

Dispensa del corso di “FLUIDODINAMICA DELLE MACCHINE”

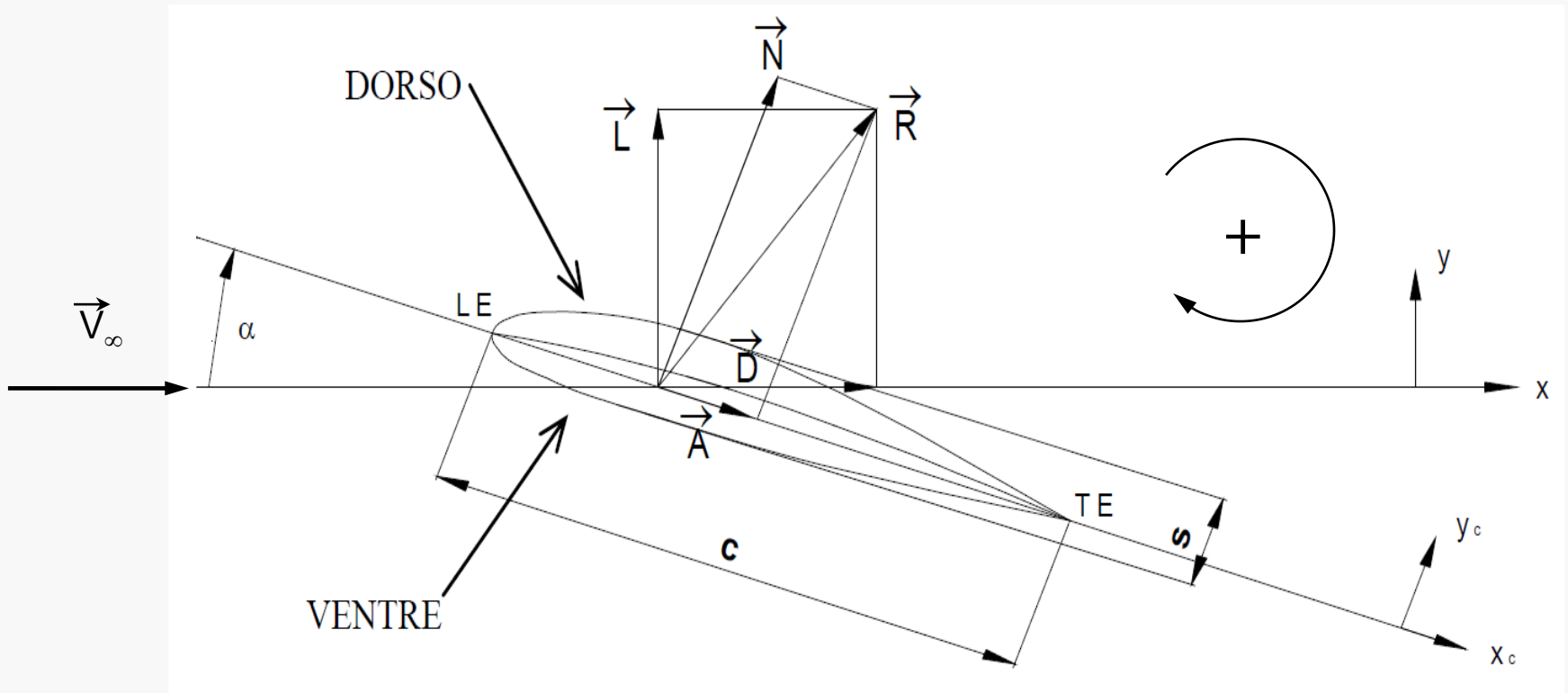
Argomento: Aerodinamica dei profili

Prof. Pier Ruggero Spina
Dipartimento di Ingegneria



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI FERRARA
- EX LABORE FRUCTUS -

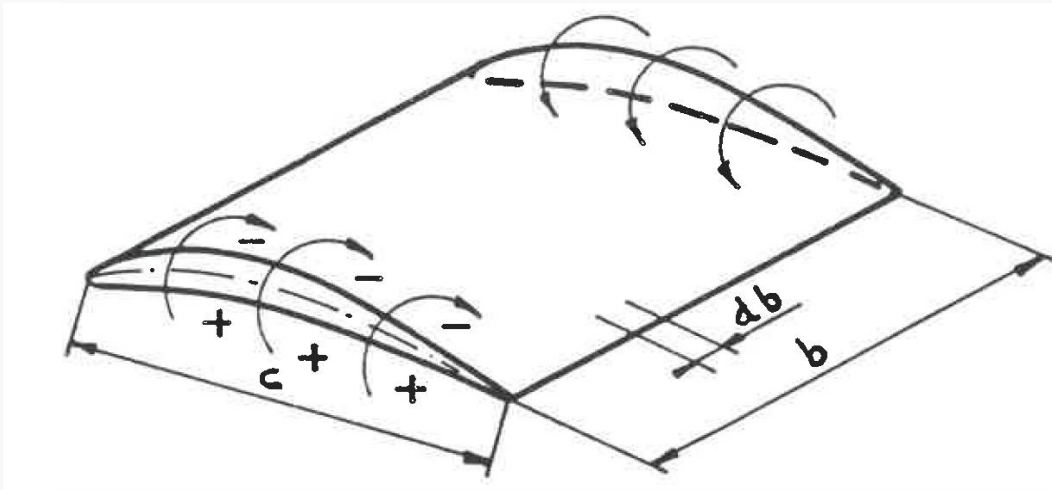
Forze agenti sul profilo alare



$$L, D, M = f(\text{geometria profilo}, \alpha, \lambda, M, Re, V_\infty, S)$$



Forze agenti sul profilo alare



Allungamento (aspect ratio)

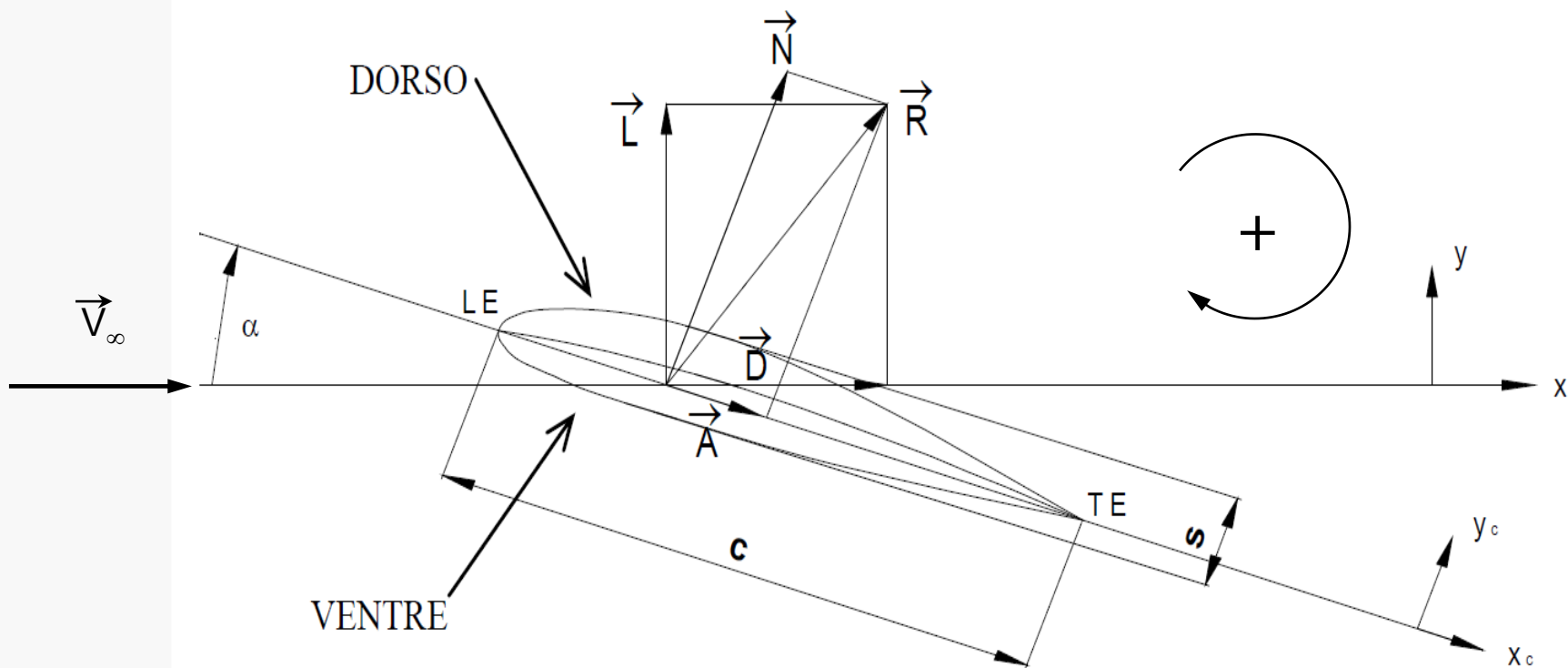
$$\lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{b^2}{\int_0^b c \, db}$$

Nel caso di ala rettangolare ($c = \text{cost.}$):

$$\lambda = \frac{b^2}{c \cdot b} = \frac{b}{c}$$



Forze agenti sul profilo alare



$$L, D, M = f(\text{geometria profilo}, \alpha, \lambda, M, Re, V_\infty, S)$$

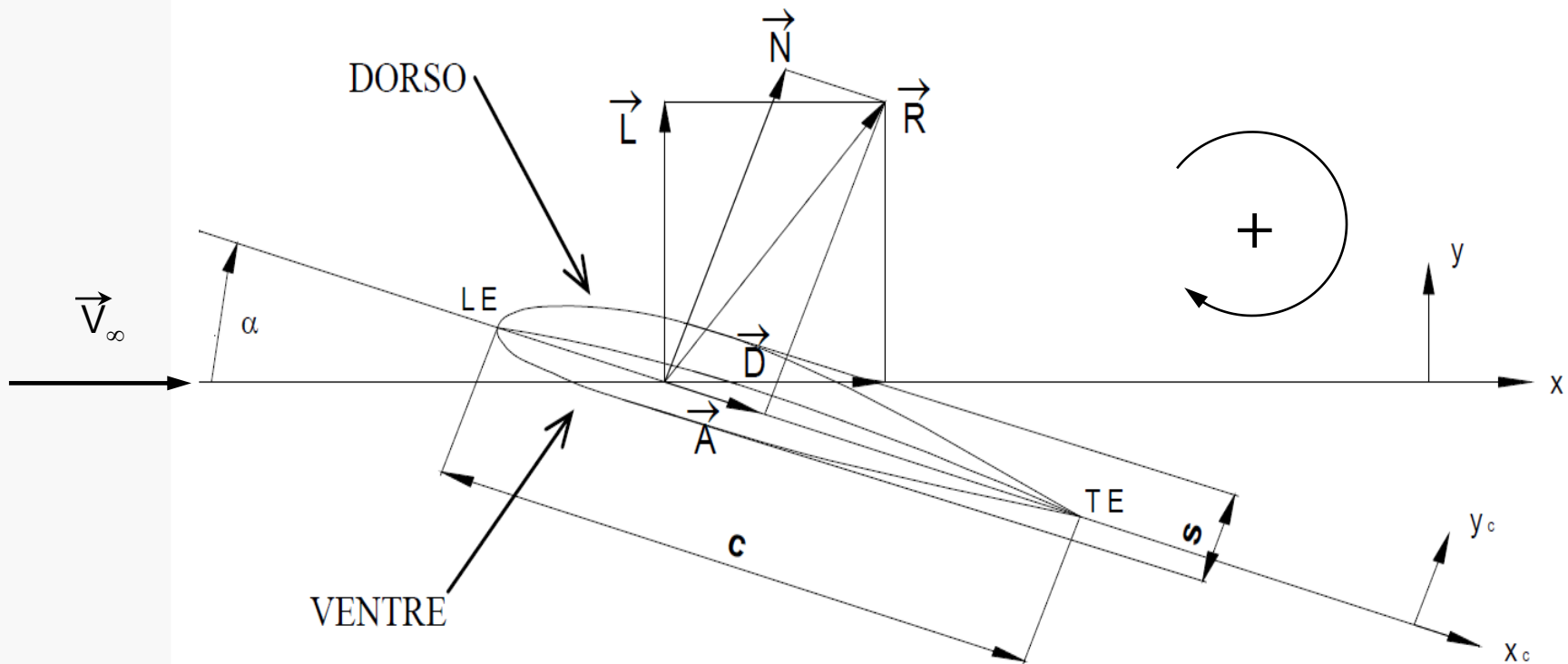
$$L = C_L \rho \frac{V_\infty^2}{2} S$$

$$D = C_D \rho \frac{V_\infty^2}{2} S$$

$$M = C_M \rho \frac{V_\infty^2}{2} S c$$



Forze agenti sul profilo alare



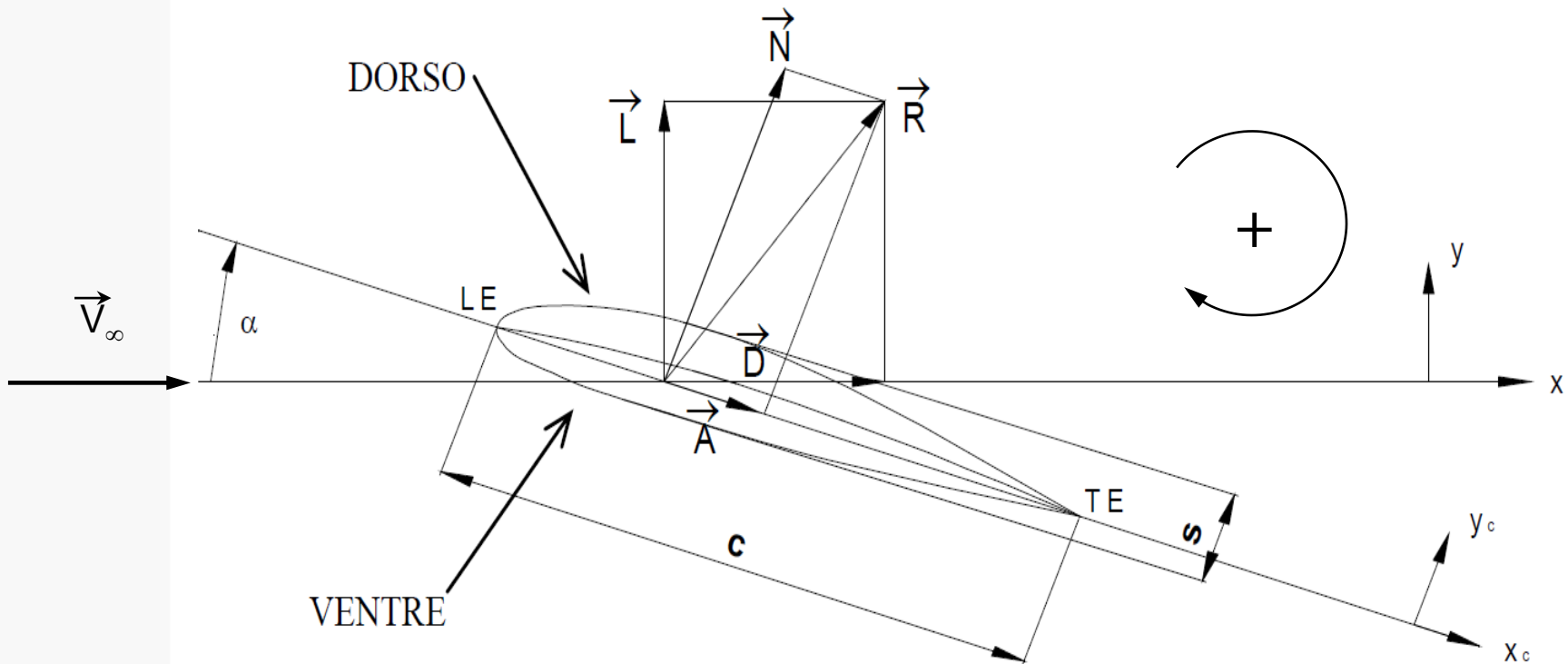
$$C_L, C_D, C_M, = f(\text{geometria profilo}, \alpha, \lambda, M, Re)$$

$$L = C_L \rho \frac{V_\infty^2}{2} S$$

$$D = C_D \rho \frac{V_\infty^2}{2} S$$

$$M = C_M \rho \frac{V_\infty^2}{2} S c$$

Forze agenti su profilo di ala rettangolare ($\lambda = b/c$) di lunghezza unitaria ($S = c \cdot 1$)



