatazione Superficiale

figII15

Stante l'arbitrarietà di $d\mathbf{Z}$ dall'espressione scalare $(4.3.7)^{\text{sup}}$ si ricava la seguente identità vettoriale che fornisce la variazione dell'elemento orientato di superficie, vedi figura 4.15,

$$ds \mathbf{n} = dS J \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^{-T}. \quad (4.3.8) \quad \boxed{\text{surf}}$$

Analogamente si ricava

$$dS \mathbf{N} = ds J^{-1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}^T. \quad (4.3.9) \quad \boxed{\text{surfeul}}$$

4.2.4 **Esercizio 4.3.4** *Il corpo \mathcal{S} sperimenta la deformazione*

$$x_1 = a_1(X_1 + \alpha X_2), \quad x_2 = a_2 X_2, \quad x_3 = a_3 X_3,$$

dove le a_i sono costanti adimensionali. Trovare i valori delle a_i affinché la deformazione sia isocora. Determinare le deformazioni lineari ed angolari per i vettori di base \mathbf{e}_i , la deformazione del volume avente spigoli i vettori di base \mathbf{e}_i , e la deformazione dei quadrati aventi come lati due dei vettori di base \mathbf{e}_i .

Risposta

La deformazione è isocora se $\det \mathbf{F} = 1$. Ciò si verifica per $a_1 a_2 a_3 = 1$.

Le deformazioni lineari sono data da

$$(1 + \alpha) a_1^2, a_2^2, a_3^2.$$

Le deformazioni angolari sono

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = a_1^2 a_2^2 \alpha^2, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0.$$

4.2.5 **Esercizio 4.3.5** *Il moto di un fluido è definito da*

$$x_1(x, t) = X_1 + k(t)X_2, \quad x_2(x, t) = X_2, \quad x_3 = X_3, \quad -1 \leq k(t) \leq 1, \quad (4.3.10) \quad \boxed{\text{equi}}$$

con $k(t)$ funzione data del tempo. Si chiede di:

- (1) calcolare i campi tensoriali seguenti: (i) tensore delle deformazioni; (ii) tensore di Cauchy-Green;
- (2) determinare gli autovalori e gli autovettori del tensore di Cauchy-Green;
- (3) determinare i valori degli autovettori trasformati, e dedurre un'interpretazione geometrica della deformazione;
- (4) determinare l'atto di moto e farne l'analisi locale;
- (5) determinare l'accelerazione.

Risposta

(1) Le $(4.3.10)^{\text{equi}}$ si scrivono nella forma intrinseca $\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{F}$ dove

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k(t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, il tensore sinistro di Cauchy-Green e' dato da

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} 1 & k(t) & 0 \\ k(t) & k^2(t) + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) L'equazione agli autovalori fornisce come autovalori $C_3 = 1$, e C_1, C_2 soluzioni dell'equazione $C^2 - (2 + k^2)C + 1 = 0$. Ponendo $k =: 2 \coth(2\phi)$ si deduce $C_1 = \coth^2 \phi$, $C_2 = \tan^2 \phi$. Inoltre, i corrispondenti autovettori sono

$$\mathbf{c}_1 \equiv (\sin \phi, \cos \phi, 0), \quad \mathbf{c}_2 \equiv (-\cos \phi, \sin \phi, 0), \quad \mathbf{c}_3 \equiv (0, 0, 1).$$

(3) Infine, i vettori trasformati sono dati da

$$f(\mathbf{c}_1) \equiv \coth \phi (\cos \phi, \sin \phi, 0); \quad f(\mathbf{c}_2) \equiv \tan \phi (-\sin \phi, \cos \phi, 0); \quad f(\mathbf{c}_3) \equiv (0, 0, 1).$$

(4) Il campo delle velocita' in coordinate Euleriane o atto di moto e' dato da

$$v_1 = \dot{k}x_2, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0.$$

Il gradiente di velocita' ha solo la componente di posto 12 non zero. I tensori velocita' di deformazione \mathbf{D} e velocita' angolare $\mathbf{\Omega}$ sono dati da

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} 0 & \dot{k}(t)/2 & 0 \\ \dot{k}(t)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} 0 & \dot{k}(t)/2 & 0 \\ -\dot{k}(t)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5) L'accelerazione e' data da

$$\mathbf{a} = \ddot{k}(t)X_2\mathbf{e}_1 = \ddot{k}(t)x_2\mathbf{e}_1.$$

4.3.5 Gradienti di spostamento, stiramenti

In questa sezione mostriamo come i tensori di stiramento nella descrizione Lagrangiana \mathbf{E} ed Euleriana \mathbf{e} siano appropriati per una descrizione completa delle deformazioni di un elemento materiale $dC^* \rightarrow dC$. Infatti essi si annullano se lo spostamento e' rigido $\mathbf{C} = \mathbf{I}$. A tal fine e' utile esprimere \mathbf{E} ed \mathbf{e} in termini del vettore spostamento \mathbf{u} . Il tilde verra' omesso sui tensori in questa sessione in quanto non vi e' possibilita' di confusione. Si noti che da

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X},$$

per lo spostamento Lagrangiano si ha

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}, \tag{4.3.11} \quad \boxed{\text{lagr}'}$$

e per lo spostamento Euleriano si ha

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \chi^{-1}(\mathbf{X}, t). \tag{4.3.12} \quad \boxed{\text{eule}}$$

Indichiamo con $\text{Grad} = \nabla_X$ il gradiente calcolato rispetto alle coordinate materiali X , *Gradiente Lagrangiano*

$$(\nabla_X \tilde{\mathbf{u}})_{ij} = (\text{Grad} \tilde{\mathbf{u}})_{ij} = \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial X_i} = \frac{\partial x_j}{\partial X_i} - \frac{\partial X_j}{\partial X_i} = F_{ji} - \delta_{ji}.$$

Da (4.3.11) ^{lagr'} troviamo

$$\text{Grad } \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{I}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{I} + \text{Grad } \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t), \quad (4.3.13) \quad \boxed{\text{lagrF}}$$

ancora

$$\mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{C}(\mathbf{X}, t) = \left(\mathbf{I} + \text{Grad } \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \right) \cdot \left(\mathbf{I} + (\text{Grad } \tilde{\mathbf{u}}) \right)^T, \quad (4.3.14) \quad \boxed{\text{CG}}$$

ed infine, sviluppando il prodotto tra binomi, per il **tensore di stiramento Lagrangiano** \mathbf{E} si ricava

$$\frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \mathbf{E}(\mathbf{X}, t) = \left[\frac{(\text{Grad } \tilde{\mathbf{u}} + \text{Grad}^T \tilde{\mathbf{u}})}{2} + \frac{1}{2}(\text{Grad } \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \text{Grad}^T \tilde{\mathbf{u}} \right]. \quad (4.3.15) \quad \boxed{\text{lagr}}$$

Per il **tensore di stiramento Euleriano** \mathbf{e} ricordiamo che

$$(\mathbf{F}^{-1})_{ij} = \frac{\partial X_j^{-1}}{\partial x_i},$$

quindi

$$\text{grad } \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t), \quad (4.3.16) \quad \boxed{\text{eulF}}$$

$$[\text{grad } \mathbf{u}]_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} - (\mathbf{F}^{-1})_{ij}. \quad (4.3.17) \quad \boxed{\text{eulF}'}$$

Da (4.3.12) ^{eule} deduciamo

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}, t) = \left(\mathbf{F}^T \mathbf{F} \right)^{-1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T} = \left(\mathbf{I} - \text{grad } \mathbf{u} \right) \cdot \left(\mathbf{I} - (\text{grad } \mathbf{u}) \right)^T(\mathbf{x}, t), \quad (4.3.18) \quad \boxed{\text{CGr}}$$

ed infine per il tensore di stiramento Euleriano \mathbf{e} si ricava

$$\frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) = \mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{(\text{grad } \mathbf{u} + \text{grad}^T \mathbf{u})}{2} - \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{u}) \cdot (\text{grad}^T \mathbf{u}) \right]. \quad (4.3.19) \quad \boxed{\text{euler}}$$

4.3.6 Spostamenti elementari e stiramenti

Nei materiali solidi le deformazioni sono molto piccole anche se questi corpi sono sottoposti a forti sollecitazioni, vale a dire e' piccola la differenza tra spostamenti $\tilde{\mathbf{u}}(X, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}$, $\tilde{\mathbf{u}}(Y, t) = \mathbf{y} - \mathbf{Y}$ di punti \mathbf{X} , \mathbf{Y} vicini cioe' con $|\mathbf{X} - \mathbf{Y}| \ll 1$, vedi figura 4.11. In termini analitici scriviamo

$$\left| \frac{\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{Y}, t)}{|\mathbf{X} - \mathbf{Y}|} \right| \sim |\text{Grad } \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)| = \epsilon \ll 1, \quad \forall \mathbf{X}, t,$$

con ϵ quantita' adimensionale.

Per piccoli spostamenti possiamo trascurare i termini di ordine superiore ad ϵ , vale a dire poniamo $O(\epsilon^2) = 0$, e scriveremo

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\text{Grad } \tilde{\mathbf{u}} + \text{Grad}^T \tilde{\mathbf{u}}) + O(\epsilon^2).$$

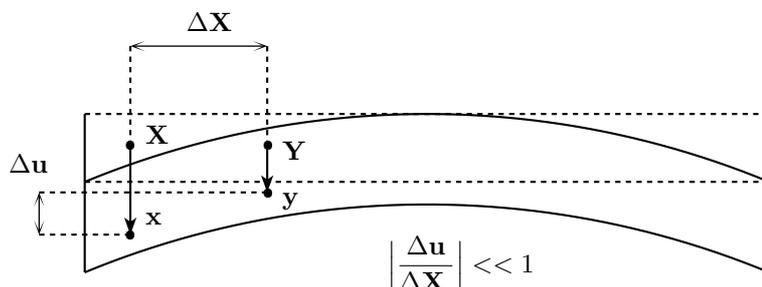


Figura 4.11: Spostamento infinitesimo

figII10

Al primo ordine il tensore

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1}{2} (\text{Grad } \tilde{\mathbf{u}} + \text{Grad}^T \tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F} - \mathbf{I} + \mathbf{F}^T - \mathbf{I})$$

approssima il tensore di stiramento Lagrangiano.

E' importante realizzare che la sostituzione di \mathbf{E}_0 con \mathbf{E} , in quanto approssimazione, puo' portare dei paradossi. Infatti per un moto rigido risulta

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = 0, \quad \mathbf{E}_0 = \frac{1}{2} (\mathbf{F} + \mathbf{F}^T - 2\mathbf{I}) \neq 0.$$

Si puo' mostrare pero' che E_0 e' dell'ordine di ϵ^2 . Infatti, ricordando che per un moto rigido $\mathbf{C} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{I}$, abbiamo la seguente identita'

$$(\mathbf{I} - \mathbf{F}) \cdot (\mathbf{F}^T - \mathbf{I}) = \mathbf{F} - \mathbf{F}^T - 2\mathbf{I}.$$

Pertanto da (4.3.13) ricaviamo

$$\mathbf{E}_0 = -\frac{1}{2} \text{Grad } \tilde{\mathbf{u}} \cdot \text{Grad}^T \tilde{\mathbf{u}} \simeq \frac{1}{2} \epsilon^2,$$

che prova $\mathbf{E}_0 = O(\epsilon^2)$.

Un'altra proprieta' di questa approssimazione e' che i gradienti Lagrangiano ed Euleriano coincidono al primo ordine. Precisamente si puo' provare che

$$\text{grad } \mathbf{u} = \text{Grad } \tilde{\mathbf{u}} + O(\epsilon^2), \quad \text{grad } \mathbf{u} \simeq \text{Grad } \tilde{\mathbf{u}}.$$

In molti problemi e' piu' semplice ricavare il tensore \mathbf{E}_0 , o meglio si ricava su basi geometriche un'espressione $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0(\mathbf{X}, t)$. In questo caso, dato $\mathbf{E}_0(\mathbf{X}, t)$ si pone il problema di ricavare lo spostamento $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)$ di tutte le particelle. Bisogna pero' stare molto attenti in quanto non sempre questo problema e' risolubile, sono necessarie condizioni di compatibilita'. Per capire il problema matematico basti pensare che se si assegna una funzione vettoriale $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ non sempre esiste una funzione scalare φ che verifichi $\mathbf{v} = \text{Grad } \varphi$, bisogna determinare precise condizioni di compatibilita'. Nell'esempio precedente affinche' sia $\mathbf{v} = \nabla \tilde{\varphi}$ bisogna verificare la condizione di compatibilita' $\nabla \times \mathbf{v} = 0$.

4.2.1 **Esercizio 4.3.6** Sia dato il tensore $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ avente tutte le componenti nulle eccetto $S_{11} = X_2^2$. Si vuole determinare il vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tale che $\mathbf{S} = \text{Grad } \mathbf{v}$. Si deve richiedere

$$\frac{\partial v_1}{\partial X_1} = S_{11} = X_2^2, \quad \frac{\partial v_2}{\partial X_2} = S_{22} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial X_2} = S_{12} = 0 \quad \frac{\partial v_2}{\partial X_1} = S_{21} = 0.$$

Risposta Integrando le prime due condizioni si trova

$$v_1 = X_1 X_2^2 + f(X_2), \quad v_2 = g(X_1),$$

e derivando v_1 rispetto ad X_2 , v_2 rispetto ad X_1 si ricava

$$\frac{\partial v_1}{\partial X_2} = 2X_1 X_2 + f'(X_2), \quad \frac{\partial v_2}{\partial X_1} = g'(X_1) \quad \forall X_1, X_2.$$

Si impone

$$2X_1 X_2 + f'(X_2) = 0, \quad g'(X_1) = 0 \quad \forall X_1, X_2.$$

Per $X_1 = 0$ la prima condizione richiede $f'(X_2) = 0$ ed e' indipendente da X_1 e quindi essa non puo' essere verificata per $X_1 \neq 0$.

Vale un teorema di compatibilita' per la risoluzione di detto problema che richiede uguaglianza per le derivate seconde miste ma non viene riportato qui.

4.3.7 Analisi degli spostamenti elementari.

Mostreremo in questa sottosezione che *la deformazione infinitesima piu' generale di un elemento materiale durante un moto e' composta da una rotazione rigida e da una pura deformazione.*

Inoltre introdurremo i tensori gradiente velocita' di deformazione e velocita' angolare, e ne mostreremo che *anche l'atto di moto locale e' decomponibile in una atto di moto rigido piu' una pura variazione della deformazione nel tempo.*

Per l'analisi locale della deformazione partiamo dalla formula esatta per i differenziali data dall'identita'

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + d\mathbf{X} \cdot \text{Grad } \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t). \quad (4.3.20) \quad \boxed{\text{esa}}$$

Gradiente di spostamento infinitesimo Per spostamenti infinitesimi approssimiamo lo stiramento \mathbf{E} con quello lineare

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1}{2} (\text{Grad } \tilde{\mathbf{u}} + \text{Grad}^T \tilde{\mathbf{u}}).$$

Dall'identita'

$$\text{Grad } \tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} (\text{Grad } \tilde{\mathbf{u}} + \text{Grad}^T \tilde{\mathbf{u}}) + \frac{1}{2} (\text{Grad } \tilde{\mathbf{u}} - \text{Grad}^T \tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{E}_0 + \mathbf{W},$$

dove si e' posto

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\text{Grad } \tilde{\mathbf{u}} - \text{Grad}^T \tilde{\mathbf{u}}),$$

la ^{esa}(4.3.20) si scrive

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + d\mathbf{X} \cdot \mathbf{W}(\mathbf{X}, t) + d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{X}, t). \quad (4.3.21) \quad \boxed{\text{esau}}$$

Sia $\mathbf{w}(\mathbf{X}, t)$ il vettore aggiunto di $\mathbf{W}(\mathbf{X}, t)$ detto *vettore spostamento angolare infinitesimo*. La (4.3.21) diventa

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \mathbf{w}(\mathbf{X}, t) \times d\mathbf{X} + d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{X}, t). \quad (4.3.22) \quad \boxed{\text{esaa}}$$

La (4.3.22) esprime la proprietà voluta che la deformazione infinitesima più generale di un elemento materiale durante un moto è composta da una traslazione $d\mathbf{X}$, una rotazione e da una pura deformazione.

Gradiente di deformazione finito Proviamo ora una proprietà della deformazione finita, vale a dire senza ipotesi di piccolezza sullo spostamento.

Nel Capitolo I, numero I.1.1, si è provato il Teorema di Decomposizione Polare. In particolare, la (I.1.1) vale per \mathbf{F} gradiente di deformazione; in tal caso i tensori \mathbf{U} , \mathbf{V} sono detti tensori di stiramento destro e sinistro, rispettivamente. Il tensore \mathbf{R} è detto tensore di rotazione. Risulta

$$\mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{R}(\mathbf{U}\mathbf{R})^T = \mathbf{U}^2, \quad \mathbf{B} = \mathbf{V}^2.$$

Applicando il teorema di decomposizione polare all'elemento $d\mathbf{x}$ si ricava

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{V}. \quad (4.3.23) \quad \boxed{\text{polo}}$$

La (4.3.23) afferma che l'elemento materiale $d\mathbf{X}$ si trasforma in $d\mathbf{x}$ effettuando o (i) prima una pura deformazione $d\mathbf{X}' = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{U}$ e poi una rotazione $d\mathbf{X}' \cdot \mathbf{R}$, oppure (ii) prima una rotazione $d\mathbf{X}'' = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{R}$ e poi una pura deformazione $d\mathbf{X}'' \cdot \mathbf{V}$.

4.3 Cinematica di un continuo

In questo numero studiamo le caratteristiche della deformazione al variare del tempo.

4.3.1 Notazioni

Definizione 4.3.1 Traiettorie - Paths - *Le traiettorie delle particelle si trovano integrando il sistema di tre equazioni differenziali ordinarie*

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), & t &\in (0, T), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{X}. \end{aligned}$$

Definizione 4.3.2 Linee di flusso - Streamlines - *Le linee tangenti al campo \mathbf{v} si dicono linee di flusso. Ne segue che le linee di flusso, ritengono t fissato, ed hanno equazione parametrica $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ data da*

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{ds} &= \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), & s &\in (0, 1), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{X}. \end{aligned}$$

Definizione 4.3.3 Tubo di flusso \mathcal{T} e' detto un **tubo di flusso appoggiato alla sezione** S_0 se risulta un fascio di linee di flusso aventi i punti $P(0) \in S_0$.

Per un tubo costituito da linee di flusso la velocita' e' tangente alle sue pareti laterali.

Le linee di flusso sono descritte dal parametro s . Il tubo di flusso e' descritto dalla regione piana $S(s)$, al variare di s , detta **sezione di taglio**

$$\mathcal{T} := \{(x, s) : s \in (0, \infty) \longrightarrow x \in S(s)\}.$$

Si dice **centro della sezione** S , o **baricentro**, il punto P definito da

$$P := \frac{\int_S \mathbf{x} dS}{|S|},$$

dove $|S|$ denota la misura di S .

La sezione di taglio non e' univocamente definita.

Indichiamo con $\pi(s)$ un piano di normale $\mathbf{n}(s)$ passante per $P(s)$ il punto centrale di $S(s)$ e supponiamo che l'angolo tra la normale $\mathbf{n}(s)$ e la velocita' $\mathbf{v}(P(s))$ sia minore di $\pi/2$. La regione piana $\Sigma(s)$, per s fissato, ottenuta come intersezione di $\pi(s)$ e di \mathcal{T} e' detta una sezione piana, o di taglio del tubo in s .

4.1.4 **Definizione 4.3.4** Un campo di velocita' $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, al variare di t , si dice **stazionario** se non dipende esplicitamente da t

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0.$$

Equivalentemente si assume la velocita' nel formalismo Euleriano indipendente dal tempo,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}).$$

Osservazione 4.3.1 Per i moti stazionari le linee di flusso coincidono con le traiettorie.

Si pone

$$\text{grad} = \nabla_x \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right).$$

Poiche' le traiettorie delle particelle in un moto stazionario non sono, in generale rettilinee, il campo delle accelerazioni \mathbf{a} delle particelle e' diverso da zero e risulta

$$\mathbf{a}(x, t) = \mathbf{v}(x, t) \cdot \text{grad} \mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla_x \mathbf{v}(x, t).$$

Quando il vettore \mathbf{v} non ha sovrainpresso un tilde allora si usera' anche il semplice simbolo ∇ per indicare ∇_x .

Definizione 4.3.5 (Campo di velocita' solenoidale) Un campo di velocita' $\vec{v}(\vec{x}, t)$, al variare di t , si dice **solenoidale** se e solo se ha divergenza nulla:

$$\text{div} \vec{v} = 0$$

4.1.5 **Definizione 4.3.6** Per una curva γ regolare, semplice chiusa, si dice **circolazione del vettore \mathbf{w} su γ** la grandezza

$$C_\gamma = \oint_\gamma \mathbf{w} \cdot \delta \mathbf{x},$$

dove $\delta \mathbf{x}$ e' il tratto di segmento infinitesimo tangente a γ .

Lemma 4.3.1 Teorema di Stokes Sia Σ una qualunque superficie aperta di bordo γ orientata in modo da vedere levogiro l'orientamento su γ , e sia \mathbf{n} la sua normale. Il **teorema di Stokes** afferma che vale la seguente identita'

$$\oint_\gamma \mathbf{w} \cdot \delta \mathbf{x} = \int_\Sigma \nabla \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (4.3.1) \quad \boxed{\text{stok}}$$

Dal teorema di Stokes segue che nei moti irrotazionali la circolazione e' nulla lungo ogni curva semplice chiusa.

4.1.6 **Definizione 4.3.7** Sia Σ una superficie regolare, e g una grandezza relativa al continuo \mathcal{S} . Si dice **flusso di g** (o semplicemente **flusso** se $g = 1$) attraverso Σ , vedi figura 4.12, la grandezza

$$\Phi = \int_\Sigma g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

dove \mathbf{n} e' uno dei versori normali a Σ .

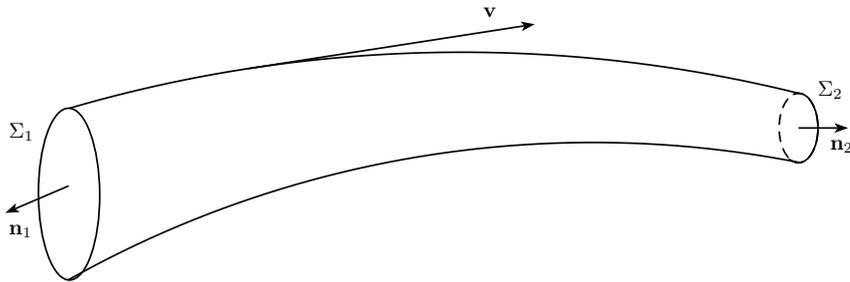


Figura 4.12: Legge di Castelli

figII2

Lemma 4.3.2 Legge di Castelli In un tubo di flusso di moto solenoidale il flusso della velocita' e' indipendente dalla sezione lungo la quale si calcola.

Dim Consideriamo il tratto di tubo \mathcal{T}_{12} contenuto tra le due sezioni Σ_i , $i = 1, 2$. Notiamo che la superficie del tubo \mathcal{T}_{12} e' ottenuta dall'unione di una superficie laterale \mathcal{T}_l , di normale esterna \mathbf{n} e da due superficie di taglio Σ_1 , Σ_2 di normali rispettivamente \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 . Usando il teorema di Gauss, e ricordando che sulla superficie laterale del tubo $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$ ricaviamo

$$0 = \int_{\mathcal{T}} \nabla \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\mathcal{T}_l} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\sigma + \int_{\Sigma_1} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v} d\sigma + \int_{\Sigma_2} \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{v} d\sigma.$$

4.3.2 Identita' fondamentali

Definizione 4.3.8 Moto bidimensionale Si definisce *moto bidimensionale* un moto avente velocita' \mathbf{v} funzione di solo due variabili spaziali, diciamo (x_1, x_2) ed avente nulla la terza componente v_3 .

Definizione 4.3.9 Un moto si dice *irrotazionale* se ha rotore nullo. In un dominio *semplicemente connesso* un campo e' irrotazionale se e solo se deriva da un potenziale,

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi, \quad \iff \quad \nabla \times \mathbf{v} = 0.$$

In ogni modello di continuo sara' usata la legge di Newton che collega l'inerzia della particella materiale al mondo circostante. Qui studieremo alcune proprieta' matematiche dell'accelerazione di una particella di un sistema continuo.

Ricordando la ^{aggi}(1.2.7) definita in ^{agg}1.2.7 si prova l'identita'

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T) + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2,$$

dove

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v},$$

e' il rotore di velocita' anche detto **vettore vorticit**a'.

Calcolando il rotore del termine di convezione si ricava

$$\nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{b},$$

dove le componenti di \mathbf{b} sono definite dal tensore di Ricci

$$b_i = \epsilon_{ijk} \left(\partial_{x_j} v_l \right) \left(\partial_{x_l} v_k \right).$$

Per un moto bidimensionale $\mathbf{b} = b_3 \mathbf{e}_3 = 0$. Infatti gl'indici j, k possono essere solo 1, 2.

Definizione 4.3.10 Campo irrotazionale Un campo si dice *irrotazionale* si ha

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2.$$

Calcoliamo il rotore dell'accelerazione, si ha

$$\nabla \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v}.$$

Per un moto bidimensionale questa relazione si riduce a

$$\nabla \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Un'altra identita' utile riguarda il rotore di \mathbf{a} ed e' la seguente.

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}\mathbf{F}^{-1}}{dt} \mathbf{F} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v}. \quad (4.3.2) \quad \boxed{\text{tran1}}$$

Scriviamo il primo lato di questa identita' per componenti e procediamo per identita'

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_k}{dt} &= \frac{d(\omega_j F_{ji}^{-1} F_{ik})}{dt} = \frac{d(\omega_j F_{ji}^{-1})}{dt} F_{ik} + \omega_j F_{ji}^{-1} \frac{dF_{ik}}{dt} \\ &= \frac{d(\omega_j F_{ji}^{-1})}{dt} F_{ik} + \omega_j F_{ji}^{-1} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \end{aligned} \quad (4.3.3) \quad \boxed{\text{tran2}}$$

$$= \frac{d(\omega_j F_{ji}^{-1})}{dt} F_{ik} + \omega_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial X_i} \quad (4.3.4)$$

$$= \frac{d(\omega_j F_{ji}^{-1})}{dt} F_{ik} + \omega_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \frac{d(\omega_j F_{ji}^{-1})}{dt} F_{ik} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla v_k.$$

La $\boxed{\text{tran2}}$ (4.3.3) puo' anche scriversi come

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \mathbf{F}^{-1} = \frac{d\boldsymbol{\omega} \mathbf{F}^{-1}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v} \mathbf{F}^{-1}. \quad (4.3.5) \quad \boxed{\text{tran3}}$$

4.3.3 Gradienti velocita' di deformazione e di rotazione

Se si studia il moto in coordinate Euleriane e' opportuno descrivere il moto in termini del tensore gradiente di velocita' $\nabla_x \mathbf{v} = \text{grad} \mathbf{v}$.

Nel seguito useremo indifferentemente le notazioni **velocita' di rotazione**, e **velocita' angolare** per indicare uno stesso vettore!

Partiamo dalla formula

$$\text{grad} \mathbf{v} = \mathbf{D} + \boldsymbol{\Omega}, \quad (4.3.6) \quad \boxed{\text{grad}}$$

dove

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\text{grad} \mathbf{v} + (\text{grad} \mathbf{v})^T), \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} (\text{grad} \mathbf{v} - (\text{grad} \mathbf{v})^T),$$

sono detti i tensori **Gradiente velocita' di deformazione** (Stretch) e **gradiente di velocita' di rotazione** (Spin).

Determiniamo ora il significato cinematico di questi due tensori.

Velocita' di deformazione lineare

Differenziando rispetto al tempo l'elemento $d\mathbf{x}$ si trova

$$\frac{d}{dt}(dx_i) = \frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \right] = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] dX_j. \quad (4.3.7) \quad \boxed{\text{grad0}}$$

Invertendo l'ordine di derivazione in $\boxed{\text{grad0}}$ (4.3.7) troviamo

$$\frac{d}{dt} dx_i = \sum_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial X_j} dX_j. \quad (4.3.8) \quad \boxed{\text{grad1}}$$

Sostituendo l'identita'

$$\sum_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial X_j} dX_j = \sum_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left[\sum_j \frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_j \right] = \sum_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k,$$

in $(4.3.8)$ ricaviamo l'espressione in coordinate Euleriane

$$\frac{d}{dt} dx_i = \sum_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k. \quad (4.3.9) \quad \boxed{\text{grad2}}$$

Moltiplicando $(4.3.9)$ per dx_i e sommando su i si trova

$$\begin{aligned} \text{grad3} \quad \frac{d}{dt} \frac{dx^2}{2} &= \sum_k dx_i \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k = \mathbf{dx} \cdot \text{grad} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} \\ &= \mathbf{dx} \cdot \nabla_x \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} = \mathbf{dx} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{dx}. \end{aligned} \quad (4.3.10) \quad \boxed{\text{grad4}}$$

Infatti $\boldsymbol{\Omega}$ è emisimmetrico ed abbiamo usato l'identità $\mathbf{dx} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{dx}^T = 0$. Se poniamo $\mathbf{dx} = l(t)\mathbf{a}(t)$, con \mathbf{a} vettore la $(4.3.10)$ diventa

$$\frac{d|l(t)|}{dt} = |l(t)|\mathbf{a} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{a}. \quad (4.3.11) \quad \boxed{\text{grad5}}$$

La $(4.3.11)$ mostra che la componente del tensore \mathbf{D} lungo \mathbf{a} è responsabile della variazione in lunghezza (allungamento o contrazione) dell'elemento materiale $\mathbf{x} = l(t)\mathbf{a}(t)$ all'istante t .

Velocità di deformazione angolare

Consideriamo due elementi materiali $\mathbf{dx} = l_1\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{dy} = l_2\mathbf{b}(t)$, con \mathbf{a} , \mathbf{b} vettori aventi le lunghezze l_i costanti in t . Ovviamente assieme alla $(4.3.9)$ valida per \mathbf{dx} risulta valida l'analoga relazione per \mathbf{dy}

$$\frac{d}{dt} dy_i = \sum_k \frac{\partial v_i}{\partial y_k} dy_k. \quad (4.3.12) \quad \boxed{\text{grad2}'}$$

Moltiplicando $(4.3.8)$ per dy_i e la $(4.3.12)$ per dx_i sommando su i le due relazioni, e ricordando la si ricavano le due equazioni:

$$\mathbf{dy} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{dx} = \mathbf{dy} \cdot \sum_k \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} dx_k. \quad (4.3.13) \quad \boxed{\text{grad-1}}$$

$$\mathbf{dx} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{dy} = \mathbf{dx} \cdot \sum_k \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y_k} dy_k. \quad (4.3.14) \quad \boxed{\text{grad-2}}$$

Sommando poi la $(4.3.13)$ a $(4.3.14)$ per la regola di derivazione del prodotto di funzioni si trova

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{dx} \cdot \mathbf{dy}] = \mathbf{dx} \cdot \nabla \mathbf{v} \mathbf{dy} + \mathbf{dy} \cdot \nabla \mathbf{v} \mathbf{dx} = \mathbf{dx} \cdot (\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}) \mathbf{dy}. \quad (4.3.15) \quad \boxed{\text{grad-3}}$$

Ritornando alle direzioni \mathbf{a} , \mathbf{b} , osserviamo che per le ipotesi fatte risulta $l_1 = l_2 = \text{cost.}$ in t e si ha

$$l_1 l_2 \frac{d}{dt} [\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}] = 2l_1 l_2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{b}. \quad (4.3.16) \quad \boxed{\text{grad.3}}$$

Semplificando in $(\overset{\text{grad.3}}{4.3.16})$ le quantità $l_1 l_2$ troviamo

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{b}. \quad (4.3.17) \quad \boxed{\text{grad6}}$$

La $(\overset{\text{grad6}}{4.3.17})$ mostra che la velocità di variazione dell'angolo tra due versori \mathbf{a} , \mathbf{b} e' data dalla componente di \mathbf{D} lungo \mathbf{a} e \mathbf{b} .

Considerando come versori i vettori di base \mathbf{e}_i si vede che le componenti ad indice uguale, lungo la diagonale principale forniscono le velocità di variazione di lunghezza nelle direzioni degli assi, mentre le componenti ad indice diverso, fuori della diagonale principale danno le variazioni di velocità angolari tra i versori di base.

4.3.4 Moti rigidi

4.2.2 **Definizione 4.3.11** *Un moto e' rigido se e solo se*

$$d\mathbf{x}^2 = d\mathbf{X}^2, \quad \forall \mathbf{X} \in C_*, \quad \forall t \in \mathcal{I}. \quad (4.3.18) \quad \boxed{\text{defd}}$$

La condizione di moto rigido e' equivalente a richiedere

$$d\mathbf{x}^2 = (d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}) \cdot (d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}) = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T) \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^2. \quad (4.3.19) \quad \boxed{\text{defo}}$$

La condizione di rigidità $(\overset{\text{defo}}{4.3.19})$ valida per ogni $d\mathbf{X}$ impone

$$\mathbf{F}(X, t) \cdot \mathbf{F}^T(X, t) = \mathbf{F}^T(X, t) \cdot \mathbf{F}(X, t) = \mathbf{I},$$

cioe' il tensore \mathbf{F} deve essere ortogonale.

Per un moto rigido vale l'invarianza per le distanze anche per punti a distanza finita, e risulta

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = (\chi(\mathbf{X}, t) - \chi(\mathbf{Y}, t)) \cdot (\chi(\mathbf{X}, t) - \chi(\mathbf{Y}, t)) = (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y}). \quad (4.3.20) \quad \boxed{\text{rigo}}$$

Differenziando questa espressione rispetto ad X_j e dividendo per due troviamo

$$\frac{\partial \chi_i(X, t)}{\partial X_j} (\chi_i(X, t) - \chi_i(Y, t)) = (X_i - Y_i) \delta_{lj} = (X_j - Y_j) \quad (4.3.21) \quad \boxed{\text{def1}}$$

Differenziando nuovamente la $(\overset{\text{def1}}{4.3.21})$, questa volta rispetto a Y_k troviamo

$$\frac{\partial \chi_i(X, t)}{\partial X_j} \frac{\partial \chi_i(Y, t)}{\partial Y_k} = \delta_{kj}, \quad (4.3.22) \quad \boxed{\text{def2}}$$

che comporta

$$\mathbf{F}(X, t) \cdot \mathbf{F}^T(Y, t) = \mathbf{I},$$

che stante l'ortogonalità di \mathbf{F} implica

$$\mathbf{F}(X, t) = \mathbf{F}(Y, t), \quad \forall Y \in U,$$

vale a dire che la deformazione e' omogenea o uniforme, si ricordi la definizione $\overset{\text{omo}}{4.1.1}$ del cap.III. *In un moto rigido il gradiente di deformazione non dipende dalle coordinate materiali.*

In particolare, integrando ^(def)(4.2.1) risulta provato che in un moto rigido vale la identita' globale in Ω

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{F}(t), \quad \mathbf{F}(t)^T \cdot \mathbf{F}(t) = \mathbf{I}, \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in C_*, \quad \forall t \in \mathcal{I}. \quad (4.3.23) \quad \boxed{\text{rigido}}$$

Anche il viceversa e' ovviamente vero infatti e' semplice verificare che un tensore omogeneo, ortogonale non altera le distanze. Precisamente supponendo vera ^(rigido)(4.3.23) con \mathbf{F} tensore omogeneo ed ortogonale, elevando al quadrato entrambi i membri otteniamo ^(rigido)(4.3.20) che stabilisce la rigidita' del moto.

La ^(rigido)(4.3.23) **caratterizza i moti rigidi.**

Per l'espressione della velocita' in un moto rigido deriviamo la ^(rigido)(4.3.23) rispetto al tempo e troviamo

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) = (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \cdot \dot{\mathbf{F}}(t), \quad (4.3.24) \quad \boxed{\text{velox}}$$

ed il punto sovrascritto sul tensore $\dot{}$ denota la derivazione in t . Per ottenere la relazione tra velocita' in coordinate Euleriane in termini di variabili Euleriane, moltiplichiamo a destra ambo i lati di ^(rigido)(4.3.23) per \mathbf{F}^T ricavando

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{X} - \mathbf{Y},$$

sostituendo quindi questa informazione in ^(velox)(4.3.24) otteniamo l'espressione Euleriana del **campo di velocita'**

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}}. \quad (4.3.25) \quad \boxed{\text{motr}}$$

Differenziando rispetto a t l'identita' $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{I}$ si ricava

$$\dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F} = -\mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}},$$

Notiamo che

$$(\mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}})^T = \dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F}.$$

Quindi il tensore $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F}$ e' emisimmetrico e si puo' scrivere

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Denotiamo con ω il vettore aggiunto al tensore \mathbf{A} e scriviamo

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) = \omega \times (\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (4.3.26) \quad \boxed{\text{rigi}}$$

ritrovando una formula classica per l'atto di moto rigido.

Vogliamo ora provare che vale la seguente caratterizzazione di moti rigidi.

4.3.1 Teorema 4.3.3 - *Un atto di moto e' rigido se e solo se esiste un vettore ω tale che*

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}(y, t) + \omega(t) \times (x - y) \quad (4.3.27) \quad \boxed{\text{teylor}}$$

con ω indipendente da x .

Notiamo che vale la seguente identita'

$$(x - y) \cdot (\mathbf{v}(x, t) - \mathbf{v}(y, t)) = (x - y) \cdot \frac{d(x - y)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d|(x - y)|^2}{dt}. \quad (4.3.28) \quad \boxed{\text{scalar}}$$

Supponiamo valida la ^{motr}(4.3.25). Moltiplicando ambo i membri di ^{motr}(4.3.25) per $(x - y)$ si trova

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{y}, t)) = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.3.29) \quad \boxed{\text{motr1}}$$

Il secondo membro di ^{motr1}(4.3.29) e' nullo in quanto $\mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}}$ e' emisimmetrico. Per la ^{scalar}(4.3.28) il primo membro di ^{motr1}(4.3.29) coincide con la derivata temporale di $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2$ questo deve essere zero per la ^{motr1}(4.3.29). Questa relazione esprime appunto la condizione di rigidita'. La prima implicazione e' cosi' provata.