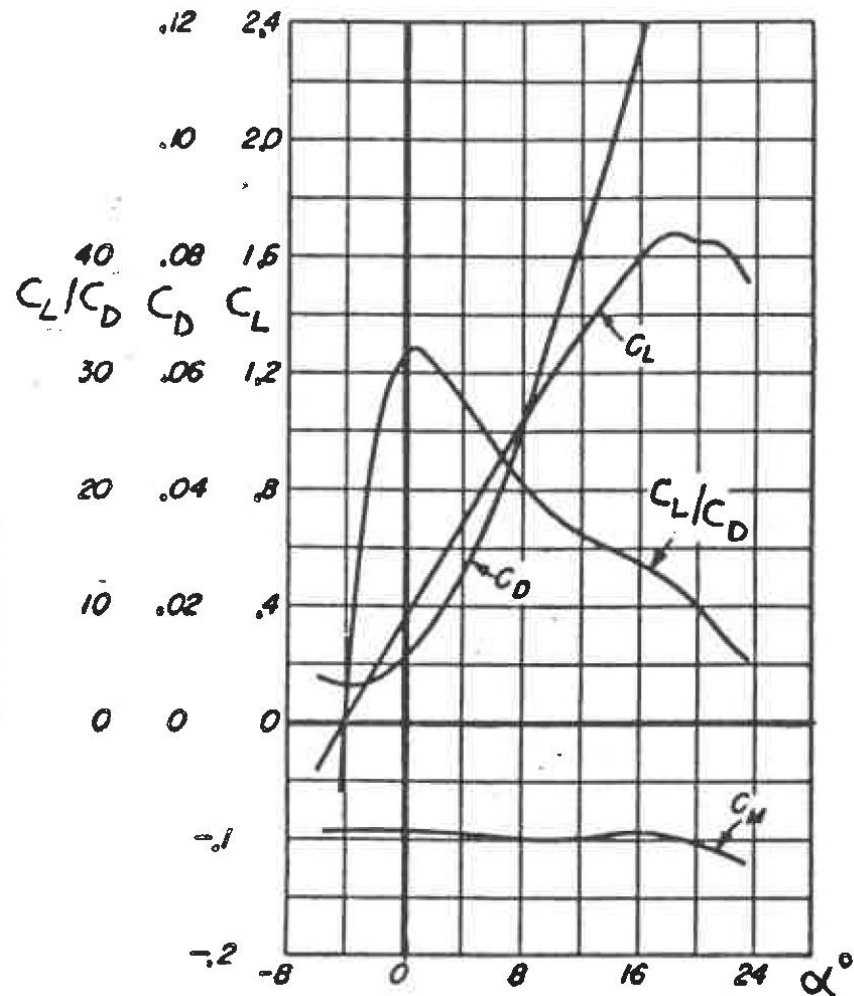
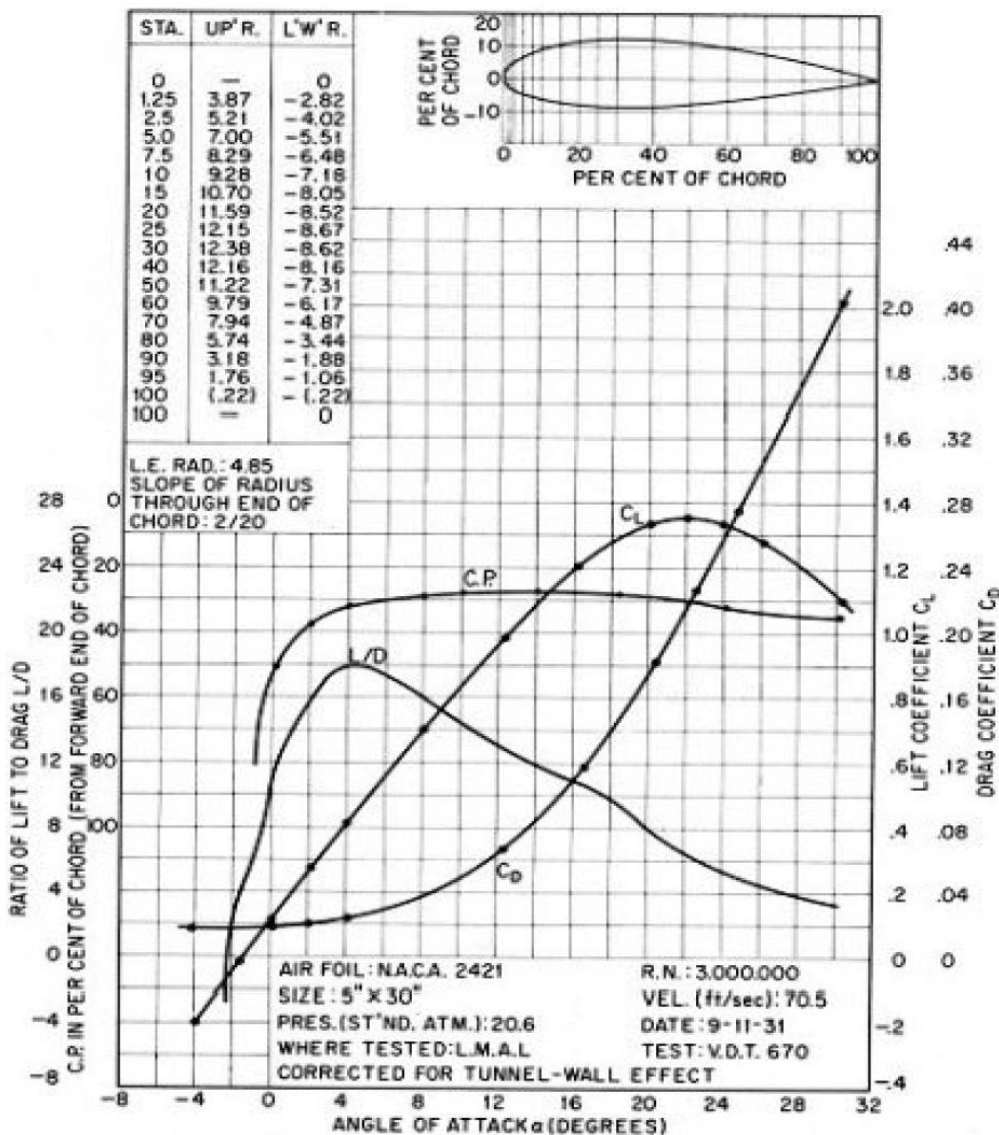
$$C_L, C_D, C_M, = f(\text{geometria profilo}, \alpha, \lambda, M, Re)$$

$$L = C_L \rho \frac{V_\infty^2}{2} c$$

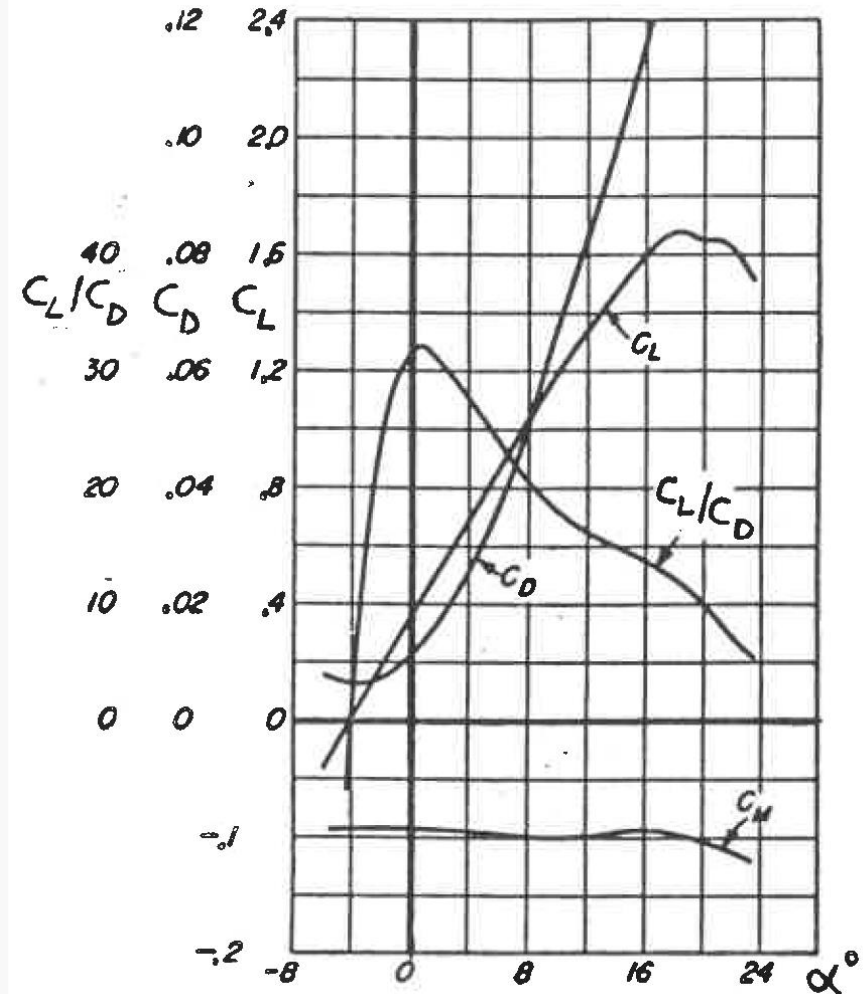
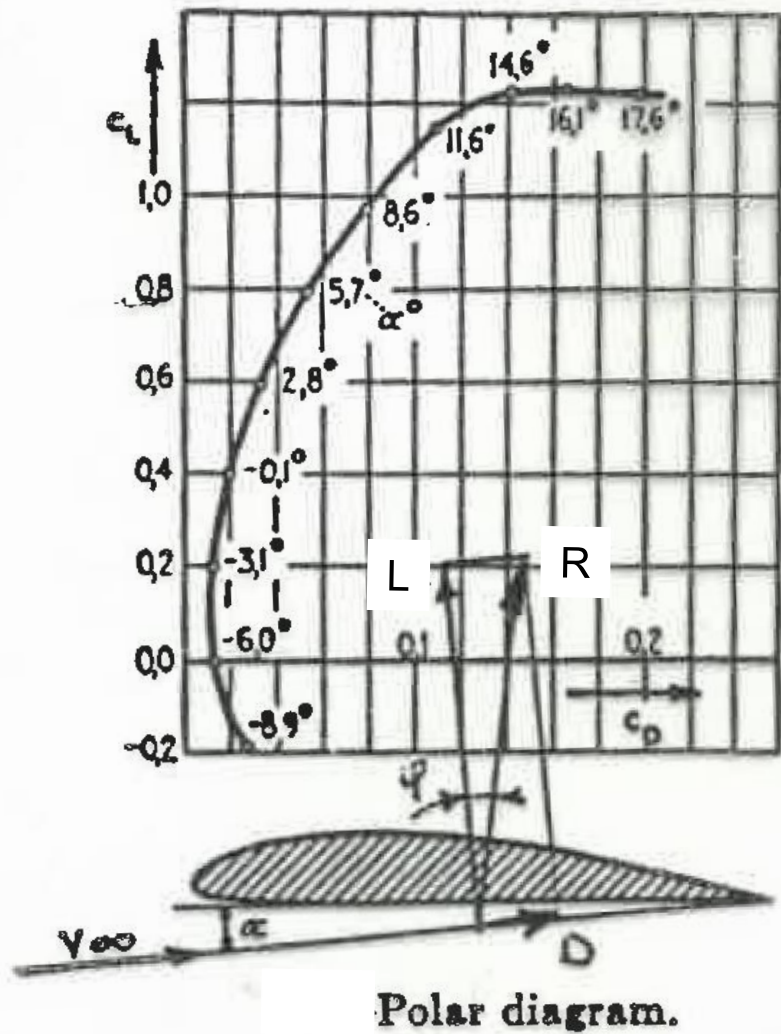
$$D = C_D \rho \frac{V_\infty^2}{2} c$$

$$M = C_M \rho \frac{V_\infty^2}{2} c^2$$

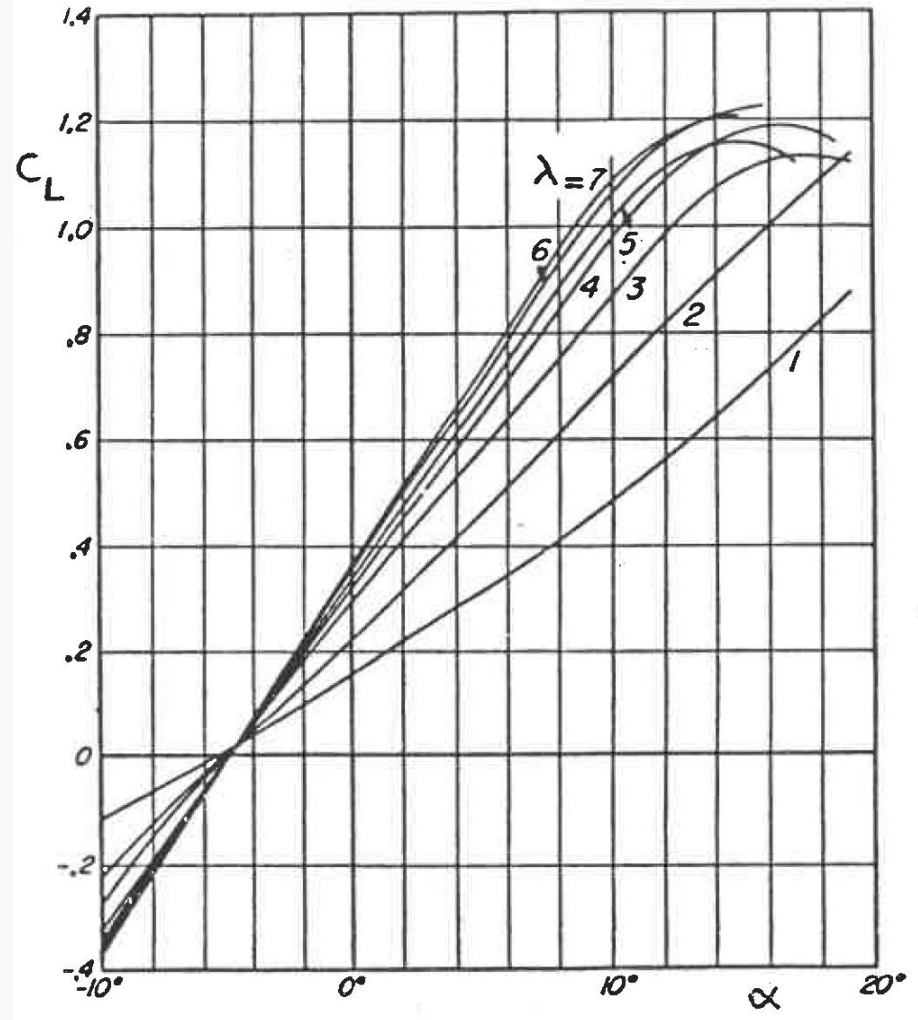
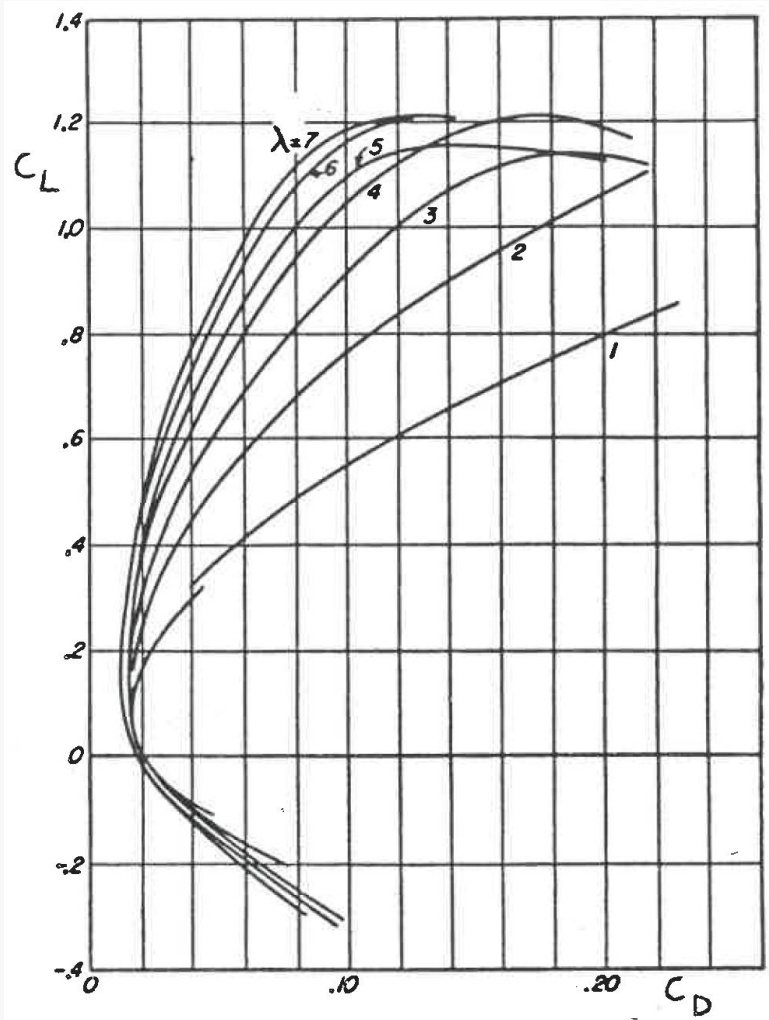
Forze agenti sul profilo alare