Supponiamo ora che il moto sia rigido. Utilizziamo la ^{scalar}(4.3.28) che deriviamo una volta rispetto ad x_j ed un'altra volta rispetto ad y_j ricavando le due equazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x_i - y_i)}{\partial x_j} (v_i(x, t) - v_i(y, t)) + (x_i - y_i) \frac{\partial(v_i(x, t) - v_i(y, t))}{\partial x_j} = \\ \delta_{ij} (v_i(x, t) - v_i(y, t)) + (x_i - y_i) \frac{\partial v_i(x, t)}{\partial x_j} = \\ (v_j(x, t) - v_j(y, t)) + (x_i - y_i) \frac{\partial v_i(x, t)}{\partial x_j} = 0; \end{aligned} \quad (4.3.30) \quad \boxed{\text{rigid'}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x_i - y_i)}{\partial y_j} (v_i(x, t) - v_i(y, t)) + (x_i - y_i) \frac{\partial(v_i(x, t) - v_i(y, t))}{\partial y_j} = \\ -\delta_{ij} (v_i(x, t) - v_i(y, t)) - (x_i - y_i) \frac{\partial v_i(y, t)}{\partial y_j} = \\ -(v_j(x, t) - v_j(y, t)) - (x_i - y_i) \frac{\partial v_i(y, t)}{\partial y_j} = 0. \end{aligned} \quad (4.3.31) \quad \boxed{\text{rigid1}}$$

Sommando l'ultima riga di ^{rigid1}(4.3.31) all'ultima riga di ^{rigid'}(4.3.30) si trova

$$(x_i - y_i) \left(\frac{\partial v_i(x, t)}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i(y, t)}{\partial y_j} \right) = 0 \quad (4.3.32) \quad \boxed{\text{rigid}}$$

per ogni $x - y$, il che implica

$$\frac{\partial v_i(x, t)}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i(x, t)}{\partial y_j}.$$

Vale a dire il gradiente di velocita' e' indipendente da x , oppure si puo' affermare che la velocita' $\mathbf{v}(x, t)$ risulta lineare in x per i moti rigidi ed il resto e' nullo. In particolare per i moti rigidi la ^{motr}(4.3.25) si scrive

$$\mathbf{v}(x, t) - \mathbf{v}(y, t) = (x - y) \cdot \nabla \mathbf{v}(y, t). \quad (4.3.33) \quad \boxed{\text{tay1}}$$

Moltiplichiamo ora la ^{taylor}(4.3.27) scalarmente per $(x - y)$ ed otteniamo

$$(\mathbf{v}(x, t) - \mathbf{v}(y, t)) \cdot (x - y) = (x - y) \cdot \nabla \mathbf{v}(y, t) \cdot (x - y). \quad (4.3.34) \quad \boxed{\text{tay}}$$

Il primo membro di (4.3.50) per (4.3.28) è zero perché il moto è rigido e quindi si ha

$$(x - y) \cdot \nabla \mathbf{v}(t) \cdot (x - y) = (x - y) \cdot \nabla \mathbf{D}(t) \cdot (x - y).$$

Questa relazione implica l'annullamento della parte simmetrica del gradiente di velocità $\mathbf{D}(t) = 0, \forall t > 0$. La (4.3.27) discende infine dalla proprietà che il gradiente di deformazione è un tensore antisimmetrico $\nabla \mathbf{v}(t) = \Omega(t)$, dove $\omega(t)$ indica il suo vettore aggiunto.

Definizione 4.3.12 Un moto rigido si dice **traslatorio** se tutti i punti hanno la stessa velocità vale a dire, vedi figura 4.13,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega.$$

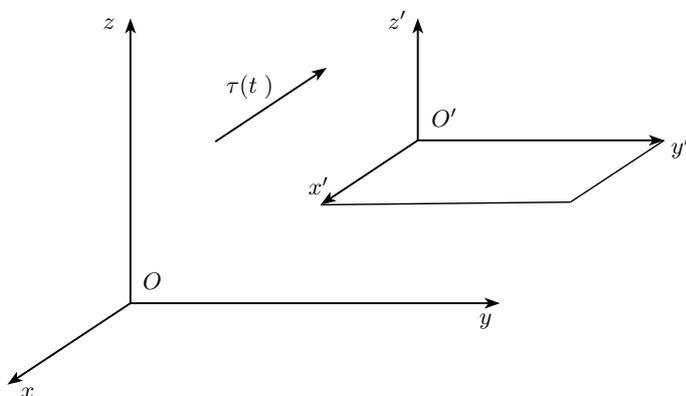


Figura 4.13: Traslazione

figII4

Definizione 4.3.13 Un moto rigido si dice **rotatorio** attorno alla retta r se tutti i punti di r hanno velocità nulla. Indicata con \mathbf{e} la direzione di r , e con \mathbf{y} un punto di r si ricava, vedi figura 4.14,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \omega \times (\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.3.35) \quad \text{rot1}$$

Da (4.3.35) scegliendo \mathbf{x} su r si trova

$$0 = \omega \times (\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

che esprime la proprietà ω parallelo ad r . Per i moti rigidi la velocità deve appartenere ad un piano ortogonale ad r . Inoltre si ha

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}) + (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}),$$

dove $\bar{\mathbf{y}}$ denota la proiezione ortogonale di \mathbf{x} sulla retta passante per \mathbf{y} e parallela ad ω . Sostituendo questa relazione in (4.3.35) si ricava

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \omega \times (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.3.36) \quad \text{rot1}$$

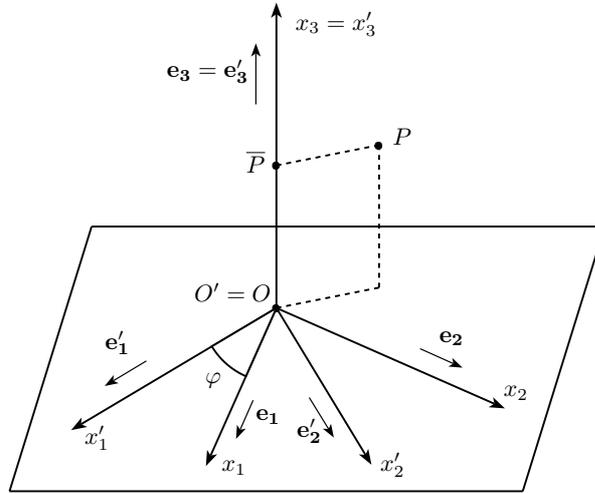


Figura 4.14: Rotazione

figII5

In (4.3.36) si trovano tre vettori tra di loro perpendicolari, ω , \mathbf{v} e $(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}})$.

Per un rotazione attorno all'asse x_3 , $\omega = \omega \mathbf{e}_3$. Scegliendo $\mathbf{y} \in y_3$ si ricava

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \omega \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}),$$

dove $\bar{\mathbf{x}}$ e' la proiezione di \mathbf{x} sull'asse x_3 .

Scelta di un riferimento

Definizione 4.3.14 Si chiama **riferimento solidale** ad un corpo rigido S un riferimento nel quale i punti di S non cambiano la loro posizione nel tempo. Vale a dire in un riferimento **solidale** ad S le coordinate dei punti $P \in S$ risultano costanti nel tempo, vedi figura 4.15.

Ad ogni corpo rigido $S(t)$ resta associato un riferimento $\mathcal{R}'(t)$ ad esso solidale individuato da un punto $O'(t)$ fissato ad arbitrio e da tre direzioni $\mathbf{e}'_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ ortonormali. Le tre direzioni \mathbf{e}'_i , $i = 1, 2, 3$ individuano tre rette dette rette coordinate, e risulta

$$P_i(t) - O'(t) = \mathbf{e}'_i(t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Il generico punto P ha coordinate (x'_i) , $i = 1, 2, 3$ nel riferimento $\mathcal{R}'(t) = \{O'(t), \mathbf{e}'_i(t)\}$ che si muove nel riferimento fisso $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{e}_i\}$. Nel riferimento \mathcal{R} la particella P , ha coordinate $\mathbf{x} \equiv (x_i)$ in \mathcal{R} . Per determinare il moto di P in \mathcal{R} basta conoscere le coordinate $\mathbf{X} \equiv (x'_i)$ in $\mathcal{R}'(t)$, e ricordare le formule del cambiamento di riferimento che si scrivono come

$$x_i(t) = x_{O' i}(t) + x'_j(t) F_{ji}(t). \tag{4.3.37} \quad \boxed{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}}$$

Si noti che il gradiente di deformazione \mathbf{F} coincide con la matrice del cambiamento di base \mathbf{Q} , infatti

$$F_{ki} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} = \delta_{jk} Q_{ji} = Q_{ki}.$$

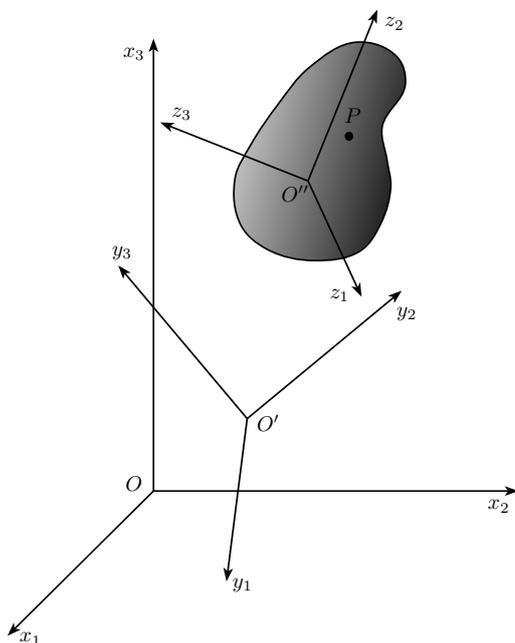


Figura 4.15: Moto Relativo

figII6

Derivando rispetto al tempo $\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{4.3.37}\right)$ si ha

$$v_i(\mathbf{x}, t) = v_{O'(t)i} + (x_j - x_{O'(t)j}) \dot{F}_{ji} = v_{O'(t)i} - (x_j - x_{O'(t)j}) A_{ji}, \quad (4.3.38) \quad \boxed{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}$$

dove si è posto $A_{ji} =: \dot{F}_{ji}$. La $\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{4.3.38}\right)$ in notazioni tensoriali diventa

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_{O'(t)}, t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{O'(t)}). \quad (4.3.39) \quad \boxed{\text{atto}}$$

La $\left(\frac{\text{atto}}{4.3.39}\right)$ caratterizza l'atto di moto rigido, essa afferma che per individuare la velocità di un generico punto $\mathbf{x} \in S$, all'istante t , è sufficiente conoscere la velocità di un punto $O(t)$, detta velocità di traslazione di S e le componenti di un vettore $\boldsymbol{\omega}(t)$ detto velocità angolare istantanea del corpo rigido.

Provare che la matrice

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3.40) \quad \boxed{\text{rotaz}}$$

è ortogonale. Inoltre, per $\mathbf{u} \in E_3$, $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}$ fornisce la rotazione di \mathbf{u} di angolo θ nel piano ortogonale ad \mathbf{e}_3 . In questo caso scriveremo

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}(t) \mathbf{e},$$

dove $\dot{\theta}(t)$ rappresenta la derivata temporale dell'angolo θ ed $\boldsymbol{\omega}$ assume il significato fisico di velocità angolare.

4.3.5 Teoremi del trasporto

Definizione 4.3.15 Velocita' di circolazione *Data una curva regolare, cammino chiuso, γ , si definisce **velocita' di circolazione** lungo γ la quantita'*

$$\Gamma := \oint \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{x},$$

dove l'integrale e' calcolato lungo γ , $\delta \mathbf{x}$ rappresenta il differenziale elementare di \mathbf{x} .

Se la linea γ e' materiale, allora γ sara' funzione del tempo. Calcoliamo la derivata della circolazione

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{x}.$$

Indicando con δ il differenziale spaziale, notiamo che vale l'identita'

$$\delta \frac{\mathbf{v}^2}{2} = \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \delta \frac{d}{dt} \mathbf{x},$$

quindi invertendo l'ordine di derivazione otteniamo

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \delta \mathbf{x} = \delta \frac{\mathbf{v}^2}{2}.$$

Portando il segno di derivata sotto il segno d'integrale si ha

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{x} = \oint \frac{d}{dt} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{x} + \oint \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \delta \mathbf{x} = \oint \frac{d}{dt} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{x} + \oint \delta \frac{\mathbf{v}^2}{2} \delta \mathbf{x}.$$

Il secondo integrale si annulla perche' γ e' una linea chiusa e si ricava il **teorema di Kelvin**

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{l} = \oint \frac{d}{dt} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{l}.$$

Ricordiamo che se Σ e' una superficie aperta di bordo γ orientata in modo da vedere levogiro l'orientamento su γ . Dai teoremi di Stokes e di Kelvin segue

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Sigma} \nabla \times \frac{d}{dt} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

dove \mathbf{n} e' la normale a Σ .

trasp

Lemma 4.3.4 Teorema del trasporto di Reynolds *Sia $C(t)$ un dominio materiale, ed $f(x, t)$ una funzione definita su $C(t)$. Vale la seguente identita'*

$$\frac{d}{dt} \int_{C(t)} f(x, t) dx = \int_{C(t)} \left(\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (f(x, t) \mathbf{v}(x, t)) \right) dx, \quad (4.3.41) \quad \text{transport}$$

dove \mathbf{v} denota la velocita' delle particelle materiali.

Dim Al fine di dimostrare la ^{transport}(4.3.41) ricordiamo un noto teorema dell'analisi sul passaggio di derivazione sotto il segno d'integrale, quando il dominio dipende dal tempo. Precisamente, l'integrale della funzione $f(x, t)$ su un dominio $C(t)$ e' funzione solo del tempo, e si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{C(t)} f(x, t) dx = \int_{C(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + \int_{\partial C(t)} f(x, t) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (4.3.42) \quad \boxed{\text{transp}}$$

dove \mathbf{V} e' la velocita' dei punti della frontiera ∂C di C . Se il dominio $C(t)$ e' materiale, vale a dire costituito sempre dalle stesse particelle, allora la componente normale della velocita' \mathbf{V} coincide con la componente normale della velocita' \mathbf{v} delle particelle materiali:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}.$$

Ricordiamo che il teorema di Gauss afferma la seguente proprieta'

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial x_i} dC = \int_{\partial C} n_i f dS,$$

dove n_i e' la i -ma componente del versore normale ad ∂C diretto verso l'esterno di C .

Velocita' di deformazione volumica

Per studiare la deformazione volumica dobbiamo provare un teorema che regola il passaggio di derivazione, diciamo rispetto a t , sotto il segno d'integrale, quando l'integrale e' calcolato in una regione bi o tri-dimensionale $C \subseteq R^n$, $n = 2, 3$ risulta funzione di t .

Applicando il teorema di Gauss in ^{transp}(4.3.42) si ricava, infine, la ^{transport}(4.3.41) che fornisce una regola per il trasporto della derivata sotto il segno d'integrale.

4.3.2 Lemma 4.3.5 Velocita' di deformazione volumica Sia J il determinante della matrice \mathbf{F} . Vale la seguente identita'

$$\frac{dJ(x, t)}{dt} = J(x, t) \nabla \cdot \mathbf{v}(x, t). \quad (4.3.43) \quad \boxed{\text{varJ}}$$

Dim. Deriviamo rispetto al tempo ambo i membri della seguente identita'

$$\int_{C(t)} dx = \int_{C(0)} J(X, t) dX. \quad (4.3.44) \quad \boxed{\text{val}}$$

Applicando a primo membro il teorema del trasporto con $f = 1$, e trasformando l'integrale da $C(t)$ a $C(0)$ otteniamo

$$\frac{d}{dt} \int_{C(t)} dx = \int_{C(t)} \nabla \cdot \mathbf{v}(x, t) dx = \int_{C(0)} \widetilde{\nabla \cdot \mathbf{v}}(X, t) J(X, t) dX. \quad (4.3.45) \quad \boxed{\text{vol}}$$

A secondo membro si trova

$$\frac{d}{dt} \int_{C(0)} J(X, t) dX = \int_{C(0)} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{J}(X, t) dX = \int_{C(0)} \dot{J}(X, t) dX. \quad (4.3.46) \quad \boxed{\text{vol'}}$$

Eguagliando i termini finali in $(\overset{\text{vol}}{4.3.45})$ ed in $(\overset{\text{vol}}{4.3.46})$ deduciamo

$$\int_{C(0)} \widetilde{\nabla \cdot \mathbf{v}}(X, t) J(X, t) dX = \int_{C(0)} \frac{\partial \widetilde{J}}{\partial t}(X, t) dX. \quad (4.3.47) \quad \boxed{\text{volend}}$$

Stante l'arbitrarietà del dominio $C(0)$ dall'ultima identità si deduce

$$\frac{\partial \widetilde{J}(X, t)}{\partial t} = \nabla \cdot \widetilde{\mathbf{v}}(X, t) \widetilde{J}(X, t), \quad (4.3.48) \quad \boxed{\text{lagvol}}$$

$$\frac{dJ(x, t)}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}(x, t) J(x, t). \quad (4.3.49) \quad \boxed{\text{eulvol}}$$

Le $(\overset{\text{lagvol}}{4.3.48})$, $(\overset{\text{eulvol}}{4.3.49})$ rappresentano la legge di variazione del volume scritta in forma differenziale (puntuale) con notazione Lagrangiana ed Euleriana rispettivamente. \square

Si può allora affermare che la divergenza del vettore velocità è responsabile della variazione temporale di volume, e moltiplicando $(\overset{\text{varJ}}{4.3.43})$ per dV si ricava

$$\frac{d}{dt}(dv) = \text{div} \mathbf{v} dv.$$

4.3.1 **Definizione 4.3.16** *Un moto si dice **isocoro** o **solenoitale** se non vi sono variazioni di volume, questo avviene se e solo se*

$$\text{div} \mathbf{v} = 0.$$

Un corpo è un liquido se compie solo moti isocori.

4.3.6 Atto di moto locale

In un intorno del punto y , applichiamo a \mathbf{v} la formula del polinomio di Taylor arrestato al secondo ordine, si ha

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}(y, t) + (x - y) \cdot \nabla \mathbf{v}(y, t) + r(|x - y|), \quad (4.3.50) \quad \boxed{\text{tay}}$$

dove $\nabla := \nabla_x$ è il vettore (operatore lineare) che ha per componenti le derivate parziali rispetto a x_i , $i = 1, 2, 3$.

Studiamo ora l'atto di moto più generale.

Scriviamo la $(\overset{\text{tay}}{4.3.50})$ per le coppie di punti x, y ed z, y , $|x - y| \ll 1$, $|z - y| \ll 1$. Moltiplicando $(\overset{\text{tay}}{4.3.50})$ scritta per le coppie di punti x, y ed z, y , scalarmente per i vettori $z - y$ e $x - y$, rispettivamente e sommando le due relazioni, si ottiene a meno di infinitesimi dell'ordine $\mathbf{r}(z_j - y_j)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[(x - y) \cdot (z - y)] &= \\ &= (\mathbf{v}(x, t) - \mathbf{v}(y, t)) \cdot (z - y) + (x - y) \cdot (\mathbf{v}(z, t) - \mathbf{v}(y, t)) = \\ &= [(x - y) \cdot \nabla \mathbf{v}(y, t)] \cdot (z - y)^T + [(z - y) \cdot \nabla \mathbf{v}(y, t)] \cdot (x - y)^T \\ &= (x - y)(\nabla \mathbf{v})^T(y, t) \cdot (z - y)^T + (z - y) \cdot \nabla \mathbf{v}(y, t) \cdot (x - y)^T. \end{aligned}$$

Sfruttando la linearità del prodotto scalare, troviamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[(x-y) \cdot (z-y)] &= (x-y)[(\nabla \mathbf{v})^T(y,t) + \nabla \mathbf{v}(y,t)] \cdot (z-y) \\ &= 2(x-y)\mathbf{D}(y,t)(z-y). \end{aligned} \quad (4.3.51) \quad \boxed{\text{tay1}}$$

Da $\boxed{\text{tay1}}$ discende che la parte simmetrica del tensore gradiente di velocità è responsabile della variazione temporale di $(x-y) \cdot (z-y)$, cioè

- (1) per $z = x$ \mathbf{D} fornisce la variazione nel tempo della lunghezza $|x-y|$ del vettore $x-y$;
- (2) per $z \neq x$ \mathbf{D} fornisce la variazione nel tempo del prodotto scalare $(z-y) \cdot (x-y) = 0$ e quindi, in particolare, dell'angolo tra i due vettori.

Per tale motivo si introduce la seguente definizione.

4.3.2 **Definizione 4.3.17** Si chiama **tensore gradiente velocità di deformazione** in (y,t) la parte simmetrica del gradiente di velocità

$$\mathbf{D}(y,t) := \frac{(\nabla \mathbf{v}(y,t) + \nabla \mathbf{v}^T(y,t))}{2}, \quad D_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

4.3.3 **Definizione 4.3.18** Si chiama **tensore gradiente velocità di rotazione** in (y,t) la parte emisimmetrica del gradiente di velocità

$$\boldsymbol{\Omega}(y,t) = \frac{\nabla \mathbf{v}(y,t) - (\nabla \mathbf{v})^T(y,t)}{2}, \quad \Omega_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Ancora, da $\boxed{\text{tay}}$ con r uguale a zero, ricordando che

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T}{2} + \frac{\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T}{2}$$

deduciamo

$$\mathbf{v}(x,t) = \mathbf{v}(y,t) + \boldsymbol{\omega}(y,t) \times (x-y) + \mathbf{D}(y,t) \cdot (x-y),$$

Quest'ultima relazione afferma che il più generico atto di moto locale, nelle vicinanze di y , è espresso da un moto rigido di rotazione $\boldsymbol{\omega}(y,t)$, e da una deformazione di entità $\mathbf{D}(y,t)$ variabile con y .

4.3.7 Cinematica relativa

Riportiamo qui alcuni elementi di cinematica relativa con un simbolismo un po' diverso.

Siano \mathcal{R} e \mathcal{R}' due riferimenti in moto relativo e sia \mathcal{B} un corpo in moto in entrambi i riferimenti. Diciamo *assoluto* il moto di \mathcal{B} in \mathcal{R} , *relativo* il moto di \mathcal{B}

in \mathcal{R}' e di trascinamento il moto di \mathcal{R}' in \mathcal{R} . Da note formule della geometria ricaviamo per la generica particelle materiale \mathbf{X}

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}_{O'}(t) + \mathbf{Q}(t)[\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}_{O'}(t)] = \mathbf{x}_{O'}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}'(\mathbf{X}, t), \quad (4.3.52) \quad \boxed{\text{coord}}$$

dove $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{O'}$ ed O' e' un punto del riferimento \mathcal{R}' (ad esempio l'origine di \mathcal{R}'), e \mathbf{Q} e' una matrice ortogonale a determinante unitario e rappresenta una rotazione di \mathcal{R}' in \mathcal{R} . Ricordiamo che si ha $\mathbf{u} = \mathbf{Q}\mathbf{u}'$ ed in particolare

$$\mathbf{e}_i = Q_{ij}\mathbf{e}'_j.$$

Derivando i-ma coordinata di $\left(\frac{\text{coord}}{4.3.52}\right)$ rispetto ad x'_k si ha

$$\left[\frac{\partial x_i}{\partial x'_k}\right] = Q_{il}(t) \left[\frac{\partial x'_l}{\partial x'_k}\right] = Q_{il}(t)\delta_{lk} = Q_{ik}(t). \quad (4.3.53) \quad \boxed{\text{coord0}}$$

Per un corpo continuo \mathcal{B} avvengono i seguenti due moti

$$\chi : \mathbf{X}, t \in C_* \times (0, T) \rightarrow \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \in E_3,$$

$$\chi' : \mathbf{X}, t \in C_* \times (0, T) \rightarrow \mathbf{x}' = \chi'(\mathbf{X}, t) \in E_3.$$

Per ciascun moto si calcola il gradiente di deformazione

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \text{Grad}\mathbf{x} \equiv \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right], \quad \mathbf{F}'(\mathbf{X}, t) = \text{Grad}\mathbf{x}' \equiv \left[\frac{\partial x'_i}{\partial X_j}\right].$$

Sviluppando le derivazioni si trova

$$F_{ij} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right] = \left[\frac{\partial x_i}{\partial x'_k}\right] \left[\frac{\partial x'_k}{\partial X_j}\right].$$

Pertanto ricaviamo

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{F}'(\mathbf{X}, t). \quad (4.3.54) \quad \boxed{\text{coord1}}$$

Inoltre, poiche' $\det \mathbf{Q} = 1$ si trova

$$\det \mathbf{F} = \det \mathbf{F}'.$$

Dal teorema di decomposizione polare sappiamo che

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{V} = \mathbf{U}\mathbf{R}, \quad \mathbf{F}' = \mathbf{R}'\mathbf{V}' = \mathbf{U}'\mathbf{R}', \quad (4.3.55) \quad \boxed{\text{dec}}$$

che sostituite in $\left(\frac{\text{coord1}}{4.3.54}\right)$ forniscono

$$\mathbf{R}\mathbf{V} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}'\mathbf{V}'. \quad (4.3.56) \quad \boxed{\text{coord2}}$$

Per l'unicita' della decomposizione deve risultare

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}', \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}'.$$

Da $\left(\frac{\text{dec}}{4.3.55}\right)$ si ha anche

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}\mathbf{V}\mathbf{R}^T = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}'\mathbf{V}' \cdot (\mathbf{R}')^T \cdot \mathbf{Q}^T,$$

e poiche' $\mathbf{R}'\mathbf{V}' \cdot (\mathbf{R}')^T = \mathbf{U}'$ si ottiene

$$\mathbf{U} = \mathbf{Q}\mathbf{U}'\mathbf{Q}^T.$$

Da queste relazioni si calcolano i tensori di Cauchy Green e di stiramento

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}, \quad \mathbf{C}' = \mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T.$$

Se si deriva ^(coord)(4.3.52) rispetto al tempo si ricava il principio dei moti relativi

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}'(\mathbf{x}'(\mathbf{X}, t), t) + \mathbf{v}_\tau(\mathbf{X}, t), \quad (4.3.57) \quad \boxed{\text{pmr}}$$

dove \mathbf{v}_τ e' la velocita' di trascinamento data da

$$\mathbf{v}_\tau = \dot{\mathbf{x}}_{O'} + \dot{\mathbf{Q}}(t) \cdot \mathbf{x}'(\mathbf{X}, t).$$

Ricordando che $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ si vede che

$$\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T = 0,$$

$$\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T = -\mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T = -(\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T)^T,$$

che dimostra la emisimmetria di $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$.

Per i gradienti di velocita' si ha

$$\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v}, \quad \mathbf{L}' = \text{grad}' \mathbf{v}'$$

e derivando la ^(pmr)(4.3.57) rispetto ad X_i , poiche' $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$ e' costante in \mathbf{X} , si trova

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial X_i} \mathbf{v}'(\mathbf{x}'(\mathbf{X}, t), t) + \frac{\partial}{\partial X_i} \mathbf{v}_\tau(\mathbf{X}, t), \quad (4.3.58) \quad \boxed{\text{pmr3}}$$

usando la regola di derivazione delle funzioni composte possiamo esprimere tutte le derivate rispetto ad X_i in termini di derivate rispetto ad x_j , trovando

$$\frac{\partial x_j}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = \mathbf{Q} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial X_i} \frac{\partial x'_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x'_k} \mathbf{v}'(\mathbf{x}'(\mathbf{X}, t), t) + \frac{\partial x_j}{\partial X_i} \frac{\partial x'_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x'_k} \mathbf{v}_\tau(\mathbf{X}, t) \quad (4.3.59) \quad \boxed{\text{pmr1}}$$

Ricordando la ^(coord)(4.3.54) e le definizioni di \mathbf{L} , \mathbf{L}' si ottiene

$$\mathbf{L}(x, t) \mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{L}'(\mathbf{x}', t) + \dot{\mathbf{Q}}(t), \quad (4.3.60) \quad \boxed{\text{pmr2}}$$

e risolvendo per \mathbf{L} si ha

$$\mathbf{L}(x, t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{L}'(\mathbf{x}', t) \mathbf{Q}^T(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t) \mathbf{Q}^T(t). \quad (4.3.61) \quad \boxed{\text{pmr3}}$$

Poiche' l'ultimo termine $\dot{\mathbf{Q}}(t) \mathbf{Q}^T(t)$ e' emisimmetrico, per le parti simmetriche \mathbf{D} , \mathbf{D}' dei gradienti di velocita' si ricava

$$\mathbf{D}(x, t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{D}'(\mathbf{x}', t) \mathbf{Q}^T(t). \quad (4.3.62) \quad \boxed{\text{pmr4}}$$

Leggi di variazione al variare del riferimento per tensori Mantenendo le nostre relazioni possiamo scrivere la matrice del cambiamento di base uguale a \mathbf{Q} . Da leggi dell'algebra tensoriale si sa che i vettori ed i tensori variano le loro componenti al variare della base, secondo la seguente legge

$$\mathbf{q}' = \mathbf{Q} \mathbf{q}, \quad \mathbf{T}' = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T. \quad (4.3.63) \quad \boxed{\text{ogg}}$$

Ora scriviamo queste leggi per il tensore degli sforzi, in questo caso il vettore \mathbf{a} e' la normale \mathbf{n} e lo sforzo \mathbf{t} .

$$\mathbf{n}' = \mathbf{Q} \mathbf{n}, \quad \mathbf{t}'(\mathbf{n}') = \mathbf{Q} \mathbf{t}(\mathbf{n}).$$

4.3.8 Esercizi

4.1.3 **Esercizio 4.3.1** *Si consideri il moto*

$$x_1 = X_1(1 + b^2 t^2), \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3, \quad t > 0,$$

dove $1/b$ e' un parametro positivo avente le dimensioni di un tempo.

Si chiede di calcolare la velocita' e l'accelerazione nei formalismi Lagrangiano ed Euleriano.

Risposta Le velocita' ed accelerazione Lagrangiane sono date da

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= 2b^2 X_1 t, & \tilde{v}_2 &= 0, & \tilde{v}_3 &= 0, \\ \tilde{a}_1 &= 2b^2 X_1, & \tilde{a}_2 &= 0, & \tilde{a}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Le velocita' ed accelerazione Euleriane sono date da

$$\begin{aligned} v_1 &= 2 \frac{b^2 x_1}{1 + b^2 t^2} t, & v_2 &= 0, & v_3 &= 0, \\ \tilde{a}_1 &= 2 \frac{b^2 x_1}{1 + b^2 t^2}, & \tilde{a}_2 &= 0, & \tilde{a}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Si osservi che

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \frac{2b^2 x_1}{1 + b^2 t^2} - \frac{4b^4 x_1 t^2}{(1 + b^2 t^2)^2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} &= \frac{2b^2 t}{1 + b^2 t^2} \\ v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} &= \frac{4b^4 x_1 t^2}{(1 + b^2 t^2)^2}, \end{aligned}$$

Pertanto

$$a_1 = v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial t} = 2 \frac{b^2 x_1}{1 + b^2 t^2}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0.$$

4.1.4 **Esercizio 4.3.2** *Si consideri il moto determinato dal campo Euleriano di velocità'*

$$\mathbf{v} = \omega \cos(\omega t)(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2), \quad t \geq 0,$$

dove $1/\omega$ e' un parametro positivo avente le dimensioni di un tempo.

Si chiede di determinare le traiettorie e le linee di flusso.

Risposta Per calcolare le traiettorie basta integrare le seguenti equazioni

$$\frac{dx_i}{dt} = \omega x_i \cos(\omega t), \quad i = 1, 2, \quad \frac{dx_3}{dt} = 0.$$

L'integrazione fornisce

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \equiv (X_1 \exp^{\sin(\omega t)}, X_2 \exp^{\sin(\omega t)}, X_3).$$

Scrivendo l'equazione della traiettoria in coordinate cartesiane otteniamo

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{X_1}{X_2} = \text{cost.}, \quad x_3 = X_3.$$

Quindi le traiettorie sono rette nel piano $x_3 = X_3$ passanti per l'asse x_3 , ed aventi coefficiente angolare funzione del punto \mathbf{X} .

Per calcolare le linee di flusso basta integrare le seguenti equazioni

$$\frac{dx_i}{ds} = \omega x_i \cos(\omega t), \quad i = 1, 2, \quad \frac{dx_3}{ds} = 0,$$

dove t e' fissato. L'integrazione nel parametro s fornisce

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, s) \equiv (X_1 \exp^{s\omega \cos(\omega t)}, X_2 \exp^{s\omega \cos(\omega t)}, X_3).$$

Scrivendo l'equazione delle linee di flusso in coordinate cartesiane otteniamo

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{X_1}{X_2} = \text{cost.}, \quad x_3 = X_3.$$

Quindi le linee di flusso sono rette nel piano $x_3 = X_3$ passanti per l'asse x_3 , ed aventi coefficiente angolare funzione del punto \mathbf{X} , e coincidono con le traiettorie.

4.1.5 **Esercizio 4.3.3** *Si consideri il moto determinato dal campo Euleriano di velocità'*

$$\mathbf{v} = \frac{x_1}{1+t} \mathbf{e}_1 + \frac{x_2}{2} \mathbf{e}_2, \quad t \geq 0.$$

Si chiede di determinare le traiettorie e le linee di flusso.

Risposta Per calcolare le traiettorie basta integrare le seguenti equazioni

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{1+t}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2}{2}, \quad \frac{dx_3}{dt} = 0.$$

L'integrazione fornisce

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \equiv (X_1(1+t), X_2 \exp^{t/2}, X_3).$$

Scrivendo l'equazione della traiettoria in coordinate cartesiane otteniamo

$$x_2 = X_2 \exp(x_1/X_1 - 1)/2 = \text{cost.}, \quad x_3 = X_3.$$

Quindi le traiettorie sono curve esponenziali nel piano $x_3 = X_3$.

Per calcolare le linee di flusso basta integrare le seguenti equazioni

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{x_1}{1+t}, \quad \frac{dx_2}{ds} = \frac{x_2}{2}, \quad \frac{dx_3}{dt} = 0,$$

dove t e' fissato. L'integrazione nel parametro s fornisce

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, s) \equiv (X_1 \exp^{s/(1+t)}, X_2 \exp^{s/2}, X_3).$$

Scrivendo l'equazione delle linee di flusso in coordinate cartesiane otteniamo

$$\frac{x_2}{X_2} = \left(\frac{x_1}{X_1}\right)^{(1+t)/2}, \quad x_3 = X_3.$$

Quindi le linee di flusso sono ancora nel piano $x_3 = X_3$ ma non coincidono con le traiettorie. Ad esempio, in $t = 0$ le linee di flusso sono grafici della funzione radice quadrata, in $t = 0$ queste diventano rette.

4.1.6 **Esercizio 4.3.4** *Si consideri il moto determinato dal campo Euleriano di velocita'*

$$\mathbf{v} = \frac{kx_2}{x_1^2 + x_2^2} \mathbf{e}_1 - \frac{kx_1}{x_1^2 + x_2^2} \mathbf{e}_2, \quad t \geq 0.$$

Si chiede di verificare che le traiettorie coincidono con le linee di flusso e sono circonferenze centrate nell'origine.

Risposta La coincidenza tra linee di flusso e traiettorie segue dal fatto che i secondi membri non dipendono da t .

Si scriva il sistema

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{kx_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{dx_2}{ds} = -\frac{kx_1}{x_1^2 + x_2^2}. \quad (4.3.64) \quad \text{exr}$$

Moltiplichiamo $(\text{exr } 4.3.64)_1$ per x_1 , $(\text{exr } 4.3.64)_2$ per x_2 e sommiamo le risultanti equazioni, otteniamo

$$\frac{d}{ds} \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = 0.$$

Questa equazione comporta $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \text{cost}$ come volevasi.

4.1.7 **Esercizio 4.3.5** *Si consideri il moto determinato dal campo Euleriano di velocita'*

$$\mathbf{v} = \frac{1}{1+t} (x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3), \quad t \geq 0.$$

Si chiede di verificare che le traiettorie coincidono con le linee di flusso anche se il moto non e' stazionario.

Risposta Per le linee di flusso risolviamo il sistema

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{x_1}{1+t}, \quad \frac{dx_2}{ds} = \frac{x_2}{1+t}, \quad \frac{dx_3}{ds} = \frac{x_3}{1+t}.$$

Le linee di flusso sono date da

$$\frac{x_1(s)}{x_1(0)} = \frac{x_2(s)}{x_2(0)} = \frac{x_3(s)}{x_3(0)} \left(= e^{s/(1+t)} \right).$$

Per le linee di flusso risolviamo il sistema

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{1+t}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2}{1+t}, \quad \frac{dx_3}{dt} = \frac{x_1}{1+t}.$$

Le traiettorie sono date da

$$\frac{x_1(s)}{x_1(0)} = \frac{x_2(s)}{x_2(0)} = \frac{x_3(s)}{x_3(0)} (= 1+t).$$

Diciamo che la risposta è **indipendente dall'osservatore** se la funzione di risposta non dipende dal riferimento.

4.3.1 **Esercizio 4.3.6** Determinare la forma più generale del campo delle velocità di moto fluido stazionario avente il seguente tensore velocità di deformazione:

$$D_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad D_{12} = 0, \quad D_{13} = D_{13}(x_1, x_2), \quad D_{23} = D_{23}(x_1, x_2).$$

Risposta Dalle condizioni $D_{ii} = 0$ segue

$$v_1 = v_1(x_2, x_3), \quad v_2 = v_2(x_1, x_3), \quad v_3 = v_3(x_1, x_2), \quad (4.3.65) \quad \boxed{4.2}$$

Inoltre, si ha

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = 2f(x_1, x_2), \quad \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 2g(x_1, x_2). \quad (4.3.66) \quad \boxed{4.3}$$

Da $\frac{4.3}{(4.3.66)}$ deduciamo

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = h(x_3), \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = n(x_1, x_2), \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = m(x_1, x_2), \quad (4.3.67) \quad \boxed{4.4}$$

che comporta $v_1 = mx_3x_2 + c_1$, $v_2 = nx_3x_1 + c_2$.