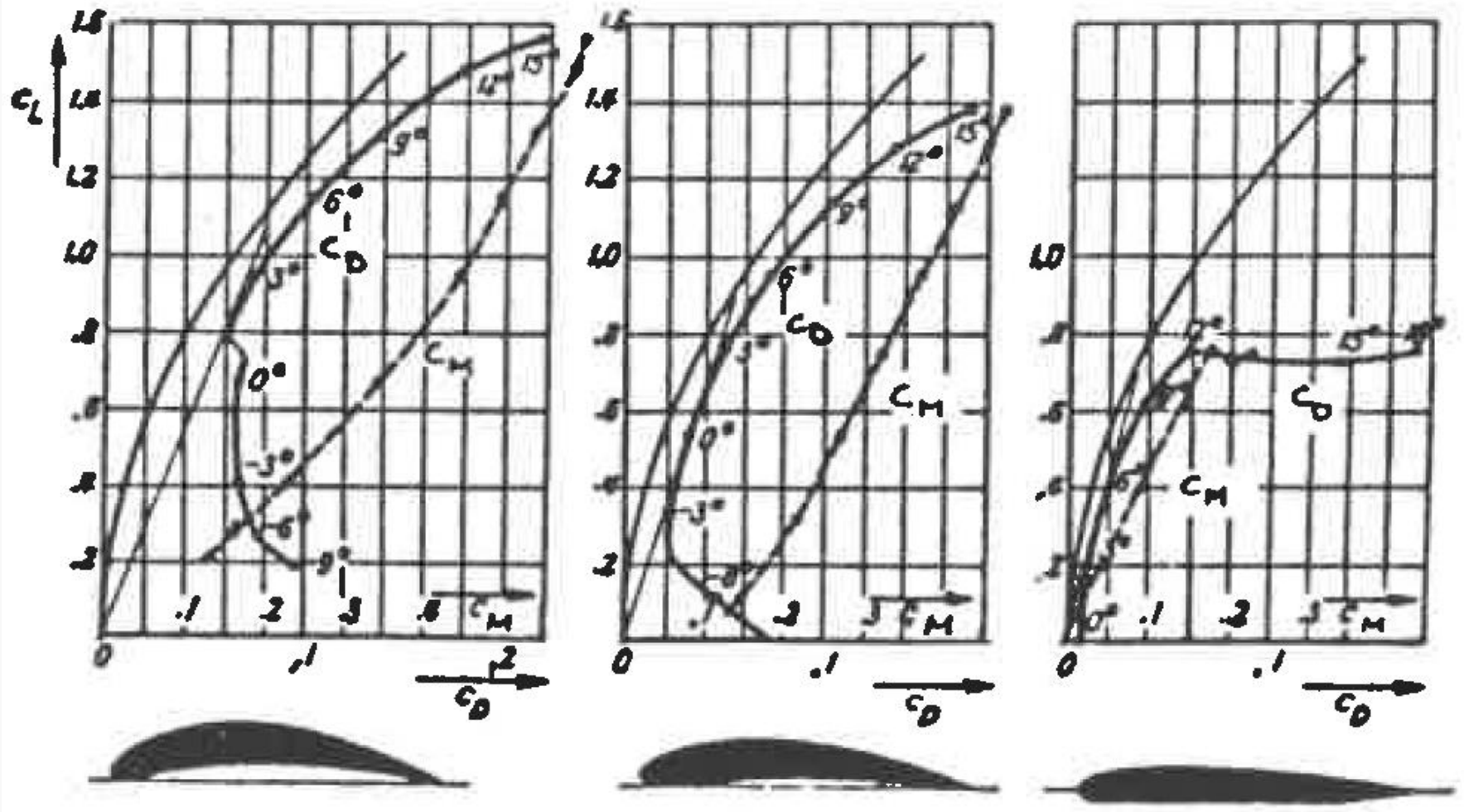
Forze agenti sul profilo alare



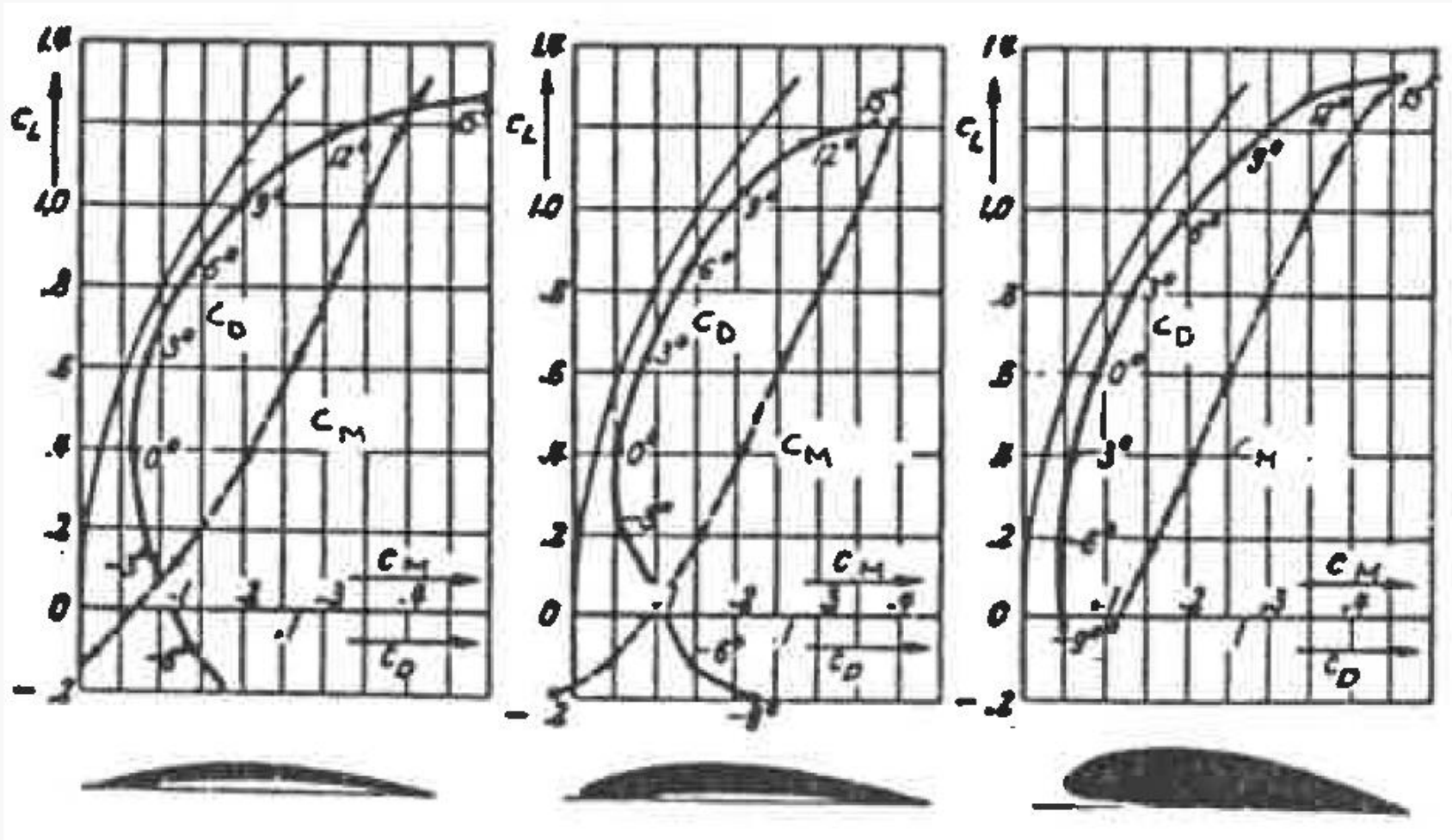
Influenza dell'allungamento λ



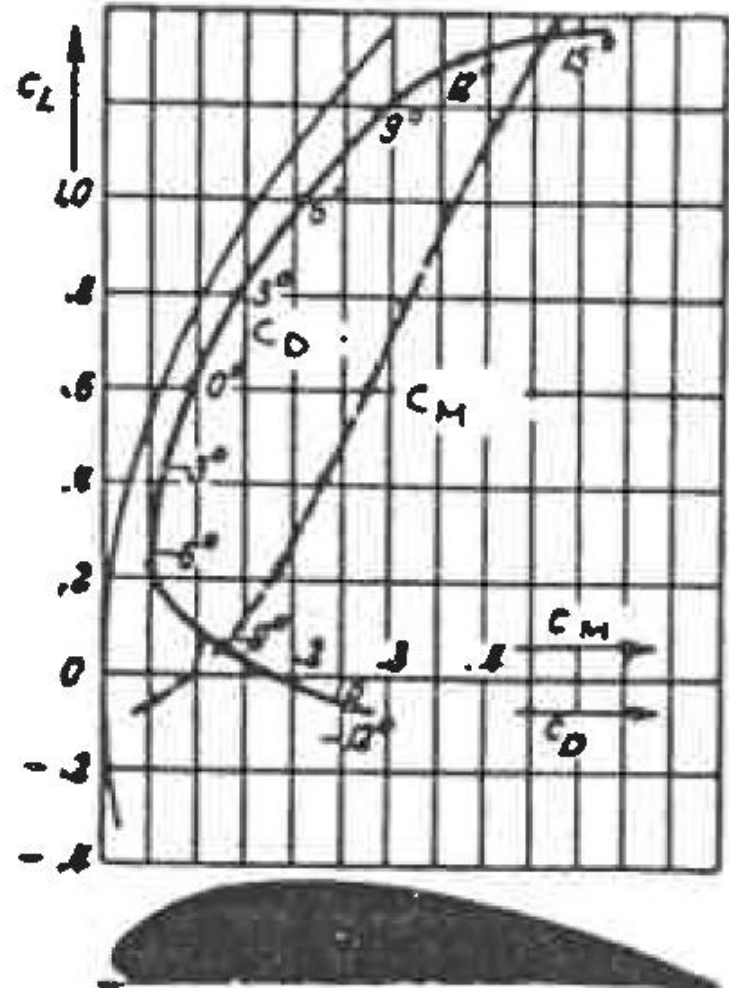
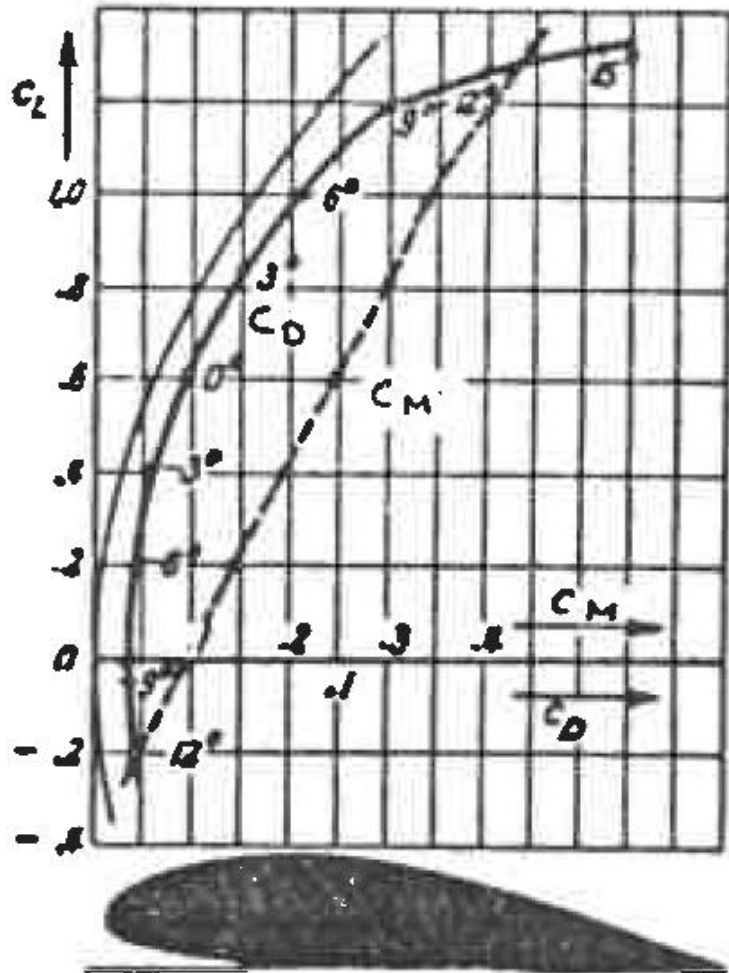
Influenza della geometria della linea media



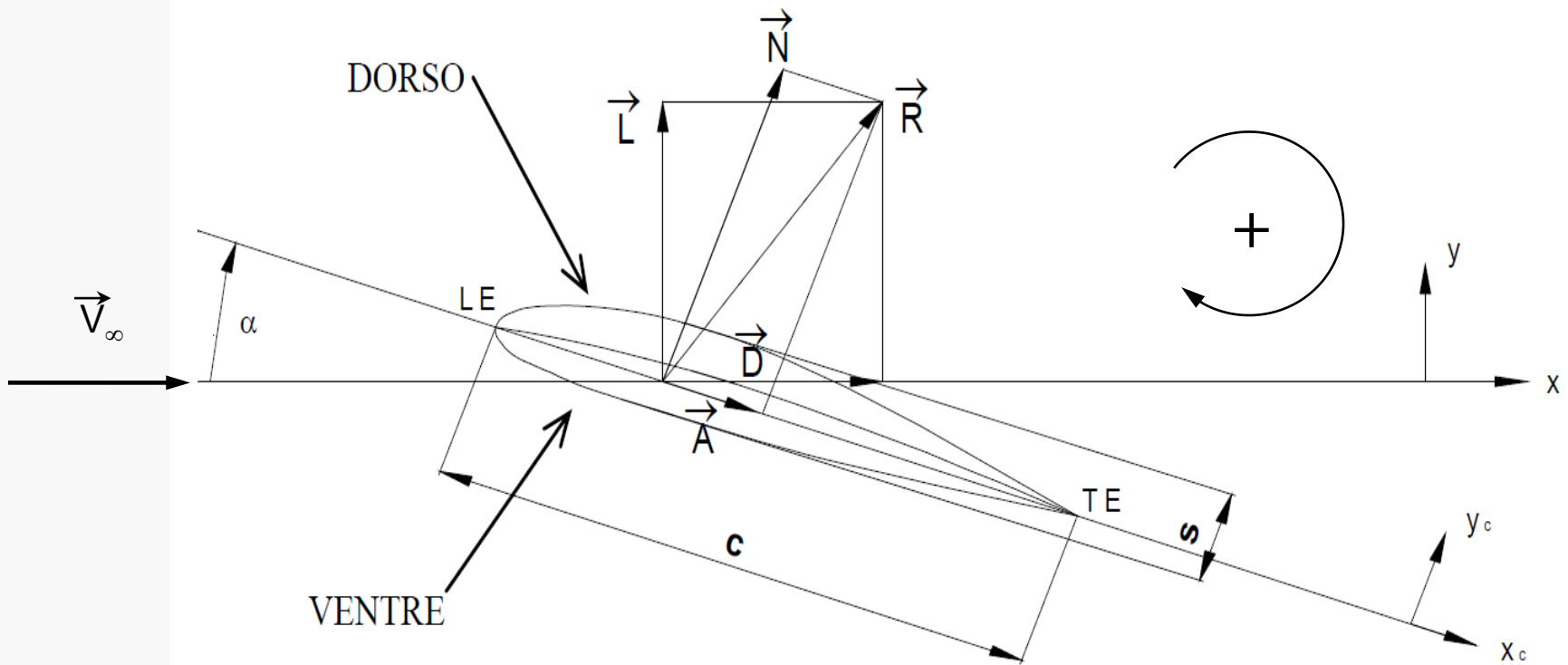
Influenza della distribuzione di spessori



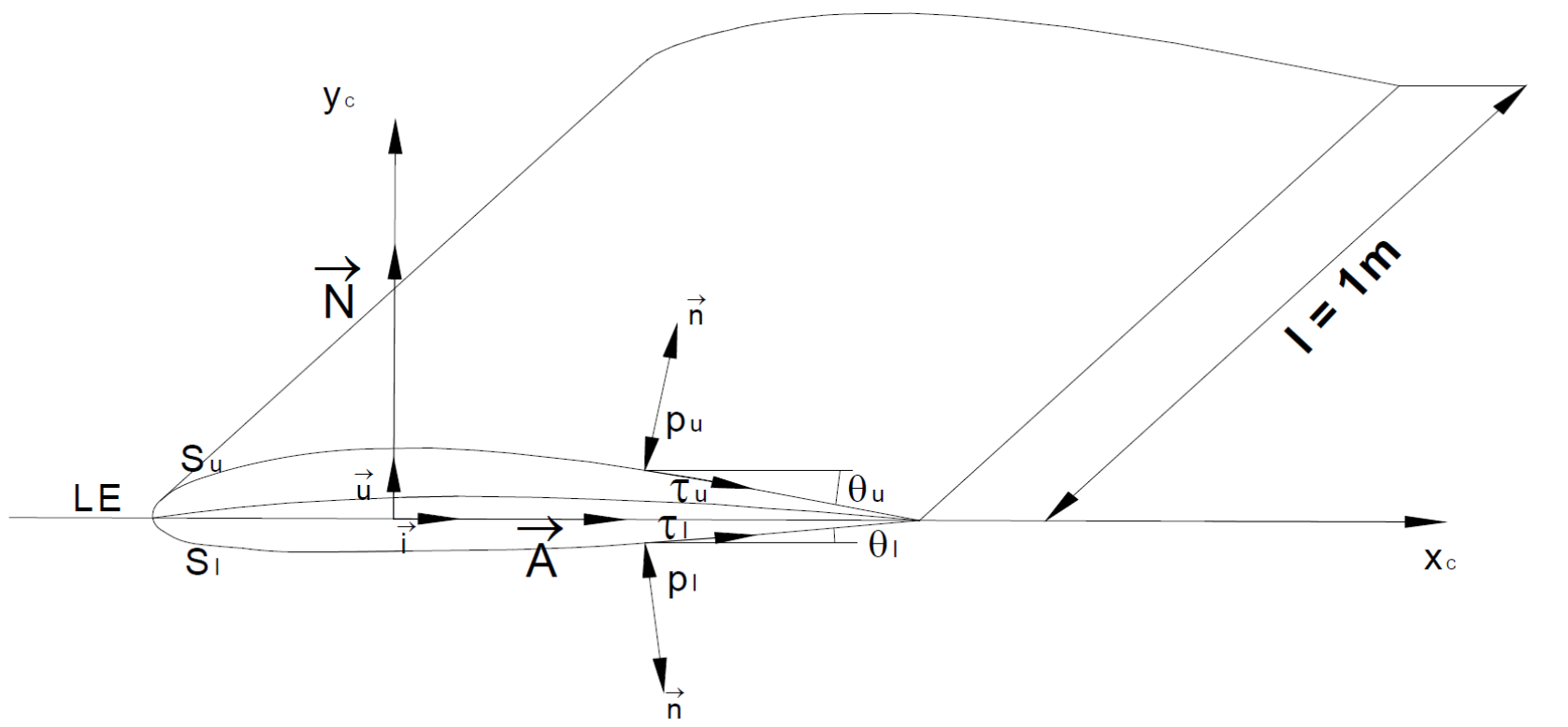
Influenza della forma del naso



Distribuzione di pressione sui profili



Distribuzione di pressione sui profili (fluido non viscoso $\tau = 0$)