4.3.2 **Esercizio 4.3.7** Sia \mathcal{B} un corpo continuo in moto nel riferimento \mathcal{R} . Per i seguenti atti di moto,

$$v_1(x, t) = x_2^2 + t, \quad v_2(x, t) = 3x_3 + 9, \quad v_3(x, t) = 2, \quad (4.3.68) \quad \boxed{4.3.1}$$

$$v_1(x, t) = 3t, \quad v_2(x, t) = x_1x_3, \quad v_3(x, t) = 0, \quad (4.3.69) \quad \boxed{4.3.2}$$

$$v_1(x, t) = 6x_1, \quad v_2(x, t) = 2x_2 + 10, \quad v_3(x, t) = 21t^2, \quad (4.3.70) \quad \boxed{4.3.3}$$

$$v_1(x, t) = 3tx_1, \quad v_2(x, t) = -t^2x_2, \quad v_3(x, t) = 2x_1t. \quad (4.3.71) \quad \boxed{4.3.4}$$

Si chiede di:

(i) determinare la linea di flusso e la traiettoria passante per $(0,0,0)$ per (i);
determinare le linee di flusso e le traiettorie per (ii);

(ii) calcolare il campo spaziale delle accelerazioni;

(iii) descrivere l'atto di moto locale.

Risposta (4.3.1/4.3.68)(i) Le linee di flusso sono date da

$$x_1(s) = \frac{9}{5}s^5 + \frac{27}{2}s^4 + 27s^3 + ts, \quad x_2(s) = 3s(s+3), \quad x_3(s) = 2s.$$

Le traiettorie sono date da

$$x_1(t) = \frac{9}{5}t^5 + \frac{27}{2}t^4 + 27t^3 + \frac{t^2}{2}, \quad x_2(t) = 3t(t+3), \quad x_3(t) = 2t.$$

(ii) Usando la formula $a_i = \partial_t v_i + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i$ si ricava

$$a_1 = 1 + 6x_2x_3 + 18x_2, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = 0.$$

(iii) Per il gradiente di velocità sono non nulle solo le componenti di indice 12 e 23. La parte simmetrica ed antisimmetrica risultano

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & 0 \\ x_2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & 0 \\ -x_2 & 0 & 3/2 \\ 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto il moto risulta la somma di una traslazione $\mathbf{v}_t \equiv (t, 9, 2)$; una deformazione omogenea avente componente non nulla nel tensore velocità di deformazione di posto 23 di intensità 3; una deformazione locale avente componente non nulla nel tensore velocità di deformazione di posto 12 di intensità $2x_2$. Il vettore vorticità dipende da x_2 ed è dato da $\boldsymbol{\omega} \equiv (3, 0, 2x_2)$.

(4.3.69)(i) Le linee di flusso sono date da

$$x_1(s) = x_1(0) + 3ts, \quad x_2(s) = x_2(0) + \frac{3}{2}tx_3(0)s^2 + x_1(0)x_3(0)s, \quad x_3(s) = x_3(0).$$

Le traiettorie sono date da

$$x_1(t) = x_1(0) + \frac{3}{2}t^2, \quad x_2(t) = x_2(0) + \frac{x_3(0)}{2}t^3 + x_1(0)x_3(0)t, \quad x_3(t) = x_3(0).$$

(ii) Usando la formula $a_i = \partial_t v_i + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i$ si ricava

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 3tx_3(0), \quad a_3 = 0.$$

(iii) Per il gradiente di velocità sono non nulle solo le componenti di indice 12 e 23. La parte simmetrica ed antisimmetrica risultano

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{x_3}{2} & 0 \\ \frac{x_3}{2} & 0 & \frac{x_1}{2} \\ 0 & \frac{x_3}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{x_3}{2} & 0 \\ \frac{x_3}{2} & 0 & \frac{x_1}{2} \\ 0 & -\frac{x_1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto il moto risulta la somma di una deformazione locale avente componenti non nulle nel tensore velocità di deformazione di posto 12, 23, e di una rotazione locale $\omega \equiv (\mathbf{x}_1, \mathbf{0}, -\mathbf{x}_3)$.

(4.3.8)(i) Le linee di flusso sono date da

$$x_1(s) = x_1(0)e^{6s}, \quad x_2(s) = -5 + (x_2(0) + 5)e^{2s} \quad x_3(s) = x_3(0) + 21t^2s.$$

Le traiettorie sono date da

$$x_1(t) = x_1(0)e^{6t}, \quad x_2(t) = -5 + (x_2(0) + 5)e^{2t} \quad x_3(t) = x_3(0) + 7t^3.$$

(ii) Usando la formula $a_i = \partial_t v_i + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i$ si ricava

$$a_1 = 36x_1, \quad a_2 = 4x_2 + 20, \quad a_3 = 42t.$$

(iii) Per il gradiente di velocità sono non nulle solo le componenti di indice 11 e 22. La parte antisimmetrica risulta nulla e si ha

$$\mathbf{D} = \nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

La deformazione è omogenea, una pura trazione.

(4.3.9)(i) Le linee di flusso sono date da

$$x_1(s) = x_1(0)e^{3ts}, \quad x_2(s) = x_2(0)e^{-t^2s} \quad x_3(s) = x_3(0) \exp\left(\frac{2x_1(0)}{3t}e^{3ts}\right).$$

Le traiettorie sono date da

$$x_1(t) = x_1(0)e^{3t^2/2}, \quad x_2(t) = x_2(0)e^{-t^3/3}, \quad x_3(t) = x_3(0) \exp\left(\frac{2}{3}e^{3t^2/2}\right).$$

(ii) Usando la formula $a_i = \partial_t v_i + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i$ si ricava

$$a_1 = 36x_1, \quad a_2 = 4x_2 + 20, \quad a_3 = 42t.$$

(iii) Per il gradiente di velocità sono non nulle solo le componenti di indice 11 e 22. La parte antisimmetrica risulta nulla e si ha

$$\mathbf{D} = \nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

La deformazione è omogenea, una pura trazione.

4.3.3 **Esercizio 4.3.8** Sia \mathcal{B} un corpo continuo in moto piano nel riferimento \mathcal{R} . Per i seguenti atti di moto,

- (a) $v_1(x, t) = x_1, \quad v_2(x, t) = x_2,$
- (b) $v_1(x, t) = -x_2, \quad v_2(x, t) = x_1,$
- (c) $v_1(x, t) = 2x_1, \quad v_2(x, t) = -2x_2,$
- (d) $v_1(x, t) = 3x_1t, \quad v_2(x, t) = -3x_2t,$
- (e) $v_1(x, t) = x_1x_2 + x_2^2t, \quad v_2(x, t) = -x_1x_2 + x_1^2t,$
- (f) $v_1(x, t) = 3x_1x_2^2, \quad v_2(x, t) = -x_1x_2^3.$

Si chiede di individuare quali di questi descrivono moti rigidi; quali moti isocori; quali moti irrotazionali; quali moti stazionari.

Risposta

Moti rigidi: (b).

Moti irrotazionali (a), (c), (d).

Moti isocori: (b), (c), (d), (f).

Moti stazionari: tutti eccetto (d), (e)

4.3.4 **Esercizio 4.3.9** *Quale e' la forma piu' generale per v_2 affinche' l'atto di moto*

$$v_1 = a(x_1^2 - x_2^2), \quad v_3 = b,$$

risulti isocoro ed irrotazionale?

Risposta $v_2 = -2ax_1x_2$.

4.3.5 **Esercizio 4.3.10** *Quale e' la forma piu' generale per v_2 affinche' l'atto di moto*

$$v_1 = kx_1x_3^2, \quad v_3 = cx_2,$$

risulti:

(1) *isocoro nel punto $(1, 0 - 1)$;*

(2) *irrotazionale in tutto lo spazio.*

Risposta $v_2 = -kx_2 + cx_3$.

4.3.6 **Esercizio 4.3.11** *Quale e' la forma piu' generale per v_2 affinche' l'atto di moto nel semipiano $x_2 > 0$ con*

$$v_1 = U \left(\frac{2x_2}{ax_1} - \frac{x_2^2}{ax_1^2} \right)$$

risulti isocoro, con v_2 identicamente nulla sulla frontiera $x_2 = 0$.

Risposta *Basta integrare rispetto ad x_2 la quantita' $\frac{\partial v_1}{\partial x_1}$ e scegliere opportunamente la costante d'integrazione. Si trova*

$$v_2 = \frac{x_2^2}{3ax_1^3}(2x_2 - 3x_1) + U.$$

Capitolo 5

Equazioni della Meccanica

La meccanica di un corpo continuo collega il moto del corpo alle cause che lo determinano. Le cause atte a modificare il moto di un corpo continuo sono di natura diversa: i) forze esterne di volume (forza peso, etc.) o di superficie (trazione, etc.); ii) condizioni al contorno del dominio in cui avviene il moto (il bordo e' impermeabile, etc.); costituzione fisica del corpo (corpo elastico, fluido, etc.). Se il moto e' non stazionario bisogna anche assegnare delle condizioni iniziali.

In questo capitolo si costruisce il modello matematico atto a risolvere il problema del moto di un sistema continuo. Detto modello e' costituito da equazioni alle derivate parziali in grado di collegare il moto alle forze esterne di volume e di superficie. Precisamente le soluzioni di questo sistema rappresentano i moti di un sistema continuo. Il carattere di tali equazioni differenziali dipende dalla costituzione fisica del materiale. Una volta specificato il tipo di materiale fissando le **equazioni costitutive**, queste equazioni sono dette **equazioni indefinite del moto**. Esse risultano sufficienti a determinare univocamente il moto del sistema continuo una volta che si fissino le forze esterne, le **condizioni iniziali** ed i **dati al contorno**.

In questo capitolo si forniscono solo le equazioni del moto di un sistema continuo. Il problema sara' completato nei prossimi due capitoli.

5.1 Densita' materiale

Da ora in poi si identifica il continuo in esame \mathcal{B} (body) con la configurazione Ω da esso occupata. Indichiamo con Ω la configurazione occupata dal continuo all'istante t , di frontiera $\partial\Omega$ regolare¹.

Definiamo Regione materiale o Dominio materiale una regione costituita sempre dagli stessi punti al variare del tempo.

In questo numero introduciamo i concetti di massa, quantita' di moto e di momento di quantita' di moto per un generico dominio materiale $C_t \subseteq \Omega$. Tutte le quantita' che verranno definite per un sistema continuo sono quantita' macroscopiche, misurabili, per ciascuna grandezza fisica si assume valida la proprieta' di

¹**Frontiera regolare** si intende una frontiera dotata quasi ovunque di piano tangente e quindi di normale.

assoluta continuita' di volume, di superficie o di linea. Appunto tale proprieta' ci consentira' di fornire definizioni locali ed istantanee delle stesse quantita' fisiche.

Per lo studio *puramente meccanico*, si semplifica ulteriormente il modello considerando in ogni punto \mathbf{x} un volumetto materiale dC , centrato in \mathbf{x} in moto rigido, trascurando variazioni di dimensione e forze interne ad esso. Ancora, si trascura l'effetto della rotazione del volumetto, ritenendo apprezzabile ai fini del moto il moto del solo baricentro. Quest'ultima ipotesi si giustifica supponendo che i campi di forze esterne siano praticamente costanti, sia in direzione che in intensita', all'interno del piccolo volume in questione. Tale approssimazione fornisce risultati in accordo con i dati sperimentali per un certo insieme di continui, ad esempio, sono esclusi materiali elettromagnetici in presenza di *spin*.

5.1.1 Massa, momento statico e momento d'inerzia.

In questo numero definiamo la densita' di massa di un elemento continuo in *dominio*, aperto connesso dello spazio fisico, ed introduciamo l'assioma di conservazione della massa.

Sia \mathcal{R} un fissato un riferimento spazio tempo, e $\mathcal{P}(\Omega)$ sia l'insieme delle parti di Ω . Ricordiamo che con la dicitura dominio materiale intendiamo un dominio di \mathcal{E}_3 , $C = \chi(C_*, t)$, costituito sempre dalle stesse particelle materiali.

d1.1 **Definizione 5.1.1** Si chiama *massa del corpo continuo* in Ω nell'intervallo $t \in \mathcal{I}$ M la funzione

$$M : \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{I} \rightarrow R_+$$

che gode delle seguenti proprieta' dette **proprieta' di misura**:

(B₁) M e' additiva, vale a dire, $\forall t \in R$, per ogni coppia di parti π_1, π_2 disgiunte in \mathcal{P} , $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, si ha

$$M(\pi_1, t) + M(\pi_2, t) = M(\pi_1 \cup \pi_2, t), \quad t \in \mathcal{I}.$$

(B₂) M e' una funzione assolutamente continua o (i) di volume C ; (ii) di superficie S_t ; (iii) di linea ℓ_t . Vale a dire, esiste una funzione positiva $\rho(\mathbf{x}, t)$ tale che

$$(i) \quad \lim_{C \rightarrow \mathbf{x}} \frac{M(C, t)}{|C|} = \rho(\mathbf{x}, t) (< \infty), \quad \forall \mathbf{x}, t \in \Omega \times \mathcal{I},$$

$$(ii) \quad \lim_{S_t \rightarrow \mathbf{x}} \frac{M(S_t, t)}{|S_t|} = \rho(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x}, t \in \Omega \times \mathcal{I},$$

$$(iii) \quad \lim_{\ell_t \rightarrow \mathbf{x}} \frac{M(\ell_t, t)}{|\ell_t|} = \rho(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x}, t \in \Omega \times \mathcal{I}.$$

Queste relazioni rendono possibile le seguenti scritte

$$M(C, t) = \int_C \rho(\mathbf{x}, t) dC, \quad M(S_t, t) = \int_{S_t} \rho(\mathbf{x}, t) dS, \quad M(\ell_t, t) = \int_{\ell_t} \rho(\mathbf{x}, t) dl.$$

In effetti, per ottenere la massa dell'elemento dC , massa elementare, basta moltiplicare ρ per dC . La densita' e' un numero di dimensione grammi su lunghezza di esponente tre, due, uno, a seconda della dimensione del dominio Ω . In tal modo, per la massa totale abbiamo fornito una definizione precisa di misura, ed il valore locale di ρ e' stato dedotto per estrapolazione. Le funzioni densita' cosi' definite si diranno **densita' materiale di volume, di superficie e di linea**, rispettivamente.

La B_2 esclude singolarita'

1.2 **Definizione 5.1.2** La terna (Ω, R, M) dove Ω e' un dominio regolare di \mathcal{E}_3 , R l'insieme dei tempi, ed M una massa, si chiama **corpo continuo**.

bar **Definizione 5.1.3** Si definisce **momento statico** del continuo in C rispetto al piano π , la quantita'

$$I_s(C) := \int_C \rho(\mathbf{x}, t) d(\mathbf{x}, \pi) dC,$$

dove $d(\mathbf{x}, \pi)$ denota la distanza di \mathbf{x} dal piano π .

Il **baricentro** $G(C)$ del continuo nella regione C e' il vettore $\mathbf{x}_G = G - O$ dato da

$$\mathbf{x}_G := \frac{1}{M(C)} \int_C \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} dC. \quad (5.1.1) \quad \text{center}$$

Il rapporto tra i tre momenti statici I_1, I_2, I_3 rispetto ad i piani coordinati di normali rispettivamente $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, e la massa del continuo in C fornisce le tre coordinate del baricentro $G(C)$ del continuo nella regione C .

inet **Definizione 5.1.4** Si definisce **momento d'inerzia** del continuo in C rispetto alla retta r la quantita'

$$\int_C \rho(\mathbf{x}, t) d(\mathbf{x}, r)^2 dC,$$

dove $d(\mathbf{x}, r)$ denota la distanza di \mathbf{x} da r .

Il momento d'inerzia e' un numero positivo, funzione di C e di t .

inet **Definizione 5.1.5** Si definisce **tensori d'inerzia** del continuo in C rispetto al punto O la quantita'

$$\mathbf{I} := \begin{pmatrix} \int_C \rho (x_2^2 + x_3^2) dC & - \int_C \rho x_1 x_2 dC & - \int_C \rho x_1 x_3 dC \\ - \int_C \rho x_1 x_2 dC & \int_C \rho (x_1^2 + x_3^2) dC & - \int_C \rho x_2 x_3 dC \\ - \int_C \rho x_1 x_3 dC & - \int_C \rho x_2 x_3 dC & \int_C \rho (x_1^2 + x_2^2) dC \end{pmatrix}, \quad (5.1.2) \quad \text{inet}$$

dove (x_1, x_2, x_3) sono le componenti di \mathbf{x} in un generico riferimento ortonormale di origine O . In forma intrinseca si ha

$$I := \int_C \rho |\mathbf{x}|^2 dC \mathbf{I} - \int_C \rho \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} dC.$$

Le componenti di I ad indici diversi sono dette prodotti d'inerzia, quelle lungo la diagonale principale sono i momenti d'inerzia di C rispetto agli assi coordinati. Poiche' il tensore d'inerzia e' simmetrico, nella base degli autovettori si scrive in forma diagonale. Gli autovalori sono positivi e denotano i momenti d'inerzia di C rispetto agli assi principali.

Osservazione 5.1.1 *Sul bordo ∂C di una regione materiale C deve verificarsi l'identita'*

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n},$$

dove \mathbf{V} denota la velocita' delle particelle del contorno ∂C di C , mentre \mathbf{v} denota la velocita' delle particelle di C su ∂C . Questa relazione esprime la condizione che le particelle del continuo nella regione C non possono lasciare C .

5.1.2 Conservazione della massa

L'esperienza mostra che, per fenomeni di tipo puramente meccanico, la massa di una generica regione materiale C_* si conserva durante il moto. Tale osservazione giustifica il seguente assioma di continuita' della massa.

Definiamo Regione materiale una regione costituita sempre dagli stessi punti al variare del tempo.

Assioma di Continuita' o Conservazione della Massa *Durante il moto di un continuo in Ω la massa nella regione materiale C_t si conserva. In altri termini, per ogni t e' soddisfatta la seguente condizione*

$$\int_{C_t} \rho(\mathbf{x}, t) dC_t = \int_{C_*} \rho(\mathbf{X}, 0) dC_*, \quad (5.1.3)$$

dove \mathbf{X} e \mathbf{x} sono le coordinate della stessa particella materiale rispettivamente nella configurazione di riferimento $\mathbf{X} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, 0)$ e nella configurazione attuale $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$ al tempo t .

Stante la invertibilita' tra i due sistemi di coordinate, e ricordando che

$$dC_t = \tilde{J}(\mathbf{X}, t) dC_*, \quad \tilde{J}(\mathbf{X}, t) := \det \left\| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right\|, \quad (5.1.4)$$

sussiste la seguente identita'

$$\int_{C_*} \tilde{\rho}(\mathbf{X}, t) \tilde{J}(\mathbf{X}, t) dC_* = \int_{C_*} \tilde{\rho}(\mathbf{X}, 0) dC_*, \quad (5.1.5) \quad \boxed{\text{inte}}$$

dove $\tilde{\rho}(\mathbf{X}, t)$ ricorda che stiamo considerando la descrizione materiale. Tale identita' deve valere per ogni porzione C_* . Per il teorema fondamentale del calcolo integrale la (5.1.5) comporta la relazione puntuale

$$\tilde{\rho}(\mathbf{X}, t) \tilde{J}(\mathbf{X}, t) = \tilde{\rho}(\mathbf{X}, 0). \quad (5.1.6) \quad \boxed{\text{lagr}}$$

La (5.1.6) rappresenta la **formulazione Lagrangiana della conservazione della massa**.

Un modo equivalente di esprimere l'assioma precedente e' fornito dalla ovvia relazione

$$\frac{d}{dt} \int_{C_t} \rho(\mathbf{x}, t) dC_t = 0. \quad (5.1.7) \quad \boxed{\text{sei}}$$

Diamo la definizione di Flusso di densita'

Definizione 5.1.6 Chiamiamo **flusso di densita'** la quantita'

$$-\int_{\partial C} \mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{v} d\sigma.$$

In particolare si ha

$$-\int_{\partial C} \mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{v} d\sigma = -\int_C \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dC = \int_C \frac{\partial \rho}{\partial t} dC.$$

Utilizzando il teorema del trasporto ^{trasp}5.1.14 in ^{sei}(5.1.7) si trova

$$\frac{d}{dt} \int_{C_t} \rho(\mathbf{x}, t) dC_t = \int_{C_t} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dC_t + \int_{\partial C_t} (\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}, t) d\sigma = 0,$$

dove \mathbf{V} e' la velocita' dei punti di ∂C_t . Poiche' il dominio e' materiale si ha $\mathbf{V} = \mathbf{v}$. Dal teorema di Gauss segue, quindi, la seguente identita'

$$\int_{C_t} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})(\mathbf{x}, t) \right\} dC_t = 0,$$

che, sfruttando l'arbitrarieta' di C_t , per il teorema fondamentale del calcolo integrale, in termini locali comporta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T). \quad (5.1.8) \quad \boxed{\text{cont}}$$

Questa relazione, nota come **equazione di continuita'** e' verificata in ogni punto \mathbf{x} dello spazio fisico ed esprime l'assioma di **conservazione della massa nel formalismo Euleriano**.

5.1.3 Teorema del trasporto materiale

Una conseguenza dell'equazione di continuita' e' il seguente **teorema del trasporto materiale**. Prima di enunciare il teorema ricordiamo che nel Capitolo II nella sottosezione 1.1, si e' ricavata la seguente formula per la derivata materiale di una funzione f :

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla f(\mathbf{x}, t). \quad (5.1.9) \quad \boxed{\text{deriv}}$$

Dim. - Di nuovo applicando i teoremi del trasporto ^{trasp}5.1.14 e di Gauss si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{C_t} (\rho f)(\mathbf{x}, t) dC_t = \int_{C_t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\rho f + \nabla \cdot (\rho f \mathbf{v})] \right\}(\mathbf{x}, t) dC_t \quad (5.1.10)$$

Effettuando le derivate all'interno dell'integrale si trova

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{C_t} (\rho f)(\mathbf{x}, t) dC_t &= \int_{C_t} \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} f + \frac{\partial f}{\partial t} \rho \right) + ((\rho \mathbf{v}) \cdot \nabla f + f \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})) \right\}(\mathbf{x}, t) dC_t \\ &= \int_{C_t} \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) f + \rho \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f \right) \right\}(\mathbf{x}, t) dC_t \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

sfruttando l'equazione di continuita' ^{cont}(5.1.8), e ricordando l'espressione della derivata materiale ^{deriv}(5.1.9), si prova il teorema.

1.2 **Teorema 5.1.1 Teorema del trasporto per una regione geometrica** Sia $f(\mathbf{x}, t)$ una funzione di classe $C^1(C_t \times \mathcal{I})$. In ogni regione geometrica V vale la seguente identita'

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_t} \left(\rho \frac{df}{dt} \right) (\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial V_t} (\rho f (\mathbf{V} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{x}, t) d\sigma, \quad (5.1.12)$$

dove \mathbf{V} e' la velocita' dei punti di ∂V_t . Se, inoltre, il dominio e' materiale \mathbf{V} ha componente normale uguale alla componente normale di \mathbf{v} sul bordo di V_t , allora si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_t} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}, t) dV.$$

Dim. - Portando la derivata temporale sotto il segno di integrale ed utilizzando l'equazione di continuita' della massa, si ricava

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) dV &= \int_{V_t} \frac{\partial(\rho f)(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \int_{\partial V_t} (\rho f \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{x}, t) d\sigma \\ &= \int_{V_t} \left\{ \rho \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} f \right\} (\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial V_t} (\rho f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{x}, t) d\sigma + \int_{\partial V_t} [\rho f (\mathbf{V} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] (\mathbf{x}, t) d\sigma \\ &= \int_{V_t} \left[\rho \frac{\partial f}{\partial t} - f \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] (\mathbf{x}, t) dV + \int_{V_t} \operatorname{div}(\rho f \mathbf{v}) (\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial V_t} [\rho f (\mathbf{V} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] (\mathbf{x}, t) d\sigma \\ &= \int_{V_t} \rho \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f \right] (\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial V_t} [\rho f (\mathbf{V} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] (\mathbf{x}, t) d\sigma \\ &= \int_{V_t} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial V_t} [\rho f (\mathbf{V} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] (\mathbf{x}, t) d\sigma. \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

Osservando che $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, dove \mathbf{V} e' la velocita' dei punti del contorno dal Teorema 5.1.1 discende il seguente Corollario

1.1 **Corollario 5.1.2 Teorema del trasporto materiale** Sia $f(\mathbf{x}, t)$ una funzione di classe $C^1(C_t \times \mathcal{I})$. In ogni regione materiale C_t vale la seguente identita'

$$\frac{d}{dt} \int_{C_t} (\rho f)(\mathbf{x}, t) dC_t = \int_{C_t} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}, t) dC_t. \quad (5.1.14) \quad \boxed{\text{trasp}}$$

Riportiamo per comodita' del lettore la dimostrazione anche per C_t materiale.

Dim. - Di nuovo applicando i teoremi del trasporto ^{trasp}5.1.14 e di Gauss si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{C_t} (\rho f)(\mathbf{x}, t) dC_t = \int_{C_t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\rho f + \nabla \cdot (\rho f \mathbf{v})] \right\} (\mathbf{x}, t) dC_t \quad (5.1.15)$$

Effettuando le derivate all'interno dell'integrale si trova

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{C_t} (\rho f)(\mathbf{x}, t) dC_t &= \int_{C_t} \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} f + \frac{\partial f}{\partial t} \rho \right) + ((\rho \mathbf{v}) \cdot \nabla f + f \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})) \right\} (\mathbf{x}, t) dC_t \\ &= \int_{C_t} \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) f + \rho \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f \right) \right\} (\mathbf{x}, t) dC_t \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

sfruttando l'equazione di continuita' ^{cont}(5.1.8), e ricordando l'espressione della derivata materiale ^{deriv}(5.1.9), si prova il teorema.

5.2 Grandezze cinematiche

Da ora in poi ci limitiamo a considerare solo continui tridimensionali, analoghe definizioni si possono dare per un continuo bidimensionale o lineare.

Inoltre indichiamo con C il generico dominio C_t .

5.2.1 Quantita' e momento della quantita' di moto.

1 **Definizione 5.2.1** Per ogni porzione C_* di Ω e per ogni istante t in R resta associata la quantita' vettoriale $\mathbf{Q}(C, t)$, $C = \chi(C_*, t)$, soddisfacente le **proprietà di misura** (B_1) , (B_2) introdotte nella Definizione 6.1.1, detta **quantita' di moto** di C_* , all'istante t , tramite la seguente legge

$$\mathbf{Q} : (C, t) \in \mathcal{P}(\Omega) \times R \rightarrow \mathbf{Q}(C, t) \in E_3.$$

Si puo' provare che esiste un campo vettoriale \mathbf{m} su $\Omega \times R$ tale che, $\forall C \subseteq \Omega$,

$$\mathbf{Q}(C, t) = \int_C \mathbf{m}(\mathbf{x}, t) dC, \quad (5.2.1)$$

dove $C = \chi(C_*, 0)$. $\mathbf{m}(\mathbf{x}, t)$ rappresenta la **densità di quantità di moto locale** o **momento lineare**, per unita' di volume, in \mathbf{x} ed all'istante t .

La grandezza $\mathbf{Q}(C, t)$ per un continuo fluido è anche detta **Portata volumetrica**. Possiamo ora, in analogia con la terminologia usata per il punto materiale, definire la velocità locale ed istantanea di dC in \mathcal{R} , mediante la formula

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) =: \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t).$$

Anche in questo caso, la densità di quantità di moto locale ed istantanea è definita come processo di limite.

Dal teorema del trasporto e dalla continuita' della massa, deduciamo il seguente Lemma.

bar **Lemma 5.2.1** La velocità del baricentro $G(C)$ di un corpo continuo che occupa la regione C e' il vettore $\mathbf{v}_G(C)$ dato da

$$\mathbf{v}_G := \frac{1}{M(C)} \int_C (\rho\mathbf{v})(\mathbf{x}, t) dC. \quad (5.2.2) \quad \text{center}$$

Infine, in maniera analoga, in \mathcal{R} si puo' definire un momento risultante della quantità di moto $\mathbf{K}_O(t)$ rispetto al polo O .

2.2 **Definizione 5.2.2** Per ogni porzione C_* di Ω e per ogni istante t in \mathcal{R} e per O fissato, resta associata la quantita' vettoriale $\mathbf{K}_O(t)$, soddisfacente le **proprietà di misura** (B_1) , (B_2) , detta **momento quantita' di moto** o **momento angolare** di C_* all'istante t , tale che

$$\mathbf{K}_O(C, t) := \int_C \mathbf{k}_O(\mathbf{x}, t) dC \quad (5.2.3)$$

dove $\mathbf{k}_O(\mathbf{x}, t)$ rappresenta la **densità di momento di quantità di moto locale** o **densità di momento angolare** in \mathbf{x} ed all'istante t .

Per uniformarsi alla trattazione della meccanica di un punto, possiamo porre

$$\mathbf{k}_O(\mathbf{x}, t) := \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (5.2.4) \quad \boxed{\text{k-o}}$$

Tenendo presente, per un momento, il punto di vista della teoria cinetica, immaginiamo nel volumetto dC un numero finito di molecole (punti materiali X_i , $i = 1, \dots, N$). Si può facilmente verificare che la posizione (5.2.4) suppone che l'elemento di volume dC sia in moto traslatorio ed esclude una larga classe di continui ad esempio i continui con rotazione interna². Precisamente, l'assunzione (5.2.4) considera il sistema dei vettori applicati $(P_i, \rho(P_i, t)\mathbf{v}(P_i, t))$, $P_i \in dC$, $i = 1, \dots, N$, come un sistema di vettori paralleli e concordi equivalente al proprio risultante applicato nel baricentro x_G di C , $(\mathbf{x}_G, \rho(\mathbf{x}_G, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}_G, t))$ dove G è il baricentro di dC , nel seguito si porrà $G \approx \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \Omega$. In tal modo, per le porzioni di continuo (trattate come infinitesime), avrà senso studiare gli effetti sul moto di $\mathbf{x} \in \Omega$ dell'interazione delle forze agenti su P_i , applicando un risultante nel baricentro \mathbf{x} di dC e trascurando completamente il momento risultante, con gli annessi effetti di rotazione.

Osservazione 5.2.1 *Si noti che la meccanica del punto non è deducibile da quella del continuo. In particolare, nella presente terminologia, un punto materiale è costituito da un volumetto abbastanza grande da contenere un numero elevato di molecole (10^{23} numero di Avogadro), in modo da poter trascurare le fluttuazioni statistiche delle grandezze microscopiche rispetto ai valori medi. Questo consente, in accordo con la teoria cinetica, di attribuire un valore anche alle grandezze termodinamiche nel punto in questione. Precisamente, nella pratica è richiesto un esame più dettagliato, che fornisca informazioni sull'evoluzione di porzioni minute del corpo continuo. In questo caso, si ricorre ad estrapolazioni, cioè si introducono dei Valori Virtuali per le varie grandezze nella posizione \mathbf{x} all'istante t . Esempi sono dati da ρ , \mathbf{m} , \mathbf{k}_O che forniscono le densità di massa, di quantità di moto e di momento della quantità di moto per unità di volume, rispettivamente.*

5.2.2 Energia cinetica

Si definisce **Energia cinetica** del continuo in C la quantità

$$E(C, t) := \frac{1}{2} \int_C \rho \mathbf{v}^2 dC.$$

L'energia cinetica dipende dal riferimento nel quale viene calcolata. In particolare, nel riferimento con origine nel baricentro in moto traslatorio con velocità $\mathbf{v}_G(t)$ si trova

$$E'(C, t) := \frac{1}{2} \int_C \rho (\mathbf{v}')^2 dC.$$

Le due energie sono collegate dalla formula data da König

$$E(C, t) = E'(C, t) + \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2,$$

dove M è la massa del continuo in C .

²Continui nei quali sia rilevante nelle misure sperimentali la microrotazione sono detti **continui alla Cosserat** o **continui micropolari**

5.2.3 Identita' cinematiche

Una conseguenza importante del teorema del trasporto sono le seguenti identita'

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{Q}(C, t) &= \int_C \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)dC =: -\mathbf{R}^{(m)}(C) \\ \frac{d}{dt}\mathbf{K}_O(C, t) &= \int_C \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{x} \times \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)dC =: -\mathbf{M}_O^{(m)}(C) \\ \frac{d}{dt}E(C, t) &= \int_C \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dC =: \mathcal{P}^{(m)}(C),\end{aligned}\quad (5.2.5) \quad \boxed{\text{QK-0}}$$

dove $\mathbf{R}^{(m)}(C)$ e $\mathbf{M}_O^{(m)}(C)$ denotano il risultante, il momento e la potenza risultante delle forze d'inerzia $-\rho\mathbf{a}$ nel volume materiale C .

5.2.4 Esercizi di cinematica

Terminiamo la sezione con alcuni esercizi riassuntivi.

2.1 **Esercizio 5.2.1** *Siano assegnati i campi di velocita'*

$$\begin{aligned}(i) \quad & \mathbf{v} = 3t\mathbf{e}_1 + x_1x_3\mathbf{e}_2 + tx_2^2\mathbf{e}_3, \\ (ii) \quad & \mathbf{v} = 3x_1^2\mathbf{e}_1 - x_1x_2\mathbf{e}_2 - 3tx_1x_3\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Si chiede di

- (1) calcolare il flusso attraverso la superficie che delimita il parallelepipedo individuato dai vertici:
 $(A_1): (0, 1, 0), (0, 0, 2), (2, 0, 0);$
 $(A_2): (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1);$
- (2) determinare la velocita' media nel volume (A_1) .
- (3) calcolare la densita' per il moto di velocita' (ii) nel parallelepipedo di vertici $(1, 0, 2), (2, 0, 0), (1, 1, 0)$, sapendo che $\rho(\mathbf{X}, 0) = \rho_0(\mathbf{X}) = 3X_1^2$.
- (4) calcolare la quantita' di moto ed il baricentro in A_1 per il moto avente velocita' (i) e densita' $\rho(\mathbf{X}, 0) = X_2$ all'istante iniziale.

Risposta Per calcolare il flusso Φ attraverso la superficie A_1 , bisogna prima calcolare la normale ad A_i e poi moltiplicarla scalarmente per il campo di velocita'. Questa quantita' scalare va poi integrata su A_i . Si ricordi che la velocita' media si ottiene integrando la velocita' su V e dividendo tale vettore per il volume di V .

(1)

$(A_1), (A_2)$ - - (i) Il moto (i) ha divergenza nulla e quindi il suo flusso attraverso una qualsiasi superficie regolare chiusa e' zero.

(A_1) - - (ii)

$$\Phi(t) = 4(2 - 3t).$$

(A_2) - - (ii)

$$\Phi(t) = \frac{(5 - 3t)}{2}.$$

(2)

(i)

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = 3t\mathbf{e}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{e}_2 + \frac{t}{3}\mathbf{e}_3.$$

(ii)

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = 4\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 - 3t\mathbf{e}_3.$$

(3)

Prima bisogna calcolare le traiettorie, si ha

$$x_1 = \frac{X_1}{1 - 3X_1 t}; \quad x_2 = X_2 \sqrt{1 - 3_1 t}; \quad x_3 = X_3 e^t (1 - 3X_1 t)^{1/3X_1}.$$

Notiamo che il moto avviene per gli istanti $0 < t < 1/6$.

Ora calcoliamo il gradiente di deformazione \mathbf{F} risulta

$$\begin{pmatrix} F_{11} & 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ F_{31} & 0 & F_{33} \end{pmatrix}.$$

Il determinante Jacobiano di \mathbf{F} e' dato da

$$\det \mathbf{F} = F_{11} F_{22} F_{33} = \frac{3X_1^2}{(1 - 3X_1 t)^2} \sqrt[3]{1 - 3X_1 t} e^t (1 - 3X_1 t)^{1/3X_1} = 3X_1^2 (1 - 3X_1 t)^{(1-5X_1)/3X_1}.$$

Dalla equazione $\rho(\mathbf{X}, t) J(\mathbf{X}, t) = \rho_0(\mathbf{X})$ ricaviamo

$$\rho(\mathbf{X}, t) = (1 - 3X_1 t)^{(5X_1 - 1)/3X_1}.$$

(4) E' sufficiente calcolare la coordinata x_1 della traiettoria $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$, risulta

$$x_1 = \frac{3}{2}t^2 + X_1.$$

La densita' risulta calcolata da

$$\rho(x_1, x_2, x_3, t) = \rho_0(\mathbf{X}) = 3X_1^2 = \frac{(2x_1 - 3t^2)^2}{4}.$$

La quantita' di moto risulta essere

$$\int_0^2 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^2 dx_3 \frac{(2x_1 - 3t^2)^2}{4} (3t\mathbf{e}_1 + x_1 x_3 \mathbf{e}_2 + tx_2^2 \mathbf{e}_3)$$

Diamo le singole componenti

$$Q_1 = \frac{3}{4} t \left((4 - 3t^2)^3 + (3t^2)^3 \right), \quad Q_2 = 3(9t^4 - 16t^2 + 8), \quad Q_3 = \frac{t}{12} \left((4 - 3t^2)^3 + (3t^2)^3 \right).$$

2.2 **Esercizio 5.2.2** *Sia dato l'atto di moto*

$$\mathbf{v} \equiv (-x_2^2(2x_1 + 1), 5 - 3x_1^2 x_2(2x_1 + 1)), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

dove Ω e' una regione arbitraria dello spazio. Si provi che nessuno dei campi scalari $f := 4x_1^3 - 2x_2^2$, $g := 4x_1 x_2^2 t$ risulta essere una possibile densita' materiale per il continuo in Ω .

Risposta

- 2.3** **Esercizio 5.2.3** Sia dato l'atto di moto del continuo $\Omega \subseteq R^2$, $\mathbf{v} \equiv (-x_1, -3x_1^2)$. Si ricavi l'espressione della densità in coordinate lagrangeane, una volta sia data la densità di riferimento $\rho(X_1, X_2) = 1000g/cm^3$.