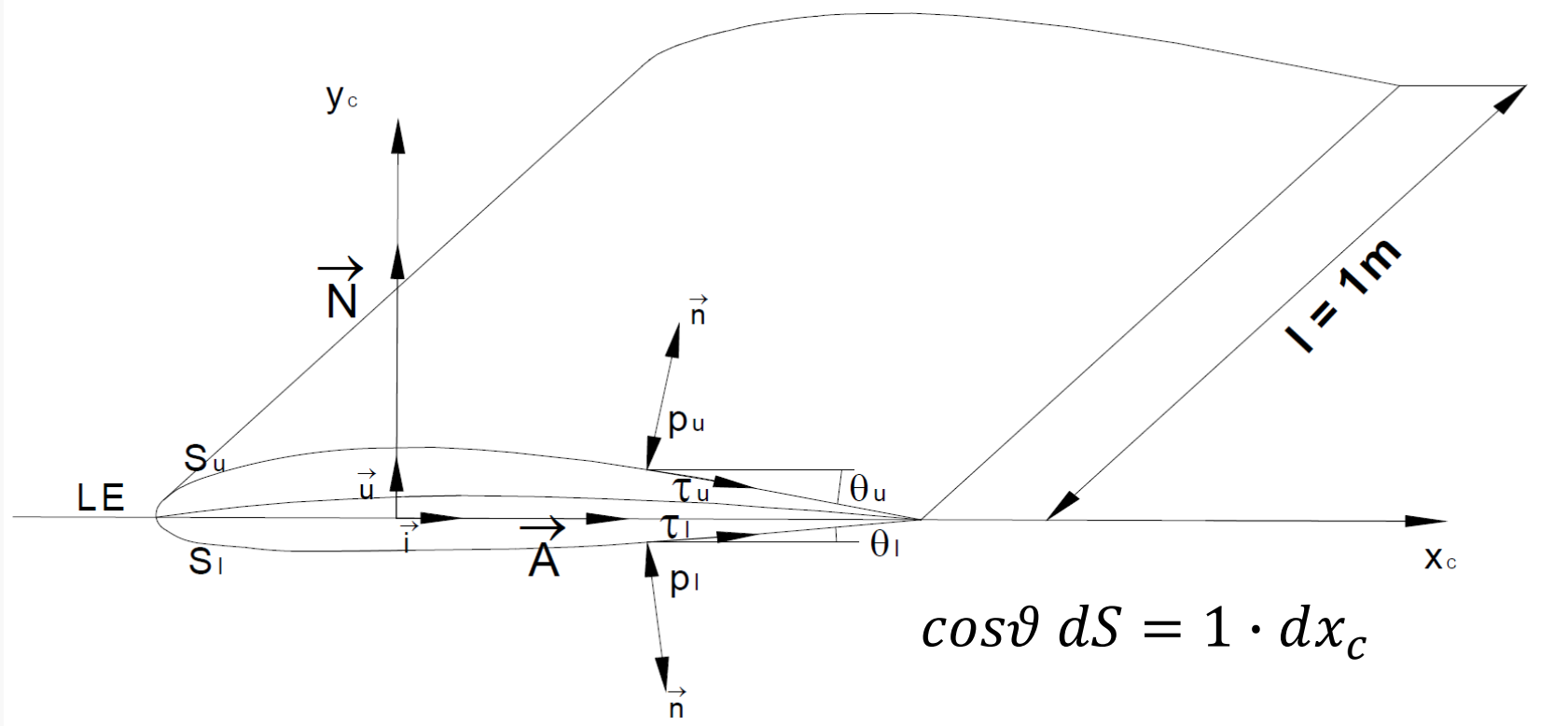


$$\vec{R} = \oint_{\text{profilo}} -p \vec{n} dS = \int_{\text{LE}}^{\text{TE}} p \vec{n} dS - \int_{\text{LE}}^{\text{TE}} p \vec{n} dS$$

ventre
dorso



Distribuzione di pressione sui profili (fluido non viscoso $\tau = 0$)

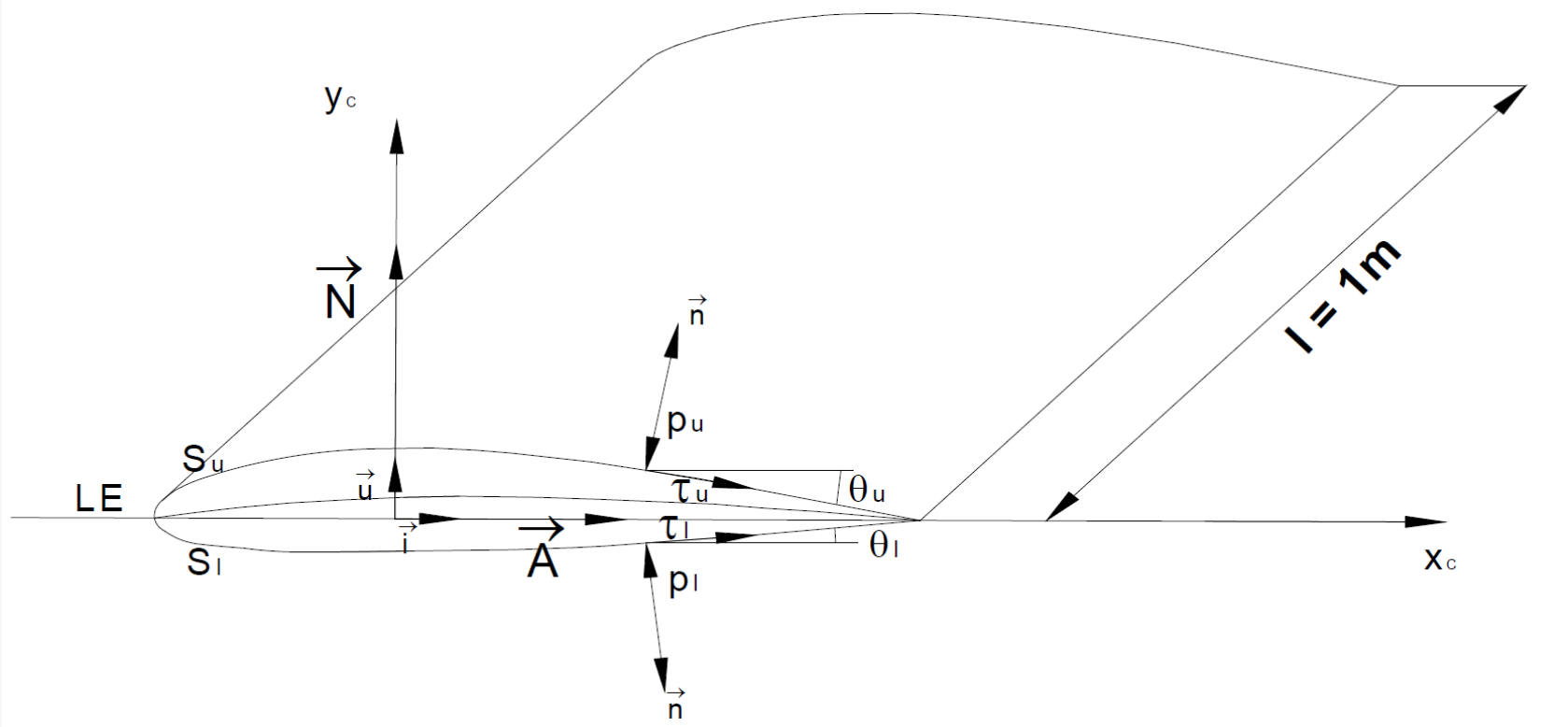


$$N = \int_{LE}^{TE} p \cos\vartheta dS - \int_{LE}^{TE} p \cos\vartheta dS$$

ventre
dorso



Distribuzione di pressione sui profili (fluido non viscoso $\tau = 0$)

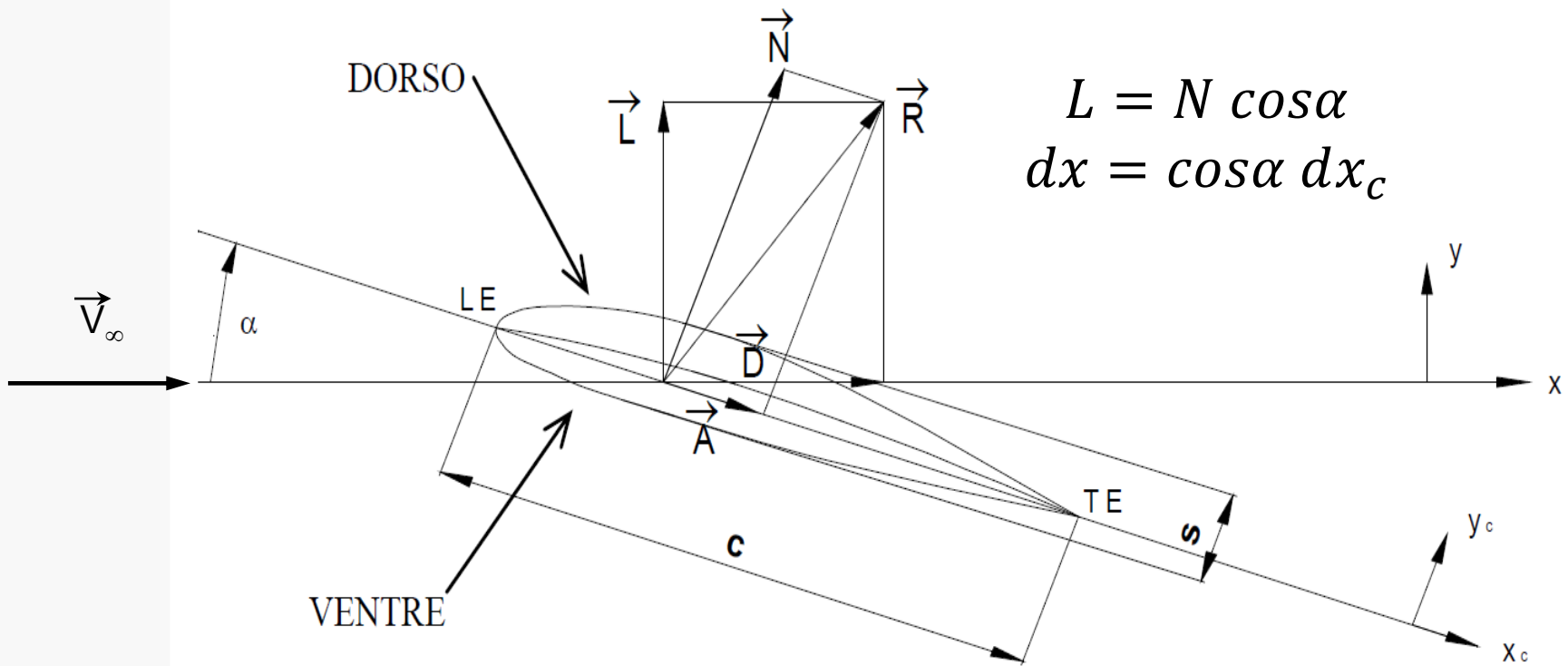


$$N = \int_{\text{LE}}^{\text{TE}} p \, dx_c - \int_{\text{LE}}^{\text{TE}} p \, dx_c = \int_{\text{LE}}^{\text{TE}} \Delta p \, dx_c$$

ventre
dorso



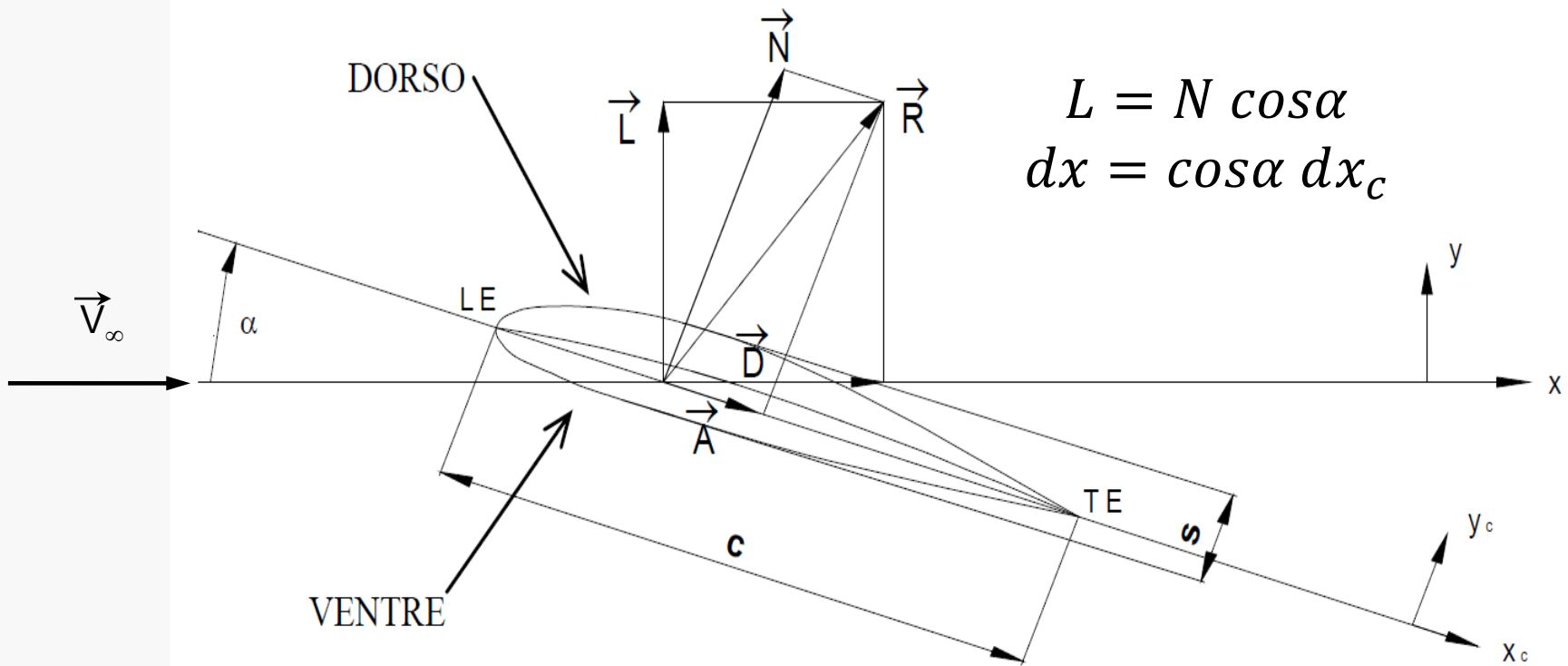
Distribuzione di pressione sui profili (fluido non viscoso $\tau = 0$)



$$N = \int_{\substack{\text{LE} \\ \text{ventre}}}^{\text{TE}} p dx_c - \int_{\substack{\text{LE} \\ \text{dorso}}}^{\text{TE}} p dx_c = \int_{\text{LE}}^{\text{TE}} \Delta p dx_c$$



Distribuzione di pressione sui profili (fluido non viscoso $\tau = 0$)