Risposta Si noti, innanzitutto che il fluido non è isocoro, infatti si trova $J(\mathbf{x}, t) = e^{-t}$. Infine, le traiettorie risultano date da $x_1(X_1, X_2, t) = X_1 e^{-t}$, $x_2(X_1, X_2, t) = (3/2)X_1(e^{-2t} - 1) + X_2$. Infine la densità è uniforme ed uguale ad $1.000g/cm^3 e^t$.

- 2.4** **Esercizio 5.2.4** Dato l'atto di moto

$$v_1 = x_1(1 + 2t), \quad v_2 = x_2.$$

Si richiede:

- (1) determinare le traiettorie e le linee di flusso;
- (2) scrivere la matrice gradiente di deformazione \mathbf{F} ;
- (3) calcolare il determinante di \mathbf{F} ;
- (4) scrivere l'equazione di continuità sia in coordinate lagrangeane, che in coordinate euleriane.

Risposta Le traiettorie sono

$$x_1 = X_1 e^{t(1+t)}, \quad x_2 = X_2 e^t.$$

La matrice \mathbf{F} è espressa direttamente nella base principale, quindi $F_{ij} = 0$, se $i \neq j$, $F_{11} = e^{t(1+t)}$, $F_{22} = e^t$. Inoltre, si ha $J = e^{t(2+t)}$. Infine, valgono le seguenti formule

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(X_1, X_2, t) &= \rho(x_1(X_1, X_2, t), x_2(X_1, X_2, t), t) = \rho(X_1, X_2) e^{-t(2+t)}, \\ \frac{dJ}{dt} &= (2 + 2t)J = \nabla \cdot \mathbf{v}J, \\ \frac{d\rho}{dt} &= -(2 + 2t)J\rho_0 = -\nabla \cdot \mathbf{v}\rho. \end{aligned}$$

- 2.5** **Esercizio 5.2.5** Il sistema Ω occupa il rettangolo $\mathcal{R} = (1, 2) \times (0, 3) \times 0$, ha densità

$$\rho : (x, y) \in \mathcal{R} \rightarrow \rho(x, y) = x + y.$$

Si chiede di determinare la massa, il baricentro di Ω , il momento statico I_s rispetto alle rette $y = 0$, ed $x = 2$.

Risposta La massa $M = 9$, Il baricentro G ha coordinate

$$G - O \equiv \left(\frac{41}{18}, \frac{7}{4} \right).$$

I momenti rispetto ad a sono

$$I_s(x = 2) = \frac{103}{12}, \quad I_s(y = 0) = 9\frac{7}{4}.$$

5.3 Forze agenti su un sistema continuo

Allo scopo di postulare le *equazioni cardinali o di bilancio* della meccanica, dobbiamo specificare cosa intendiamo come sistema di interazioni su di un corpo continuo, e questo sarà l'oggetto della presente Sezione.

In un continuo vi sono forze di natura molecolare, non presenti nella trattazione puntuale, per queste useremo un approccio di tipo macroscopico. Le giustificazioni che daremo per caratterizzare le interazioni a distanza tra le parti di un sistema continuo sono puramente qualitative e non rispettano alcun rigore assiomatico.

Le forze agenti su una particella X di un sistema continuo si distinguono da quelle agenti su un punto materiale $P \equiv X$ in quanto la particella del continuo X occupa una regione estesa dX , a differenza del punto X che resta concentrato in X . In natura vi sono forze di natura locale dovute alla mutua interazione tra le particelle del continuo, esse sono dette *forze di contatto*. In questo numero introduciamo due tipi di forze: le forze, già introdotte per il punto materiale, che verranno chiamate *forze a distanza*; e le forze, tipiche del continuo materiale, agenti su di una generica superficie contenuta nel continuo dette *forze di contatto*.

E' importante sottolineare che *le definizioni che si forniscono non dipendono dal continuo in esame, e valgono per ogni porzione materiale C !*

m4.2 **Definizione 5.3.1** *Dato un campo di vettori applicati*

$$F = \{(x, \mathbf{f}(x, t)) : x \in C, \quad \mathbf{f}(x, t) \in E_3\}$$

si definisce **momento risultante** su C di F di polo O , la seguente funzione vettoriale:

$$\mathbf{M}_O(C) := \int_C x \times \mathbf{f}(x, t) dC. \quad (5.3.1) \quad \boxed{\text{cardm}}$$

5.3.1 Forze a distanza

Al pari della trattazione puntuale, distinguiamo tra **forze interne** ed **esterne** esplicate sul generico punto $X \in \Omega$. Precisamente, come forze interne si intendono le forze esplicate dagli altri punti $Y \in \Omega$ su $X \in \Omega$ e quindi la forza interna agente su X sarà il risultante (integrale su Ω) di tutte queste forze a distanza $\int_{\Omega} \mathbf{F}^{int}(X, Y, t) dY$. Come forze esterne si intende il risultante (integrale) delle azioni che l'ambiente \mathcal{A} esterno ad Ω esplica su $X \in \Omega$, vale a dire $\int_{\mathcal{A}} \mathbf{F}^{ext}(X, Z, t) dZ$. Relativamente all'interazione tra le particelle di Ω , riconosciamo che le interazioni tra le particelle Y di Ω su X sono generalmente trascurabili se i punti sono a distanza finita tra di loro. Infatti, in un continuo l'unica azione a distanza di natura meccanica tra le particelle di Ω è la mutua attrazione gravitazionale, che risulta trascurabile rispetto a quella esercitata dalla terra sui punti di Ω . Nel sistema delle forze a distanza in seguito si esclude il contributo del sistema di forze interne.

Le forze dovute al moto di trascinamento del sistema nel quale si studia il moto, e la forza di Lorentz che agisce sulle particelle di un continuo elettroconduttore sono forze esterne. Le forze esterne sono funzioni assegnate della posizione della velocità delle particelle del continuo. Per motivi di semplicità nel seguito tratteremo solo forze esterne del tipo $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

3.1 **Definizione 5.3.2** Per ogni porzione C_* di Ω e per ogni istante t in R resta associata la quantità vettoriale $\mathbf{R}^{(d)}(C)$, $C = \chi(C_*, t)$, soddisfacente le **proprietà di misura** (B_1) , (B_2) , vedi **5.1.1**, detta **risultante di forza a distanza agente su C** , all'istante t , tramite la seguente legge

$$\mathbf{R}^{(d)} : (C, t) \in \mathcal{P}(\Omega) \times R \rightarrow \mathbf{R}^{(d)}(C, t) \in E_3. \quad (5.3.2) \quad \boxed{\text{Rd}}$$

Si può provare che esistono due campi vettoriali \mathbf{f} , \mathbf{b} su $\Omega \times R$, detti la **densità di forza a distanza** per unità di volume e per unità di massa, rispettivamente, tale che $\forall C \subseteq \Omega$,

$$\mathbf{R}^{(d)}(C) = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dC = \int_C \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dC.$$

In maniera naturale, per ogni dominio $C \subseteq \Omega$ si pone: Una densità di forze a distanza, *forza per unità di volume* e' data dal seguente campo vettoriale definizione Euleriana

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \in \Omega \times E_3 \times R_+ \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \in E_3. \quad (5.3.3) \quad \boxed{\text{forza}}$$

Per una densità di forza per unità di massa si pone $\rho \mathbf{b} = \mathbf{f}$.

Per quanto riguarda la **legge di forza** **(5.3.2)**, supponendo noto l'ambiente esterno, **problema ristretto**, essa generalmente e' una funzione della posizione e del tempo.

Dalla definizione **5.3.1** si ricava la seguente espressione per il **momento delle forze a distanza** $\mathbf{M}_O^{(d)}(C)$ agente sulla porzione C ,

$$\mathbf{M}_O^{(d)}(C) = \int_C \mathbf{x} \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dC = \int_C \mathbf{x} \times \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dC.$$

Da ora in poi, consideriamo solo quei sistemi continui in cui le forze interne si riducono alle sole forze di contatto. Un ruolo importante sarà giocato dal seguente sistema di forze a distanza.

Definizione 5.3.3 Un campo vettoriale

$$\mathbf{f} : \mathbf{x} \in \Omega \longrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in E_3,$$

si dice **campo conservativo** se esiste una funzione scalare monodroma

$$U : \mathbf{x} \in \Omega \longrightarrow U(\mathbf{x}) \in R,$$

per la quale e' soddisfatta l'identità

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}).$$

Per i liquidi e' possibile la quiete solo se il campo delle forze esterne e' un campo di forze conservativo.

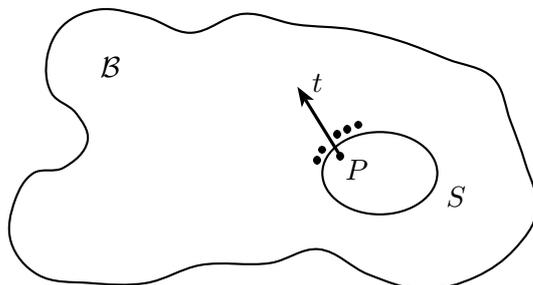


Figura 5.1: Forze di contatto

figIII1

5.3.2 Forze di contatto

Per la porzione materiale C esiste un tipo di forza che si manifesta alla frontiera ∂C di C per contatto con la parte complementare del sistema $\Omega - C$. Precisamente, ricordando che il corpo Ω è un sistema costituito da un numero infinito di punti materiali, la generica particella \mathbf{x} non sarà mai isolata e, accanto alle forze esterne ad Ω bisogna considerare le mutue interazioni tra le particelle di Ω , vedi figura 5.1.

Tali forze dovute ad azioni molecolari cessano di essere sensibili a distanze superiori a 10^{-5} cm raggio di attività molecolare. La forza di contatto è peculiare dei sistemi continui e non ha un corrispettivo nella trattazione dei punti (i punti non hanno superficie).

Definizione 5.3.4 Per ogni porzione materiale di **superficie orientata** S_t contenuta in Ω e per ogni istante t resta associata la quantità vettoriale $\mathbf{R}^{(c)}$, soddisfacente le **proprietà di misura** (B_1) , (B_2) , vedi (5.1.1) detta **risultante di forza di contatto** agente su C_* , all'istante t , tramite la seguente legge

$$\mathbf{R}^{(c)} : (S, t) \in \mathcal{P}(\Omega) \times R \rightarrow \mathbf{R}^{(c)}(S, t) \in E_3.$$

In particolare si ha segue

$$\lim_{S \rightarrow x} \frac{\mathbf{R}^{(c)}(S)}{|S|} = \mathbf{t}(x, t, S), \quad (5.3.4) \quad \text{lim}$$

dove nel secondo membro dobbiamo tener conto che il limite è stato eseguito lungo una superficie S arbitraria, passante per x .

5.3.3 Principio di Cauchy sugli sforzi

Nel seguito noi adottiamo il **Principio di Cauchy sugli sforzi** formulato nel 1827. Il punto \mathbf{x} è considerato da un lato della superficie S regolare ed orientata. Sia \mathbf{n} la normale determinata dall'orientamento di S . Supponiamo che il materiale non sia in grado di sostenere torsioni locali. I materiali in grado di sostenere torsioni locali sono detti **materiali polari**.

Il principio di Cauchy afferma anche che lo sforzo $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, S)$ non dipende dalla curvatura della superficie cui \mathbf{x} appartiene, bensì unicamente dalla normale, vedi figure 5.2, 5.3.

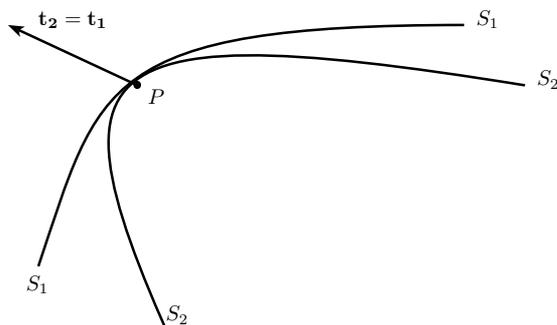


Figura 5.2: Lo sforzo è invariante al variare della curvatura di S in P

figIII2

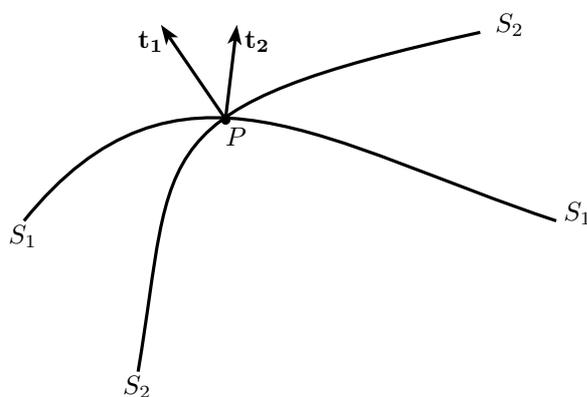


Figura 5.3: Cambiamento dello sforzo al variare dell'orientamento di S in P

figIII3

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, S) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}). \tag{5.3.5} \quad \text{CN}$$

Tale affermazione e' stata provata circa 150 anni dopo da Noll per i sistemi bilanciati vedi 5.4.1, cf. **Teorema di Noll**.

Assioma di Cauchy e Noll Per ogni coppia di regioni non disgiunte C e C' tali che

$$\{x\} = S_i \cap S'_i,$$

con S, S' in \mathbf{x} aventi lo stesso piano tangente di normale \mathbf{n} , vale la relazione

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, S) = \mathbf{t}(t, \mathbf{x}, S') = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}).$$

La relazione (5.3.5) comporta una prima semplificazione per lo sforzo, che continua pero' a rappresentare un vettore con ∞^2 incognite per ogni punto x . Infatti, la normale puo' variare in ∞^2 modi distinti, in quanto un versore ha modulo unitario.

Il campo vettoriale $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ su $\Omega \times R \times \mathcal{P}(\Omega)$, e' detto la **densita' di forza di contatto** o semplicemente **sforzo** relativo alla superficie di normale \mathbf{n} in x

all'istante t . La formulazione integrale per gli sforzi e' la seguente $\forall S \subseteq \Omega$,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(c)}(S) &= \int_S \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) d\sigma; \\ \mathbf{M}_O^{(c)}(S) &= \int_S \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) d\sigma. \end{aligned} \quad (5.3.6) \quad \boxed{\text{cardi2}}$$

Nel seguito bisognerà distinguere tra azioni di contatto interne ed esterne agenti sulla porzione C . Dato un corpo \mathcal{B} nella configurazione Ω , sia C una parte di Ω , poniamo

$$S_e(C) = \partial\Omega \cap \partial C$$

$$S_i(C) = (\bar{\Omega} - \partial\Omega) \cap \partial C = \Omega \cap \partial C,$$

le superficie $S_e(C)$, $S_i(C)$ si supporranno orientate in modo che la normale sia rivolta verso l'esterno di C . Chiameremo $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t, S_e)$ lo sforzo che viene esercitato dall'esterno di Ω su C (azione esterna) e con $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, S_i)$ lo sforzo che le particelle interne ad Ω , ed esterne a C ma in contatto con esso esercitano su C (azione interna).

Esempio 1 ^{figIII4} Per un fluido che scorre in un canale rettilineo di sezione rettangolare come in figura 5.4, se la parete superiore scorre con velocità \mathbf{U} si trova un profilo di velocità del tipo disegnato. In questo esempio il campo di forze a distanza e' dato dalla forza peso costante, il campo di forze di contatto e' dato dalla frizione tra le particelle aventi velocità diverse nei vari piani orizzontali.

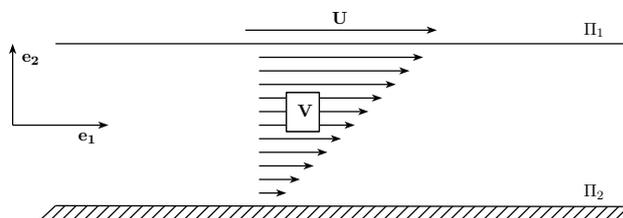


Figura 5.4: Scorrimento

figIII4

Esempio 2 ^{figIII5} Per un corpo elastico rettangolare come in figura 5.5, il campo di forze a distanza e' dato dalla forza peso costante, il campo di forze di contatto e' dato dalla trazione tra le particelle nei vari piani verticali trasmessa dalla trazione alle pareti verticali laterali.

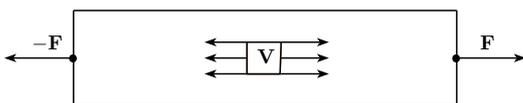


Figura 5.5: Trazione

figIII5

5.4 Equazioni del moto: formulazione Euleriana

Abbiamo già visto nello studio della cinematica delle masse che, quando si considera un sistema continuo, bisogna definire le grandezze fisiche in modo da poterle misurare, vale a dire, in termini macroscopici. In questo numero postuliamo le equazioni cardinali della meccanica per i sistemi continui, vale a dire per una generica porzione di volume materiale C . In seguito, dalle equazioni cardinali della meccanica dedurremo le equazioni che reggono il moto di un sistema continuo, per la particella X nella posizione x all'istante t , queste equazioni sono dette **equazioni indefinite del moto**.

Col termine *equazioni indefinite del moto* intendiamo un sistema di equazioni al quale bisogna aggiungere opportune condizioni iniziali ed al contorno, per ottenere una ben determinata soluzione.

Anche qui le definizioni ^(5.3.3)cardi1, ^(5.3.6)cardi2 non dipendono dal continuo in esame, e valgono **per ogni** dominio C !

I campi vettoriali $(\rho\mathbf{b})(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, S_i)$ e $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t, S_e)$ denotano le densità delle forze a distanza (solo forze esterne a C) e di contatto (forze interne ed esterne a C) agenti su $x \in C$, rispettivamente per unità di volume e di superficie, esercitate sul punto $x \in C$ all'istante t . Si assume che esse forniscano un'informazione dettagliata sull'interazione. Le densità $(\rho\mathbf{b})(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, S_i)$ e $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t, S_e)$ sono vettori applicati nel punto $x \in C$.

5.4.1 Equazioni cardinali della meccanica.

Per ricavare le equazioni del moto ci ispiriamo ai postulati della dinamica di un sistema di punti materiali.

Prima equazione cardinale

Durante il moto del continuo Ω per ogni porzione C di esso risulta soddisfatta la prima equazione cardinale della meccanica

$$-\int_C \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)dC + \int_C \rho\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)dC + \int_{S_e} \mathbf{s}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})d\sigma + \int_{S_i} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})d\sigma = 0, \quad (5.4.1) \quad \boxed{\text{card}}$$

dove S_e rappresenta la superficie esterna ed S_i la superficie interna. Nelle ^(5.4.1)card abbiamo distinto i vettori sforzo esterno \mathbf{s} da quello interno \mathbf{t} alla porzione C . Infatti tutte le quantità che riguardano l'esterno si considerano assegnate, mentre risultano incognite quelle derivanti da $\Omega - C$.

Seconda equazione cardinale

Durante il moto del continuo Ω per ogni porzione C di esso risulta soddisfatta la Seconda equazione cardinale della meccanica

$$\int_C \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})(\mathbf{x}, t)dC + \int_{S_e} \mathbf{x} \times \mathbf{s}(x, t, \mathbf{n})d\sigma + \int_{S_i} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(x, t, \mathbf{n})d\sigma = 0. \quad (5.4.2) \quad \boxed{\text{carm}}$$

Nelle $(5.4.1)^{\text{card}}$ abbiamo distinto i vettori sforzo esterno \mathbf{s} da quello interno \mathbf{t} in quanto tutte le quantità che riguardano l'esterno si considerano assegnate, mentre risultano incognite quelle derivanti dalle parti C' del continuo S stesso.

bil **Definizione 5.4.1** *Un sistema verificante le $(5.4.1)^{\text{card}}$, $(5.4.2)^{\text{carm}}$ si dirà **bilanciato**.*

Osser **Osservazione 5.4.1** *Si noti che dalle $(5.4.1)^{\text{card}}$, $(5.4.2)^{\text{carm}}$ non si possono dedurre equazioni differenziali valide per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$, $t \in (0, T)$ perché i domini di integrazione sono di dimensione diversa!*

Equazioni della statica -

Le equazioni della statica si ricavano quando si suppone di conoscere il moto e che il moto sia la quiete. Sono equazioni solo apparentemente più semplici. In questa sezione ci limitiamo a scriverle.

Una data configurazione è di equilibrio per S se e solo se, $\forall C \subset \Omega$, vale

$$\int_C \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dC + \int_{S_e} \mathbf{s}(t, \mathbf{x}, S_e) d\sigma + \int_{S_i} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, S_i) d\sigma = 0, \quad (5.4.3)$$

$$\int_C \rho \mathbf{x} \times \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dC + \int_{S_e} \mathbf{x} \times \mathbf{s}(t, \mathbf{x}, S_e) d\sigma + \int_{S_i} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(t, \mathbf{x}, S_i) d\sigma = 0, .$$

5.4.2 Equazioni del moto: altre forme

Ricordando le $(5.2.5)^{\text{QK-0}}$, le equazioni cardinali della meccanica possono scriversi nella seguente forma **di bilancio di quantità e di momento della quantità di moto**

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q}(C) = \mathbf{R}^e(C) + \mathbf{R}^e(\partial C), \quad (5.4.4)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}_O(C) + \mathbf{v}_O \times \mathbf{Q}(C) = \mathbf{M}_O^e(C) + \mathbf{M}_O^e(\partial C), \quad (5.4.5)$$

dove $\mathbf{Q} = \int_C (\rho \mathbf{v})(\mathbf{x}, t) dC$ e $\mathbf{K}_O = \int_C (\rho \mathbf{x} \times \mathbf{v})(\mathbf{x}, t) dC$ denotano la quantità di moto e di momento della quantità di moto relativa alla generica porzione materiale C del continuo. Inoltre i termini $\mathbf{R}^e(C)$, $\mathbf{M}_O^e(C)$ sono stati definiti in $(5.3.3)^{\text{cardi}}$, $(5.3.4)^{\text{cardi}}$ e si è posto

$$\mathbf{R}^e(\partial C) = \int_{\partial C} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dC,$$

$$\mathbf{M}_O^e(\partial C) = \int_{\partial C} (\mathbf{x} \times \mathbf{t})(\mathbf{x}, t) dC.$$

Il termine $\mathbf{v}_O \times \mathbf{Q}$ si annulla o se O è un punto fisso oppure se O coincide con il baricentro G del sistema S . Per i sistemi continui questa equazione discende dal teorema del trasporto $(7.7)^{\text{QK-0}}$.

Un'altra forma in cui si può porre la prima equazione cardinale è nota come del *teorema del moto del baricentro*. Dalla identità $\mathbf{Q} = m \mathbf{v}_G$, dove m denota la massa totale di S e \mathbf{v}_G è la velocità del baricentro, possiamo scrivere

$$m \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = \mathbf{R}^{(e)}(C), \quad (5.4.6) \quad \text{bilal}$$

nota come **equazione del moto del baricentro**. Tale denominazione induce in errore, poiché' lascia intendere sia possibile ricavare il moto di $G(t)$. In effetti da (5.4.6) non e' possibile dedurre il moto del baricentro se non sono note le forze interne.

Legge di Newton *Un corpo immerso in un fluido in quiete riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del volume di fluido spostato.*

Dim Sia Ω il volume del recipiente contenente il fluido. Si puo' pensare Ω riempito unicamente di fluido, allora in assenza di altre forze, il fluido sara' in quiete. Supponiamo di immergere in Ω un corpo rigido di volume piu' piccolo $C \subseteq \Omega$. Il corpo C e' noto anche come **diavoleto di Newton**. Ci chiediamo cosa accadrà a C . Scriviamo l'equazione (5.4.6) per la regione C supponendo che il moto del fluido occupante la regione $V - C$, complementare di C , resti in quiete. Vi sono due modi di scriverla, pensando C occupato rispettivamente dal fluido o dal corpo rigido. Si osservi che $\mathbf{R}^{(e)}(C) = \mathbf{R}^{(d)}(C)$, $\mathbf{R}^{(e)}(\partial C) = \mathbf{R}^{(c)}(\partial C)$. La forza a distanza e' rappresentata dalla forza peso e risulta

$$\mathbf{R}^{(d)}(C) = m_f(C)\mathbf{g}, \quad \mathbf{R}^{(d)}(C) = m_s(C)\mathbf{g},$$

a seconda del continuo che occupa C . Inoltre, le forze di contatto $\mathbf{R}^{(c)}(\partial C)$ coincidono per i due continui. Infatti, esse sono fornite dall'azione che le particelle esterne a C esplicano su C , ed il moto di $\Omega - C$ risulta inalterato per ipotesi. Si ricordi che se la regione C e' occupata dal fluido, allora il fluido e' in quiete in C .

Possiamo quindi scrivere

$$m_s(C) \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = m_s(C)\mathbf{g} + \mathbf{R}^{(c)}(\partial C), \quad (5.4.7)$$

$$0 = m_f(C)\mathbf{g} + \mathbf{R}^{(c)}(\partial C). \quad (5.4.8)$$

Per sottrazione si ottiene

$$m_s \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = (m_s - m_f)\mathbf{g}. \quad (5.4.9)$$

Se la massa di fluido spostata coincide con la massa del corpo rigido, allora, il corpo e' in moto con velocita' costante $\mathbf{v}_G(t) = \mathbf{v}_G(0)$. Se risulta $m_s < m_f$ allora la forza e rivolta verso l'alto ed il corpo sale $\mathbf{a}_G \cdot \mathbf{g} < 0$. Infine se $m_s > m_f$ allora la forza risultante e' rivolta verso il basso ed il corpo scende ma con un'accelerazione minore di quella il solido nel vuoto ($m_f = 0$).

6.2 **Esercizio 5.4.1** *In un corpo continuo in quiete (fluido a riposo) vi e' un ostacolo \mathcal{B}_0 occupante una regione Ω delimitata da una superficie chiusa $S = \partial\Omega$ regolare. Su S agisce una pressione costante p_0 . Dimostrare che, in condizioni di quiete, il risultante ed il momento risultante delle forze a distanza sono nulli.*

Risposta Per ipotesi, il fluido e' in quiete. Quindi, sono soddisfatte le equazioni della statica

$$\mathbf{R}^d + \mathbf{R}^c = 0, \quad \mathbf{M}_O^d + \mathbf{M}_O^c = 0.$$

Inoltre, nei punti del fluido si ha $T_{ij} = -p_0\delta_{ij}$, $\mathbf{t}(\mathbf{y}, \mathbf{n}) = -p_0\mathbf{n}$, con p_0 uniforme. Quindi, un calcolo diretto comporta

$$\mathbf{R}^c = \int_S (-p_0)\mathbf{n}d\sigma = \int_{C_*} \nabla(-p_0)dC = 0;$$

$$\mathbf{M}_O^c = \int_S \sum_i \epsilon_{ijk}(p_0 y_j) n_k d\sigma = \int_{C_*} \sum_i \epsilon_{ijk} \frac{\partial(p_0 y_j)}{\partial y_k} \mathbf{e}_i dC = 0.$$

5.4.3 Teorema degli sforzi di Cauchy

Vogliamo ora studiare la legge di dipendenza dello sforzo dalla normale. Una sostanziale semplificazione al problema e' offerta dal seguente teorema di Cauchy sugli sforzi.

4.2 **Teorema 5.4.1 Teorema degli Sforzi di Cauchy** Fissato il materiale, lo sforzo $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ dipende linearmente dalla normale, cioe' l'applicazione

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \cdot) : \mathbf{n} \in E_3 \longrightarrow \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) \in E_3$$

e' un endomorfismo, vedi figura ^{figIII6} 5.6.

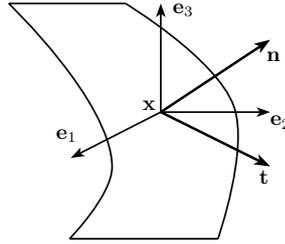


Figura 5.6: Sforzo in \mathbf{x}

figIII6

Dim. Per un punto \mathbf{x} interno al corpo in Ω possiamo considerare il prisma C_ϵ di vertice \mathbf{x} spigoli aventi la direzione dei vettori di base \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$, e di base Σ posta all'altezza ϵ da \mathbf{x} come in figura ^{figIII7} 5.7.

Per ϵ sufficientemente piccolo C_ϵ e' tutto contenuto in Ω quindi $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t, S_\epsilon) = 0$. Consideriamo la prima equazione cardinale nella forma

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Sigma_i} \mathbf{t}(\mathbf{y}, t, \mathbf{n}_i) d\sigma + \int_{\Sigma} \mathbf{t}(\mathbf{y}, t, \mathbf{n}) d\sigma = \int_{C_\epsilon} \rho(\mathbf{y}, t) (\mathbf{a}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{b}(\mathbf{y}, t)) dC. \quad (5.4.10) \quad \text{bal}$$

La superficie laterale e' l'unione della base Σ e delle superficie Σ_i di normali $-\mathbf{e}_i$ esterne a C_ϵ , $i = 1, 2, 3$. Si dividano ambo i membri di (5.4.10) per $|\Sigma|$ e si calcoli il limite per $\epsilon \rightarrow 0$ si ottiene

$$\lim_{C_\epsilon \rightarrow \mathbf{x}} \frac{1}{|\Sigma|} \left(\sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \mathbf{t}(\mathbf{y}, t, S_i) d\sigma + \int_{\Sigma} \mathbf{t}(\mathbf{y}, t, \mathbf{n}) d\sigma \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Sigma|} \int_{C_\epsilon} \rho(\mathbf{y}, t) (\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{y}, t) dC. \quad (5.4.11) \quad \text{balim}$$

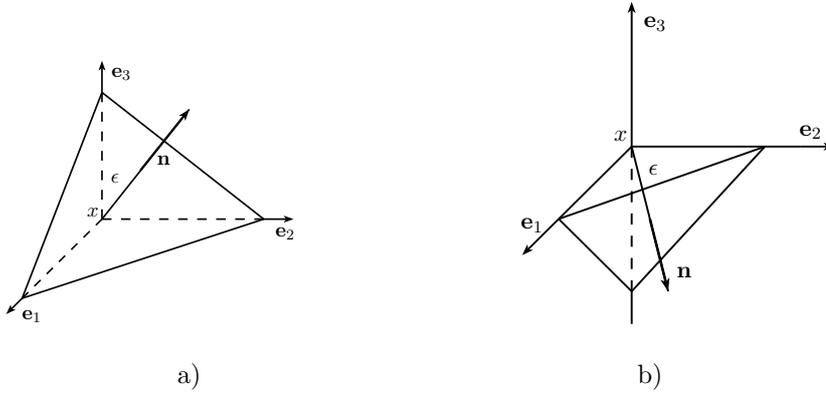


Figura 5.7: Prisma C_ϵ

figIII7

Ricordando ^{medlim1}(3.8.14), ^{medlim2}(3.8.15), e che il volume di C_ϵ e' dato da $\epsilon|\Sigma|/3$ si deduce

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Sigma|} \int_{C_\epsilon} \rho(\mathbf{y}, t) (\mathbf{a}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{b}(\mathbf{y}, t)) dC = 0, \quad (5.4.12)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = - \lim_{C_\epsilon \rightarrow \mathbf{x}} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{|\Sigma|} \int_{S_i} \mathbf{t}(\mathbf{y}, t, -\mathbf{e}_i) d\sigma \right). \quad \text{bamad}$$

Una nota formula di geometria collega le superficie Σ_i alla superficie Σ nel seguente modo:

$$\frac{1}{|\Sigma|} = \frac{\alpha_i}{|\Sigma_i|}, \quad (5.4.13) \quad \text{geo}$$

dove $\alpha_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i$ sono i coseni direttori della normale \mathbf{n} alla base Σ . Sostituendo questa formula in ^{bamad}(5.4.12) ed applicando nuovamente ^{medlim2}(3.8.15) troviamo, vedi figura ^{FigIII8}5.8,

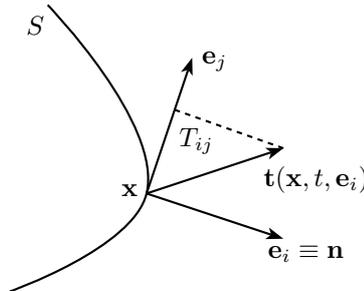


Figura 5.8: Sforzo in \mathbf{x} relativo alla superficie di normale \mathbf{e}_i

figIII8

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = - \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}_i). \quad (5.4.14) \quad \text{bafin}$$

Per $\mathbf{n} = \mathbf{e}_i$ si ricava il principio di azione e reazione

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}_i) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_i),$$

e finalmente

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_i).$$

Il teorema e' dimostrato. \square

Dal teorema ora provato discende

$$T_{ij}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j.$$

Dalla definizione di tensore data in algebra lineare possiamo associare a $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ un tensore $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ tale che, vedi figura 5.8

$$\mathbf{n}\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}).$$

Il tensore $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ e' detto **tensore degli sforzi di Cauchy**, le sue nove componenti sono funzioni solo del tempo e del punto. La conoscenza di \mathbf{T} determina la costituzione fisica del corpo Ω in esame.

Possiamo quindi scrivere

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij}(\mathbf{x}, t) \alpha_i \mathbf{e}_j = \mathbf{n}\mathbf{T}(\mathbf{x}, t). \quad (5.4.15)$$

In particolare, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(c)}(S) &= \int_S \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) d\sigma = \int_S \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) d\sigma; \\ \mathbf{M}_O^{(c)}(S) &= \int_S \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) d\sigma = \int_S \mathbf{x} \times (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})(\mathbf{x}, t) d\sigma. \end{aligned} \quad (5.4.16) \quad \boxed{\text{tens}}$$

Terminiamo l'introduzione dello sforzo di Cauchy, ricordando l'esperienza di Archimede. Precisamente essa afferma che

In ogni punto \mathbf{x} di un **fluido in quiete**, $\mathbf{v} = 0$, e su ogni superficie S passante per \mathbf{x} di normale \mathbf{n} , si esplica uno sforzo interno $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ puramente normale a S , funzione unicamente del punto \mathbf{x} e dell'istante t .

$\boxed{\text{press}}$

Definizione 5.4.2 *Nel punto \mathbf{x} del fluido il piano orientato π di normale \mathbf{n} divide lo spazio in due parti, denotiamo con R_+^3 la parte dello spazio dove \mathbf{n} e' rivolta. Il continuo avra' particelle in un intorno $B(\mathbf{x})$ di $\mathbf{x} \in \pi$, che si divide in $B_+(\mathbf{x}) := B(\mathbf{x}) \cap R_+^3$ e $B_-(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}) - B_+(\mathbf{x})$.*

*Se il fluido e' in quiete, si chiama **pressione** del fluido in \mathbf{x} la funzione scalare $p = p(\mathbf{x}, t)$ intensita' dello sforzo che le particelle in $B_+(\mathbf{x})$ esplicano su quelle in $B_-(\mathbf{x})$.*

5.4.4 Equazioni indefinite: descrizione spaziale.

In questa sezione ricaviamo le equazioni indefinite della meccanica e ne discutiamo il significato fisico. Iniziamo con l'osservare che applicando il teorema di Gauss a $\stackrel{\text{tens}}{(5.4.16)}$ si ricava

$$\mathbf{R}^{(c)}(\partial C) = \int_{\partial C} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) d\sigma = \int_{\partial C} \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) d\sigma = \int_C \nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) dC. \quad (5.4.17) \quad \boxed{\text{tens1}}$$

Sostituendo questa relazione nelle $\stackrel{\text{card}}{(5.4.1)}$ si ottiene

$$\int_C \{-\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) + \rho\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\} dC = 0. \quad (5.4.18) \quad \boxed{\text{card1}}$$

La prima equazione, per il teorema fondamentale del calcolo integrale comporta la *prima equazione indefinita nella descrizione spaziale*

$$-\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) + \rho\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in F(0, T). \quad (5.4.19) \quad \boxed{\text{indef1}}$$

Vogliamo ora ricavare la seconda equazione indefinita della meccanica, a tal fine osserviamo che

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O^{(c)}(\partial C) \cdot \mathbf{e}_i &= \int_{\partial C} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_i d\sigma = \int_{\partial C} \epsilon_{ijk} x_j n_l T_{lk}(\mathbf{x}, t) d\sigma \\ &= \int_C \epsilon_{ijk} \partial_{x_i} (x_j T_{lk})(\mathbf{x}, t) dC = \int_C \epsilon_{ijk} \delta_{lj} T_{lk}(\mathbf{x}, t) dC + \int_C \epsilon_{ijk} x_j \partial_{x_i} T_{lk}(\mathbf{x}, t) dC. \end{aligned}$$

Questa relazione riscritta vettorialmente comporta

$$\mathbf{M}_O^{(c)}(\partial C) = \int_C \sum_i \epsilon_{ijk} \delta_{lj} T_{lk}(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_i dC + \int_C \mathbf{x} \times \nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) dC. \quad (5.4.20) \quad \boxed{\text{tens3}}$$

Sostituendo in $\stackrel{\text{carm}}{(5.4.2)}$, quest'ultima relazione si ottiene

$$\int_C \mathbf{x} \times (\rho(\mathbf{b} - \mathbf{a})(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)) dC + \int_C \sum_i \epsilon_{ijk} \delta_{lj} T_{lk}(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_i dC = 0. \quad (5.4.21) \quad \boxed{\text{cardm}}$$

Assumendo la validità di $\stackrel{\text{cardm}}{(5.4.21)}$ per ogni dominio C si trova l'equazione indefinita

$$\mathbf{x} \times (\rho(\mathbf{b} - \mathbf{a})(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)) + \sum_i \epsilon_{ijk} \delta_{lj} T_{lk}(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_i = 0. \quad (5.4.22) \quad \boxed{\text{carm}'}$$

La $\stackrel{\text{carm}'}{(5.4.22)}$ si riduce a

$$\epsilon_{ijk} \delta_{lj} T_{lk}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (5.4.23) \quad \boxed{\text{symm}}$$

La $\stackrel{\text{symm}}{(5.4.23)}$ equivale ad esprimere la simmetria del **tensore degli sforzi**

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T, \quad (5.4.24) \quad \boxed{\text{indef2}}$$

essa rappresenta la **seconda equazione indefinita della meccanica**

5.4.5 Teorema!Energia cinetica

Moltiplichiamo (5.4.19)^{indef1} per \mathbf{v} , integriamo su C . Supponiamo che la velocità del bordo di C coincida con la velocità delle particelle materiali, applichiamo il teorema del trasporto, in integrando per parti otteniamo il **teorema dell'energia cinetica**

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_C \rho \mathbf{v}^2 dC = \int_C \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dC - \int_C \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v} dC + \int_{\partial C} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \mathbf{n} dS. \quad (5.4.25) \quad \boxed{\text{kinen1}}$$

L'equazione (5.5.11)^{kinen1} non fornisce un'equazione di bilancio dell'energia cinetica a causa del termine $-\int_C \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v} dC$ che non è né una sorgente esterna, né superficiale.

5.5 Equazioni del moto: formulazione Lagrangiana

Sinora abbiamo trattato le equazioni Cardinali nella formulazione Euleriana ed abbiamo ricavato le equazioni indefinite del moto nella descrizione spaziale, vale a dire nella posizione \mathbf{x} dello spazio Ω , all'istante t . In questo numero studiamo le **equazioni cardinali della meccanica** in forma Lagrangiana partendo da considerazioni macroscopiche, forma integrale, e ricavando le equazioni indefinite del moto nella descrizione materiale, vale a dire per la particella \mathbf{X} che si trova all'istante t nella posizione \mathbf{x} .

5.5.1 Prima equazione cardinale della meccanica

Ritorniamo alle equazioni cardinali della meccanica, riscriviamo qui per comodità la prima equazione in forma integrale

$$\int_C (-\rho(\mathbf{x}, t)(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{x}, t)) dC + \int_{\partial C} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) ds = 0. \quad (5.5.1) \quad \boxed{\text{cardE}}$$

Integrale di volume

Analizziamo prima gli integrali di volume, per la biunivocità della rappresentazione possiamo riportare l'integrazione dal volume C , configurazione attuale, al volume C_* , configurazione di riferimento. Ricordando la formula (4.3.6) che si è trovata nel capitolo precedente per il cambiamento di coordinate $dC = J dC_*$ dove $J = \det \mathbf{F}$ è lo Jacobiano della trasformazione, si ha

$$\int_C \{-\rho(\mathbf{x}, t)(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{x}, t)\} dC = \int_{C_*} \{-\tilde{\rho}(\mathbf{X}, t)(\tilde{\mathbf{a}} + \tilde{\mathbf{b}})(\mathbf{X}, t)\} J(\mathbf{X}, t) dC_*. \quad (5.5.2) \quad \boxed{\text{volume}}$$

Ricordiamo anche che

$$\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2 \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2}.$$

Integrale di superficie

Ricordiamo che

$$J = \det \mathbf{F}.$$

Per l'integrale di superficie utilizziamo la formula ^(surf)(4.3.8) che abbiamo trovato per il cambiamento di superficie orientata

$$ds \mathbf{n} = dS J \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \quad (5.5.3) \quad \boxed{\text{surfII}}$$

e troviamo

$$\int_{\partial C} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\partial C_*} \mathbf{F}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{N} J dS. \quad (5.5.4) \quad \boxed{\text{sufa}}$$

Nell'integrale esteso a ∂C_* compare di nuovo un tensore moltiplicato per la normale \mathbf{N} a ∂C_* , questo nuovo tensore non simmetrico e' dato da

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{X}, t). \quad (5.5.5) \quad \boxed{\text{PK}}$$

La matrice $J \mathbf{F}^{-T}$ e' la matrice dei cofattori di \mathbf{F} . Il campo tensoriale \mathbf{S} definito da (5.5.5) e' chiamato **tensore di Piola-Kirchoff**. Dalla definizione si ricava che $\mathbf{S} \cdot \mathbf{N}$ misura lo sforzo, forza per unita' di superficie, relativo alla superficie dS di normale \mathbf{N} nella configurazione di riferimento.

E' importante notare che il tensore \mathbf{S} non e' simmetrico. Pero' dalla simmetria del tensore di Cauchy segue la seguente identita'

$$\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{S} = J \cdot \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{F}. \quad (5.5.6) \quad \boxed{\text{PKsy}}$$

Infine se e' noto il tensore di Piola-Kirchoff possiamo ricavare il tensore di Cauchy dalla formula

$$\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{S} = J^{-1} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{S}.$$

Dalla definizione di \mathbf{S} , tenendo conto che il continuo e' elastico, per la dipendenza funzionale di \mathbf{S} da \mathbf{F} si deduce

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = J \cdot \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T}. \quad (5.5.7) \quad \boxed{\text{PiKsy}}$$

5.5.2 Equazioni indefinite: descrizione materiale

Possiamo ora riscrivere le equazioni integrali ^(cardE)(5.5.1) nella seguente forma

$$\int_{C_*} \left\{ -\tilde{\rho}(\mathbf{X}, t) \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{X}, t) + \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{X}, t) \right\} J(\mathbf{X}, t) dC_* + \int_{\partial C_*} \mathbf{N} \cdot \mathbf{S} dS = 0. \quad (5.5.8) \quad \boxed{\text{cardiL}}$$

Nell'integrale di superficie in ^(cardiL)(5.5.8) si puo' applicare il teorema di Gauss e si ricava

$$\int_{C_*} \left\{ -J \tilde{\rho}(\mathbf{X}, t) \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{X}, t) + J \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{X}, t) + \text{Div} \mathbf{S}(\mathbf{X}, t) \right\} dC_* = 0. \quad (5.5.9) \quad \boxed{\text{cardL}}$$

Dalla equazione di continuita' della massa scritta in coordinate Lagrangiane si sa che

$$J \tilde{\rho}(\mathbf{X}, t) = \rho(0, \chi(\mathbf{X}, 0)) = \rho_0(\mathbf{X}).$$

finalmente per un continuo elastico, stante l'arbitrarieta' di C_* , ricaviamo la seguente equazione indefinita

$$\rho_0(\mathbf{X}) \frac{\partial^2 \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} = \rho_0(\mathbf{X}) \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{X}, t) + \text{Div} \mathbf{S}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X}, t \in C_* \times (0, T). \quad (5.5.10) \quad \boxed{\text{eqel}}$$

Notiamo subito che in coordinate Lagrangiane l'incognita e' la posizione $\chi(\mathbf{X}, t)$, e quindi la (5.5.10) e' un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine in t . Relativamente all'ordine di derivazione nella variabile spaziale notiamo che per la classe di continui elastici alla quale ci siamo limitati qui, il tensore degli sforzi \mathbf{T} , e quindi \mathbf{S} , dipende solo da \mathbf{F} che contiene le derivate prime di $\chi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}$. Pertanto poiche' nelle equazioni del moto (5.5.10) compare la divergenza di \mathbf{S} , per il teorema di derivazione delle funzioni composte si ricava

$$\sum_i \frac{\partial S_{ij}(\mathbf{F})}{\partial X_i} = \sum_i \frac{\partial S_{ij}(\mathbf{F})}{\partial F_{kl}} \frac{\partial F_{kl}}{\partial X_i} = \sum_i \frac{\partial S_{ij}(\mathbf{F})}{\partial F_{kl}} \frac{\partial^2 x_k}{\partial X_i \partial X_l}.$$

In generale il sistema (5.5.10) e' altamente non lineare e si studiano solo le equazioni linearizzate attorno a moti particolari. In seguito tratteremo continui non lineari ma ci limiteremo ad una particolare classe di equazioni costitutive: i *materiali iperelastici*.

5.5.3 Teorema dell'energia cinetica

Moltiplichiamo (5.5.10) per $\frac{\partial \chi}{\partial t}$, integriamo su C_* , ed integriamo per parti, otteniamo cosi' il **teorema dell'energia cinetica**

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{C_*} \rho_0 \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right)^2 dC_* = \int_{C_*} \rho_0 \tilde{\mathbf{b}} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial t} dC_* - \int_{C_*} \mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} dC_* + \int_{\partial C_*} \mathbf{N} \cdot \mathbf{S} \frac{\partial \chi}{\partial t} dS. \quad (5.5.11) \quad \boxed{\text{kinen1}}$$

L'equazione (5.5.11) non fornisce un'equazione di bilancio dell'energia cinetica a causa del termine $-\int_C \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v} dC$ che non e' ne' una sorgente esterna, ne' superficiale.

5.6.4 Esercizi sul tensore degli sforzi.

Il teorema di Cauchy prova che lo sforzo per unita' di superficie \mathbf{t} dipende linearmente da \mathbf{n} , vale a dire

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T} \mathbf{n} = \tau(\mathbf{x}, t) \mathbf{n},$$

con \mathbf{T} il tensore degli sforzi di Cauchy.

Per questi esercizi prendiamo in considerazione solo sforzi di questo tipo.

(a) Un sforzo e' detto una pura tensione o compressione nella direzione \mathbf{n} , di intensita' τ , vedi figura 5.9, figIII9



Figura 5.9: Pura Tensione figIII9

se vale

$$\mathbf{T} = \tau(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n},$$

in questo caso si scrive

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \tau \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1.$$

Lo sforzo relativo alla superficie di normale \mathbf{N} risulta essere

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{N}) = \tau(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \cdot \mathbf{N} \mathbf{n}.$$

(b) Un sforzo e' detto una *pressione di intensita' p*, vedi figura ^{figIII10}5.10

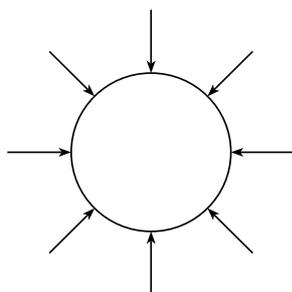


Figura 5.10: Pressione Uniforme

figIII10

se vale

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I}, \tag{5.6.1} \text{press}$$

in questo caso si scrive

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix} = -p[\delta_{ij}] \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = -p(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3).$$

Lo sforzo relativo alla superficie di normale \mathbf{N} risulta essere

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{N}) = \tau(\mathbf{x}, t) \mathbf{N}.$$

(c) La somma di una *pura tensione o compressione nella direzione n, di intensita' tau* e di una *pressione di intensita' p*, fornisce il tensore

$$\mathbf{T} = \tau(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - p\mathbf{I}.$$

Nella base \mathbf{e}_i con $\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}$, il tensore \mathbf{T} si scrive

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \tau - p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix} = (\tau - p) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - p \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - p \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3.$$

Lo sforzo relativo alla superficie di normale \mathbf{N} risulta essere

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{N}) = \tau(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \cdot \mathbf{N} \mathbf{n} - p \mathbf{N}.$$

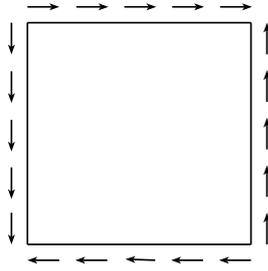


Figura 5.11: Puro Scorrimento

figIII11

(d) Un sforzo è detto un *puro scorrimento* nella coppia di direzioni \mathbf{m} , \mathbf{n} , di intensità τ se vale, vedi figura 5.11

$$\mathbf{T} = \tau(\mathbf{x}, t)(\mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}).$$

Lo sforzo relativo alla superficie di normale \mathbf{N} risulta essere

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{N}) = \tau(\mathbf{x}, t)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}\mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{N}\mathbf{n}).$$

Un continuo avente in ogni punto una pressione e' detto **Fluidi Non Viscoso o Elastico Ideale**.

3.1 **Esercizio 5.6.1** Siano \mathbf{n} , \mathbf{n}' e $\boldsymbol{\nu}$ tre vettori unitari linearmente indipendenti. Supponiamo che nel continuo Ω , $\boldsymbol{\nu}$ risulta ortogonale agli sforzi in \mathbf{y} relativi alle superficie di normali \mathbf{n} , \mathbf{n}' rispettivamente. Provare che lo sforzo in \mathbf{y} sulla superficie di normale $\boldsymbol{\nu}$ risulta ortogonale a \mathbf{n} , \mathbf{n}' .

Risposta Dal teorema di Cauchy, sappiamo che

$$\mathbf{t}(\mathbf{y}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}\mathbf{n}, \quad \mathbf{t}(\mathbf{y}, \mathbf{n}') = \mathbf{T}\mathbf{n}', \quad \mathbf{t}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{T}\boldsymbol{\nu}.$$

Inoltre, si è supposto che

$$\boldsymbol{\nu}\mathbf{T}(\mathbf{y})\mathbf{n} = \boldsymbol{\nu}\mathbf{T}(\mathbf{y})\mathbf{n}' = 0.$$

Quindi, l'asserto segue dalla legge di bilancio del momento della quantità di moto, che assicura la simmetria di \mathbf{T} .

3.2 **Esercizio 5.6.2** Provare che, se in un punto \mathbf{y} di un corpo continuo due autovalori del tensore degli sforzi sono nulli (sforzi normali principali), la direzione dello sforzo non dipende dalla normale \mathbf{n} alla superficie relativamente alla quale è calcolato.

Risposta Nella base degli autovettori \mathbf{e}_i il tensore \mathbf{T} si scrive

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = T_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1.$$

Pertanto, si ha

$$\mathbf{t}(\mathbf{y}, \mathbf{n}) = \mathbf{nT}(\mathbf{y}) = T_1 n_1 \mathbf{e}_1,$$

che fornisce come direzione dello sforzo la direzione costante \mathbf{e}_1 .

3.3 **Esercizio 5.6.3** *In un punto \mathbf{y} di un corpo continuo il tensore degli sforzi risulta dato da*

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} T_{11} & 0 & T_{13} \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{vmatrix}.$$

con

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = 15 \text{ kg/m}^2, \quad T_{13} = T_{23} = 5 \text{ kg/m}^2.$$

Determinare gli sforzi relativi alle direzioni principali, e le direzioni principali.

Risposta Gli autovalori e gli autovettori \mathbf{e}_i del tensore \mathbf{T} sono

$$\begin{aligned} T_1 = 15, \quad \mathbf{e}_1 &\equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \\ T_2 = 15 - 5\sqrt{2}, \quad \mathbf{e}_2 &\equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ T_3 = 15 + 5\sqrt{2}, \quad \mathbf{e}_3 &\equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

3.4 **Esercizio 5.6.4** *Per un corpo continuo il tensore degli sforzi risulta dato da*

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} x_1 x_2 & x_2^2 & 0 \\ x_2^2 & x_2 x_3 & x_3^2 \\ 0 & x_3^2 & x_1 x_3 \end{vmatrix}.$$

Si chiede di calcolare lo sforzo \mathbf{t} in $\bar{\mathbf{x}}$ relativo alle seguenti superficie

1. $\bar{\mathbf{x}} \equiv (1, 2, 3) \quad S: \{x_1 - 2x_2 + x_3\};$
2. $\bar{\mathbf{x}} \equiv (1, 2, 3) \quad S: \{4x_1 + x_2 - 2x_3\};$
3. $\bar{\mathbf{x}} \equiv (1, 1, 1) \quad S: \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3\};$
4. $\bar{\mathbf{x}} \equiv (1, 1, 1) \quad S: \{\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2} + 5x_3^2 = \frac{23}{4}\}.$

Capitolo 6

Termodinamica

Nel Capitolo precedente si sono scritte le equazioni indefinite del moto di un sistema continuo

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{T}, \\ T_{ij} &= T_{ji}.\end{aligned}\tag{5.6.1} \quad \boxed{\text{indef3}}$$

Le (5.6.1) sono valide in \mathbf{x} ed in t , per ogni tipo di continuo. Purtroppo queste equazioni non sono sufficienti a determinare il moto in quanto il numero delle equazioni scalari e' sette mentre quello delle incognite $\rho, \mathbf{v}, \mathbf{T}$ e' tredici.

Osserviamo inoltre che una volta ottenuto il pareggiamento tra il numero di equazioni ed il numero delle funzioni incognite, le (5.6.1) rappresentano un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali. Si definisce **problema di buona posizione** un problema di esistenza unicita' e dipendenza continua della soluzione dai dati. Le (5.6.1) sono dette indefinite perche' affinche' queste risultino univocamente risolubili ad esse bisogna aggiungere delle condizioni iniziali ed al contorno.

Incontriamo dunque due ordini di problemi:

- (i) **il pareggiamento equazioni ed incognite;**
- (i) **il problema dei valori iniziali ed al contorno.**

In questo Capitolo otterremo il pareggiamento tra equazioni ed incognite, nel prossimo Capitolo tratteremo il problema del determinismo meccanico.

Per quanto concerne il pareggiamento tra equazioni ed incognite, notiamo che questo non puo' essere ottenuto se non ci si esprime sulla costituzione fisica del materiale in esame. In effetti, a parita' di forze esterne, di condizioni iniziali ed al contorno, le equazioni (5.6.1) sono vere per ogni corpo continuo, mentre il moto che si sviluppa (risposta del materiale) e' strettamente condizionato dal tipo di continuo in esame, sia esso un continuo elastico, liquido, gassoso o con caratteristiche piu' complesse. In pratica, dato uno stesso sistema di interazioni, il moto che si determina dipende dalla costituzione fisica del corpo (rigido o fluido, ect.) e sinora, la struttura del corpo non e' intervenuta.

L'esperienza fisica mostra che corpi della stessa forma e dimensione, soggetti a forze esterne identiche possono avere moti diversi. Ad esempio per due fili sottili

della stessa lunghezza e diametro, uno di rame ed uno di acciaio, si richiedera' una forza diversa per produrre lo stesso allungamento. Quindi dobbiamo aggiungere ipotesi aggiuntive, dette **assunzioni costitutive** che servono per differenziare i materiali.

Si hanno in Meccanica due tipi diversi di leggi costitutive:

- (1) Leggi valide per tutti i corpi continui;
- (2) Leggi valide per particolari classi di corpi continui.

Si distinguono tre tipi possibili di vincoli:

- (i) *Vincoli sulle deformazioni del corpo.* Ad esempio il materiale e' **incompressibile**
- (ii) *Vincoli sulla forma del tensore degli sforzi.* Ad esempio lo sforzo e' una **pressione**.
- (iii) *Vincoli sui processi termodinamici.* Si fissa la dipendenza dello sforzo dal moto. Ad esempio il materiale e' **barotropico**.

Per risolvere il problema del moto dobbiamo esprimerci sulla dipendenza dello sforzo dal moto del corpo. Questo risultato puo' essere raggiunto solo attraverso l'ausilio della Termodinamica.

Notazione In questo Capitolo consideriamo sempre una regione fissa dello spazio che verra' indicata con V .

6.1 Termodinamica

La termodinamica studia gli effetti del calore sui sistemi fisici, analizzando i tipi di trasferimento di calore e gli effetti congiunti di calore e lavoro sugli oggetti materiali. Precisamente, un sistema termico e' un sistema che, tramite interazioni meccaniche e termiche, scambia con l'ambiente lavoro e calore. In questo numero proponiamo un'assiomatica della termodinamica dei sistemi continui, seguendo da vicino la linea assiomatica della meccanica classica.

Processi puramente meccanici

Sinora la descrizione matematica del moto di un fluido si e' limitata a fornire un modello puramente meccanico, nel quale le incognite sono il campo di velocita' $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ e le due variabili termodinamiche pressione $p(\mathbf{x}, t)$ e densita' $\rho(\mathbf{x}, t)$. In questo modello e' necessario aggiungere restrizioni di tipo cinematico o termodinamico.

Equazioni della dinamica

Come equazioni del moto prendiamo l'equazione di continuita' per la densita' e l'equazione della quantita' di moto e del momento della quantita' di moto (5.4.19), (5.4.24), (5.5.10).

Stato termodinamico

Per fluidi nei quali i processi di conduzione termica e frizione interna modificano il moto, lo stato del sistema e' descritto dalle variabili precedenti piu' una variabile

che descrive lo stato termico del fluido. Noi sceglieremo come variabile termica la **temperatura**. La temperatura rappresenta un concetto primitivo (caratterizzazione della caldezza attraverso un numero), essa esiste solo attraverso la scelta empirica di un termometro. Non vi è a priori nessun criterio di scelta per una temperatura empirica assoluta: solo un confronto tra diverse temperature empiriche. Una giustificazione, dal punto di vista logico, della possibilità di costruzione di un termometro viene fornita dal seguente fatto sperimentale Fowler,
Due sistemi in equilibrio termico con un terzo sono anche in equilibrio tra di loro.
 Introduciamo il concetto di **termostato**.

1.1 **Definizione 6.1.1** *Un termostato \mathcal{T} è un corpo a temperatura uniforme. Un corpo \mathcal{B} si dice termometro se, messo in contatto con un termostato \mathcal{T} , assume la stessa temperatura di \mathcal{T} , mentre \mathcal{T} non cambia la sua temperatura.*

Diamo quindi il seguente postulato.

Principio zero della temperatura *Esistono termometri perfetti, uguali per tutti gli osservatori. Esiste un estremo inferiore per la temperatura empirica, in particolare, e' sempre possibile scegliere una scala per la temperatura avente come estremo inferiore lo zero. Si dice **temperatura assoluta**, $\theta = \theta(x, t)$ la temperatura misurata con questa scala.*

Equazioni della termodinamica

Studiamo ora la **termodinamica dei processi irreversibili**.

La termodinamica è basata sulle leggi di bilancio dell'energia totale e dell'entropia che affermano che l'incremento nel tempo dell'energia totale, e dell'entropia, per un continuo contenuto in V , sono dovute ai flussi di energia totale, e di entropia attraverso la frontiera ∂V di V più le sorgenti di energia totale, ed di entropia. Le sorgenti di entropia causano fenomeni irreversibili dentro V . *Scopo principale è quantificare esplicitamente le sorgenti di entropia create dai processi irreversibili.*

6.1.1 Prima legge della termodinamica

Per stabilire le leggi della termodinamica noi iniziamo col dare una definizione

Definizione 6.1.2 *Per ogni porzione V di Ω e per ogni istante t in R resta associata la quantità scalare $\mathcal{E}(V)$, detta l'**energia interna** della porzione di continuo che occupa la regione geometrica $V \subseteq \Omega$, soddisfacente le **proprietà di misura** (B_1) , (B_2) , vedi 5.1.1 tramite la seguente legge*

$$\mathcal{E} : (V, t) \in \mathcal{P}(\Omega) \times R \rightarrow \mathcal{E}(V, t) \in E_3.$$

L'**energia interna** $\mathcal{E}(V)$ è data da

$$\mathcal{E}(V) = \int_V \rho \epsilon(\mathbf{x}, t) dv, \quad (6.1.1)$$

dove ϵ è la **densità di energia interna** per unità di massa.

Possiamo ora definire l'**energia totale** e , per unita' di massa, come la somma dell'energia cinetica $v^2/2$ piu' l'energia interna ϵ , per unita' di massa,

$$e = v^2/2 + \epsilon.$$

Il **primo principio della termodinamica**, formulato nel volume fisso V , afferma che la variazione nel tempo dell'energia totale $\mathcal{E}(V)$

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho e)(\mathbf{x}, t) dv, \quad (6.1.2) \quad \boxed{\text{mome}}$$

eguaglia l'opposto del flusso di energia totale di fluido attraverso ∂V

$$\int_{\partial V} \rho e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (6.1.3) \quad \boxed{\text{momfle}}$$

piu' le sorgenti di energia totale, di volume e di superficie, agenti in V e sul bordo ∂V

$$\int_V \rho r_e(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial V} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (6.1.4) \quad \boxed{\text{actione}}$$

dove \mathbf{h} e' la **sorgente di energia totale per unita' di superficie**, ed r_e e' la **sorgente di energia totale specifica**, per unita' di massa. In effetti il **primo principio della termodinamica** postula l'equazione che governa l'evoluzione dell'energia totale in forma macroscopica

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho e)(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial V} \rho e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho r_e(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial V} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (6.1.5) \quad \boxed{\text{mome'}}$$

Scriviamo ora questa equazione in una forma piu' chiara.

Riscriviamo l'equazione ^{kinen}(5.5.11) nel formalismo adottato in questo capitolo

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v}^2 dv + \frac{1}{2} \int_{\partial V} \rho \mathbf{v}^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv - \int_V \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v} dv + \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \mathbf{n} dS. \quad (6.1.6) \quad \boxed{\text{kinen}}$$

Sottraiamo ora ^{kinen}(6.1.6) da ^{mome'}(6.1.5), ricordando la definizione di energia interna deduciamo

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho \epsilon)(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial V} \rho \epsilon \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho r(\mathbf{x}, t) dv + \int_V \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v} dv - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (6.1.7) \quad \boxed{\text{inten}}$$

dove

$$r = (r_e - \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}),$$

e' la **sorgente di energia interna specifica**, dovuta al calore per radiazione, e

$$\mathbf{q} = -(\mathbf{h} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}),$$

e' la **sorgente di energia interna per unita' di superficie**, il **flusso di calore**, cioe' la produzione superficiale esterna di energia interna.

Deriviamo ora l'equazione che governa l'evoluzione di energia interna ϵ in forma locale. In linea con le precedenti leggi macroscopiche usando l'arbitrarieta' di V ,

il teorema del trasporto ^(5.1.14)_{trasp}, l'equazione di continuita' ^(5.1.8)_{cont} ed il teorema di Gauss ^(3.8.9)_{Gauss} segue facilmente la forma locale dell'equazione energia interna ϵ

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\epsilon}{dt} &= -\nabla \cdot \mathbf{q} - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \Xi + \rho r, \\ p &= p(\rho, \theta), \quad \epsilon = \epsilon(\rho, \theta), \end{aligned} \quad (6.1.8) \quad \boxed{\text{moterm}}$$

dove r e' la sorgente di energia per unita' di massa, \mathbf{q} il vettore flusso di calore, Ξ la **dissipazione**

$$\Xi = 2\mu D(\mathbf{v}) : D(\mathbf{v}) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})^2,$$

e $\frac{d}{dt} = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ e' la derivata materiale.

Le equazioni di stato lineari comportano la **legge di Fourier**,

$$\mathbf{q} = -\chi \nabla \theta,$$

dove χ e' una costante detta la diffusivita' termica. Nella prossima sezione vedremo che dalla disuguaglianza di Clausius-Duhem discende $\chi > 0$. Una esatta dipendenza di χ dal moto del continuo, o il suo valore se costante e' dato da leggi fenomenologiche.

6.1.2 Seconda legge della termodinamica

Per tutte le variabili termodinamiche densita', momento, energia interna, etc., siamo partiti con leggi di bilancio di quantita' macroscopiche, cio' conduce ad una teoria consistente, in quanto abbiamo uno strumento di misura per ciascuna di dette quantita' macroscopiche e possiamo controllare la verita' dei nostri assiomi. La sola quantita' macroscopica della quale non e' noto uno strumento di misura e' l'entropia, pertanto **con Callen postuliamo l'esistenza dell'entropia**. In linea con quanto fatto sinora per ogni porzione macroscopica, nella generica regione V , introduciamo la funzione entropia $S(V)$ della porzione di continuo nella regione V ,

$$S := \int_V \rho s \, dv.$$

Osserviamo che

La variazione dell'entropia $dS(V)/dt$ per un continuo in V e' dovuta a due circostanze la variazione dell'entropia dS_e/dt esterna, fornita a V dall'ambiente esterno, e la variazione dell'entropia $dS_i(V)/dt$, interna, prodotta internamente al sistema

$$\frac{dS(V)}{dt} = \frac{dS_i(V)}{dt} + \frac{dS_e(V)}{dt}.$$

La variazione dell'entropia dS_i/dt interna si annulla all'equilibrio, e nelle trasformazioni reversibili

$$\frac{dS_i(V)}{dt} = 0, \quad \forall V,$$

mentre dS_i/dt e' positiva nei processi irreversibili

$$\frac{dS_i(V)}{dt} \geq 0, \quad \forall V.$$

La variazione esterna di entropia dS_e/dt non ha segno definito, sebbene, lungo i *processi adiabatici* di un *sistema isolato* deve essere $dS_e/dt = 0$, il che comporta

$$\frac{dS(V)}{dt} \geq 0.$$

Il **Secondo principio della termodinamica** postula una disequazione che governa l'evoluzione dell'entropia in un volume finito V ,

$$\frac{dS(V)}{dt} \geq \int_{\partial V} \mathbf{j} d\mathcal{S} + \int_V \rho r_1 dx, \quad (6.1.9) \quad \boxed{\text{entbal}}$$

dove s is l'entropia per unita' di massa, \mathbf{j} e' il flusso di entropia, per unita' d'area ed unita' di tempo, r_1 e' la sorgente di entropia per unita' di massa.

Nel seguito useremo una versione semplificata del secondo principio della termodinamica, precisamente assumeremo che il flusso di entropia, e le sorgenti di entropia siano date da

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= -\frac{\mathbf{q}}{\theta}, \\ r_1 &= \frac{r}{\theta}. \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

Infine, stante l'arbitrarieta' del volume V , possiamo derivare l'equazione dell'entropia in forma locale,

$$\rho \frac{ds}{dt} \geq -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) + \rho \frac{r}{\theta}. \quad (6.1.11) \quad \boxed{\text{CoD}}$$

Moltiplicando $\overset{\text{CoD}}{(6.1.11)}$ per θ , esplicitiamo la derivata di \mathbf{q}/θ e ricaviamo

$$\rho\theta \frac{ds}{dt} - \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \nabla\theta + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho r \geq 0. \quad (6.1.12) \quad \boxed{\text{CD}'}$$

Osservazione 6.1.1 Osserviamo che le equazioni $\overset{\text{noterm}}{(6.1.8)}$, $\overset{\text{CD}'}{(6.1.12)}$ introducono un numero di incognite maggiore del numero delle equazioni.

Osservazione 6.1.2 Osserviamo che la quantita'

$$\int_V \rho\theta \frac{ds}{dt} dx,$$

e' misurabile!

6.1.3 Diseguaglianza di Clausius-Duhem

Nella termodinamica dei processi irreversibili un obiettivo e' collegare la variazione di entropia interna $dS_i(V)/dt$ ai vari fenomeni irreversibili caratterizzanti la costituzione fisica del sistema. Questo risultato e' ottenuto mediante la diseguaglianza di Clausius-Duhem. Per ricavare questa relazione in (6.1.12) e ricordiamo che da (6.1.8) ed usando l'equazione di continuita', segue

$$\rho \frac{d\epsilon}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - \Xi - \rho r = 0. \quad (6.1.13) \quad \boxed{\text{verso}}$$

Quindi sottraendo (6.1.13) da (6.1.12) ricaviamo

$$\theta \rho \frac{ds}{dt} - \rho \frac{d\epsilon}{dt} + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \nabla \theta + \Xi \geq 0. \quad (6.1.14) \quad \boxed{\text{CD}}$$

Questa diseguaglianza e' nota come la **diseguaglianza di Clausius-Duhem**. Essa deve valere per ogni moto regolare e questo consente di dedurre importanti limitazioni sulle equazioni costitutive.

6.2 Assiomi costitutivi

Il problema fondamentale della termodinamica e' la determinazione del moto una volta che siano assegnate le sorgenti, volumiche e superficiali, esterne. A tale proposito ricordiamo le equazioni indefinite della termodinamica.

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(x(X,t),t)}{dt} &= -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \mathbf{T} \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}^T, \\ \rho \frac{d\epsilon}{dt} &= -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \Xi + r - \nabla \cdot \mathbf{q} \\ \rho \theta \frac{d\eta}{dt} - \rho \frac{d\epsilon}{dt} + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \Xi - \left(\frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta} \right) &\geq 0. \end{aligned} \quad (6.2.1) \quad \boxed{\text{costu}}$$

Le (6.2.1) sono valide in \mathbf{x} ed in t , per ogni continuo \mathcal{B} . Pero', ora, a differenza della stereomeccanica, tali equazioni non sono piu' sufficienti a determinare il moto. Il numero delle equazioni scalari e' otto piu' una disequazione mentre quello delle incognite $\rho, \mathbf{v}, \theta, \eta, \mathbf{T}, \mathbf{q}$ e' 15. Notiamo che il pareggiamento non puo' essere ottenuto se non ci si esprime sulla costituzione fisica del materiale in esame. In effetti, a parita' di sorgenti esterne, di condizioni iniziali ed al contorno, le equazioni (6.2.1), precedentemente postulate, sono vere per ogni corpo \mathcal{B} , mentre il moto che si sviluppa (risposta del materiale) e' strettamente condizionato dal tipo di fluido in esame, sia esso un continuo elastico, liquido, gassoso o con caratteristiche piu' complesse.

Formalmente, una distinzione dei corpi continui avviene introducendo un'ulteriore struttura sull'insieme Ω . A tal fine, per un sistema continuo Ω introdurremo alcune definizioni ed il concetto di funzione di risposta di un corpo.

Un processo termico o moto $\Theta \equiv (\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \theta(\mathbf{x}, t))$ e' detto **ammissibile** se, esiste un sistema di interazioni meccaniche e termiche che renda per esso soddisfatte le equazioni del moto $(6.2.1)_{1,2,3,5,4}^{\text{costu}}$.

Un processo termodinamico Θ e' costituito dalle variabili che determinano, per $Y \in \Omega$, il moto piu' i seguenti quattro funzionali, detti **funzionali di risposta**

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon(y(Y, t), t, \theta(y, t)) \\ \eta &= \eta(y(Y, t), t, \theta(y, t)) \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}(y(Y, t), t, \theta(y, t)) \\ \mathbf{q} &= \mathbf{q}(y(Y, t), t, \theta(y, t)). \end{aligned} \quad (6.2.2) \quad \boxed{\text{proc}}$$

Le funzioni di risposta possono essere definite tramite l'unico funzionale

$$\mathcal{F} : (\Theta, t) \in \mathcal{X} \times \mathcal{I} \longrightarrow R^{11},$$

dove \mathcal{X} e' l'insieme di tutti i moti ammissibili.

Si noti che

le equazioni di bilancio e le leggi della termodinamica sono valide per tutti i corpi, la risposta del materiale, in corrispondenza ad uguali sollecitazioni esterne, \mathbf{b} , r cambia al variare del materiale.

Le assunzioni costitutive regolano le risposte dei materiali (di conseguenza restringono le classi di processi dinamici) in corrispondenza di date forze esterne e caratterizzano le proprieta' materiali del corpo¹. Tali restrizioni sono suggerite dall'evidenza sperimentale, ma la formulazione analitica di un'equazione costitutiva definisce materiali ideali, cioe' modelli matematici di materiali, validi sotto precise limitazioni sperimentali. Distinguiamo due tipi di restrizioni

- (1) *Vincoli sui possibili processi cui il corpo e' sottoposto.* Restrizioni su Θ , detti **vincoli**. Il vincolo piu' comune e' quello di rigidita' (deformazioni rigide) posto alla base della stereomeccanica.
- (2) *Vincoli sulla risposta: equazioni costitutive.* Restrizioni su \mathcal{F} , dette **equazioni costitutive**, ad esempio, si assume che $p = c\rho\theta$, $\epsilon = c\theta$, con c costante.

6.2.1 Assiomi costitutivi

Si presti attenzione al fatto che l'equazione costitutiva fornisce una definizione matematicamente chiara del materiale. Pertanto, deve essere considerata solo una prima guida verso l'esperienza fisica.

Iniziamo con un'utile definizione di storia di una funzione del tempo $\Psi(t)$, a valori scalari, vettoriali o tensoriali.

Nei casi che trattiamo $t > 0$ e' l'istante attuale, mentre denotiamo il tempo passato con la variabile $\tau \leq t$. Per convenienza, nella definizione di storia usiamo la variabile positiva $s := t - \tau$.

¹Per esprimere precisamente tali leggi dovremmo far ricorso ad i metodi statistici che studiano le leggi che governano il comportamento delle particelle di un dato sistema (molecole, atomi ioni, etc.).

Definizione 6.2.1 La *storia* di Ψ fino al tempo t e' indicata dall'applicazione Ψ^t

$$\Psi^t : s \in [0, \infty) \longrightarrow \Psi^t(s) := \Psi(t - s).$$

Elenchiamo di seguito gli assiomi costitutivi generalmente usati.

Principi o Assiomi costitutivi Tutte i funzionali di risposta \mathcal{F} , durante ogni moto ammissibile Θ debbono soddisfare le seguenti leggi

- (1) **Assioma del Determinismo** La risposta di \mathcal{F} , in Ω_t , t dipende da tutta la storia passata del moto $\Theta(\mathbf{x}, t)$ in $\Omega_t \times (-\infty, t]$.
- (2) **Assioma dell'Azione Locale** Il funzionale di risposta \mathcal{F} , in (\mathbf{x}, t) e' influenzato dal moto delle particelle \mathbf{y} in un intorno $B_\delta(\mathbf{x})$ di \mathbf{x} di ampiezza δ prefissata.
- (3) **Assioma dell'Equipresenza** Il funzionale di risposta \mathcal{F} deve includere tutte le variabili del moto da cui puo' dipendere la risposta del materiale, in modo che il moto sia presente nello stesso modo in tutte e quattro le funzioni di risposta.
- (4) **Assioma di Oggettivita'** La risposta di \mathcal{F} , in (\mathbf{x}, t) e' indipendente dal moto dell'osservatore. Vale a dire, il funzionale \mathcal{F} deve essere invariante al variare del riferimento rigido.
- (5) **Assioma di Dissipazione ridotta** La risposta di \mathcal{F} , in (\mathbf{x}, t) per ogni moto ammissibile, deve soddisfare la diseguaglianza di Clausius-Duhem (6.1.14).

Nel prossimo numero vedremo che il secondo assioma della termodinamica, al pari della seconda equazione di bilancio, fornisce precise limitazioni alle funzioni di risposta.

Definiamo *storia passata* della funzione Θ^t la seguente funzione

$$\Theta^t(., s) = \Theta(., t - s), \quad s \in [0, +\infty),$$

che assegna al valore $s = 0$ il valore attuale, e ad $s = +\infty$ il lontano (infinitamente) passato.

(i) Assioma del determinismo

Il primo principio afferma che il valore attuale della risposta di \mathcal{B} e' determinato dalla storia passata

$$\mathcal{F}(., t) = \mathcal{F}(\Theta^t(., s)). \quad (6.2.3) \quad \boxed{3.3}$$

Ovviamente, e' assurdo conoscere la storia del materiale da meno infinito nel tempo, pertanto si possono fare diverse assunzioni. Qui ci limitiamo a ricordare i materiali di tipo differenziale o anche materiali aventi *una memoria di tipo differenziale*.