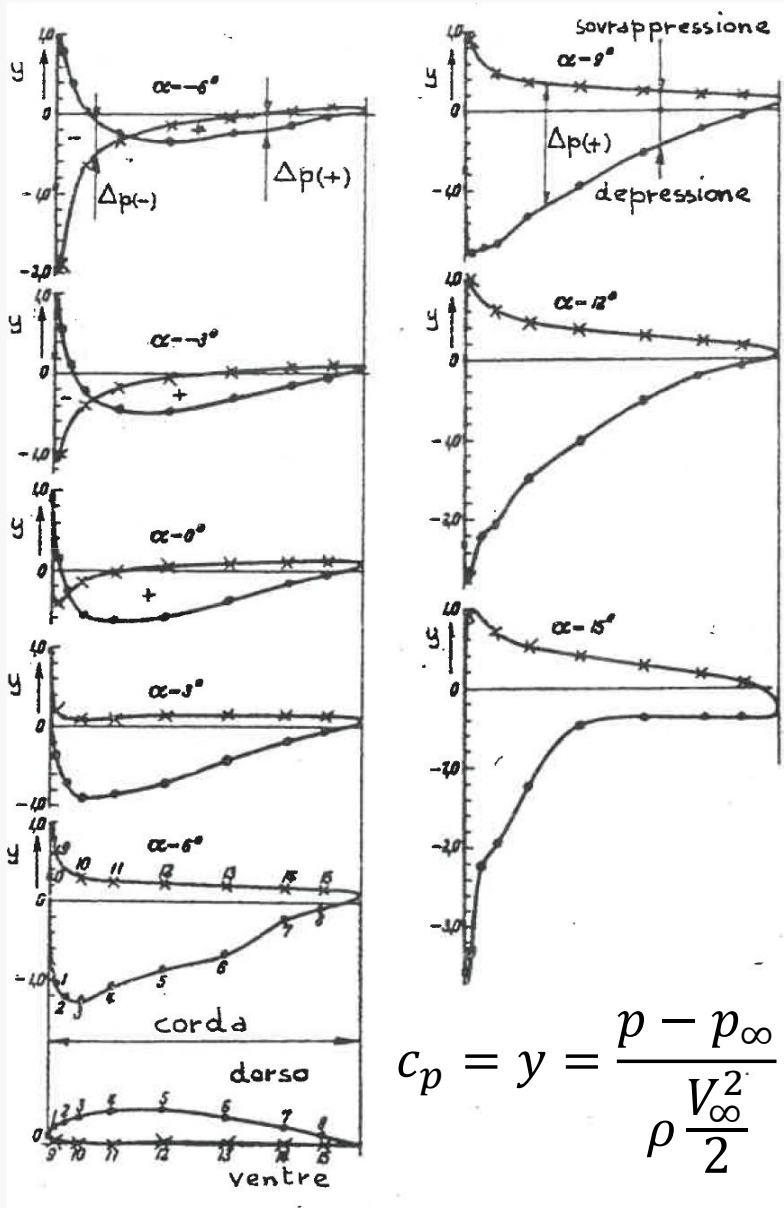
$$L = N \cos\alpha$$

$$dx = \cos\alpha dx_c$$

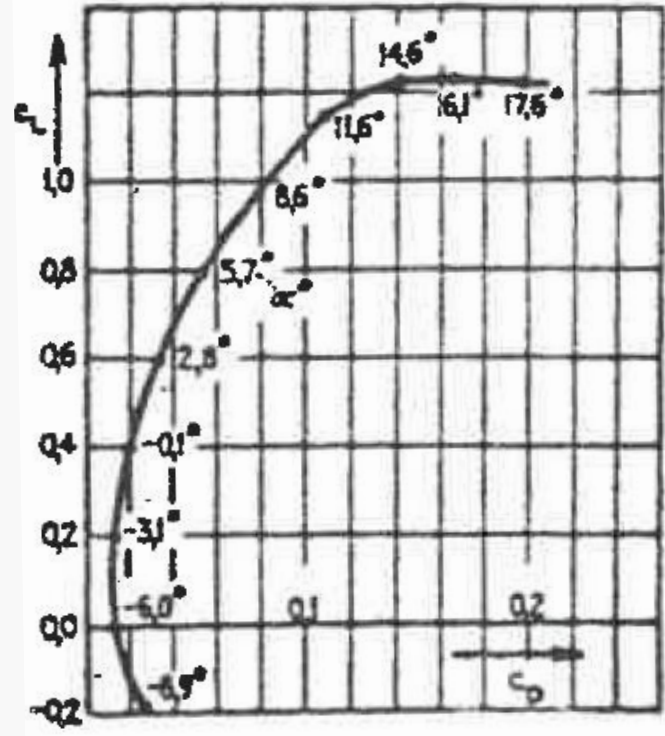
$$L = N \cos\alpha = \int_{LE}^{TE} \Delta p \cos\alpha dx_c = \int_{LE}^{TE} \Delta p dx$$



Distribuzione di pressione sui profili



$$C_p = y = \frac{p - p_\infty}{\rho \frac{V_\infty^2}{2}}$$



Effetto della comprimibilità sulle prestazioni dei profili

Fluido incomprimibile non viscoso

$$p_{0\infty} = p_{\infty} + \rho \frac{V_{\infty}^2}{2} = p_0 = p + \rho \frac{V^2}{2} \rightarrow p_{0\infty} - p = \rho \frac{V^2}{2}$$

Fluido comprimibile non viscoso

$$p_{0\infty} = p_0 = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$
$$p_{0\infty} - p = \rho RT \left[\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right]$$



Effetto della comprimibilità sulle prestazioni dei profili

Fluido comprimibile non viscoso

$$\begin{aligned} p_{0\infty} - p &= \rho RT \left[\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right] = \\ &= \frac{\rho V^2}{\gamma} \frac{2}{2} \frac{\gamma RT}{V^2} \left[\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right] = \\ &= \rho \frac{V^2}{2} \underbrace{\frac{2}{\gamma} \frac{1}{M^2} \left[\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right]}_{>1} \end{aligned}$$

per $M < 1$ (flusso subsonico)



Effetto della comprimibilità sulle prestazioni dei profili

Fluido incomprimibile non viscoso

$$(p_{0\infty} - p)_{\text{inc}} = \rho \frac{V^2}{2}$$

Fluido comprimibile non viscoso

$$(p_{0\infty} - p)_c = \rho \frac{V^2}{2} \underbrace{\frac{2}{\gamma} \frac{1}{M^2} \left[\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right]}_{>1}$$

per $M < 1$ (flusso subsonico)



Effetto della comprimibilità sulle prestazioni dei profili

A parità di V risulta quindi che:

$$(p_{0\infty} - p)_c > (p_{0\infty} - p)_{inc} \rightarrow (p)_c < (p)_{inc}$$

$$(p)_{inc} = p_{0\infty} - \rho \frac{V^2}{2}$$

$$(p)_c = p_{0\infty} - \rho \frac{V^2}{2} \underbrace{\frac{2}{\gamma} \frac{1}{M^2} \left[\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right]}_{>1}$$

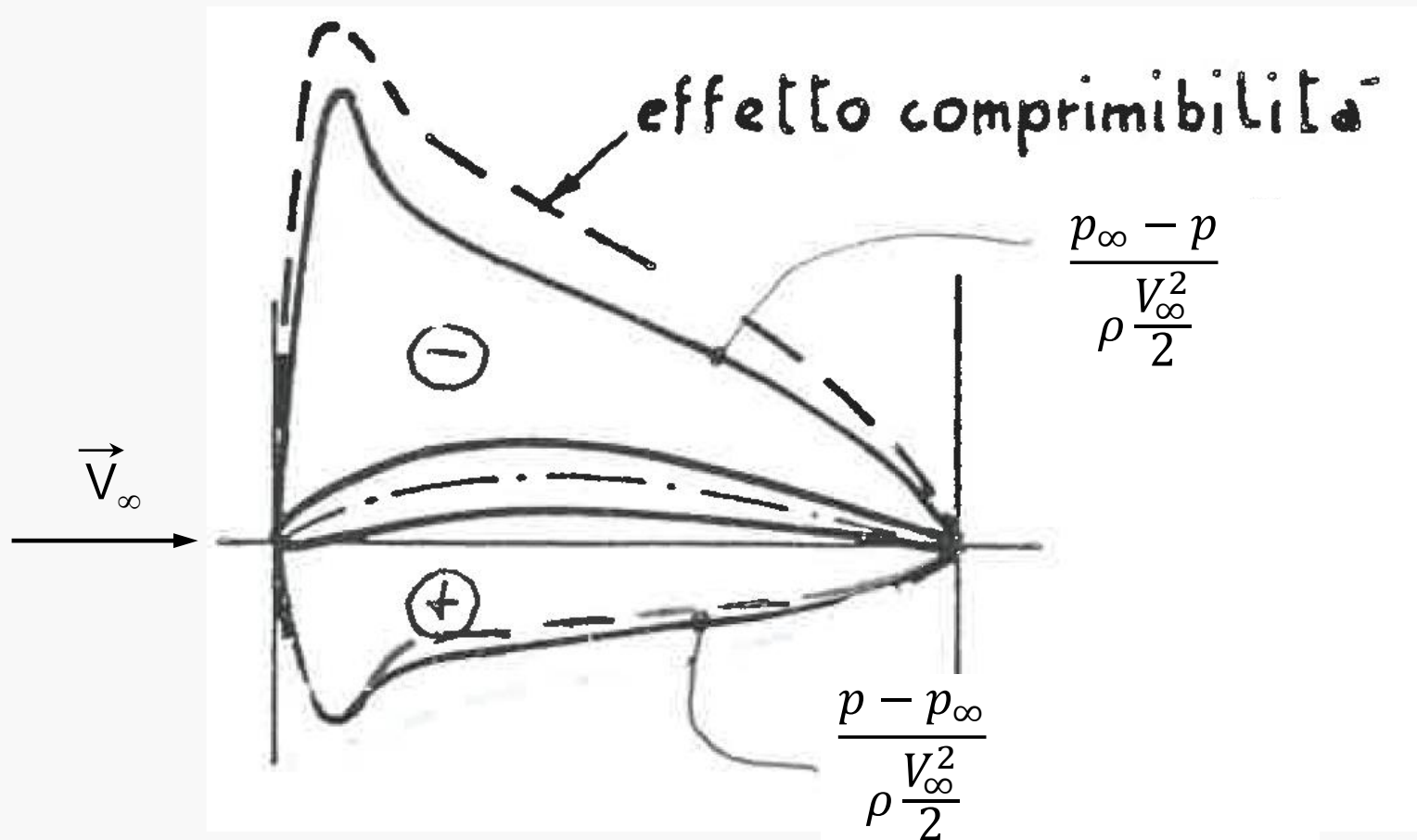
per $M < 1$ (flusso subsonico)



Effetto della comprimibilità sulle prestazioni dei profili

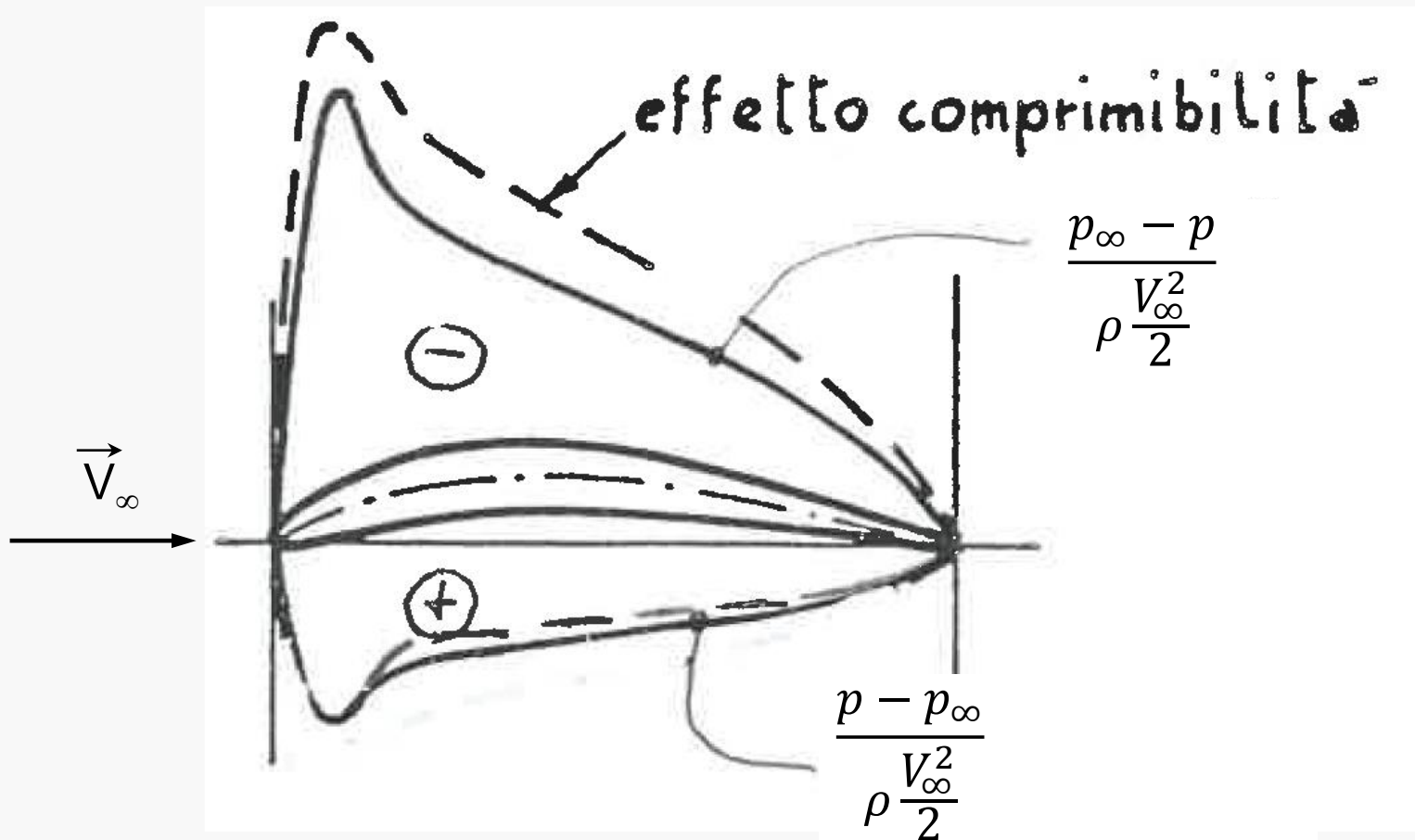
A parità di V risulta quindi che:

$$(p_{0\infty} - p)_c > (p_{0\infty} - p)_{inc} \rightarrow (p)_c < (p)_{inc}$$



Effetto della comprimibilità sulle prestazioni dei profili

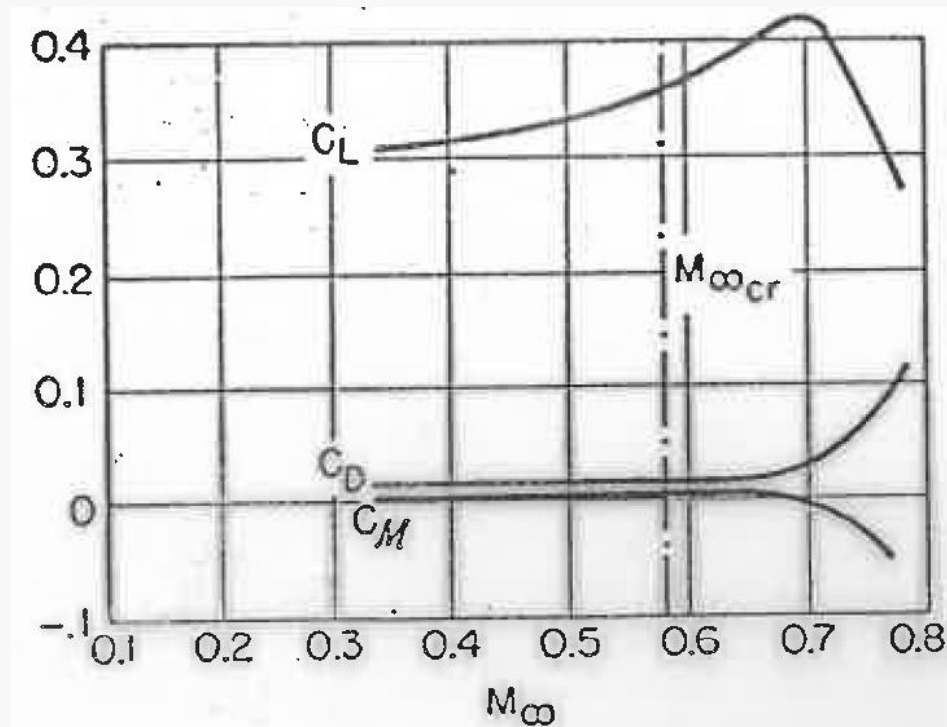
Regola di Prandtl – Glauert ($M_\infty \leq M_{cr}$):
$$C_L = \frac{(C_L)_{M_\infty=0}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$



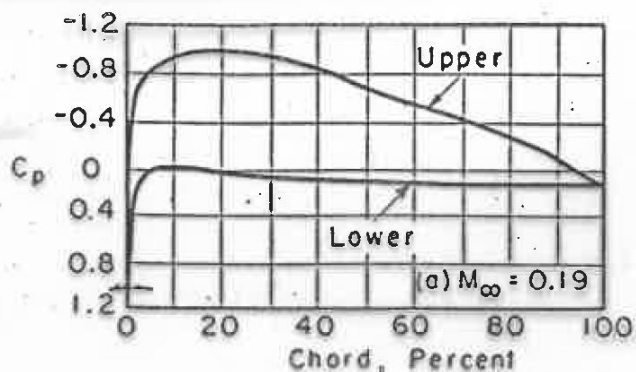
Effetto della comprimibilità sulle prestazioni dei profili

Al crescere di M_∞ aumentano le velocità sul profilo fino a quando, per $M_\infty = M_{cr}$, in un punto del dorso del profilo viene raggiunta la velocità del suono.

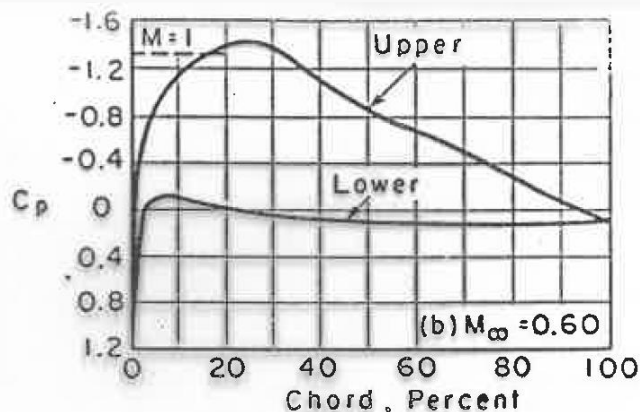
$M_{cr} = f(\text{geometria profilo}, \alpha)$



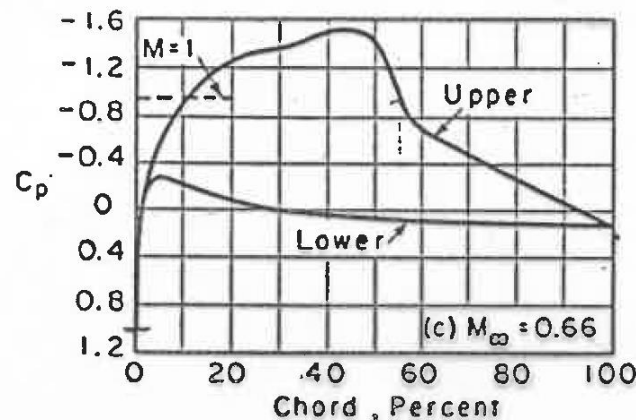
Effetto della comprimibilità sulle prestazioni dei profili



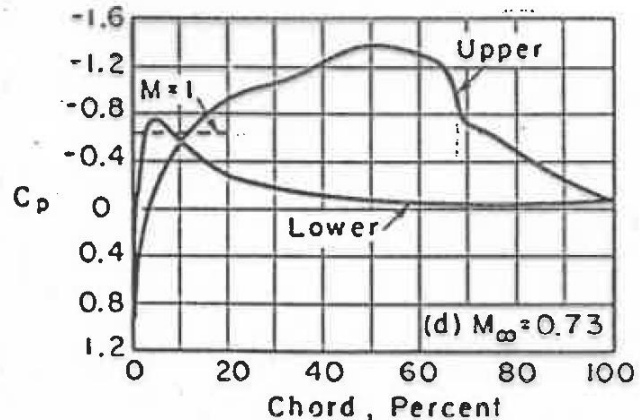
(a)



(b)



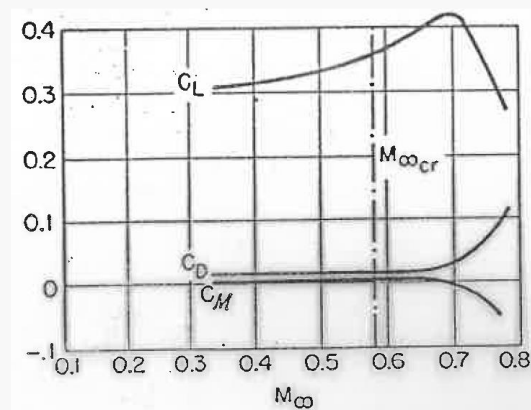
(c)



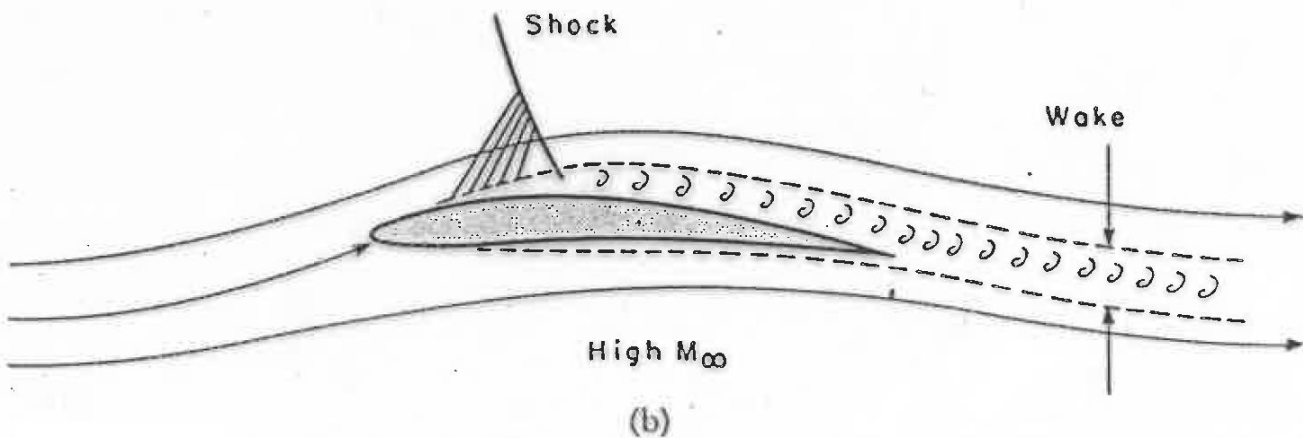
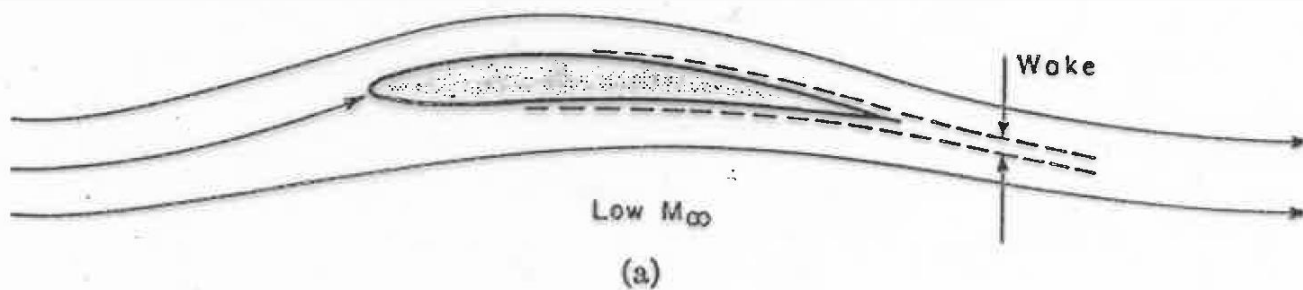
(d)

Pressure distribution on NACA 4412 profile at angle of attack of $1^\circ 52'$ (after Stack, Lindsey, and Littell).

- (a) $M_\infty = 0.19$.
- (b) $M_\infty = 0.60$.
- (c) $M_\infty = 0.66$ (note shock at 55% chord).
- (d) $M_\infty = 0.73$ (note shock at 67% chord).

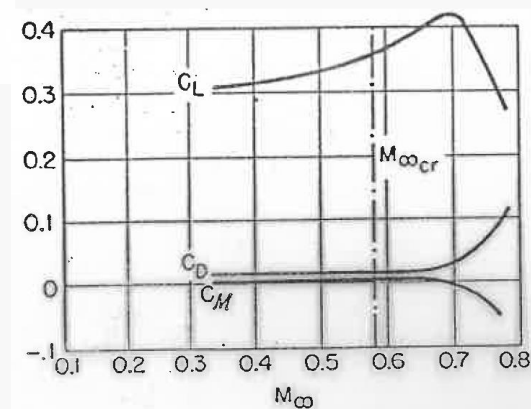


Effetto della comprimibilità sulle prestazioni dei profili



(a) Flow past profile at low Mach Number.

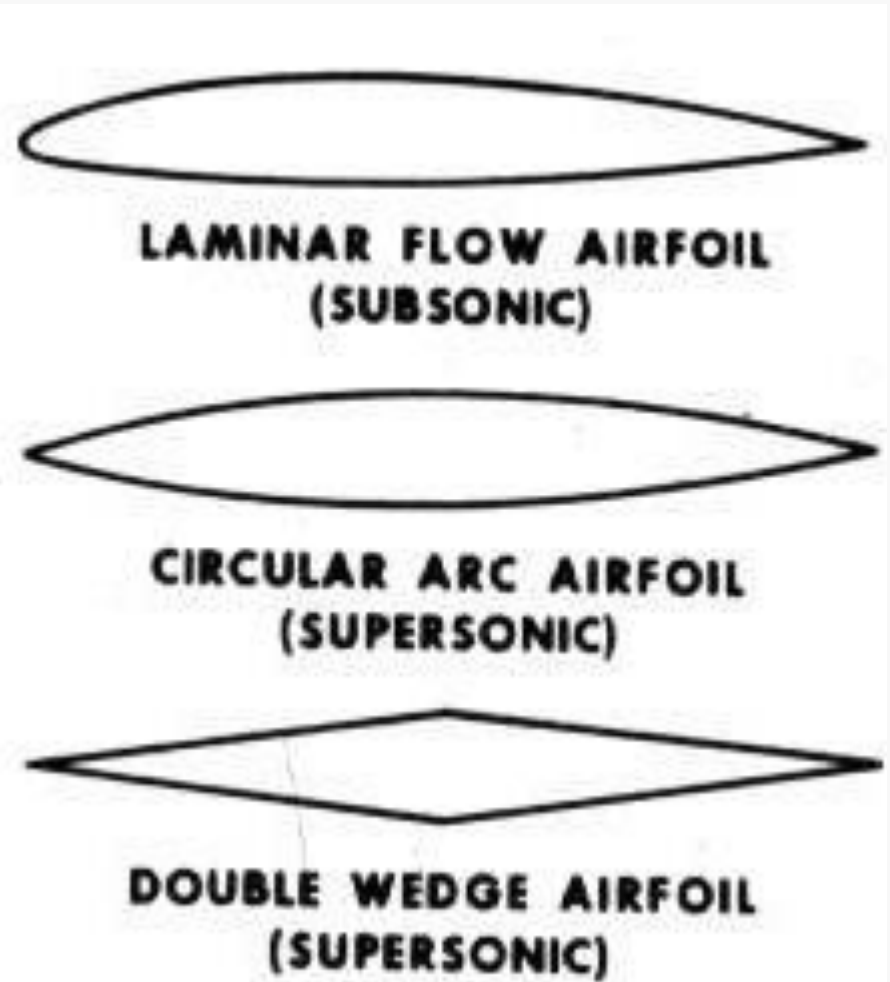
(b) Flow at high Mach Number, with boundary-layer separation owing to shock wave.



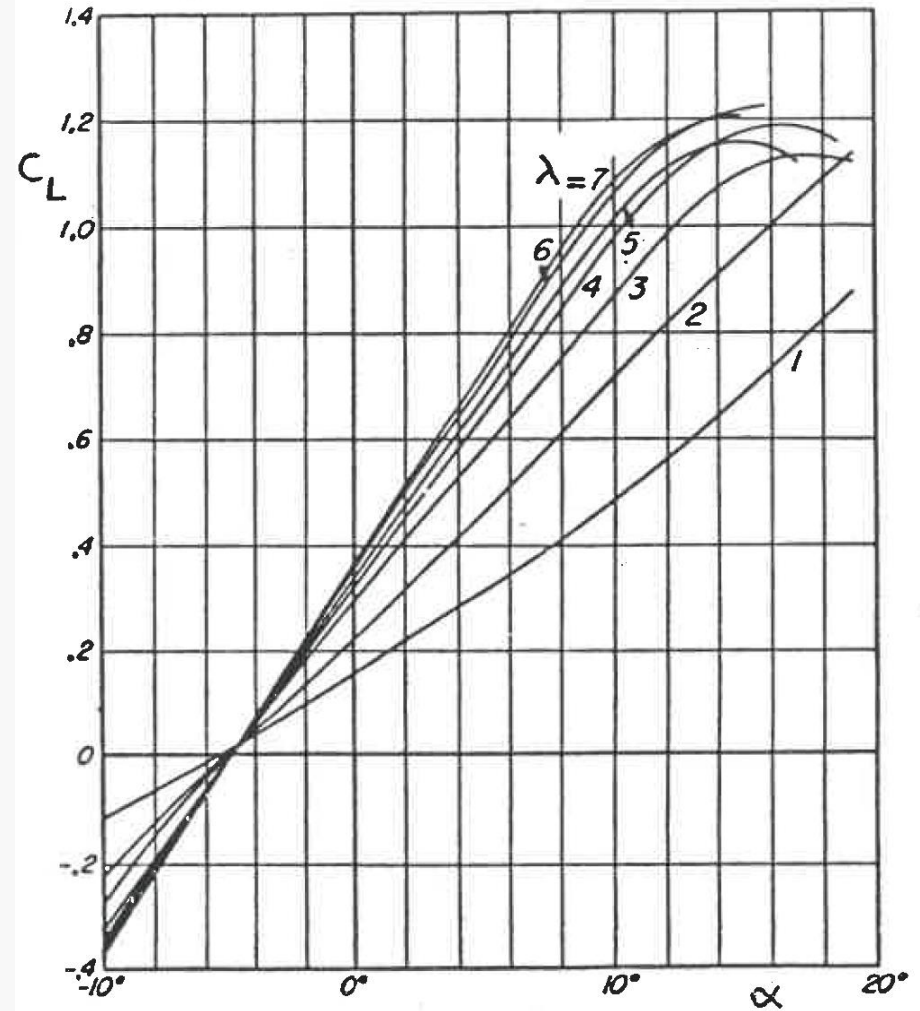
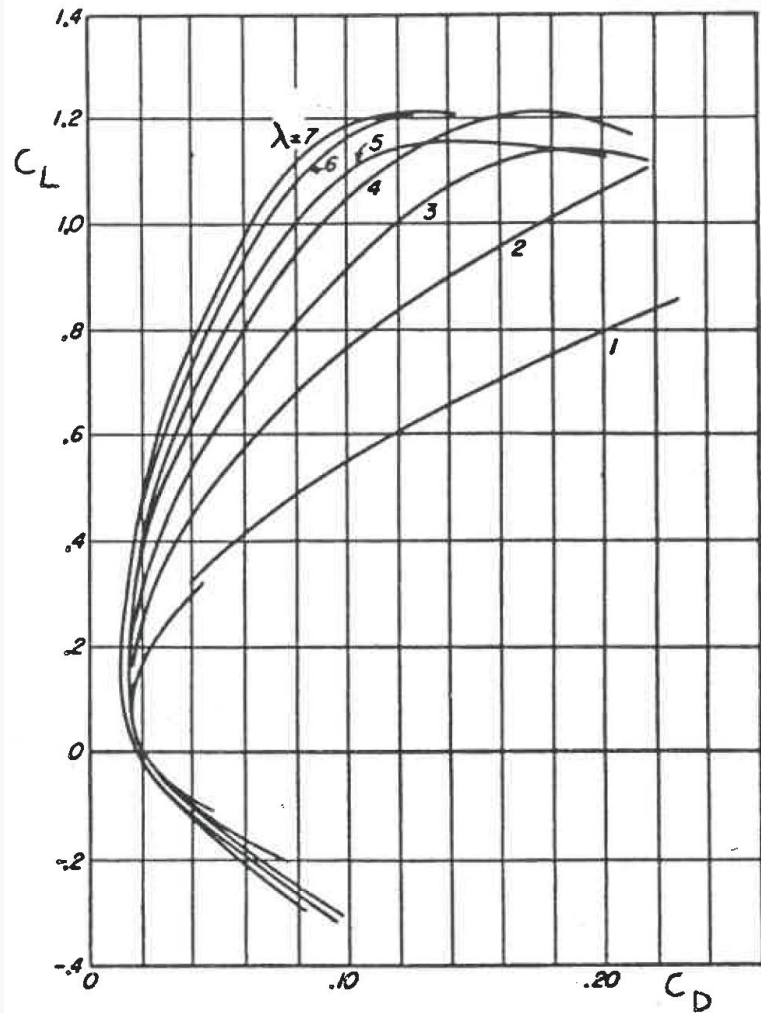
Profili per flussi supersonici