3.3 **Definizione 6.2.2** Si dice che un materiale e' **di tipo differenziale** o **avente una memoria di tipo differenziale** se tutti i suoi funzionali costitutivi dipendono dalla storia Θ^t solo mediante le loro derivate temporali.

Il numero di derivate presenti nella dipendenza funzionale ³⁻³(6.2.2) denota la portata di memoria del continuo, di conseguenza, un materiale si dira' differenziale di ordine n se compaiono tutte le derivate fino all'ordine n . Nel seguito analizzeremo materiali differenziali di ordine uno e due. Pertanto, nei funzionali di risposta apparira' solo Θ all'istante attuale t assieme alle sue derivate temporali prime e seconde di Θ^2 .

(ii) Assioma dell'azione locale

Il principio dell'azione locale afferma che il funzionale di risposta in \mathbf{x} dipende dalla storia passata limitatamente ad un opportuno intorno $B_\delta(\mathbf{x})$. In altri termini, indicando con $\hat{\Theta}^t(\cdot, s)$, $\tilde{\Theta}^t(\cdot, s)$ le storie di due moti che coincidono in $B_\delta(\mathbf{x})$ per $s \in (-\infty, t]$, cioe' $\tilde{\Theta}_\delta^t(\cdot, s) = \hat{\Theta}_\delta^t(\cdot, s)$ dove

$$\tilde{\Theta}_\delta^t(\cdot, s) : \mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x}) \rightarrow \tilde{\Theta}^t(\mathbf{y}, s),$$

allora si ha

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, t, \hat{\Theta}_\delta^t(\cdot, s)) = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t, \tilde{\Theta}_\delta^t(\cdot, s)), \quad s \in [0, \infty).$$

3-4 **Definizione 6.2.3** *Un materiale si dice di tipo polare di grado m , se i funzionali di risposta in x dipendono dalla storia $\Theta_\delta^t(\cdot, s)$ solo attraverso i primi m gradienti spaziali di $\Theta_\delta^t(\cdot, s)$ in \mathbf{x} , $s \in [0, \infty)$. Si dice materiale semplice un materiale polare di grado uno, se e solo se:*

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, t, \Theta^t) = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t, \Theta^t(\mathbf{x}, \cdot), \nabla \Theta^t(\mathbf{x}, \cdot)).$$

La definizione ³⁻⁴6.2.3 individua una classe di materiali la risposta dei quali sia influenzata da un corto raggio di azione, potremo supporre che la risposta sia determinata, oltre che dalle variabili x, θ , dalle sole derivate prime di queste.

I primi due assiomi sono da confrontarsi con l'ipotesi, usualmente fatta in meccanica sulle forze, di essere in un problema ristretto di meccanica. Infatti, escludere dalla forza la dipendenza dalle derivate temporali di ordine due equivale a trovare che le equazioni del moto sono riducibili ad un sistema di forma normale per cui e' nota la risoluzione del problema di Cauchy.

(iii) Assioma dell'equipresenza

Ancora, il principio dell'equipresenza riflette il ben noto principio fisico di ragion sufficiente: non vi e', a priori, nessun motivo per escludere una variabile da uno dei funzionali costitutivi ^{proc}(6.2.2). Analiticamente, se si tien conto dei primi due principi, per materiali semplici e di tipo differenziale di ordine uno, esso richiede

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon(\mathbf{F}, \theta, \nabla \mathbf{v}, \nabla \dot{\mathbf{v}}, \nabla \theta, \dot{\theta}, \dot{\mathbf{v}}, \ddot{\theta}, \nabla \dot{\theta}) \\ \eta &= \eta(\mathbf{F}, \theta, \nabla \mathbf{v}, \nabla \dot{\mathbf{v}}, \nabla \theta, \dot{\theta}, \dot{\mathbf{v}}, \ddot{\theta}, \nabla \dot{\theta}) \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}(\mathbf{F}, \theta, \nabla \mathbf{v}, \nabla \dot{\mathbf{v}}, \nabla \theta, \dot{\theta}, \dot{\mathbf{v}}, \ddot{\theta}, \nabla \dot{\theta}) \\ \mathbf{q} &= \mathbf{q}(\mathbf{F}, \theta, \nabla \mathbf{v}, \nabla \dot{\mathbf{v}}, \nabla \theta, \dot{\theta}, \dot{\mathbf{v}}, \ddot{\theta}, \nabla \dot{\theta}) \end{aligned} \tag{6.2.4} \quad \boxed{\text{constit}}$$

²Nell'assiomatica di Stokes si assume valida la legge di Fourier che afferma $\mathbf{q} = -k\nabla\theta$. Da tale affermazione discende che la propagazione della temperatura avviene con velocita' infinita (diffusione). In particolare, se si prende una sbarra di acciaio a temperatura di 0 gradi centigradi e si riscalda ad un solo estremo, istantaneamente l'altro estremo risente di una temperatura non nulla. Tale paradosso e' facilmente superato se si tiene conto nei funzionali costitutivi (precisamente in ϵ) anche della dipendenza dalla derivata temporale della temperatura.

Ricordiamo che ad ogni classe di processi ammissibile corrispondono le quantità F , $\nabla \mathbf{v}$, ϵ , θ , $\nabla \theta$, $\dot{\theta}$, \mathbf{T} e \mathbf{q} che possono essere scelte indipendentemente. Precisamente, per ogni $x(X, t)$ $\Theta(x, t)$ corrispondono univocamente determinate le quantità \mathbf{F} , $\nabla \mathbf{v}$, ϵ , θ , \mathbf{T} and \mathbf{q} . Inoltre, le forze esterne vengono fissate in modo che valgano le equazioni di bilancio meccaniche e termodinamiche.

(iii) Assioma di oggettività dell'osservatore

Il principio di oggettività dell'osservatore anche detto **assioma dell'indifferenza materiale** afferma che la dipendenza di \mathcal{F} da Θ è indipendente dall'osservatore. Tale principio impone severe restrizioni sulla dipendenza funzionale dei funzionali dal moto.

Le quantità vettoriali \mathbf{q} , tensoriali \mathbf{T} obbediscono alle leggi di trasformazione (4.3.63). Ora supponiamo che la generica quantità scalare, vettoriale o tensoriale \mathcal{F} dipenda da quantità α_i anch'esse funzioni del riferimento, ipotesi certamente vera per i funzionali costitutivi (6.2.4). Il principio di oggettività richiede che la dipendenza funzionale di \mathcal{F} da α_i in \mathcal{R} coincida con quella di \mathcal{F} dalle corrispondenti α_i trasformate nel nuovo riferimento \mathcal{R}' .

Dalle proprietà tensoriali (6.2.4) delle funzioni di risposta, poiché le (6.2.4) debbono essere soddisfatte per ogni tensore ortogonale \mathbf{Q} deduciamo, in particolare, che le uniche variabili possibili sono la distanza relativa, (gradiente di deformazione), e la velocità relativa, (gradiente di velocità), le variabili scalari possono dipendere solo dagli invarianti principali dei tensori che compaiono nelle (6.2.4). Osserviamo ancora che \mathcal{F} dovrà dipendere solo dalla parte simmetrica dei tensori e quindi non da \mathbf{F} ma da uno dei tensori di Cauchy-Green (destro o sinistro), ad esempio da $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$. Inoltre, per quanto riguarda le derivate temporali, si può verificare che le derivate

$$\mathbf{A}_i = \frac{\partial^i \mathbf{C}}{\partial t^i}$$

sono quantità oggettive. Finalmente, supponendo una dipendenza arbitraria del tensore \mathbf{T} da \mathbf{v} si deduce, per il principio di oggettività \mathbf{T} deve dipendere unicamente dalla parte simmetrica del gradiente di velocità \mathbf{D} , dagli invarianti principali (1.2.4) dal modulo $|\mathbf{D}|$ e, per materiali differenziali di ordine due, dalla quantità

$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{D} \nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v} \mathbf{D}$$

che va sostituita a $\dot{\mathbf{D}}$ che non è una quantità invariante. Sempre per il principio di oggettività si deduce per \mathbf{T} , nel caso di fluidi incompressibili, la seguente espressione

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{D}, \mathbf{A}) = & 2\mu[\rho, \theta, \text{tr} \mathbf{D}, D_1, \det |\mathbf{D}|, |\mathbf{D}|] \mathbf{D} + \\ & \alpha_1[\rho, \theta, \text{tr} \mathbf{D}, D_1, \det |\mathbf{D}|, |\mathbf{D}|] \mathbf{A} + \alpha_2[\rho, \theta, \text{tr} \mathbf{D}, D_1, \det |\mathbf{D}|, |\mathbf{D}|] \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Ovviamente questa è una relazione molto complessa e, nel seguito verrà analizzata in casi particolari.

(iv) Assioma di dissipazione ridotta

Arriviamo così all'ultimo assioma costitutivo di dissipazione ridotta. Esso afferma che la diseuguaglianza di dissipazione ridotta

$$\rho \left(\theta \frac{d\eta}{dt} - \frac{d\epsilon}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \right) + \Sigma - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta} \geq 0, \quad (6.2.5) \quad \boxed{\text{rido}}$$

deve essere verificata da tutti i processi termodinamici ammissibili. Questo principio e' il piu' importante in quanto consente di trovare effettive restrizioni sui funzionali di risposta, ad esempio fornisce precise relazioni tra i vari funzionali di risposta (equazioni di stato per l'energia interna e l'entropia).

Una giustificazione dei principi adottati risiede nel fatto che essi sono semplici, naturali e che esiste una forte evidenza sperimentale in accordo con le equazioni costitutive dedotte da tali principi.

D'ora in avanti scegliamo come variabili essenziali alla descrizione del moto la densita', la velocita' e la temperatura. Sotto tali assunzioni, si puo' scrivere

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon} &= \epsilon_\rho(\rho, \theta)\dot{\rho} + \epsilon_\theta(\rho, \theta)\dot{\theta} \\ \dot{\eta} &= \eta_\rho(\rho, \theta)\dot{\rho} + \eta_\theta(\rho, \theta)\dot{\theta}.\end{aligned}$$

Inoltre, nel tensore degli sforzi ci sara' sempre un contributo isotropo di pressione, almeno alla quiete. Quindi noi considereremo la seguente forma per \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = -p(\rho, \theta)\mathbf{I} + \mathbf{V}(\rho, \theta, \nabla\mathbf{v} + \nabla^T\mathbf{v}). \quad (6.2.6) \quad \boxed{\text{stress'}}$$

In (6.2.6) \mathbf{V} rappresenta l'extrastress o meglio lo sforzo dovuto all'attrito tra le particelle del fluido. Il tensore \mathbf{V} e' anche detto **il tensore deviatore di sforzo**.

6.2.2 Assioma di oggettivita' dell'osservatore

In questa sottosezione studiamo il postulato dell'Invarianza della Risposta Materiale al Variare dell'Osservatore e ne studiamo due applicazioni una ad un continuo elastico non lineare isotropo, una ad un fluido linearmente viscoso.

L'assioma costitutivo piu' importante e' l'*Assioma relativo all'invarianza della risposta materiale al variare dell'osservatore*. Per spiegare questo assioma ci riferiamo ad un esempio. Sia \mathcal{B} una corda elastica pesante, un estremo della quale ruota con velocita' costante e provoca un allungamento di coefficiente δ . L'assioma in questione afferma che la forza che causa l'estensione e' uguale alla forza richiesta per produrre lo stesso allungamento quando la corda e' in quiete. In effetti l'osservatore solidale al riferimento ruotante con l'elastico vede la corda in quiete e lo stesso allungamento.

Leggi di trasformazione

Sinora, abbiamo riferito tutte le osservazioni (eventi) ad un solo osservatore, contraddistinto da un riferimento spazio-temporale \mathcal{R} .

Ogni osservatore associa ad ogni evento \mathbf{e} una coppia (\mathbf{x}, t) di variabili di \mathcal{R} .

Un secondo osservatore in \mathcal{R}' associa allo stesso evento \mathbf{e} la nuova coppia di variabili (\mathbf{y}', t') . Sia \mathbf{Q} la matrice del cambiamento di base nel passaggio dal riferimento \mathcal{R} ad \mathcal{R}' , e \mathbf{c} il vettore $O - O'$ differenza delle origini dei due sistemi. Le coordinate (\mathbf{x}, t) , (\mathbf{y}', t') dell'evento \mathbf{e} nei due sistemi \mathcal{R} , \mathcal{R}' sono collegate da

$$\mathbf{y}' := P - O' = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{y}, \quad (6.2.7) \quad \boxed{3-1}$$

dove le funzioni di t \mathbf{c} e \mathbf{Q} sono le quantita' caratteristiche del cambiamento di riferimento. Le (6.2.4)₃₋₁ forniscono le formule del cambiamento di riferimento. Si vede facilmente che le (6.2.7) caratterizzano i riferimenti che mantengono inalterate le misure degli intervalli spaziali.

3.1 **Definizione 6.2.4** Uno scalare α , un vettore \mathbf{v} , un tensore \mathbf{V} di \mathcal{R} si dicono indifferenti al cambiamento di osservatore \mathcal{R} in \mathcal{R}' se le nuove quantità α' , \mathbf{v}' , \mathbf{V}' in \mathcal{R}' sono collegate alle vecchie da

$$\alpha' = \alpha, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{Q}\mathbf{v}, \quad \mathbf{V}' = \mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^T.$$

Ricordiamo ora alcune regole di trasformazione per enti tensoriali. Osserviamo, innanzitutto, che da (6.2.4) segue

$$\mathbf{y}' - \mathbf{c} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}, \quad |\mathbf{y}' - \mathbf{c}| = |\mathbf{y}|.$$

Pertanto, il vettore differenza di punti e lo scalare distanza tra due punti sono indifferenti al cambiamento di riferimento. Ancora, si può affermare che ogni vettore che si trasforma come differenza di punti ed ogni scalare che si trasforma come la distanza tra due punti è indifferente.

Più generalmente, tutte le operazioni effettuate tra vettori indifferenti sono esse stesse indifferenti.

Per esempio, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{u}' &= \mathbf{Q}\mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}; \\ \mathbf{v}' \times \mathbf{w}' \cdot \mathbf{u}' &= \mathbf{Q}\mathbf{v} \times \mathbf{Q}\mathbf{w} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{u} = (\det \mathbf{Q})\mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \pm \mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Per le quantità cinematiche valgono le usuali regole del cambiamento di riferimento. Le grandezze collegate al moto possono o meno essere indifferenti. Precisamente, al variare dell'osservatore, il moto, nei due riferimenti, risulta descritto da $\hat{\mathbf{y}}'$, ed $\hat{\mathbf{y}}$ collegati da

$$\hat{\mathbf{y}}'(x', t) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{y}}(x, t).$$

Derivando rispetto ad x si ricava

$$\mathbf{F}' = \mathbf{Q}\mathbf{F}$$

quindi, la *tensore gradiente di deformazione non risulta indifferente*. Inoltre, derivando in t , si ottiene

$$\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}.$$

Di conseguenza, la velocità risulta indifferente solo per quei riferimenti aventi $\dot{\mathbf{c}} = 0$, $\dot{\mathbf{Q}} = 0$, cioè in quiete l'uno rispetto all'altro. Derivando ancora rispetto a t

$$\dot{\mathbf{v}}' = \ddot{\mathbf{c}} + \ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{y} + 2\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{v}},$$

si deduce che l'accelerazione risulta indifferente solo se $\ddot{\mathbf{c}} = 0$, $\ddot{\mathbf{Q}} = 0$. Quindi, l'accelerazione risulta indifferente solo nei riferimenti in moto traslatorio uniforme reciproco. È utile ricordare le seguenti identità

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &\longrightarrow \mathbf{Q}\nabla \mathbf{v}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T \\ \nabla \theta &\longrightarrow \mathbf{Q}\nabla \theta \\ \frac{D\mathbf{F}'}{Dt} &= \frac{D(\mathbf{Q}\mathbf{F})}{Dt} = \frac{D\mathbf{Q}}{Dt}\mathbf{F} + \mathbf{Q}\frac{D\mathbf{F}}{Dt} \\ &= \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F} + \mathbf{Q}\nabla \mathbf{v}\mathbf{F} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{F} + \mathbf{Q}\nabla \mathbf{v}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{F} \\ &= \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T\mathbf{F}' + \mathbf{Q}\nabla \mathbf{v}\mathbf{Q}^T\mathbf{F}', \\ \dot{\mathbf{F}}' &= \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}\mathbf{F}' + \mathbf{Q}\nabla \mathbf{v}\mathbf{Q}^T\mathbf{F}' = (\nabla \mathbf{v})'\mathbf{F}'. \end{aligned}$$

Ora esplicitiamo l'assioma in termini analitici. A tal fine vediamo come si trasforma lo sforzo al variare del riferimento. Siano (\mathbf{x}, \mathbf{T}) , $(\mathbf{x}', \mathbf{T}')$ due processi dinamici in \mathcal{R} , \mathcal{R}' , rispettivamente. Se

$$\mathbf{n}' = \mathbf{Q}\mathbf{n}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t),$$

per le forze di superficie \mathbf{t} , \mathbf{t}' relative alla superficie di normale \mathbf{n} , \mathbf{n}' rispettivamente, noi ci aspettiamo che sia

$$\mathbf{t}'(\mathbf{n}') = \mathbf{Q}\mathbf{t}(\mathbf{n}).$$

In termini del tensore di sforzo

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{t}'(\mathbf{n}') = \mathbf{T}' \cdot \mathbf{n}',$$

e quindi

$$\mathbf{T}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T.$$

2.1 **Definizione 6.2.5** *La risposta di un corpo continuo si dice **indipendente dall'osservatore** o **oggettiva** se data una legge costitutiva per $\widehat{\mathbf{T}}(\chi(\mathbf{x}, t), t)$ in un dato riferimento, questa resta invariata in tutti gli altri possibili riferimenti $\widehat{\mathbf{T}}'(\chi'(\mathbf{X}', t), t)$.*

Lemma 6.1 **Lemma 6.2.1** *Lo sforzo di un fluido non viscoso, e' indipendente dall'osservatore.*

Dim. Un fluido e' non viscoso quando $\mathbf{V} = 0$, e si ha

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I}.$$

La pressione e' funzione della densita' per un fluido compressibile o elastico, e' una variabile dinamica per un fluido incomprimibile. In entrambi i casi la pressione e' uno scalare invariante.

$$\widehat{p}(\mathbf{x}, t) = \widehat{p}'(\mathbf{x}', t),$$

dove $\widehat{}$ intende la legge di dipendenza funzionale dalle variabili spaziali e temporali. Per lo sforzo relativo alla superficie di normale \mathbf{n} risulta

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} \cdot \mathbf{n} = -p(\mathbf{x}', t)\mathbf{n} = -p(\mathbf{x}', t)\mathbf{Q}\mathbf{n}' = \mathbf{Q}\mathbf{T}'(\mathbf{x}', t) \mathbf{n}'.$$

Pertanto lo sforzo e' indipendente dal riferimento in quanto la funzione $p(\mathbf{x}, t)$ e' invariante. \square

Nella sottosezione successiva applichiamo il principio di indifferenza dal riferimento ad un fluido.

6.2.3 Fluidi linearmente viscosi

In questa sezione forniamo una semplice applicazione del principio di indifferenza dall'osservatore per le equazioni di un fluido linearmente viscoso, e discutiamo il problema della buona posizione per le equazioni di Navier-Stokes.

Indifferenza dell'osservatore Indichiamo con \mathcal{L} in l'insieme delle applicazioni lineari (endomorfismi), \mathcal{L} dallo spazio dei tensori doppi in se' stesso,

$$\mathcal{L} : \mathbf{A} \in E_3 \otimes E_3 \longrightarrow \mathbf{B} = \mathcal{L}(\mathbf{A}) \in E_3 \otimes E_3$$

gli elementi di \mathcal{L} in sono tensori del quart'ordine e si chiamano anche **tensori dell'elasticità**. Date due basi ortonormali $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{e}'_i\}$, collegate dalla matrice ortogonale \mathbf{Q} , $Q_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j$, indichiamo con S_{ij} , S'_{ij} le componenti di un tensore affine \mathbf{S} nelle due basi. Con il simbolo $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ denotiamo le diadi. Poniamo

$$\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j := \mathcal{L}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j), \quad \mathbf{u}'_i \otimes \mathbf{u}'_j := \mathcal{L}(\mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}'_j),$$

Una immediata conseguenza della linearità e' la seguente,

$$\mathbf{T} = \mathcal{L}(\mathbf{S}) \longleftrightarrow \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T = \mathcal{L}(\mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{Q}^T), \quad \forall \mathbf{Q}. \quad (6.2.8)$$

Definizione 7.1

Definizione 6.2.6 Un tensore di \mathcal{L} in si dice **indifferente dal riferimento** se trasforma due basi \mathbf{e}_i , \mathbf{e}'_j nelle basi \mathbf{u}_i , \mathbf{u}'_j di \mathcal{L} in collegate tra loro dalla stessa matrice di cambiamento di base, vale a dire

$$\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = Q_{il}\mathbf{e}'_l \otimes \mathbf{e}'_m Q_{jm} \longleftrightarrow \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j = Q_{il}\mathbf{u}'_l \otimes \mathbf{u}'_m Q_{jm}.$$

In modo equivalente scriviamo

$$C_{ijklm} = \mathbf{u}^l \cdot \mathcal{L}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{u}^m, \quad C'_{ijklm} = \mathbf{u}'_l \cdot \mathcal{L}(\mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}'_j) \cdot \mathbf{u}'_m. \quad (6.2.9) \quad \text{elastu}$$

Da (6.2.9)^{elastu} deduciamo che le componenti di $\mathbf{C} = \mathcal{L}$ si trasformano nelle basi trasformate secondo la usuale legge del cambiamento di base.

Proviamo che un tensore indifferente da \mathcal{R} e' individuato univocamente da solo due variabili indipendenti.

Lemma 7.2

Lemma 6.2.2 Sia \mathcal{L} un tensore dell'elasticità indifferente da \mathcal{R} . Allora, esistono due numeri k , μ detti, rispettivamente, modulo di compressione e di scorrimento, tali che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{I}) &= 3k\mathbf{I}, \\ \mathcal{L}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) &= 2\mu\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ ortogonali} \\ \mathcal{L}(\mathbf{A}_s) &= 2\mu\mathbf{A}_s, \quad \forall \mathbf{A} \text{ con } \text{tr}(\mathbf{A}) = 0. \end{aligned} \quad (6.2.10) \quad \text{split}$$

Dim. Siano S^i ed \mathbf{e}_i gli autovettori ed autovalori di un tensore simmetrico \mathbf{S} . Poniamo

$$\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j = \mathcal{L}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j).$$

Ricordando la linearità di \mathcal{L} , da (6.2.10)^{split} ricaviamo

$$T_{lk}\mathbf{u}_l \otimes \mathbf{u}_k = S_j\delta_{ij}\mathcal{L}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = S_j\delta_{ij}C_{ijkl}(\mathbf{u}_l \otimes \mathbf{u}_k).$$

Quindi, le immagini degli autovettori di \mathbf{S} risultano essere autovettori di \mathbf{T} . Cio' autorizza la seguente scrittura

$$\begin{aligned} T_1 &= a_1S_1 + a_2S_2 + a_3S_3, \\ T_2 &= b_1S_1 + b_2S_2 + b_3S_3, \\ T_3 &= c_1S_1 + c_2S_2 + c_3S_3. \end{aligned} \quad (6.2.11) \quad \text{indif}$$

□

Esercizio **Esercizio 6.2.1** *Provare che*

$$a_i = C_{11ii}, \quad b_i = C_{22ii}, \quad c_i = C_{33ii}.$$

Operando il cambiamento di riferimento $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, in $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$ ed applicando la legge di indifferenza (6.2.11) si trova

$$\begin{aligned} T_2 &= a_1 S_2 + a_2 S_3 + a_3 S_1, \\ T_3 &= b_1 S_2 + b_2 S_3 + b_3 S_1, \\ T_1 &= c_1 S_2 + c_2 S_3 + c_3 S_1. \end{aligned}$$

Quindi, per confronto, si ricava

$$a_1 = b_2 = c_3 = l, \quad a_2 = b_3 = c_1 = n, \quad a_3 = b_1 = c_2 = m.$$

Sostituendo tali valori nelle (6.2.11) troviamo

$$\begin{aligned} T_1 &= lS_1 + nS_2 + mS_3, \\ T_2 &= mS_1 + lS_2 + nS_3, \\ T_3 &= nS_1 + mS_2 + lS_3. \end{aligned} \tag{6.2.12}$$

Operando il cambiamento di riferimento $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, in $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$, si ottiene

$$\begin{aligned} T_2 &= lS_2 + nS_1 + mS_3, \\ T_1 &= mS_2 + lS_1 + nS_3, \\ T_3 &= nS_2 + mS_1 + lS_3. \end{aligned} \tag{6.2.13}$$

Onde, per confronto, si deduce $m = n$.

Un modo piu' comune di scrivere un tensore indifferente da \mathcal{R} e' il seguente

$$\mathbf{T} = \lambda \text{tr} \mathbf{S} \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{S}, \tag{6.2.14} \quad \boxed{\text{Tviscoso}}$$

dove si e' posto $\lambda := m = n$, $l = \lambda + 2\mu$. I coefficienti λ e μ sono noti come coefficienti di viscosita' di volume e di scorrimento.

6.3 Disequazione di Clausius-Duhem

c-d

Analizziamo ora le conseguenze del principio di **dissipazione ridotta** per fluidi lineari differenziali di ordine 1.

6.3.1 Dissipazione ridotta

Assumiamo le seguenti ipotesi costitutive

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon(\rho, \theta), & s &= s(\rho, \theta), & p &= p(\rho, \theta), \\ \mathbf{T} &= -p\mathbf{I} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu \mathbf{D}, & \mathbf{q} &= -\chi \nabla \theta. \end{aligned} \tag{6.3.1} \quad \boxed{\text{hp'}}$$

L'assioma (v) di dissipazione ridotta stabilisce che per tutti i processi ammissibili sia soddisfatta la disequaglianza

$$\rho \left[\theta \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta}(\rho, \theta) \right] \dot{\theta} - [p(\rho, \theta) + \rho \rho (\theta \frac{\partial \eta}{\partial \rho} - \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho})(\rho, \theta)] \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{V} : \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta} \geq 0. \quad (6.3.2)$$

Scegliendo $\theta = \theta(t)$, $\mathbf{v} = 0$ deduciamo

$$\theta \frac{\partial \eta}{\partial \theta}(\rho, \theta) = \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta}(\rho, \theta); \quad \theta = \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta},$$

per i gas politropici si assume

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \theta} = c_v, \quad (6.3.3)$$

dove la costante c_v denota il calore specifico a volume costante.

Fluidi compressibili

Sostituendo $\frac{hp'}{(6.3.1)}$ in $\frac{rido}{(6.2.5)}$ otteniamo

$$\begin{aligned} & \rho \left(\theta \frac{\partial s}{\partial \rho} - \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} + \frac{p}{\rho^2} \right) \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\theta \frac{\partial s}{\partial \theta} - \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta} \right) \frac{d\theta}{dt} \\ & + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D} + \chi \left(\frac{(\nabla \theta)^2}{\theta} \right) \geq 0. \end{aligned} \quad (6.3.4) \quad \boxed{\text{Ct}}$$

Si noti che

$$\frac{d\rho}{dt}, \quad \frac{d\theta}{dt}, \quad \nabla \theta, \quad \mathbf{D},$$

sono variabili indipendenti, inoltre i coefficienti di queste variabili sono indipendenti da questi valori.

Come **processo ammissibile** scegliamo ora $\dot{\theta} = 0$, $\nabla \theta = 0$, e sostituiamo $\alpha \nabla \mathbf{v}$ al gradiente di velocità. La disequaglianza di Clausius-Duhem implica

$$-\alpha [p(\rho, \theta) + \theta \frac{\partial \eta}{\partial \rho}(\rho, \theta) - \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho}(\rho, \theta)] \nabla \cdot \mathbf{v} + \alpha^2 \mathbf{D} : \mathbf{V}(\rho, \theta, \mathbf{D}) \geq 0 \quad (6.3.5) \quad \boxed{\text{cladu}}$$

Stante l'arbitrarietà di α ricaviamo la relazione per la pressione

$$p(\rho, \theta) = \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho}(\rho, \theta) - \theta \frac{\partial \eta}{\partial \rho}(\rho, \theta). \quad (6.3.6)$$

Pertanto, la $\frac{cladu}{(6.3.5)}$ si riduce a

$$2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D} + \lambda (\text{tr} \mathbf{D})^2 \geq 0$$

per tutti i tensori simmetrici \mathbf{D} . Scegliendo $\mathbf{v} = x_1 \mathbf{e}_2$, ricaviamo $\mu \geq 0$, mentre per $\mathbf{v} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ otteniamo $3(2\mu + 3\lambda) \geq 0$. In conseguenza del segno, i coefficienti μ e λ verranno detti coefficienti di viscosità di scorrimento, o di taglio e di volume.

Fluidi incompressibili, omogenei

Per fluidi incompressibili, omogenei con densità iniziale uniforme si ha $\rho(\mathbf{x}, t) = \text{const.} = 1$. Allora vale la seguente legge costitutiva

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon(\theta), & s &= s(\theta), & p &= p(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{T} &= -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, & \mathbf{q} &= -\chi\nabla\theta. \end{aligned} \quad (6.3.7) \quad \boxed{\text{hp}}$$

Sostituendo le ipotesi costitutive $\stackrel{\text{hp}}{(6.3.7)}$ in $\stackrel{\text{CD}}{(6.1.14)}$ ricaviamo

$$\rho \left(\theta \frac{ds}{d\theta} - \frac{d\epsilon}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} + 2\mu\mathbf{D} : \mathbf{D} + \chi \left(\frac{(\nabla\theta)^2}{\theta} \right) \geq 0.$$

Sia \mathbf{D}_0 il tensore simmetrico a traccia nulla. Si tenga presente che

$$\frac{d\theta}{dt}, \quad \nabla\theta, \quad \mathbf{D}_0,$$

sono variabili indipendenti. Quindi facendo variare dette variabili in $\stackrel{\text{ICt}}{(6.3.1)}$ deduciamo

$$\frac{d\epsilon}{d\theta} = \theta \frac{ds}{d\theta}, \quad \mu \geq 0 \quad \chi \geq 0.$$

In questo caso non è possibile ricavare alcuna informazione sulla pressione che diviene così una incognita dinamica.

Legge di Fourier Infine, per il processo $\mathbf{F} = \text{const.}$, $\theta = \theta(X)$ il quinto assioma implica

$$\kappa \geq 0,$$

che fornisce la **legge di Fourier**.

Limitazioni riassuntive

Riassumendo, l'assioma di dissipazione ridotta comporta

$$\begin{aligned} p(\rho; \theta) &= \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}(\rho; \theta) - \theta \frac{\partial\eta}{\partial\rho}(\rho, \theta) \\ \mu &\geq 0, \\ (2\mu + 3\lambda) &\geq 0 \\ \kappa &\geq 0, \end{aligned} \quad (6.3.8) \quad \boxed{\text{eqcost}}$$

dove il numero 3 si riferisce alla dimensione spaziale. Come osservato dianzi, è possibile imporre vincoli anche alla classe di processi che si analizza, ad esempio si può imporre il vincolo di isocoricità. Quest'ultima assunzione implica $\cdot\rho = 0$, e quindi la condizione $\stackrel{\text{eqcost}}{(6.3.II)}$ non è più valida. Si avrà in tal caso

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= (-p + \lambda\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, & \text{Compressibile,} \\ \mathbf{T} &= -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, & \text{Incompressibile,} \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

dove p è o la pressione termodinamica (compressibile) o una variabile incognita (incompressibile). Sostituendo le $\stackrel{\text{eqcost}}{(6.3.II)}$ nelle $(3.1)_4$ si trova, per i fluidi politropici,

$$\rho c_V \frac{d\theta}{dt} = -p\nabla \cdot \mathbf{v} + \Phi + \kappa\Delta\theta + r, \quad (6.3.10) \quad \boxed{\text{politr}}$$

dove

$$\Phi := \mathbf{V} : \mathbf{D} \geq 0,$$

e' la funzione di dissipazione. Questa condizione assieme a $\kappa \geq 0$ esprime i ben noti fatti sperimentali che la deformazione assorbe energia ma viceversa non cede energia, e che il calore scorre spontaneamente dal corpo piu' caldo a quello piu' freddo. La (7.4.3) governa l'evoluzione della temperatura nel fluido al variare di x e di t , come richiesto.

Osservazione 6.3.1 *La differenza piu' importante tra i liquidi ed i gas e' nella viscosita' di volume λ , che esprime la compressibilita' del fluido.*

6.3.2 Fluidi non-Newtoniani

In questa sezione forniamo alcuni cenni della nascente area della Meccanica di Fluidi Non-Newtoniani (FNN). La terminologia *fluidi non-newtoniani* puo' essere applicata ad un'ampia classe di materiali aventi una struttura materiale enormemente diversa tra loro, la motivazione principale per l'introduzione di questi fluidi e' fornita dalla incapacita' da parte del modello newtoniano (FN) di spiegare nuove fenomenologie che questi fluidi manifestano. I liquidi polimerici, i fluidi biologici, miscele liquide di materiali insolubili, sospensioni, cristalli liquidi forniscono appena un cenno di esempio per questa ampia classe di liquidi.

La differenza tra FNN ed FN si manifesta in molti modi. Qui discutiamo vari comportamenti tipici di FNN.

- (1) Capacita' di assottigliamento o ispessimento alla parete da parte del gradiente di velocita' (shear thinning, shear thickening);
- (2) Capacita' di rallentamento (creep);
- (3) Capacita' di rilassare gli sforzi;
- (4) Presenza di differenze degli sforzi normali nei moti laminari;
- (5) Presenza di sforzi nascosti.

Capacita' di assottigliamento o ispessimento alla parete da parte del gradiente di velocita' (shear thinning, shear thickening) vedi figura 7.1.

Consideriamo un moto laminare, per un FN la relazione tra sforzo \mathbf{V} e velocita' di deformazione \mathbf{D} e' lineare. Quando questa relazione non e' lineare si trovano i FNN, si presentano vari casi, nei piu' semplici \mathbf{V} dipende da una potenza γ di \mathbf{D} . Se $\gamma < 1$ si osservano comportamenti di assottigliamento alle pareti, se $\gamma > 1$ si riscontra uno spessimento alle pareti per \mathbf{D} . In figura si e' indicato con τ l'unica componente di sforzo $T_{12} = V_{12}$, e con k l'unica componente della velocita' di deformazione $D_{12} = D_{21}$ presente nel moto laminare.

Capacita' di rallentamento (creep), vedi figura 7.2.

Si assegna uno sforzo costante τ all'istante $t = 0$, e per FN vi corrisponde un allungamento \mathbf{F} (ϵ) costante. Per alcuni fluidi ϵ continua ad aumentare o a diminuire. In alcuni fluidi viscoelastici ϵ tende ad un valore asintotico non nullo, i solidi viscoelastici ϵ raggiunge per $t \rightarrow \infty$ il valore zero. Questo fenomeno e' noto come creep.

Capacita' di rilassamento dello sforzo (stress relaxation), vedi figura 7.3.

In questo caso si presenta il comportamento inverso si assegna un allungamento ϵ e si vuole mantenere costante in t . Per i FN basta assegnare uno stress costante, per alcuni FNN bisogna diminuire lo sforzo nel modo indicato in figura.

Presenza di differenze tra gli sforzi normali (normal stress differences).

Consideriamo un moto laminare $\mathbf{v} = ky\mathbf{i}$, con k costante. Si calcola subito che per FN si ha

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \lambda(tr\mathbf{D}) + 2\mu\mathbf{D}.$$

Si ha $T_{xy} = \mu k$, $T_{xx} = 0$, $T_{yy} = 0$, $T_{xx} - T_{yy} = 0$. In molti materiali, pero', e' presente la quantita' $T_{xx} - T_{yy} \neq 0$. Queste quantita' causano molti fenomeni interessanti come il rod climbing il fluido sale sulla superficie di un cilindro che ruota attorno al proprio asse.

Presenza di forzi nascosti (yield stress), vedi figura 7.4.

Vi sono dei materiali i quali, sottoposti ad uno sforzo, si mettono in moto solo dopo aver raggiunto un valore critico. Tali materiali sono noti come fluidi plastici di Bingham.

6.3.3 Leggi fenomenologiche

Nella classe delle relazioni costitutive soddisfacenti assiomi costitutivi sono aggiunte **leggi fenomenologiche** che distinguono tra i diversi modelli di continuo.

Ricordiamo alcune equazioni di stato usate nei continui.

Leggi fenomenologiche importanti sono le *equazioni costitutive* per la pressione $p(\rho, \theta)$, e l'energia specifica interna $\epsilon(\rho, \theta)$ che risultano date funzioni positive di ρ, θ note come potenziali termodinamici, esse determinano lo stato termodinamico del sistema. Il principio di dissipazione ridotta richiede che per ogni moto sia verificata la relazione

$$p(\rho, \theta) = \epsilon_\rho(\rho, \theta) - \theta s_\rho(\rho, \theta), \quad (6.3.11) \quad \boxed{\text{eqcost}}$$

dove il sottoscritto ρ denota la derivata parziale rispetto a ρ .

Il fluido \mathcal{F} e' detto **politropico**, se durante il moto, prendendo come variabili indipendenti temperatura θ densita' ρ , soddisfa la condizione che la sua energia interna sia funzione lineare della temperatura, cioe'

$$\left. \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta} \right|_{\rho = \text{const.}} = c_V,$$

dove la costante positiva c_V e' detta *calore specifico a volume costante*.