Per $M_\infty > 1$:

$$C_L = \frac{4 \alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$



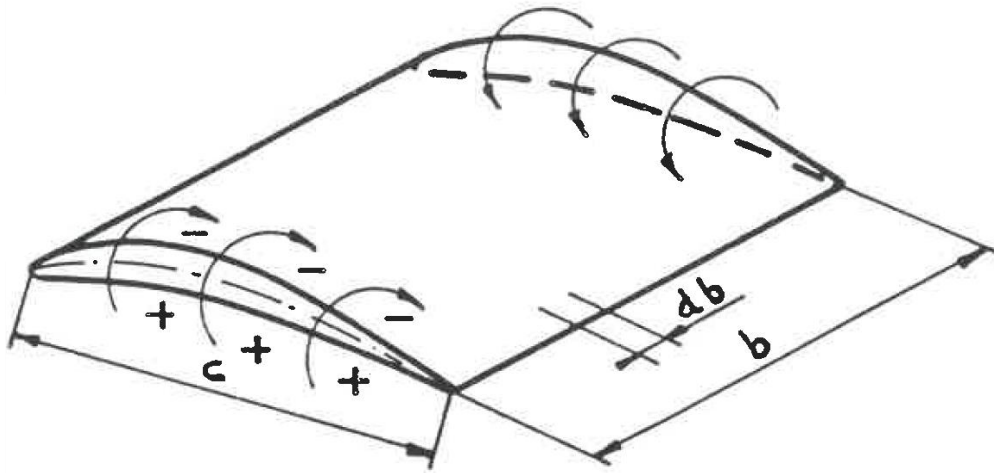
Correzione delle prestazioni al variare dell'allungamento λ



$$\lambda \downarrow \rightarrow C_L = \text{cost.} \begin{cases} C_D \uparrow \\ \alpha \uparrow \end{cases}$$



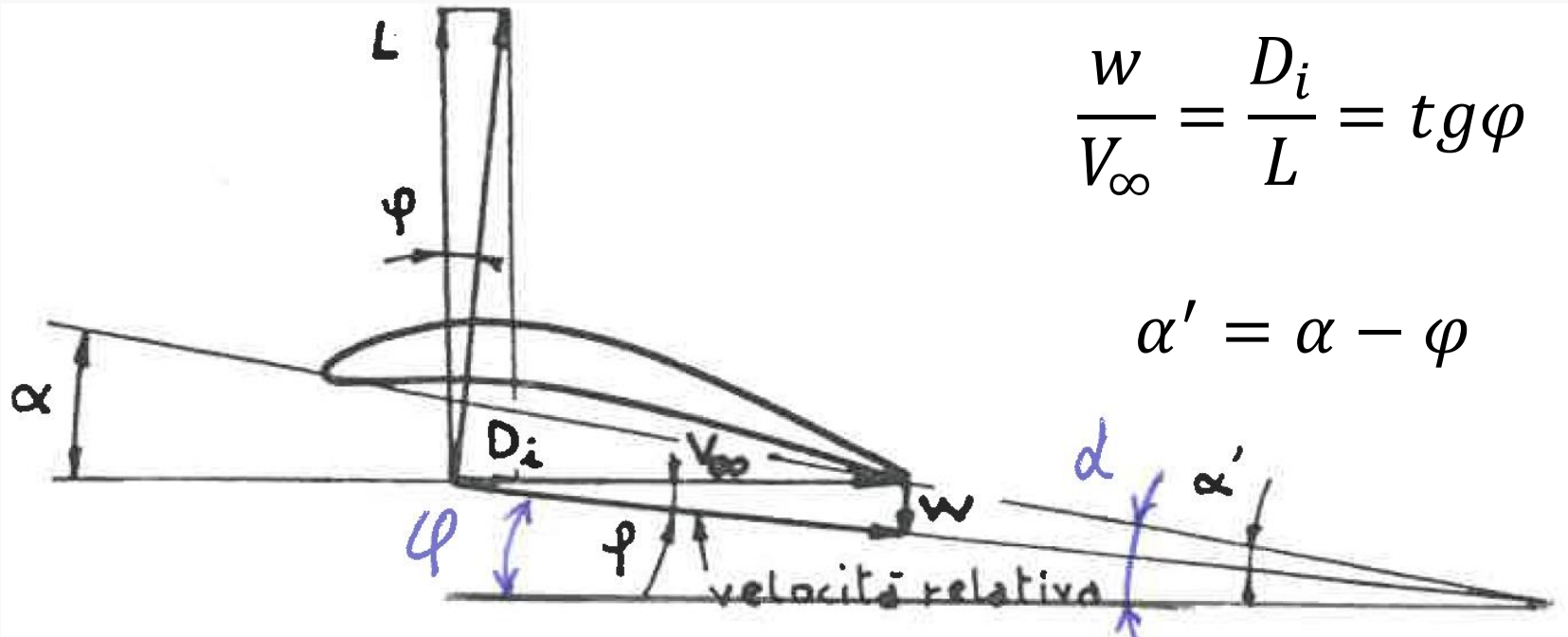
Correzione delle prestazioni al variare dell'allungamento λ



I vortici che trasportano il fluido dal ventre al dorso si prolungano dietro l'ala in due vortici controrotanti che generano una velocità indotta w

$$\frac{w}{V_\infty} = \frac{D_i}{L} = \text{tg} \varphi$$

$$\alpha' = \alpha - \varphi$$



Correzione delle prestazioni al variare dell'allungamento λ

Ipotizzando una distribuzione ellittica della portanza per unità di lunghezza, risulta che:

$$w = \frac{L}{\pi b^2 \rho \frac{V_\infty}{2}}$$

$$D_i = L \frac{w}{V_\infty} = \frac{L^2}{\pi b^2 \rho \frac{V_\infty^2}{2}} = C_L \rho \frac{V_\infty^2}{2} S \frac{C_L \rho \frac{V_\infty^2}{2} S}{\pi b^2 \rho \frac{V_\infty^2}{2}} = \frac{C_L^2 S}{\pi b^2} \rho \frac{V_\infty^2}{2} S$$

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi \lambda}$$



Correzione delle prestazioni al variare dell'allungamento λ

La resistenza globale di un profilo è la somma della resistenza indotta e della resistenza di profilo (somma della resistenza superficiale e della resistenza di forma) dovuta alla viscosità del fluido

$$C_D = C_{D_i} + C_{D_p} = \frac{C_L^2}{\pi\lambda} + C_{D_p}$$

Presi due profili uguali su ali di diverso allungamento, il coefficiente di resistenza di profilo risulta praticamente indipendente da λ

$$C_{D_p} = C_{D_1} - \frac{C_L^2}{\pi\lambda_1} = C_{D_2} - \frac{C_L^2}{\pi\lambda_2}$$

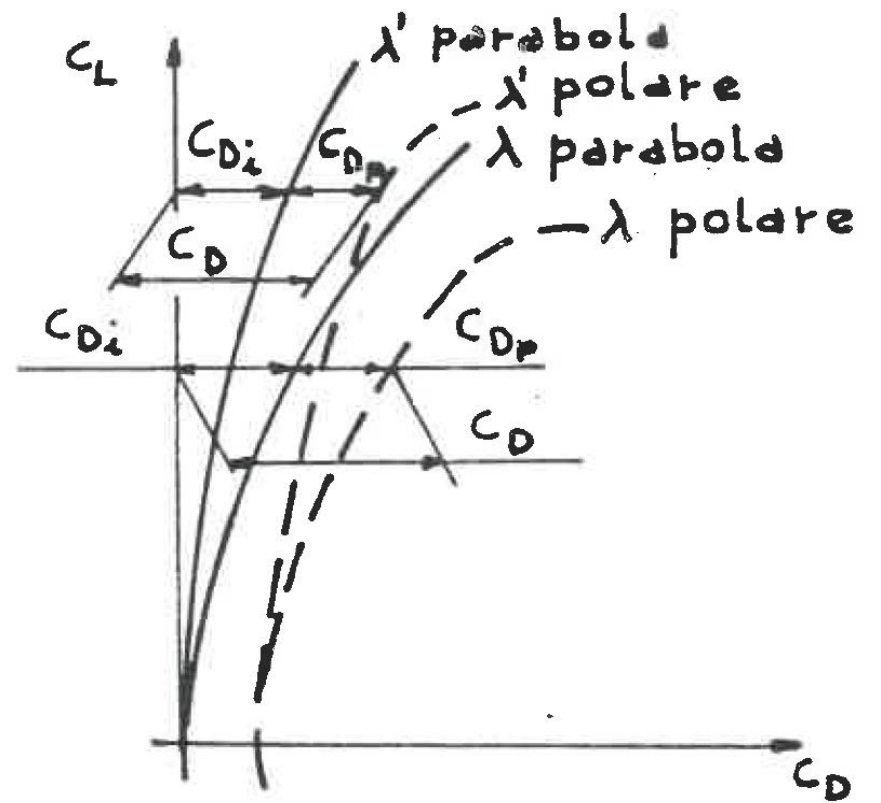


Correzione delle prestazioni al variare dell'allungamento λ

$$C_{D_2} = C_{D_1} + \frac{C_L^2}{\pi} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right)$$

$$\frac{W}{V_\infty} = \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$$

$$\begin{aligned} \varphi &\approx \frac{1}{V_\infty} \frac{L}{\pi b^2 \rho \frac{V_\infty}{2}} = \\ &= \frac{C_L \rho \frac{V_\infty^2}{2} S}{\pi b^2 \rho \frac{V_\infty^2}{2}} = \frac{C_L}{\pi \lambda} \end{aligned}$$



Correzione delle prestazioni al variare dell'allungamento λ

Due profili uguali su ali di diverso allungamento presentano la stessa portanza se presentano uguali valori dell'angolo α'

$$\alpha' = \alpha_1 - \varphi_1 = \alpha_1 - \frac{C_L}{\pi\lambda_1} = \alpha_2 - \varphi_2 = \alpha_2 - \frac{C_L}{\pi\lambda_2}$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{C_L}{\pi} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right)$$



Correzione delle prestazioni al variare dell'allungamento λ

Ogni galleria del vento ha le sue relazioni più adatte per effettuare la correzione delle prestazioni in funzione di λ

Molto utilizzate sono le relazioni di Prandtl-Betz

$$C_{L_2} = C_{L_1}$$

$$C_{D_2} = C_{D_1} + \frac{C_L^2}{0.96 \pi} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right)$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{C_L}{0.96 \pi} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right)$$

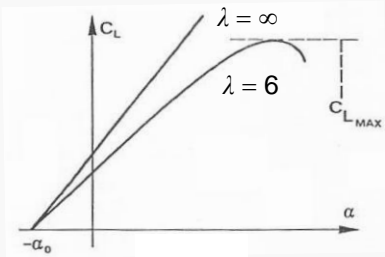


Correzione delle prestazioni al variare dell'allungamento λ

Per ala con $\lambda = \infty$

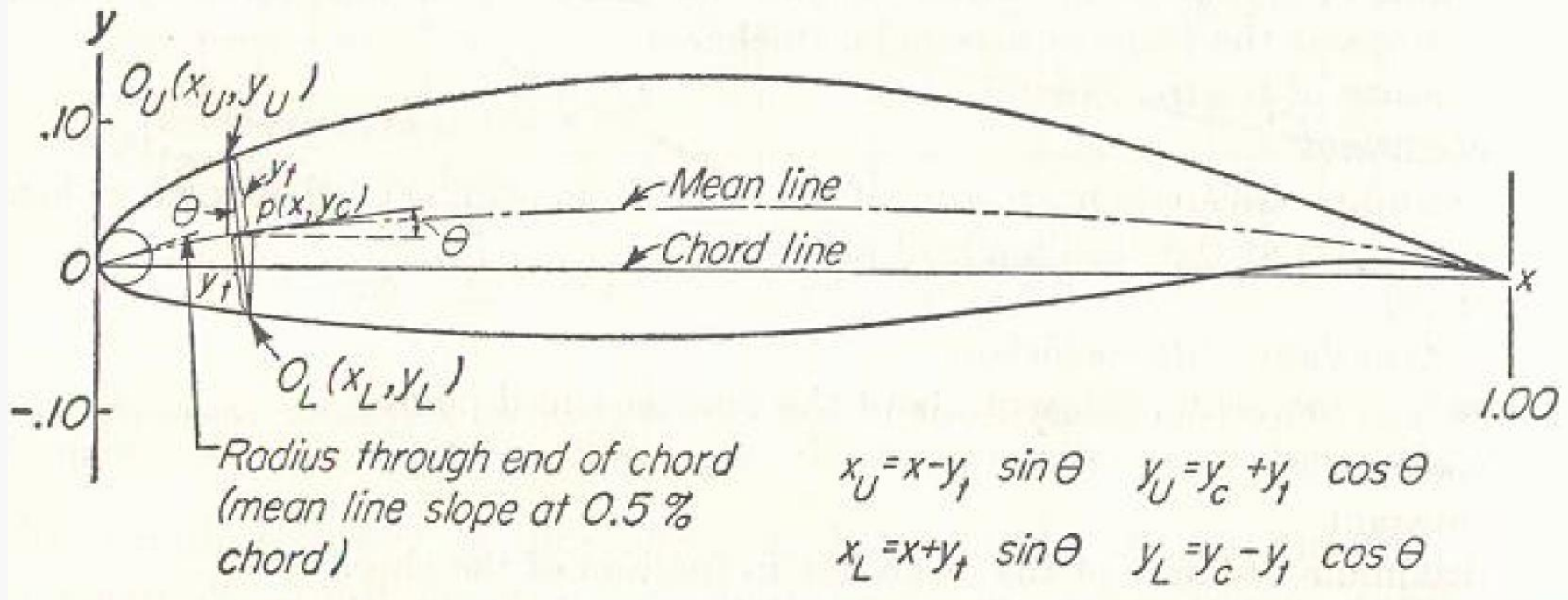
$$C_{L\infty} = C_{L\lambda}$$
$$C_{D\infty} = C_{D\lambda} - \frac{C_L^2}{0.96 \pi \lambda}$$
$$\alpha_\infty = \alpha_\lambda - \frac{C_L}{0.96 \pi \lambda}$$

Per i profili NACA generalmente le prestazioni sono rilevate su ali con $\lambda = 6$ e la relazione proposta per correggere i risultati per ali con $\lambda = \infty$ è la seguente:



$$\left(\frac{dC_L}{d\alpha} \right)_{\lambda=\infty} = \frac{1}{0.96} \left(\frac{dC_L}{d\alpha} \right)_{\lambda=6}$$

Profili NACA (National Advisory Committee for Aeronautics)

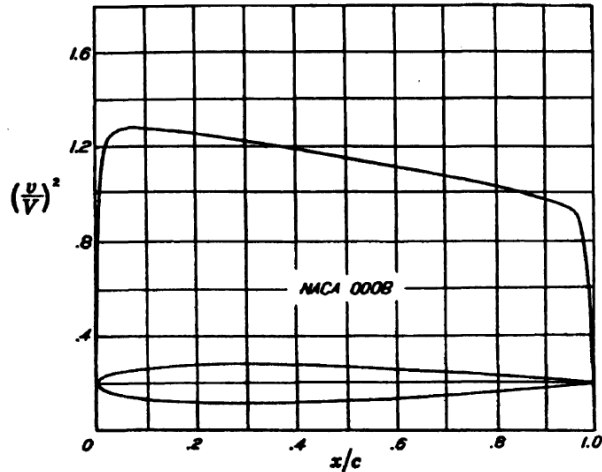


Equazione della distribuzione di spessori di profili NACA a 4 cifre

$$y_t = \frac{s_{\max}}{0.20} \left(0.2969 \sqrt{x} - 0.1260 x - 0.3516 x^2 + 0.2843 x^3 - 0.1015 x^4 \right)$$



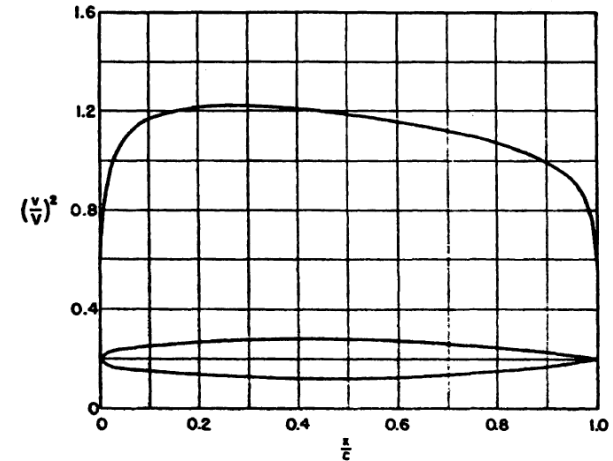
Profili NACA a 4 cifre – Distribuzione spessori



x (per cent c)	y (per cent c)	$(v/V)^2$	v/V	$\Delta v_w/V$
0	0	0	0	2.900
0.5	0.792	0.890	1.795
1.25	1.263	1.103	1.050	1.310
2.5	1.743	1.221	1.105	0.971
5.0	2.369	1.272	1.128	0.694
7.5	2.800	1.284	1.133	0.561
10	3.121	1.277	1.130	0.479
15	3.564	1.272	1.128	0.379
20	3.825	1.259	1.122	0.318
25	3.961	1.241	1.114	0.273
30	4.001	1.223	1.106	0.239
40	3.869	1.186	1.089	0.188
50	3.529	1.149	1.072	0.152
60	3.043	1.111	1.054	0.121
70	2.443	1.080	1.039	0.096
80	1.749	1.034	1.017	0.071
90	0.965	0.968	0.984	0.047
95	0.537	0.939	0.969	0.031
100	0.084	0