Durante processi termici stazionari, quasi tutti i gas verificano la legge di Boyle-Mariot

$$p(\rho, \theta) = R_* \rho \theta, \quad (6.3.12) \quad \boxed{\text{bm}}$$

dove $R_* > 0$ e' la costante universale dei gas. Un gas soddisfacente questa legge e' chiamato *gas perfetto*. L'equazione (6.3.12) e' usata per una vasta classe di gas. Vi e' un regime di sicurezza $r_1 < \rho < r_2$, e $\tau_1 < \theta < \tau_2$ nel quale il gas verifica

(6.3.12). Comunque per ogni gas vi è una soglia per la temperatura assoluta θ_c sotto la quale il gas diviene liquido. In questo caso avviene un cambiamento di fase, ed altre equazioni di stato diventano più appropriate, come ad esempio l'equazione di *Van der Waals*. **Equazioni fenomenologiche** più generali possono essere proposte.

Ricordiamo ora le definizioni di alcuni potenziali termodinamici utili nel seguito

ent **Definizione 6.3.1** *L'entalpia per unità di massa e' il potenziale termodinamico*

$$\Phi(\rho) := \int^{\rho} \frac{p'(s)}{s} ds; \quad \rho\Phi(\rho) := \rho \int^{\rho} \frac{p'(s)}{s} ds. \quad (6.3.13) \quad \text{enth}$$

L'energia libera di Helmholtz per unità di massa e' il potenziale termodinamico

$$\Psi(\rho) := \int^{\rho} \frac{p(s)}{s^2} ds; \quad \rho\Psi(\rho) := \rho \int^{\rho} \frac{p(s)}{s^2} ds. \quad (6.3.14) \quad \text{freen}$$

Da queste definizioni segue

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2}{d\rho^2} (\rho\Psi(\rho)) &= p'(\rho), \\ \rho (\Psi(\rho) - \Phi(\rho_b)) &= \frac{1}{2} \frac{p'(\bar{\rho})}{\bar{\rho}} \sigma^2, \end{aligned} \quad (6.3.15) \quad \text{Hel}$$

dove $\bar{\rho}$ è un punto tra ρ , e ρ_b .

Come importanti esempi di fluidi barotropici ricordiamo le seguenti **leggi fenomenologiche**:

- Un fluido è detto **isotermo** se i suoi moti sono soggetti al vincolo termodinamico di temperatura costante. Questo avviene se la temperatura ambiente non è sensibilmente variabile.

Il modello matematico che corrisponde a questo vincolo è dato da

$$p = k\rho.$$

- Un fluido è detto **isoentropico** se i suoi moti sono soggetti al vincolo termodinamico di entropia costante costante. Questo avviene se il processo è adiabatico. Il modello matematico che corrisponde a questo vincolo è dato da

$$p = k\rho^\gamma,$$

dove γ è detto **indice di politropia**.

Capitolo 7

Problema di buona posizione

Nelle due sezioni seguenti otterremo il pareggiamento tra il numero delle equazioni e delle incognite in tre casi:

caso (a) il materiale e' un liquido quindi puo' compiere solo moti incomprimibili, inoltre lo sforzo e' una pressione **fluidi non viscosi** (moti lenti);

caso (b) il materiale e' un continuo elastico isotropo, lo sforzo dipende solo dal gradiente di deformazione, e verifica il postulato di indifferenza dall'osservatore;

caso (c) il materiale e' un continuo fluido isotropo, lo sforzo dipende solo dal gradiente di deformazione, e verifica il postulato di indifferenza dall'osservatore.

Fluido non viscoso

Ricordiamo la definizione ^{press} 6.3.1 di **pressione** che si esprime analiticamente nel seguente modo

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}, \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I},$$

la funzione $p(\mathbf{x}, t)$ rappresenta la pressione del fluido in (\mathbf{x}, t) . La pressione e' una funzione scalare del moto per un fluido compressibile, e' un'incognita dinamica per un fluido incomprimibile. Nel seguito, supporremo che il fluido sia in moto con velocita' non troppo elevate e variabili lentamente nello spazio (uniformi), in modo da ritenere ancora che lo sforzo abbia puramente un carattere di pressione. In tali condizioni diamo la seguente definizione:

6.1 **Definizione 6.3.2** *Un fluido si dice **non viscoso** se lo sforzo ammette la seguente espressione*

$$T_{ij} = -p(\mathbf{x}, t)\delta_{ij}, \quad (6.3.1) \quad \text{press}$$

la funzione incognita $p = p(\mathbf{x}, t)$ e' detta¹ **pressione** esplicita dal fluido nel punto \mathbf{x} all'istante t .

¹Nel caso incomprimibile si noti la stretta analogia tra questa definizione e quella fornita nella stereodinamica classica quando si definisce la reazione vincolare per vincolo privo di attrito. In entrambi i casi si pone un vincolo cinematico sulle posizioni (stereodinamica) o sui moti (fluidodinamica), che si traduce dinamicamente nell'aggiunta di una nuova forza incognita reazione vincolare (stereodinamica) o pressione (fluidodinamica).

7.1 Eulero incomprimibile

7.1.1 Moto non stazionario

Se imponiamo il vincolo interno di isocoricita'², sostituendo l'espressione $\overset{\text{press}}{(6.3.1)}$ di \mathbf{T} nelle equazioni del moto deduciamo le **equazioni indefinite di Eulero**

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) &= \rho \mathbf{b} - \nabla p, \end{aligned} \quad (7.1.1) \quad \boxed{\text{eulein}}$$

dove \mathbf{b} e' la forza per unita' di massa. Le equazioni che reggono il moto sono cinque, ed uguagliano il numero delle funzioni incognite $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$, $\rho(\mathbf{x}, t)$. Quindi, il problema del pareggiamento tra equazioni ed incognite, in questo caso, e' risolto. Alle $\overset{\text{eulein}}{(7.1.1)}$ vanno aggiunte opportune condizioni iniziali ed al contorno. Come dati iniziali si assegnera' il campo delle velocita' e di densita' in tutti i punti x di Ω all'istante iniziale 0, vale a dire

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}). \quad (7.1.2)$$

Osservazione 7.1.1 La $\overset{\text{eulein}}{(7.1.1)}_2$ e' equivalente alla formulazione Lagrangiana

$$\rho(\mathbf{x}(X, t), t)J = \rho(X, 0),$$

pertanto dalla condizione di omogeneita' iniziale $\rho(X, 0) = 1$ e dalla condizione di incomprimibilita' $J = 1$ si ricava

$$\rho(\mathbf{x}, t) = 1, \quad \forall x, t \in \Omega \times (0, T).$$

Tali fluidi sono detti **omogenei**

Per i fluidi omogenei le equazioni di Eulero si riducono a

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= \mathbf{b} - \nabla p. \end{aligned} \quad (7.1.3) \quad \boxed{\text{euleom}}$$

Per i fluidi che possono compiere solo moti isocori, si verifica sperimentalmente che la pressione deve risultare una incognita del moto, in quanto rappresenta la risposta del materiale (reazione) che si oppone ad ogni eventuale variazione di volume. Tali fluidi (con p incognita del moto) si dicono *incompressibili*.

Dobbiamo, ora, assegnare delle condizioni alla frontiera $\partial\Omega$, tale studio verra' svolto nel capitolo successivo. Dovendo imporre condizioni fisicamente ragionevoli, notiamo subito che la pressione non puo' essere controllata in quanto e' essa stessa una variabile dinamica. Infatti, in conseguenza dell'incompressibilita' il fluido e' in grado di sopportare una pressione, comunque elevata avendo tale forza l'unico

²Il vincolo di isocoricita' e' posto sul processo cinematico ed impone che il volume elementare sia costante al variare del tempo.

effetto di modificare il volume. Inoltre, a causa della mancanza di viscosità il fluido può scorrere sulle pareti. L'unica condizione certamente soddisfatta è la condizione di impermeabilità sulle pareti, cioè

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}, t) = V(\mathbf{x}, \pm 1), \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (7.1.4)$$

dove n è la normale esterna ad Ω in (\mathbf{x}, y) e V è la componente normale della velocità dei punti di $\partial\Omega$.

Se la parete è fissa si semplifica la condizione su \mathbf{v}

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (7.1.5) \quad \boxed{\text{nbc1}}$$

Per lo studio dei moti non stazionari si pone il **Problema dei valori iniziali ed al contorno** per un fluido omogeneo, incompressibile, non viscoso consideriamo il seguente sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, & x, t &\in \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= \mathbf{b} - \nabla p, & x, t &\in \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), & x &\in \Omega, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) &= 0, & (\mathbf{x}, t) &\in \partial\Omega \times (0, T). \end{aligned} \quad (7.1.6) \quad \boxed{\text{eulib}}$$

Il sistema $\stackrel{\text{eulib}}{(7.1.6)}$ rappresenta un sistema di quattro equazioni alle derivate parziali nelle quattro incognite \mathbf{v} , p funzioni di \mathbf{x} , t , del primo ordine in t ed in \mathbf{x} .

Si ha la seguente identità

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 \quad (7.1.7) \quad \boxed{\text{conv}}$$

Quindi $\stackrel{\text{eulib}}{(7.1.6)}$ si scrive anche

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{b} - \nabla P, \quad x, t \in \Omega \times (0, T) \quad (7.1.8) \quad \boxed{\text{rot}}$$

con $P = p + \frac{v^2}{2}$.

Esercizio 7.1.1 Provare $\stackrel{\text{conv}}{(7.1.7)}$.

Suggerimento

Basta scrivere per componenti la seguente identità

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v})^T + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v})^T.$$

7.1.2 Moto stazionario

Per lo studio di moti stazionari si pone il **Problema dei valori al contorno** per un fluido omogeneo, incomprimibile, non viscoso, retto dal seguente sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, & x, t \in \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= \mathbf{b} - \nabla p, & x, t \in \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) &= 0, & (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \end{aligned} \quad (7.1.9) \quad \boxed{\text{euilbst}}$$

7.1.3 Moti particolari

Per i **moti irrotazionali** da $\frac{\text{rot}}{(7.1.8)}$ discende l'equazione

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{b} - \nabla P, \quad x, t \in \Omega \times (0, T),$$

dalla quale si deduce che una *condizione necessaria affinché esistano moti irrotazionali e che le forze siano conservative*, infatti calcolando il rotore dell'equazione del moto, si ricava

$$\nabla \times \mathbf{b} = 0, \quad x, t \in \Omega \times (0, T).$$

Ricordiamo la definizione $\frac{\text{piano}}{4.1.10}$. Un **moto** si dice **piano** di giacitura π , o che avviene sul piano π , se le traiettorie delle particelle appartengono sempre ad uno stesso piano, indichiamo con \mathbf{e}_3 la direzione della normale a π .

Definizione 7.1.1 Funzione corrente *In un moto piano di giacitura π , incomprimibile, la velocità ammette un'espressione del tipo*

$$\mathbf{v} \equiv (\partial_{x_2} \psi, -\partial_{x_1} \psi, 0).$$

La funzione ψ è detta funzione corrente. Per un moto piano irrotazionale la funzione corrente è una funzione armonica.

Lemma 7.1.1 *Il moto di fluido non viscoso incomprimibile, soggetto a forze conservative gode delle seguenti proprietà*

- (i) *Un moto irrotazionale in un istante, rimane così per tutti gli istanti successivi;*
- (ii) *Il moto conserva la **circolazione**;*
- (iii) *Le **linee vorticosi** sono trasportate con il fluido.*

$\boxed{7.1}$ **Esercizio 7.1.2** *Dimostrare che, in ogni fluido incompressibile, non viscoso la potenza delle forze interne è nullo.*

Suggerimento Nel caso non viscoso l'espressione del lavoro delle forze interne dL^i , nel dominio Ω e' data da

$$\int_{\Omega} P^{int}(\mathbf{x}, t) dx = - \int_{\Omega} \nabla p(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dx = \int_{\Omega} p(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dx = 0. \quad (7.1.10)$$

7.2 **Esercizio 7.1.3** *Dimostrare che, in ogni fluido incompressibile, non viscoso, pesante, in quiete le superficie di uguale pressione sono piani orizzontali.*

Cio' accade, ad esempio, per un liquido in un recipiente rigido in quiete ove la pressione esterna si identifica con quella atmosferica. Ovviamente, lo stesso non puo' applicarsi al caso del mare, in condizioni di quiete sulla terra, in quanto la forza peso non puo' piu' ritenersi costante (varia con la latitudine).

7.1 **Teorema 7.1.2 Teorema di Bernoulli** *In ogni fluido incompressibile, non viscoso, pesante, in moto stazionario vale la seguente identita'*

$$\frac{v^2}{2g} + x_3 + \frac{p}{g} = c_1 \quad (7.1.11) \quad \boxed{\text{bern}}$$

ove g e' l'accelerazione di gravita', x_3 la coordinata della particella nella direzione verticale orientata verso l'alto, p la pressione, v la velocita'. **La quantita'** c_1 **si mantiene costante lungo le traiettorie.**

L'uguaglianza ^{bern}(7.1.11) e' nota come **identita' di Bernoulli o teorema della tre quote**, esso afferma la costanza della somma della quota effettiva $v^2/2g$, della quota x_3 e della quota piezometrica p/g . Il teorema di Bernoulli e' una conferma della validita' delle ^{eulibst}(7.2.7) nel caso stazionario.

7.3 **Esercizio 7.1.4** *Si dimostri che, in ogni fluido incompressibile, non viscoso, pesante, sottoposto a forze conservative ed irrotazionale, in moto stazionario vale la seguente identita'*

$$\frac{v^2}{2g} + x_3 + \frac{p}{g} = c_2 \quad (7.1.12) \quad \boxed{1\text{bern}}$$

La quantita' c_2 **si mantiene costante nello spazio.**

7.4 **Esercizio 7.1.5** *Dedurre la conservazione dell'energia e scriverla.*

Applicazione di ^{bern}(7.1.11):

Teorema 7.1.3 Teorema di Torricelli *Alla base di un recipiente, contenente liquido, limitato superiormente da una superficie orizzontale π , vi e' un'apertura piccola A (serbatoio dell'acqua). Se il moto e' molto lento e l'altezza del pelo libero e' h , costante, si possono calcolare le tre altezze per un punto che parte da π in t_1 ed esce da A in t_2 . Si ha $v(t_1) = 0$, $p(t_1)/g = p_e/g$ e' la pressione esterna dell'aria*

e coincide con quella $p(t_2)/g$ in A. Prendendo un sistema di coordinate con l'asse x_3 verticale e rivolto verso l'alto con origine su π si deduce

$$\frac{p_e}{g} = \frac{v^2(t_2)}{2g} - h + \frac{p_e}{g}, \quad (7.1.13) \quad \boxed{\text{torr}}$$

quindi la velocita' di efflusso v_e e' data da $v = \sqrt{2gh}$. Poiche' si sa calcolare con precisione v_e questa formula e' usata per il calcolo dell'accelerazione di gravita', vedi figura ^{figV1} 7.1.

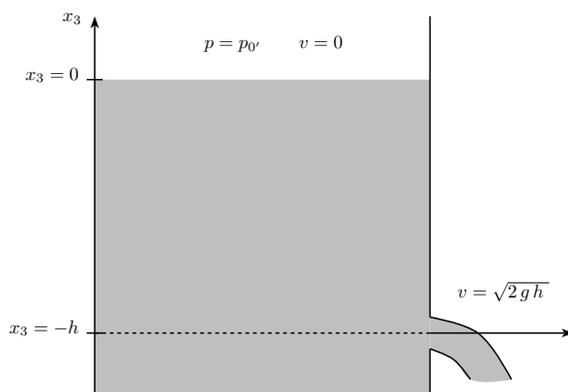


Figura 7.1: Teorema di Torricelli

figV1

Lemma 7.1.4 Tubo di Venturi Nel tubo orizzontale di Venturi, vedi figura ^{figV2} 7.2, un fluido incompressibile scorre con velocita' stazionaria ed irrotazionale. In questo caso la pressione si abbassa dove il tubo e' piu' stretto.

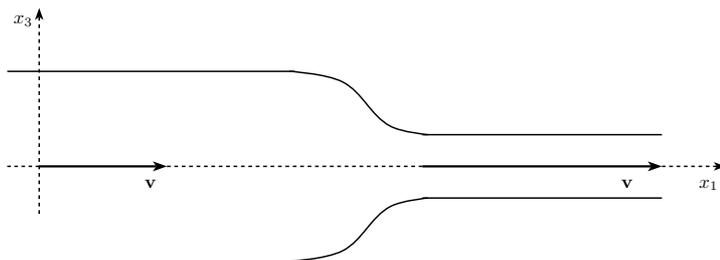


Figura 7.2: Tubo di Venturi

figV2

Infatti dal teorema di Castelli sappiamo che il flusso deve rimanere costante lungo il tubo, e la velocita' aumenta dove il tubo e' piu' stretto. Inoltre la forza peso e' indipendente dalla sezione. Dal teorema di Bernoulli si sa che

$$p + \frac{v^2}{2} = \text{cost.} \quad (7.1.14) \quad \boxed{\text{torr}}$$

quindi la pressione (di efflusso) p deve diminuire nei punti nei quali la velocità aumenta.

Forniamo ora un esempio in cui il problema ^(7.1.1)^{eulein} nel caso stazionario fornisce un risultato in disaccordo con i dati sperimentali: i moti di Poiseuille.

Il moto di Poiseuille

Studiamo un nuovo moto stazionario soddisfacente ^(7.1.1)^{eulein} ed in componenti, il seguente sistema

$$\sum_i v^i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} = -\nabla p + \mathbf{b}, \quad (7.1.15) \quad \boxed{\text{stazi2}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Il moto di cui diamo una soluzione esatta e' stato introdotto da Poiseuille. La regione in cui si svolge il moto e' una striscia piana, delimitata da due rette parallele che, senza ledere la generalita', sono rappresentate nel riferimento $\mathcal{R} = \{O, x, y\}$ del piano dalle equazioni $y = 1$, $y = -1$, precisamente

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}.$$

Cerchiamo una soluzione delle equazioni di Navier-Stokes nella forma di moto, detto laminare,

$$\mathbf{v}(x, y, t) = V(y)\mathbf{e}_1, \quad (7.1.16) \quad \boxed{\text{linprof}}$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

il sistema ^(7.1.15)^{stazi2} si riduce, cosi', all'unica equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine nell'incognita $V = V(y)$

La ^(7.1.15)^{stazi2} si riduce a

$$0 = -\nabla p + \mathbf{f}. \quad (7.1.17) \quad \boxed{\text{stazi1}}$$

Nel moto di Poiseuille, la condizione ^(7.1.5)^{nbci} e' automaticamente soddisfatta. Inoltre, la ^(7.1.17)^{stazi1} e' sempre soddisfatta per forze di tipo potenziale $\mathbf{f} = \nabla U$, pur di scegliere la pressione coincidente con il potenziale U della forza. Pertanto, per i fluidi non viscosi si trova il risultato non realistico che ogni profilo lineare del tipo ^(7.1.16)^{linprof} rappresenta un moto possibile, prescindendo dalle forze agenti!

7.2 Eulero comprimibile

7.2.1 Moto non stazionario

Consideriamo ora fluidi comprimibili. Se la densita' non e' piu' costante, dalle equazioni del moto deduciamo le **equazioni di Eulero**

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (7.2.1) \quad \boxed{\text{eulco}}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{b} - \nabla p.$$

Le equazioni che reggono il moto sono quattro, mentre le incognite sono cinque ρ , \mathbf{v} , p . Quindi, ancora il problema non è completamente risolto. L'equazione restante viene ricavata in generale dalle leggi della termodinamica classica. Se non si vuole far ricorso alla teoria generale, si può restringere o la classe dei processi termodinamici cui il continuo è sottoposto: adiabatici, isotermini, o altro, oppure la classe dei moti che il continuo può effettuare: vincolo di isocoricita'.

Nel primo caso, la termostatica fornisce precise leggi che consentono di determinare la pressione una volta nota la densità. I fluidi sono detti **barotropici** se $p = p(\rho)$, in tal caso, obbediscono una delle seguenti *equazioni costitutive*,

$$p = k\rho \text{ isotermini}; \quad p = k\rho^\gamma \text{ isentropici}, \quad \gamma > 1. \quad (7.2.2) \quad \boxed{\text{cost}}$$

Sostituendo una delle ^{cost}(7.2.2), nelle ^{eulco}(7.2.1) le incognite si riducono a quattro \mathbf{v} , ρ , e si ottiene finalmente il pareggiamento tra numero di incognite e di equazioni.

In entrambi i casi si ottiene un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali non lineare del primo ordine nello spazio e nel tempo. Alle ^{eulco}(7.2.1) vanno aggiunte opportune condizioni iniziali ed al contorno. Come dati iniziali si assegnerà il campo delle velocità e di densità in tutti i punti y di Ω , all'istante iniziale $t = 0$, vale a dire

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(y, 0) &= \mathbf{v}_0(y), \\ \rho(y, 0) &= \rho_0(y). \end{aligned} \quad (7.2.3) \quad \boxed{\text{condin}}$$

Inoltre, alle ^{eulco}(7.2.1) dobbiamo assegnare delle condizioni alla frontiera $\partial\Omega$. Se il continuo non è contenuto in un recipiente rigido, allora si impongono delle condizioni di continuità tra gli sforzi e le forze superficiali esterne. In tal caso valgono le considerazioni dianzi fatte per i fluidi incompressibili. Perché il problema risulti ben posto, noi dobbiamo assegnare su $\partial\Omega$ un numero opportuno di condizioni al contorno che simultaneamente siano fisicamente controllabili, ed assicurino l'esistenza di una soluzione, almeno localmente nel tempo. Nel seguito si assume che la parete sia impermeabile, cioè si riflette sulla semplice condizione su \mathbf{v}

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (7.2.4)$$

Il sistema finale che regge i moti di fluido barotropico non viscoso si scrive

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(\mathbf{x}, t) + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T) \\ \rho \frac{d}{dt}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \rho \mathbf{b} - \nabla p, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T) \\ p &= p(\rho), \\ y(\mathbf{x}, 0) = x, \quad \rho(\mathbf{x}, 0) &= \rho_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad x \in \Omega \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) &= 0 \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \end{aligned} \quad (7.2.5) \quad \boxed{\text{eulcob}}$$

Nel caso non viscoso l'espressione euleriana della densità $\mathbf{D} : \mathbf{T}$ del lavoro delle forze interne dL^i , cf. (15.5), diviene

$$dL^i(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dx. \quad (7.2.6)$$

7.2.2 Moto stazionario

Per lo studio di moti stazionari si pone il **Problema dei valori al contorno** per un fluido comprimibile, non viscoso, retto dal seguente sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \rho \mathbf{v} &= 0, & x, t &\in \Omega \times (0, T), \\ \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= \rho \mathbf{b} - \nabla p, & x, t &\in \Omega \times (0, T), \\ p &= p(\rho), & \rho &\geq 0, & \int_{\Omega} \rho \, dv &= M, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) &= 0, & (\mathbf{x}, t) &\in \partial\Omega \times (0, T). \end{aligned} \quad (7.2.7) \quad \boxed{\text{eulibst}}$$

Esempio - Si ricordi che le equazioni di Poisson-Stokes per il moto laminare di Poiseuille hanno la forma

$$\begin{aligned} 0 &= -\nabla p_b + \rho \mathbf{b}, & x &\in \Sigma, \\ \mathbf{v}_b &= \sum_{i=1}^2 f^i(\mathbf{x}_3) \mathbf{e}_i, & x_1, x_2 &\in R^2, x_3 \in (0, d). \end{aligned}$$

Per forze \mathbf{b} costanti $\rho^{-1} \nabla p_b = \mathbf{b}$, per $\pi' = p'_b / \rho$, dove l'apice denota la derivata rispetto a ρ , deduciamo

$$\pi_b(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 b^i x_i.$$

Caso (i) : Per $\vec{b} = (0, 0, b_3(\mathbf{x}_3))$ la forza e' potenziale e lo stato di quiete non omogeneo e' possibile. Precisamente, una soluzione esatta e'

$$\vec{v}_b = (0, 0, 0), \quad \rho_b = \rho_b(\mathbf{x}_3).$$

Le equazioni di Eulero per $p = k\rho$ forniscono

$$k \frac{\partial \rho_b}{\partial x_3} = \rho_b b_3(\mathbf{x}_3).$$

La soluzione

$$\rho_b(\mathbf{x}_3) = c \exp(B_3(\mathbf{x}_3)/k), \quad c > 0, \quad B_3 := \int^{x_3} b_3(s) ds,$$

e' certamente positiva e si annulla all'infinito per forze opportune. Per esempio, per

$$b_3(\mathbf{x}_3) = -\frac{\alpha}{x_3}, \quad \longrightarrow B_3 = \ln x_3^{-\alpha}$$

otteniamo le soluzioni

$$\vec{v}_b = (0, 0, 0), \quad \rho_b(\mathbf{x}_3) = c |x_3|^{-\alpha/k}.$$

Se la forza a distanza (di volume) e' conservativa di potenziale U valgono le proprieta' seguenti

7.2.3 Moti particolari

Lemma 7.2.1 *Il moto di fluido non viscoso comprimibile (elastico), soggetto a forze conservative gode delle seguenti proprietà*

- (i) *Un moto irrotazionale in un istante, rimane tale per tutti gli istanti successivi*
- (ii) *Il moto conserva la circolazione*
- (iii) *Le linee vorticosi sono trasportate con il fluido*

Pertanto, un modo di realizzare moti irrotazionali consiste nell'assegnare una velocità all'istante iniziale irrotazionale.

Vale inoltre il seguente lemma.

Lemma 7.2.2 *Si dimostri che, in ogni fluido compressibile, non viscoso, sottoposto a forze conservative $\mathbf{b} = \nabla U$, valgono le seguenti identità:*

- (a) *moto potenziale $\mathbf{v} = \nabla\varphi$*

$$\nabla\left(\frac{v^2}{2} + \varphi_t + \iota - U\right) = 0 \quad (7.2.8) \quad \boxed{\text{bern1}}$$

ove l'entalpia $dt = \frac{1}{\rho}dp + \theta d\eta$ rappresenta il calore per unità di massa e, per processi isoentropici, si scrive $\iota = \int^\rho \frac{p'(s)}{s} ds$.

- (b) **Teorema di Bernoulli** *moto stazionario,*

$$\mathbf{v} \cdot \nabla\left(\frac{v^2}{2} + \iota - U\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + \iota - U\right) = 0. \quad (7.2.9) \quad \boxed{\text{bern2}}$$

- (c) *moto stazionario, ed irrotazionale*

$$\nabla\left(\frac{v^2}{2} + \iota - U\right) = 0. \quad (7.2.10) \quad \boxed{\text{bern3}}$$

Si supponga sempre $p'(\rho) > 0$, e la funzione $c_s = \sqrt{p'(\rho)}$ si chiama **velocità del suono**. Notiamo esplicitamente che la velocità del suono dipende da x e da t ma, per processi isentropici, tale dipendenza non avviene tramite la densità ma solo attraverso la temperatura θ . Infatti, dalle assunzioni $p = R\rho\theta = k\rho^\gamma$ si ricava

$$p' = \gamma \frac{\rho^\gamma \theta}{\rho \theta} = \frac{R\gamma\theta}{k}$$

Per processi isotermi la velocità del suono $c_s = R$ e non dipende né da x né da t .

Indicando con ν il modulo della velocità si chiama **numero di Mach** e si indica con m il rapporto tra ν e c_s , $m = \nu/c_s$. Infine, un moto si dice **subsonico**, **risp. supersonico** se $m < 1$, risp. $m > 1$. La funzione $\int^\rho \frac{p'(s)}{s} ds$, introdotta precedentemente, e' l'entalpia, coincide con l'energia libera di Helmholtz se il vincolo imposto sul processo termodinamico e' quello di processo isoterma.

7.4 Fluido viscoso

7.4.1 Fluidi linearmente viscosi

Fluidi differenziali di ordine 1, linearmente viscosi

Ricordiamo che per un fluido uno stato e' è definito tramite la densità ρ o tramite il volume specifico $v = \rho^{-1}$, dalla temperatura e dal campo cinetico. Assumiamo che la dipendenza di \mathbf{T} e di \mathbf{q} dai gradienti sia lineare, cioè supponiamo le leggi di linearità di Stokes e Fourier

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= -p(\rho, \theta)\mathbf{I} + \mathbf{V}(\rho, \theta, \mathbf{D}) \\ \mathbf{q} &= -\kappa(\rho, \theta)\nabla\theta,\end{aligned}\tag{7.4.1}$$

dove \mathbf{V} è un tensore del quarto ordine, p , e κ funzioni scalari. La scelta di \mathbf{T} è stata perseguita richiedendo che lo sforzo alla quiete sia una pura pressione. Supporremo, ancora, che le funzioni ϵ , η , p , \mathbf{V} , κ siano funzioni continue di ρ , θ e che non dipendano esplicitamente da x e t (fluido omogeneo) e che non vi sia una direzione preferita (isotropia). Notiamo esplicitamente che un processo sarà omogeneo spazialmente e temporalmente per il continuo solo se lo stato termocinetico risulta indipendente da x e t . Applicando il principio di indifferenza (oggettività) come fatto nella sezione 2 di questo capitolo, troviamo (6.2.14) che comporta

$$\mathbf{V}(\rho, \theta, \mathbf{D}) = 2\mu\mathbf{D} + \lambda\nabla \cdot \mathbf{v}\mathbf{I},$$

con λ e μ funzioni di (ρ, θ) .

Come osservato dianzi, è possibile imporre vincoli anche alla classe di processi che si analizza, ad esempio si può imporre il vincolo di isocoricità. Quest'ultima assunzione implica $\dot{\rho} = 0$, e quindi la condizione (6.3.11)^{eqcost} non è più valida. Si avrà in tal caso

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= (-p + \lambda\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, & \text{Compressibile,} \\ \mathbf{T} &= -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, & \text{Incompressibile,}\end{aligned}\tag{7.4.2}$$

dove p è o la pressione termodinamica (compressibile) o una variabile incognita (incompressibile). Sostituendo le (6.3.11)^{eqcost} nelle (6.2.4)₄^{3.1} si trova, per i fluidi politropici,

$$\rho c_V \frac{d\theta}{dt} = -p\nabla \cdot \mathbf{v} + \Phi + \kappa\Delta\theta + r, \tag{7.4.3} \quad \boxed{\text{politr}}$$

dove

$$\Phi := \mathbf{V} : \mathbf{D} \geq 0,$$

è la funzione di dissipazione. Questa condizione assieme a $\kappa \geq 0$ esprime i ben noti fatti sperimentali che la deformazione assorbe energia ma viceversa non cede energia, e che il calore scorre spontaneamente dal corpo più caldo a quello più freddo. La (7.4.3)^{politr} governa l'evoluzione della temperatura nel fluido al variare di x e di t , come richiesto.

7.4.2 Equazioni di Navier-Stokes in vari riferimenti

Per alcuni fluidi, in ogni punto y il tensore degli sforzi risulta dato da

$$T_{ij} = 2\mu D_{ij} + (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij}$$

dove \mathbf{D} e' il tensore gradiente di velocita' di deformazione, λ e μ sono costanti e $p = p(y, t)$ e' la pressione. Si provi che

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \operatorname{div} \mathbf{T} = \sum_i T_{ij} \mathbf{e}_j = \mu \Delta \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla p,$$

dove \mathbf{e}_i sono vettori di una base ortonormale e Δ e' l'operatore laplaciano cioe'

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

I fluidi governati da tale tensore sono detti *fluidi linearmente viscosi*, se si assume il fluido incomprimibile i fluidi sono detti fluidi di Navier-Stokes. Le costanti μ e λ denotano la **viscosita' di taglio e di volume**.

Scriviamo le equazioni di Navier-Stokes in tre diversi sistemi di riferimento.

(i) **Coordinate Cartesiane.** Siano (\mathbf{x}, y, z) le coordinate cartesiane e siamo (u, v, w) le componenti della velocita'

$$\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}.$$

Le equazioni di Navier-Stokes in coordinate cartesiane si scrivono

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_x + \nu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f_y + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \nu \Delta w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \tag{7.4.4} \quad \boxed{\text{3carte}}$$

dove $\nu := \mu/\rho$ denota la viscosita' cinematica.

La vorticita' $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ e' data da

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} \equiv \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \tag{7.4.5}$$

(ii) **Coordinate Cilindriche Polari.** Siano (r, θ, z) le coordinate cilindriche

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

e siamo (v_r, v_θ, v_z) le componenti della velocita'

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{k}.$$

Le equazioni di Navier-Stokes in coordinate cilindriche polari si scrivono

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \quad (7.4.6)$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + f_r + \nu \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right), \quad (7.4.7)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \quad (7.4.8)$$

$$= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + f_\theta + \nu \left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right), \quad (7.4.9)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \nu \nabla^2 v_z, \quad (7.4.10)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (7.4.11)$$

dove

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

La vorticità $\text{rot} \mathbf{v}$ è data da

$$\text{rot} \mathbf{v} \equiv \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}, \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial r v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right). \quad (7.4.12)$$

(iii) **Coordinate Sferiche.** Siano (r, θ, ϕ) , $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi)$, $\phi \in [0, 2\pi)$, le coordinate sferiche

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta,$$

e siano (v_r, v_θ, v_ϕ) le componenti della velocità

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_\phi \mathbf{e}_\phi.$$

Le equazioni di Navier-Stokes in coordinate sferiche si scrivono

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \quad (7.4.13)$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + f_r + \nu \left(\nabla^2 v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right), \quad (7.4.14)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \quad (7.4.15)$$

$$= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + f_\theta + \nu \left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right), \quad (7.4.16)$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \quad (7.4.17)$$

$$= -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + f_\phi + \nu \left(\nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right), \quad (7.4.18)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 v_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0, \quad (7.4.19)$$

dove

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right).$$

La vorticità $\text{rot } \mathbf{v}$ è data da

$$\left(\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_\phi \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right), \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial r v_\phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial r v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right). \quad (7.4.20)$$

Esercizio 7.4.1 Si consideri il continuo in coordinate cilindriche. Provare che per l'atto di moto

$$\mathbf{v}(\rho\theta, z, t) := v_\rho(\rho, z, t)\mathbf{e}_\rho + v_z(z, t)\mathbf{k},$$

le linee di vortice sono delle circonferenze con centri sull'asse z situate su piani ortogonali a z , vedi figura 7.3.

Verificare la formula (7.1.7) in coordinate cilindriche.

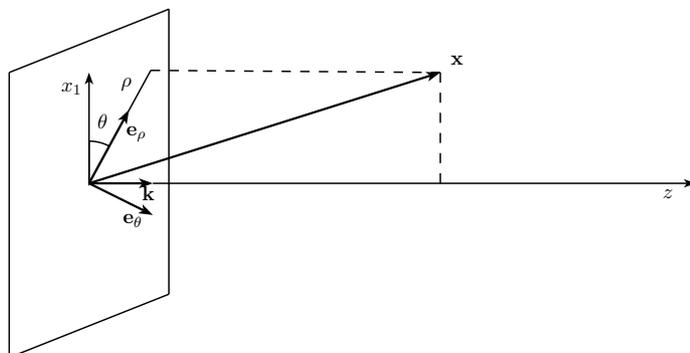


Figura 7.3:

figV3

7.5 Condizioni al bordo

Le condizioni al bordo per equazioni che governano modelli fisici debbono essere fisicamente controllabili e matematicamente corrette.

Ricordiamo che l'ordine di differenziabilità, del sistema di PDE che reggono il moto del continuo, varia per i fluidi viscosi, elastici, viscoelastici e per fluidi non viscosi,.

7.5.1 Classi di condizioni al bordo

Per porre condizioni al bordo sulle variabili di moto è opportuno distinguere tra:

(A) tipo di frontiera, (B) tipo di dominio.

(A) Tipo di frontiera $\partial\Omega$ Condizioni al bordo! Tipo di frontiera, $\partial\Omega$ può essere:

(A-i) rigida in moto³;

³Se $\partial\Omega$ è rigida, impermeabile in moto nel riferimento \mathcal{R} , mediante opportuno cambiamento di riferimento diventa fissa nel riferimento \mathcal{R}'

- (A-ii) *rigida e porosa*;
- (A-iii) *frontiera libera: frontiera nota deformabile* frontiera in contatto con un corpo esterno del quale e' noto il moto;
- (A-iv) *frontiera libera incognita, con o senza effetto di capillarita'*: Frontiera in contatto con un corpo esterno del quale e' incognito il moto.
- B) Tipo di dominio, Ω ha una delle seguenti caratteristiche:
- (B-i) *limitato*;
- (B-ii) *esterno ad una regione compatta*;
- (B-iii) *con frontiera non compatta*.

Per quanto riguarda la regolarita' spaziale, deriviamo le condizioni dai termini sul bordo spaziale $\partial\Omega \times (0, T)$, che denota la superficie laterale del cilindro spazio-tempo $\Omega \times (0, T)$. Poniamo

$$\partial\Omega = \mathcal{S} \cup \Gamma_t,$$

dove \mathcal{S} denota la parte nota indeformabile della frontiera, Γ_t quella incognita deformabile.

7.5.2 Condizioni al bordo sulla velocita'

Distinguiamo tra **fluidi non viscosi** e **fluidi viscosi**. Per i **fluidi non viscosi** matematicamente retti da equazioni di tipo iperbolico si puo' assegnare solo la componente normale della velocita'. Per i **fluidi viscosi** matematicamente retti da equazioni di tipo parabolico si possono assegnare le condizioni di Dirichlet o di Neumann.

(A) Tipo di frontiera

(A-i) $\mathcal{S} \subseteq \partial\Omega$ rigido ed impermeabile.

Notiamo che lo sforzo risulta indeterminato sul contorno rigido.

Per i **fluidi non viscosi** bisogna sempre assumere l'ipotesi di impermeabilita' descritta analiticamente da

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = w_n,$$

dove w_n rappresenta la velocita' normale dei punti del bordo $\partial\Omega$.

Per i **fluidi viscosi** assumiamo la *condizione di aderenza* del fluido viscoso a \mathcal{S} , cioe'

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{S} \times (0, \infty),$$

dove \mathbf{w} denota la velocita' dei punti di \mathcal{S} , e \mathbf{v} la velocita' delle particelle di fluido al bordo $\partial\Omega$. In particolare nel riferimento \mathcal{R}' in cui \mathcal{S} e' fisso assumiamo \mathbf{v} nullo.

(A-ii) $\mathcal{S}' \subseteq \partial\Omega$ rigido e poroso

Continuiamo ad assegnare su $\mathcal{S}' \times (0, \infty)$,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = w'_n, \quad \text{fluidi non viscosi,}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}'(\mathbf{x}, t), \quad \text{fluidi viscosi}(\mathbf{x}, t).$$

In questo caso \mathbf{w}' e' una funzione vettoriale assegnata. L'equazione di continuita' comporta

$$\int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{w}' \cdot \mathbf{n} dx = 0. \quad (7.5.1) \quad \boxed{\text{fluxc}}$$

Si noti che, nel caso incompressibile la (7.5.1) rappresenta una condizione di compatibilita' in quanto la densita' e' nota, mentre nel caso compressibile (7.5.1) la densita' ρ e' un'incognita.

(A-iii) $\partial\Omega_t = \Gamma_t$ deformabile, fuori Ω_t vi e' un materiale il cui moto e' noto $\mathcal{C}(t)$.

Sulla superficie geometrica $\Gamma_t = \partial\Omega_t \cap \partial\mathcal{C}(t)$ assumiamo la condizione di impermeabilita'

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_t \times (0, \infty), \quad (7.5.2) \quad \boxed{\text{vel}}$$

dove \mathbf{n} e' la normale esterna a Γ_t , \mathbf{w} e' la velocita' delle particelle di $\partial\mathcal{C}(t)$, e \mathbf{v} e' la velocita' dei punti di $\partial\Omega_t$. Ricordiamo che Γ_t e' una *superficie materiale nota*.

In questo caso, anche per fluidi viscosi la componente tangenziale della velocita' al bordo non si annulla (scivolamento, slip condition).

(A-iv) $\partial\Omega_t$ deformabile, fuori Ω_t vi e' un materiale di moto incognito $\mathcal{C}(t)$.

Sulla superficie geometrica $\Gamma_t = \partial\Omega_t \cap \partial\mathcal{C}(t)$ ancora richiediamo l'impermeabilita'

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_t \times (0, \infty), & (7.5.3) \quad \boxed{\text{vel}'} \\ \mathbf{w}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_t \times (0, \infty), & \end{aligned}$$

dove \mathbf{n} e' la normale esterna a Γ_t , \mathbf{w} e' la velocita' dei punti di Γ_t , e $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ la velocita' dei punti di $\partial\Omega_t$. Ora il moto di Γ_t e' incognito, e rappresenta una ulteriore incognita del problema.

La **frontiera Γ_t di Ω_t e' deformabile ed incognita** in tal caso supponiamo che la frontiera libera Γ_t sia una piccola deformazione della superficie piana $x_3 = \text{cost.}$, quindi nel sistema di assi cartesiani $\mathcal{R} = \{x_1, x_2, x_3\}$, posto $x_* = (x_1, x_2)$, ammettera' la rappresentazione cartesiana

$$\Gamma_t = \{x_*, x_3 : x_* \in (0, a) \times (0, b), x_3 = \zeta(\mathbf{x}_*, t)\}.$$

Il dominio Ω_t ammette la rappresentazione cartesiana

$$\Omega_t = \{x_*, x_3 : x_* \in (0, a) \times (0, b), 0 < x_3 < \zeta(\mathbf{x}_*, t)\}.$$

Dalla geometria si conosce che la normale a Γ_t in $(\mathbf{x}_*, \zeta(\mathbf{x}_*, t))$ si esprime nel seguente modo

$$\mathbf{n} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_* \zeta|^2}} \left(-\nabla_* \zeta, 1 \right),$$

dove

$$\nabla_* \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

Si deduce pertanto che la normale e' funzione della superficie Γ_t . Inoltre, bisogna mantenere l'ipotesi di impermeabilita' descritta analiticamente da

$$\varphi \cdot \mathbf{n} = V_n, \quad x, t \in \Gamma_t \times (0, T),$$

dove

$$V_n = \frac{dy(Y, t)}{dt} \cdot \mathbf{n} \equiv \left(0, 0, \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right) \cdot \left(-\frac{\nabla_* \zeta}{\sqrt{g}}, \frac{1}{\sqrt{g}}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

rappresenta la componente normale della velocita' delle particelle Y del bordo Γ_t . Sottolineiamo la difficoltà del problema derivante dal fatto che anche la normale \mathbf{n} e' incognita.

(A-iv)-(I). Se e' incognita solo la superficie Γ_t , osserviamo che il moto di Γ_t e' descritto da

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{w}.$$

Si puo' assegnare solo la componente normale

$$\frac{dx}{dt} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_t \times (0, \infty).$$

Quest'ultima condizione permette lo scivolamento del fluido sulla superficie e costituisce un problema piu' complesso.

Alle ^{vel}(7.5.2) dobbiamo aggiungere delle *condizioni dinamiche*, sul salto dello sforzo \mathbf{Tn} agente sui due lati di Γ_t satisfies again ^{stress}(7.5.5).

(A-iv)-(II). Se fuori Ω_t vi e' un corpo in moto incognito $\mathcal{C}(t)$, per un fluido viscoso si puo' assegnare anche la continuita' della componente tangenziale della velocita'

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_t \times (0, \infty).$$

In generale la frontiera sara' l'unione di parti di bordo sopra descritto $\partial\Omega_t = \Sigma \cup \Sigma' \cup \Gamma_t$. In tal caso, su ciascuna parte e' assunta la corrispondente condizione.

Per moti stazionari si scrive $\Gamma_t = \Gamma$.

(B) Tipo di dominio

Sia $\mathcal{C}(t)$ un contenitore rigido in moto in un sistema di riferimento $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Com'e' noto, se \mathbf{v}_G e' la velocita' del suo baricentro G , e $\omega(t)$ e' la velocita' angolare al tempo t , la velocita' \mathbf{w} della sua generica particella $x \in \mathcal{C}(t)$ e' data da

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_G(t) + \omega(t) \times x, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}(t) \times (0, \infty).$$

Su $\partial\mathcal{C}(t) = \partial\Omega_t$ assegnamo la condizione di aderenza

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{w}(x, t) = \mathbf{v}_G(t) + \omega(t) \times x, \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_t \times (0, \infty).$$

Distinguiamo:

(B-i) Ω contenuto in \mathcal{C} limitato;

(B-ii) Ω esterno \mathcal{C} limitato.

Nel caso **(B-ii)** nel riferimento \mathcal{R} dobbiamo assegnare anche la condizione sulla velocita' all'infinito

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Si noti che se $\omega(t) \neq 0$, in \mathcal{R}' solidale a \mathcal{C} la velocità del fluido aumenta all'infinito linearmente!

Si noti che se $\omega(t) = 0$, e $\mathbf{v}_G \neq 0$, in \mathcal{R}' solidale a \mathcal{C} troviamo

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \widehat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{v}_G(t), \quad t \in (0, \infty), \quad (7.5.4)$$

boundary

dove $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$ è la velocità del fluido nel nuovo riferimento. In questo riferimento le equazioni del moto ^{eulibst}(7.2.7), ^{eulcob}(7.2.5), contengono nuovi termini lineari nella velocità. Per i fluidi incompressibili queste equazioni sono state proposte da Oseen *Equazioni di Oseen*. Analoghe equazioni valgono per i fluidi comprimibili.

7.5.3 Condizioni dinamiche al bordo

Alle ^{vel}(7.5.2) dobbiamo aggiungere una *condizione dinamica*, che regola il salto dello sforzo $\mathbf{T}\mathbf{n}$ sui due lati di Γ_t

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{T}\mathbf{n} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{T}_C\mathbf{n} + \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_t \times (0, \infty), \quad (7.5.5)$$

stress

dove \mathbf{T}_C è il tensore degli sforzi del continuo noto \mathcal{C} , e \mathbf{c} è responsabile degli effetti di capillarità, sensibili solo su scala microscopica.

Per i **fluidi non viscosi** il termine di bordo si riduce ad una pura pressione

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\varphi} = -p\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}.$$

Per la frontiera libera Γ_t affinché si controlli il termine di sforzo sul bordo $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\varphi} = -p\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}$ è necessario anche assegnare la pressione. In genere per una goccia di fluido (bolla di sapone) si fissa il salto di pressione sul bordo nel seguente modo

$$p = p^e + c(\mathbf{x}, t),$$

dove $c(\mathbf{x}, t)$ rappresenta il doppio della curvatura media della superficie $c = (1/R_1 + 1/R_2)$, ed R_1, R_2 sono i raggi di curvatura di Γ_T in x .

Accanto a questa richiesta, per controllare il termine di bordo bisogna anche fare delle ipotesi sullo sforzo $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{t}(\mathbf{n})$, che non è più puramente normale. Si assume

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{T}^e\mathbf{n}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_t \times (0, T),$$

$\mathbf{T}^e\mathbf{n}$ è lo sforzo esterno.

Se l'esterno è costituito da aria in riposo \mathbf{T}^e è puramente normale a Γ_t . Detto $\boldsymbol{\tau}$ e' un versore tangente alla superficie Γ_t si deduce

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}\boldsymbol{\tau} = 0.$$

(ii) la **frontiera Γ_t di Ω è assegnata e piana, liquido in contatto con un altro continuo, superficie libera (stress free)**. In tal caso bisogna mantenere l'ipotesi di impermeabilità descritta analiticamente da

$$\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} = V_n, \quad x, t \in \Gamma_t \times (0, T),$$

e la equazione $V_n = 0$ esprime la condizione che le particelle del bordo Γ_t sono a riposo. Accanto a questa richiesta per controllare il termine di bordo bisogna anche fare delle ipotesi sullo sforzo $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{t}(\mathbf{n})$, che per un fluido viscoso non e' piu' puramente normale. Si assume

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = -p^e \mathbf{n}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_t \times (0, T),$$

dove $p^e \mathbf{n}$ e' la pressione esterna. Se l'esterno e' costituito da aria in riposo \mathbf{T}^e e' puramente normale a Γ_t . Detto $\boldsymbol{\tau}$ e' un versore tangente alla superficie Γ_t si ha

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}\boldsymbol{\tau} = 0.$$

L'effetto di struttura elastica puo' essere considerato introducendo una discontinuita' nello sforzo normale proporzionale all'operatore K_1 che descrive il comportamento dinamico della struttura. In tal caso si richiede che *ogni deformazione produce sforzo solo nella direzione normale alla superficie*,

$$\mathbf{T}_e = \left(K_1(\zeta) - p_e \right) \mathbf{n},$$

dove p_e e' la pressione costante esterna.

La condizione di salto tra gli sforzi del fluido $\mathbf{T}_f(\mathbf{u}, p)$ e della paret elastica \mathbf{T}_e e' espressa

$$(\mathbf{T}_f - \mathbf{T}_e)\mathbf{n} = \kappa \mathcal{H}(\zeta)\mathbf{n}, \quad (7.5.6) \quad \boxed{\text{const}}$$

dove la costante positiva κ denota la tensione superficiale. Sia

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \frac{\lambda}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I},$$

dove \mathbf{I} e' il tensore unitario,

$$\mathbf{T}_f(\mathbf{u}, p) = -p\mathbf{I} + \mu \mathbf{S}(\mathbf{u}),$$

qui p e' la pressione.

Il bilancio tra gli sforzi $\boxed{\text{const}}$ (7.5.6) si puo' esprimere nella forma

$$\begin{aligned} -p + \mu \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} &= K(\zeta) - p_e, & \text{on } \Gamma_\zeta, \\ \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{S}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{S}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{on } \Gamma_\zeta, \end{aligned} \quad (7.5.7) \quad \boxed{\text{constitutive}}$$

dove \mathbf{t}_α , $\alpha = 1, 2$ sono vettori unitari tangenti alla superficie libera Γ_ζ , e p_e e' una pressione costante. Introduciamo ora lo *sforzo guida (leading stress)*

$$K(\zeta) = \kappa \mathcal{H}(\zeta) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_e \mathbf{n} + p_e. \quad (7.5.8) \quad \boxed{\text{curva'}}$$

Ipotesi su $K(\zeta)$

Assumiamo che $K(\zeta)$ sia un *operatore lineare* in funzione di ζ .

In casi semplici si puo' **linearizzare** anche l'effetto di curvatura \mathcal{H} .

parQui consideriamo solo modelli di strutture che contengono sforzi lineari elastici, e poniamo

$$K'(\zeta) = \beta \Delta' \zeta - \alpha \Delta'^2 \zeta + b \zeta, \quad (7.5.9) \quad \boxed{\text{mean}}$$

dove le costanti positive α , β , b denotano coefficienti di regolarità. Alla frontiera si può distinguere

Membrana viscoelastica

$$K(\zeta) := -\partial_t^2 \zeta + \gamma \partial_t \Delta' \zeta + K'(\zeta), \quad \text{on } \Sigma, \quad (7.5.10) \quad \boxed{\text{viscoel}}$$

qui γ denota il coefficiente di visco-elasticità, α , β e b sono coefficienti puri di elasticità. Precisamente, $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, e $b \geq 0$ sono coefficienti di elasticità, tensione superficiale e frizione.

Membrana elastica

$$K(\zeta) := -\partial_t^2 \zeta + K'(\zeta), \quad \text{su } \Sigma, \quad (7.5.11) \quad \boxed{\text{elast}}$$

il significato è lo stesso del numero precedente.

Frontiera libera regolare

$$K(\zeta) := H'(\zeta) = \beta \Delta' \zeta, \quad \text{on } \Sigma, \quad (7.5.12) \quad \boxed{\text{freereb}}$$

dove β denota una tensione superficiale.

Se $T_e = -p_e \mathbf{I}$ teniamo in conto della nonlinearity della curvatura (7.5.10), o (7.5.11), o (7.5.12) descrivono completamente il moto del fluido in un recipiente elastico ed una soluzione resta determinata quando altezza, densità e velocità sono fissati all'istante iniziale.

7.5.4 Condizioni al contorno sulla temperatura

Per il valore della temperatura si può fissare o la condizione di Dirichlet o di Neumann a seconda del tipo di pareti se sono perfetti conduttori di calore o totalmente adiabatici. Per pareti generiche si useranno condizioni miste di Dirichlet e Neumann.

Per pareti perfette conduttrici \mathcal{S}_1 assegniamo la condizione di Dirichlet

$$\Theta(\mathbf{x}, t) = \Theta_1(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{S}_1 \times (0, \infty),$$

dove Θ_1 è una funzione scalare che rappresenta la temperatura di \mathcal{S}_1 , e Θ è la temperatura dei punti di $\partial\Omega$. Per pareti perfettamente adiabatiche \mathcal{S}_2 richiediamo la condizione di Neumann

$$\frac{\partial}{\partial n} \Theta(\mathbf{x}, t) = \Theta_2(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{S}_2 \times (0, \infty),$$

dove \mathbf{n} è la normale esterna a \mathcal{S}_2 , Θ_2 è una data funzione scalare che denota la temperatura dei punti di \mathcal{S}_2 , e Θ è la temperatura dei punti di $\partial\Omega$.

Un'altra condizione al bordo per la temperatura di tipo misto su \mathcal{S}_3 , è la legge di raffreddamento di Newton:

$$\chi \mathbf{n} \cdot \nabla \Theta(\mathbf{x}, t) + \kappa(\Theta - \Theta_e)(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{S}_3 \times (0, \infty), \quad (7.5.13) \quad \boxed{\text{inro06}}$$

dove \mathbf{n} è la normale esterna, Θ è la temperatura dei punti di \mathcal{S}_3 . Ancora Θ_e è una data funzione scalare che segna la temperatura delle particelle di \mathcal{S}_3 , e κ è il

coefficiente di scambio di calore tra le particelle fluide e quelle dell'ambiente esterno ad \mathcal{S}_3 . L'equazione (7.5.13) esprime il bilancio dei flussi di calore alla frontiera.

In seguito consideriamo pareti perfette conduttrici di calore, $\mathcal{S}_1 = \partial\Omega$ aggiungendo la condizione di Dirichlet al bordo.

Per domini non limitati, aggiungiamo la condizione all'infinito per la temperatura

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \Theta(\mathbf{x}, t) = \Theta_\infty > 0.$$

7.5.5 Condizioni sulla densita'

Per avere soluzioni fisicamente significative dobbiamo aggiungere le condizioni supplementari

$$\rho(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, \infty). \quad (7.5.14) \quad \boxed{\text{piu}}$$

Pertanto in un teorema di esistenza dobbiamo cercare soluzioni con ρ soddisfacente anche (7.5.14).

(A) Tipo di frontiera

(A-i) $\mathcal{S} \subseteq \partial\Omega$ rigido ed impermeabile.

Non si puo' controllare la densita' al bordo.

(A-ii) $\mathcal{S}' \subseteq \partial\Omega$ rigido e poroso

In questo caso, [7], distinguamo tra due situazioni: se il moto fluido entra in o esce da la frontiera \mathcal{S}' . Sul lato della frontiera nel quale il fluido entra la densita' la densita' e' nota $\mathcal{S}'_1 = \{x \in \mathcal{S}' : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \leq 0\}$,

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t), \quad \text{at} \mathcal{S}'_1.$$

Nei punti di $\mathcal{S}'_2 = \mathcal{S}' - \mathcal{S}'_1$ dove il fluido esce si conosce solo il segno di $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ che e' positivo.

(A-iii) $\partial\Omega_t$ deformabile, fuori Ω_t vi e' un ateriale in moto assegnato $\mathcal{C}(t)$;

Alle (7.5.2) va aggiunta la condizione dinamica (7.5.5), tale condizione e' anche una condizione sulla densita'.

(A-iv) $\partial\Omega_t$ deformabile

Vale quanto detto in (A-iii).

Osservazione 7.5.1 L'equazione di continuita' in forma debole richiede

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) dx = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, 0) dx + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS dt', \quad (7.5.15) \quad \boxed{\text{weak}}$$

ed afferma che la massa totale e' regolate dal flusso di massa.

i) si puo' fissare la quantita' di moto anzicche' la velocita';

ii) se il flusso di massa attraverso $\partial\Omega$ e' zero, si ritrova la conservazione della massa in Ω .

Affinche' valga l'unicita' per moti stazionari bisogna richiedere una condizione ausiliaria alla densita' **condizione ausiliaria**.

Distinguiamo i casi **B-(i)**, **B-(ii)**.

B-(i) Ω limitato con frontiera rigida.

La massa totale e' una *data* quantita' positiva M

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) dx = M.$$

Si ricava da cio' $\rho \in L^{\infty}(0, \infty; L^1(\Omega))$.

Osservazione 7.5.2 *E' ovvio che la condizione ausiliaria vale per fluidi viscosi e non.*

Osservazione 7.5.3 *Per pareti porose $\mathcal{S}' = \partial\Omega$, vi e' flusso non nullo attraverso le pareti, $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \neq 0$. Applicando il teorema di Gauss all'equazione di continuita' si trova*

$$\int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (7.5.16) \quad \boxed{\text{cont'}}$$

con ρ incognita. Quindi, se la frontiera $\partial\Omega$ e' costituita dall'unione di piu' parti Σ_i , $i = 1, \dots, N$, detto ϕ_i il flusso di massa uscente da Σ_i , richiediamo

$$\sum_{i=1}^N \phi_i = 0, \quad (7.5.17) \quad \boxed{\text{sum}}$$

B-(ii) Ω esterno ad una regione compatta \mathcal{C} .

In tal caso il fluido riempie una regione di spazio esterna alla regione materiale \mathcal{C} con frontiera $\partial\Omega$, o tutto lo spazio. su $\partial\Omega$ assegniamo la condizione precedentemente data, mentre all'infinito distinguiamo id ue casi:

(a) Massa finita

Il fluido \mathcal{F} si muove attorno ad un ostacolo rigido con baricentro G fisso in \mathcal{C} . Ad esempio \mathcal{F} e' l'atmosfera di una stella Ω che si muove attorno ad un nucleo \mathcal{C} con baricentro fisso G , il nucleo puo' ruotare attorno a G ; o \mathcal{F} puo' essere una stella autogravitante di baricentro G .

Per la densita' richiediamo

Il corpo \mathcal{C} fissato nel baricentro G , o uniformemente ruotante attorno ad un asse passante per G

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) dx = M, \quad t \in (0, \infty).$$

Per la densita' assumiamo

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \rho(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t \in (0, \infty).$$

(b) Massa infinita

Il fluido \mathcal{F} si muove attorno ad un ostacolo rigido \mathcal{C} . Se \mathcal{C} trasla, immaginiamo \mathcal{F} come aria uniforme in Ω intorno ad un aereo \mathcal{C} in moto con velocita' $\mathbf{v}_{\mathcal{C}}$. Se

\mathcal{C} ruota uniformemente attorno ad un asse passante per G , sia z , possiamo pensare all'aria attorno ad un satellite ruotante.

La massa di \mathcal{F} e' infinita, ed assumiamo che la densita' tenda ad un valore ρ_∞ uniforme in spazio e tempo

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_\infty.$$

Index

Indice analitico

- Descrizione
 Materiale o Lagrangiana, 86
 Spaziale o Euleriana, 86
Derivata distribuzionale, 58
, 196
Equazioni
 Costitutive, 180
Fluido
 Gas perfetto, 180
, 85, 86
Accelerazione, 87
Angolo di contingenza, 35
Approssimazione con funzioni C^∞ , 53
Ascissa curvilinea, 34
Assi principali di stiramento, 91
Assioma
 Azione Locale, 170
 Azione locale, 169
 Determinismo, 169
 Dissipazione, 169
 Dissipazione ridotta, 171
 Equipresenza, 169, 170
 Indifferenza Materiale, 171
 Oggettività, 169
 Oggettività dell'osservatore, 171, 172, 174
Assioma di Cauchy e Noll, 145
Assioma di continuità della massa, 134
Assiomi costitutivi, 167
Assoluta continuità, 58
Assunzioni costitutive, 162
Atto di moto, 88, 89
Autofunzione, 67
Autovalore, 26
Autovalori, 67
Autovettore, 26
Baricentro, 106, 133
Base, 7
Base in spazio lineare, 44
Basi in spazi di Hilbert, 64
Binormale, 36
Calore specifico a volume costante, 180
Cambiamento di base, 14
 Componenti di un tensore, 20
 Componenti di un vettore, 15
Cambiamento di fase, 181
Cambiamento di riferimento, 16
Cambiamento in
 Angolo, 96
 Lunghezza, 95
 Superficie, 99
 Volume, 97
Campo conservativo, 143
Campo irrotazionale, 108
Campo scalare, 75
Campo solenoidale, 106
Campo tensoriale, 75
Campo vettoriale, 75
 Irrotazionale, 77
 Potenziale, 77
 Solenoidale, 77
 Vortice, 77
Campo vettoriale piano, 77
Caratterizzazione di H^1 , 64
Centro di sezione, 106
Cinematica
 Continuo, 83, 105
 Relativa, 120
Circolazione, 107, 186
Classe C^k , 76
Coefficiente

- Deformazione angolare* , 96
Deformazione volumica, 97
Dilatazione lineare, 95
Compattezza, 62
Completezza degli spazi L^p , 50
Condizione al bordo, 196
Condizione ausiliaria
Densita', 204
Densita' all'infinito, 204, 205
Condizioni al bordo
Aderenza, 197
Bilancio degli sforzi, 203
Bilancio dello sforzo, 199
Bilancio tra sforzi, 200, 201
Conizioni all'infinito sulla ve-
locita', 200
Deformabile incognito, 198, 203
Deformabile noto, 198, 203
Dominio esterno, 197
Dominio limitato, 197
Effetto di capillarita', 200
Frontiera deformabile nota, 197
Frontiera incognita deformabile,
 197
Frontiera libera, 197
Frontiera non compatta, 197
Frontiera rigida porosa, 197
Impermeabile, 198
Membrana elastica, 202
Membrana viscoelastica, 202
Rigido impermeabile, 197, 203
Rigido poroso, 197, 203
Sforzi lineari elastici, 201
Stress free regolare, 202
Temperatura, 202
Tipo di dominio, 196, 197, 199
Tipo di frontiera, 196
Velocita', 197
Condizioni al bordo
Frontiera rigida in moto, 208
Condizioni all'infinito
Velocita', 199
Condizioni ausiliari
Densita', 203
Condizioni iniziali, 131
Configurazione
Attuale, 83
Riferimento, 83, 91
Conservazione della massa nel for-
malismo Euleriano, 135
Continui alla Cosserat, 138
Continui micropolari., 138
Continuita' di convoluzioni in spazi
 L^p ., 53
Convenzione di somma, 7
Convergenza debole, 44, 51
Convergenza debole in L^p , 51
Convergenza di distribuzioni, 55
Convergenza dominata, 50
Convergenza forte, 43, 54
Convergenza in $W_p^1(\Omega)$, 58
Convergenza in norma, 43
Convergenza monotona, 49
Convergenza uniforme, 55
Convessita' per i gradienti, 63
Convoluzione di distribuzioni, 57
Convoluzione di due funzioni, 52
Convoluzioni, 64
Coordinate rettilinee, cartesiane, 10
Corpo continuo, 133
Curva biregolare, 35
Curva materiale, 87
Curva regolare, 33
Curvatura, 35
Dati al contorno, 131
Debole semicontinuita' inferiore, 52
Decomposizione
In prodotto, 28
In somma, 23
Polare, 28
Prodotto, 28
Deformazione, 85
Elementare, 95
Isocora, 98
Omogenea, 91
Deformazione omogenea, 85
Densita' di forza a distanza, 143
Densita' materiale di linea, 133
Densita' materiale di superficie, 133
Densita' materiale di volume, 133
Derivata debole, 55, 56
Derivata di Gateaux o direzionale,
 50
Derivata di una distribuzione, 56
Derivata generalizzata, 57

- Derivata temporale*, 88
 Materiale, 88
 Spaziale, 88
Derivate di funzioni tensoriali, 75
Diade, 20
Diametro di S , 39
Differenziabilità delle norme, 50
Dimensione, 7
Direzione, 10
Direzioni principali di stiramento, 91
Diseguaglianza di Cauchy, 9, 49
Diseguaglianza di Clausius-Duhem, 167
Diseguaglianza di Hölder, 47
Diseguaglianza di Ladyzhenskaja, 60
Diseguaglianza di Poincaré, 65, 73
Diseguaglianza di Schwartz, 9, 47
Diseguaglianza di Young, 49
 Convolutioni, 53
Diseguaglianza triangolare, 33, 48
Diseguazione
 Clausius-Duhem, 176
Dissipazione, 165
Dissipazione ridotta, 176
Distanza di x da S , 39
Divergenza, 77
Dominio, 39, 75
Dominio materiale, 131
Doppio prodotto vettoriale, 12
Duale di L^p , 51

Energia
 Interna, 163
 Interna specifica, 163
 Libera di Helmholtz, 181
 Totale specifica, 164
Energia cinetica, 138
Entalpia, 181
Equazione
 Caratteristica di autovalori, 26
 Finita del moto, 83
 Secolare, 26
 Sturm-Liouville, 67
 Autovalori, 26
 Calore, 70
 Caratteristica moto rigido, 112
 Cardinale I, 147
 Cardinale II, 147
 Cardinale meccanica I, 154
 Continuità della massa, 135
 Costitutiva, 168
 Derivate parziali, 68
 Descrizione materiale di moto I, 155
 Descrizione spaziale di moto I, 153
 Descrizione spaziale di moto II, 153
 Differenziale ordinaria, 66
 Ellittica, 68
 Moto baricentro, 149
 Parabolica, 70
 Poisson, 68
 Termodinamica I, 165

Equazioni
 Bilancio, 148
 Bilancio momento della quantità di moto, 148
 Bilancio quantità di moto, 148
 Cardinali, 147
 Cardinali meccanica, 154
 Costitutive, 131, 190
 Dinamica, 162
 Eulero, 184
 Fenomenologiche, 181
 Indefinite del moto, 131, 147
 Navier-Stokes, 194, 195
 Navier-Stokes., 194
 Oseen, 200
 Statica, 148
 Termodinamica, 163

Espansione anisotropa, 89
Esperienza di Archimede, 152
Estensione anisotropa, 92
Estensione unidirezionale, 93
Estremo superiore essenziale, 49

Eulero
 Comprimibile, 189
 Incomprimibile, 184

Fluidi barotropici, 190
Fluido
 Politropico, 180
 Fluido isoentropico, 181
 Fluido isoterma, 181
 Fluido non viscoso, 158, 183

- Fluido omogeneo*, 184
Flusso, 107
Flusso di calore, 164
Flusso di densita', 135
Formulazione Lagrangiana di conservazione della massa, 134
Forze a distanza, 142, 146
Forze di contatto, 142, 146
Forze esterne, 142
Forze interne, 142
Frontiera regolare, 131
Funzionale lineare, 51
 Continuo, 51
 Limitato, 51
Funzionale lineare e continuo, 51
Funzionali di risposta, 168
Funzione
 Isotropia, 31
 Scalare a valori tensoriali, 31
 Tensoriale a valori tensoriali, 31
 Tensoriale integrabile, 80
Funzione Hölderiana di esponente
 α , 42
Funzione δ di Dirac, 56
Funzione armonica, 78
Funzione caratteristica, 42
Funzione convessa, 42
Funzione corrente, 186
Funzione di corrente, 78
Funzione di Green
 Equazione di Poisson, 68
Funzione di Heaviside, 58
Funzione Lipschitziana, 42
Funzione localmente sommabile, 56
Funzioni p-sommabili, 47
Funzioni test, 55

Geodetiche, 39
Gradiente
 Deformazione, 84
 Deformazione, 173
 Finito di deformazione, 105
 Infinitesimo di spostamento, 104
 Lagrangiano, 101
 Velocita' di deformazione, 109, 120
 Velocita' di rotazione, 109, 120

Gradiente distribuzionale, 56

I Principio della termodinamica, 164
Identita' integrali, 80
II Principio della termodinamica, 165
Indice di politropia, 181
Indice di Ricci, 11
Indice duale, 47
Indifferenza
 Vedi Oggettivita', 174
Indipendenza dall'osservatore, 126
Insieme
 Aperto, 39
 Chiuso, 39
 Compatto, 39
 Complementare, 39
 Connesso, 39
Insiemi
 Limitato, 39
Integrali di funzioni tensoriali, 80
Invariante, 15, 21
 Fondamentale, 21, 26
Inversione centrale, 22, 27

Jacobiano, 84, 98

Kernel di Gauss, 70

Laplaciano, 68, 77
Laplaciano distribuzionale, 69
Legge di Castelli, 107
Legge di forza, 143
Legge di Fourier, 165, 178
Legge di Newton, 149
Leggi fenomenologiche, 181
Lemma di Fatou, 50
Lemma di Gauss, 80
Lemma di Gronwall, 66
Lemma di Plancherel, 64
Lemma fondamentale in D' , 57
Linee coordinate, 38
Linee di flusso, 105
Linee vorticosi, 186

Massa del corpo continuo, 132
Materiali iperelastici, 156
Materiali polari, 144
Matrice

- Ortogonale, 15
 Matrice del cambiamento di base, 14
 Meccanica di un corpo continuo, 131
 Metrica euclidea, 33
 Modulo di un vettore, 9
 Mollifier, 53
 Momento angolare, 137
 Momento d'inerzia, 133
 Momento delle forze a distanza, 143
 Momento di quantità di moto, 137
 Momento lineare, 137
 Momento quantità di moto, 137
 Momento risultante, 142
 Momento statico, 133
 Moti non stazionari, 185
 Moto
 Isocoro, 119
 Stazionario, 106
 Irrotazionale, 77, 186
 Piano, 186
 Stazionario, 186, 191
 Moto ammissibile, 168
 Moto bidimensionale, 108
 Moto di un corpo continuo, 83
 Moto irrotazionale, 108
 Moto piano, 88
 Moto regolare, 83
 Moto rigido, 88, 111
 Atto di moto, 112, 116
 Campo di velocità, 112
 Rotatorio, 114
 Traslatorio, 114
 Multi-indice, 41

 Non unicità della soluzione nulla, 67
 Norma, 43
 Norma duale, 44
 Norma in L^p , 48
 Normale alla superficie, 38
 Normale principale, 36
 Notazione
 Estrinseca, 8
 Intrinseca, 8

 Omomorfismo, 17
 Operatore laplaciano, 194

 Operatore lineare, 17, 119
 Operazione anticommutativa, 8
 Operazione bilineare, 8
 Operazione commutativa, 8
 Orientamento, 38
 Ortonormalità di funzioni L^p , 54

 Piano osculatore, 35
 Poiseuille
 Moto, 189
 Polinomio caratteristico, 26
 Portata volumetrica, 137
 Postulato di Callen, 165
 Pressione, 152, 157, 183
 Prima formula di Frenet, 36
 Principio
 Secondo della termodinamica, 166
 Vedi Assioma, 169
 Principio 0 della termodinamica, 163
 Principio di Cauchy sugli sforzi, 144
 Principio I della termodinamica, 164
 Problema dei dati iniziali, 70
 Problema dei valori al bordo per ODE, 66
 Problema dei valori al contorno, 186, 191
 Problema dei valori iniziali di Cauchy per ODE, 66
 Problema dei valori iniziali ed al contorno, 185
 Problema di buona posizione, 161
 Problema di Cauchy, 70
 Problema di unicità, 71
 Problema ristretto, 143
 Processo ammissibile, 177
 Prodotto di tensori, 18
 Prodotto misto, 13
 Prodotto scalare, 8, 45, 46
 Prodotto scalare per funzioni vettoriali, 71
 Prodotto scalare tra vettori, 11
 Prodotto tensoriale, 20
 Prodotto vettoriale, 12
 Proprietà di misura, 132, 137, 143, 144, 163
 Pura tensione, 156
 Puro scorrimento, 158

 Quantità di moto, 137

- Quantita' di moto*, 137
Raggio di curvatura, 35
Rappresentazione parametrica
 Curva, 33
 Superficie, 38
Regione materiale, 131, 134
Regolarizzatore, 53
Retta di applicazione, 10
Riferimento, 10
Riferimento solidale, 115
Risposta oggettiva, 174
Risultante di forza a distanza, 143
Risultante di forza di contatto, 144
Rotazione, 15, 27
Rotazione propria, 22, 27
Rotore, 77

Saturazione di tensori, 18
Scorrimento semplice, 94
Separabilita' di L^p , 54
Sezione di taglio, 106
Sforzo, 145
Simbolo di Kronecker, 18
Sistema bilanciato, 148
Solenoidale, 119
Soluzione dell'equazione di Poisson
 in R^3 , 69
Sorgente di energia interna
 Per unita' di superficie, 164
Sorgente di energia interna
 Per unita' di massa, 164
Sorgente di energia totale
 Per unita' di massa, 164
 Per unita' di superficie, 164
Spazio
 H^m , 63
 $H^{1/2}$, 64
 $L^2(\Omega)$, 46
 L^p , 47
 Banach, 43
 Completo, 43
 Distribuzioni, 55
 Duale, 44
 Funzionale, 41, 43
 Funzioni solenoidali, 71
 Funzioni tensoriali, 74
 Hilbert, 45, 63
 Lebesgue, 46
 Lineare, 7, 43
 Lineare Euclideo, 45
 Normato, 43
 Puntuale, 9
 Riflessivo, 45
 Separabile, 44
 Sobolev, 57
 Tensoriale, 17
 Vettoriale, 7
 Vettoriale Euclideo, 9
Spostamento, 87
Spostamento elementare, 104
Stiramenti principali, 91
Storia passata, 169
Successione
 Cauchy, 43
 Funzioni, 49
 Limitata, 45
Superficie materiale, 87
Superficie regolare, 38
Supporto di f , 41

Temperatura, 163
Temperatura assoluta, 163
 tensore
 Cauchy-Green, 90
 Omogeneo, 76
 Stiramento Euleriano, 102
 Stiramento Lagrangiano, 102
 Stiramento, 90, 91
 di Cauchy-Green, 90
 Affine, 17
 Cauchy, 152
 Definito positivo, 23
 Deviatore di sforzo, 172
 Elasticita', 175
 Emisimmetrico, 23, 24
 Inerzia, 133
 Invertibile, 21
 Isotropo, 23
 Kronecker, 18
 Nullo, 22
 Ortagonale, 22
 Piola-Kirchoff, 155
 Rotazione, 28
 Sforzo, 153
 Simmetrico, 22

- Trasposto*, 18
- Unitario*, 22
- Tensori*, 17
- Tensori particolari*, 21
- Teorema*
 - Bernoulli*, 187, 192
 - Decomposizione polare*, 105
 - Energia cinetica*, 154, 156
 - Immersione*, 60
 - Kelvin*, 117
 - Noll*, 145
 - Riesz*, 51
 - Sforzo di Cauchy*, 150
 - Stokes*, 107
 - Torricelli*, 187
 - Trasporto*, 117, 135, 136
- Termodinamica*, 162
 - Processi irreversibili*, 163
- Termostato*, 163
- Torsione*, 36
- Traccia*
 - Funzione scalare*, 59
 - Funzione vettoriale*, 72
 - Tensore*, 18
- Traiettoria*, 85, 105
- Trasformata di Fourier*, 63
 - Proprieta'*, 63
- Triedro di Frenet*, 33, 36
- Tubo di flusso*, 106
- Tubo di Venturi*, 188

- Uguaglianza di Parsevall*, 64
- Unicita'*
 - Limite debole*, 52
 - ODE*, 67
 - Problema di Cauchy per ODE*, 66
- Uniforme limitatezza*, 52

- Valor medio di f* , 46, 81
- Variabili*
 - Materiali o Lagrangeane*, 83
 - Spaziali o Euleriane*, 83
- Velocita'*, 87
 - Angolare*, 109
 - Atto di moto locale*, 119
 - Circolazione*, 117
 - Deformazione lineare*, 109
 - Deformazione angolare*, 110
 - Deformazione volumica*, 118
 - Rotazione*, 109
- Verso*, 10
- Versore*, 10
- Vettore*
 - Aggiunto*, 24
 - Applicato*, 10
 - Libero*, 10
 - Modulo*, 10
 - Ortagonale*, 9
 - Rotazione infinitesima*, 105
 - Vorticita'*, 108
- Vincolo*, 168
- Vincolo interno di isocoricita'*, 184
- Viscosita'*
 - Scorrimento*, 194
 - Volume*, 194
- Volume materiale*, 87