L.E. radius: 0.70 per cent c

NACA 0008 Basic Thickness Form



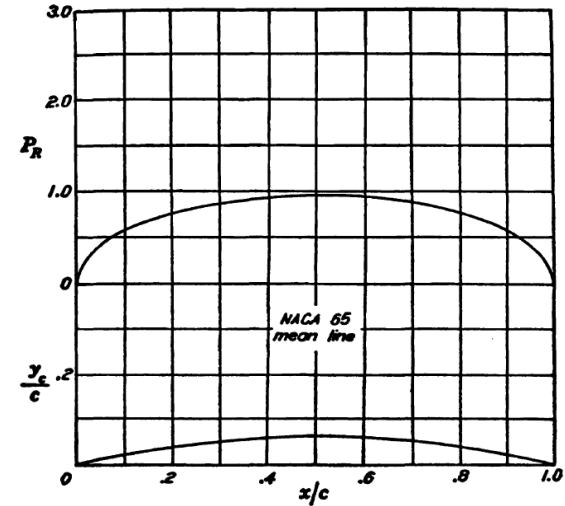
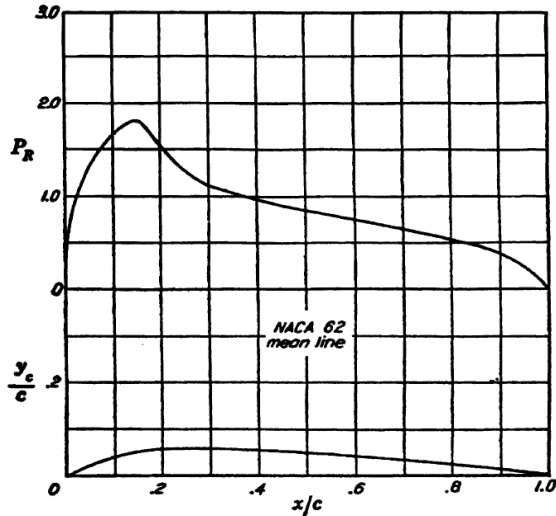
x (per cent c)	y (per cent c)	$(v/V)^2$	v/V	$\Delta v_w/V$
0	0	0	0	4.839
1.25	0.756	0.917	0.958	1.338
2.5	1.120	1.023	1.011	0.966
5.0	1.662	1.092	1.045	0.691
7.5	2.089	1.137	1.066	0.564
10	2.436	1.162	1.078	0.485
15	2.996	1.188	1.090	0.387
20	3.396	1.206	1.098	0.326
30	3.867	1.217	1.103	0.248
40	4.000	1.202	1.096	0.197
50	3.884	1.185	1.089	0.157
60	3.547	1.163	1.079	0.128
70	2.987	1.127	1.062	0.100
80	2.213	1.067	1.033	0.074
90	1.244	0.993	0.996	0.047
95	0.684	0.932	0.965	0.031
100	0.080	0	0	0

L.E. radius: 0.174 per cent c

NACA 0008-34 Basic Thickness Form



Profili NACA a 4 cifre – Linee medie



$c_{li} = 0.90 \quad \alpha_i = 2.81^\circ \quad c_{m_x/4} = -0.113$				
x (per cent c)	y_c (per cent c)	dy_c/dx	P_R	$\Delta v/V = P_R/4$
0	0	0.60000	0	0
1.25	0.726	0.56250	0.682	0.171
2.5	1.406	0.52500	1.031	0.258
5.0	2.625	0.45000	1.314	0.328
7.5	3.656	0.37500	1.503	0.376
10	4.500	0.30000	1.651	0.413
15	5.625	0.15000	1.802	0.451
20	6.000	0	1.530	0.383
25	5.977	-0.00938	1.273	0.318
30	5.906	-0.01875	1.113	0.279
40	5.625	-0.03750	0.951	0.238
50	5.156	-0.05625	0.843	0.211
60	4.500	-0.07500	0.741	0.185
70	3.656	-0.09375	0.635	0.159
80	2.625	-0.11250	0.525	0.131
90	1.406	-0.13125	0.377	0.094
95	0.727	-0.14062	0.261	0.065
100	0	-0.15000	0	0

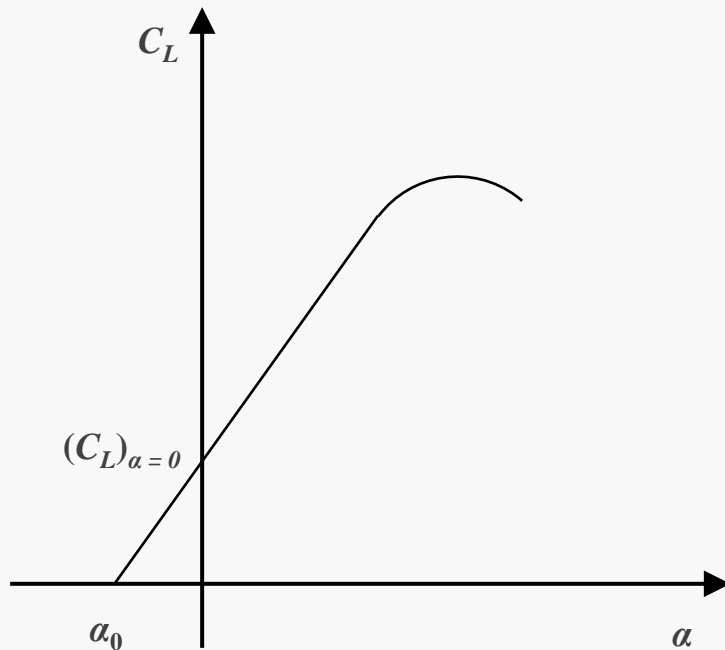
Data for NACA Mean Line 62

$c_{li} = 0.75 \quad \alpha_i = 0^\circ \quad c_{m_x/4} = -0.187$				
x (per cent c)	y_c (per cent c)	dy_c/dx	P_R	$\Delta v/V = P_R/4$
0	0	0.24000	0	0
1.25	0.296	0.23400	0.205	0.051
2.5	0.585	0.22800	0.294	0.074
5.0	1.140	0.21600	0.413	0.103
7.5	1.665	0.20400	0.502	0.126
10	2.160	0.19200	0.571	0.143
15	3.060	0.16800	0.679	0.170
20	3.840	0.14400	0.760	0.190
25	4.500	0.12000	0.824	0.206
30	5.040	0.09600	0.872	0.218
40	5.760	0.04800	0.932	0.233
50	6.000	0	0.951	0.238
60	5.760	-0.04800	0.932	0.233
70	5.040	-0.09600	0.872	0.218
80	3.840	-0.14400	0.760	0.190
90	2.160	-0.19200	0.571	0.143
95	1.140	-0.21600	0.413	0.103
100	0	-0.24000	0	0

Data for NACA Mean Line 65



Correzione delle prestazioni al variare di (s_{\max}/c)



Il tratto rettilineo della curva $C_L = f(\alpha)$ può essere espresso con la relazione:

$$C_L = m \left(\frac{s_{\max}}{c} \right)_1 + n \alpha$$

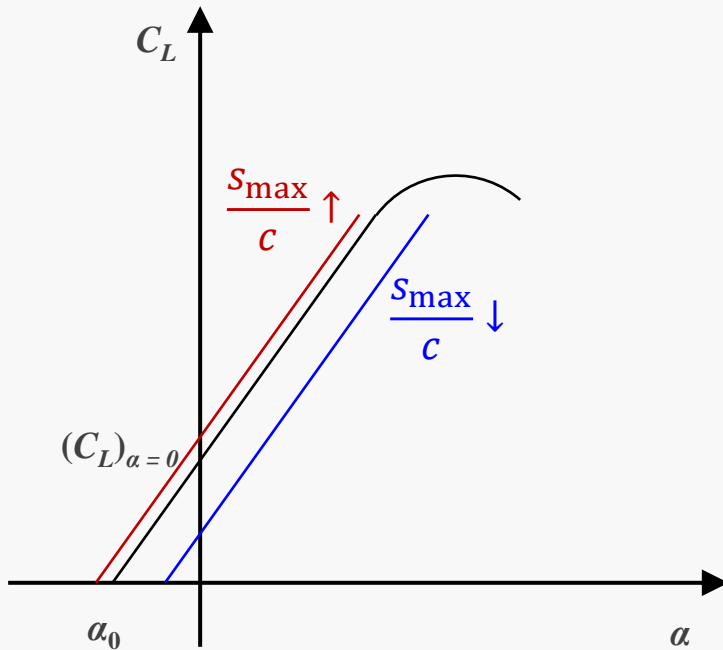
con:

$$m = \left(\frac{c}{s_{\max}} \right)_1 (C_L)_{\alpha=0}$$

$$n = -\frac{1}{\alpha_0} m \left(\frac{s_{\max}}{c} \right)_1 = -\frac{(C_L)_{\alpha=0}}{\alpha_0}$$



Correzione delle prestazioni al variare di (s_{\max}/c)



Per un diverso valore di $(s_{\max}/c)_2$, il tratto rettilineo della curva $C_L = f(\alpha)$ può essere espresso con la relazione:

$$C_L = m \left(\frac{s_{\max}}{c} \right)_2 + n \alpha$$

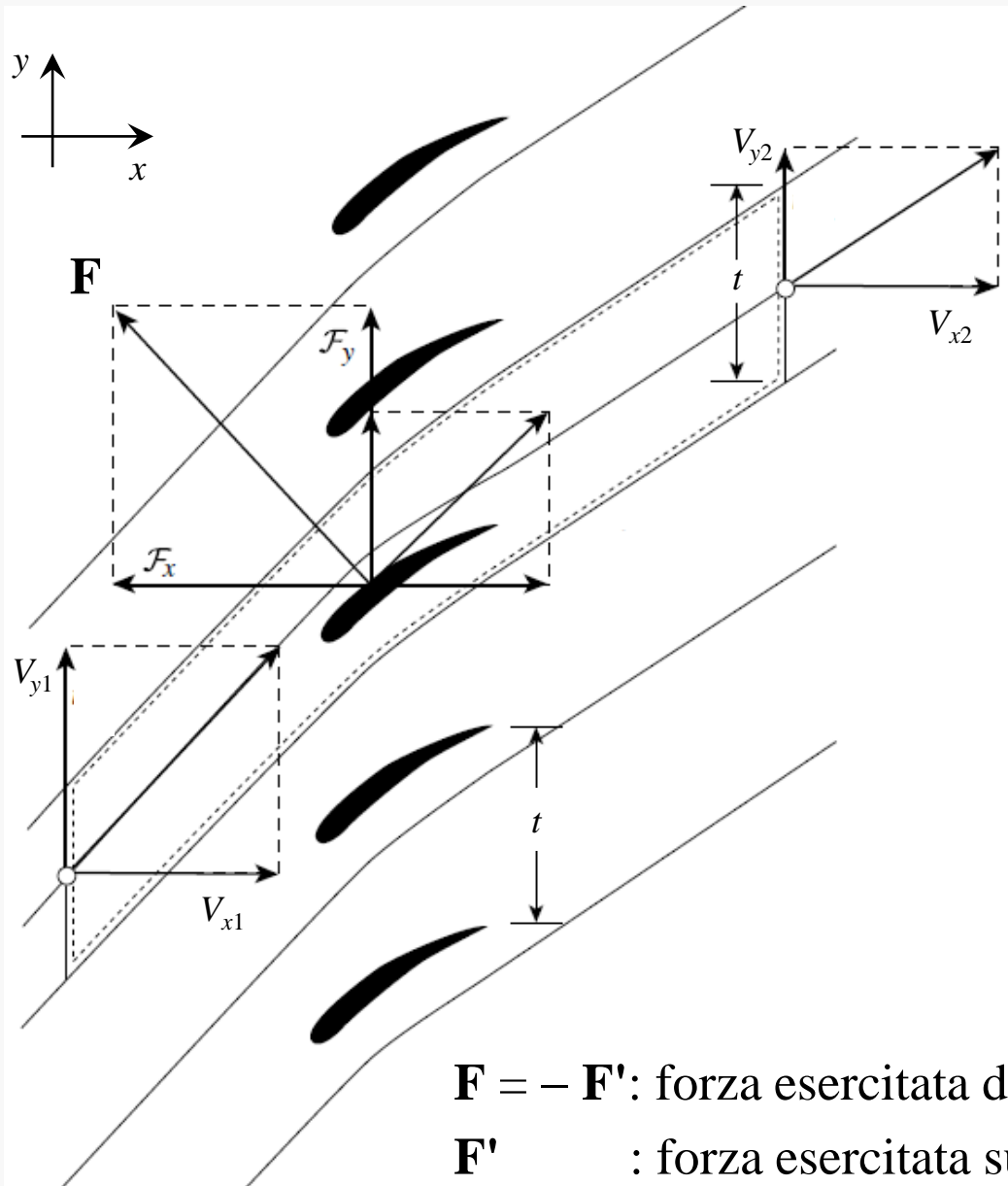
con:

$$m = \left(\frac{c}{s_{\max}} \right)_1 (C_L)_{\alpha=0}$$

$$n = -\frac{1}{\alpha_0} m \left(\frac{s_{\max}}{c} \right)_1 = -\frac{(C_L)_{\alpha=0}}{\alpha_0}$$



Relazione di Kutta - Joukowski



$\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$: forza esercitata dal fluido

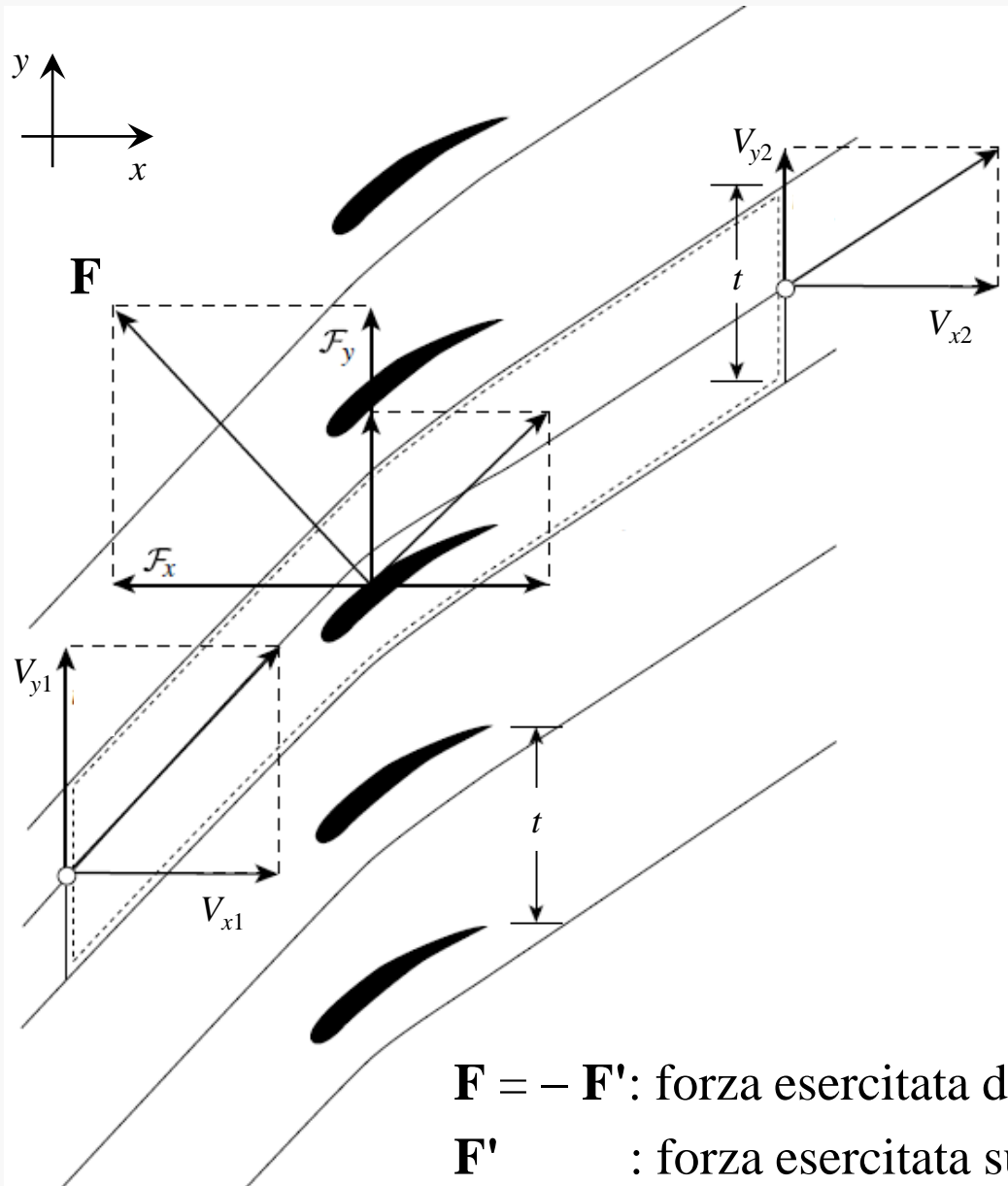
\mathbf{F}' : forza esercitata sul fluido

Schiera formata da un numero infinito di pale di lunghezza infinita

Flusso:

- stazionario
- incomprimibile
- non viscoso
- irrotazionale
- ad energia totale costante

Relazione di Kutta - Joukowsky



Bilancio di massa:

$$\rho_1 A_1 V_{x1} = \rho_2 A_2 V_{x2}$$

$$\rho t V_{x1} = \rho t V_{x2}$$

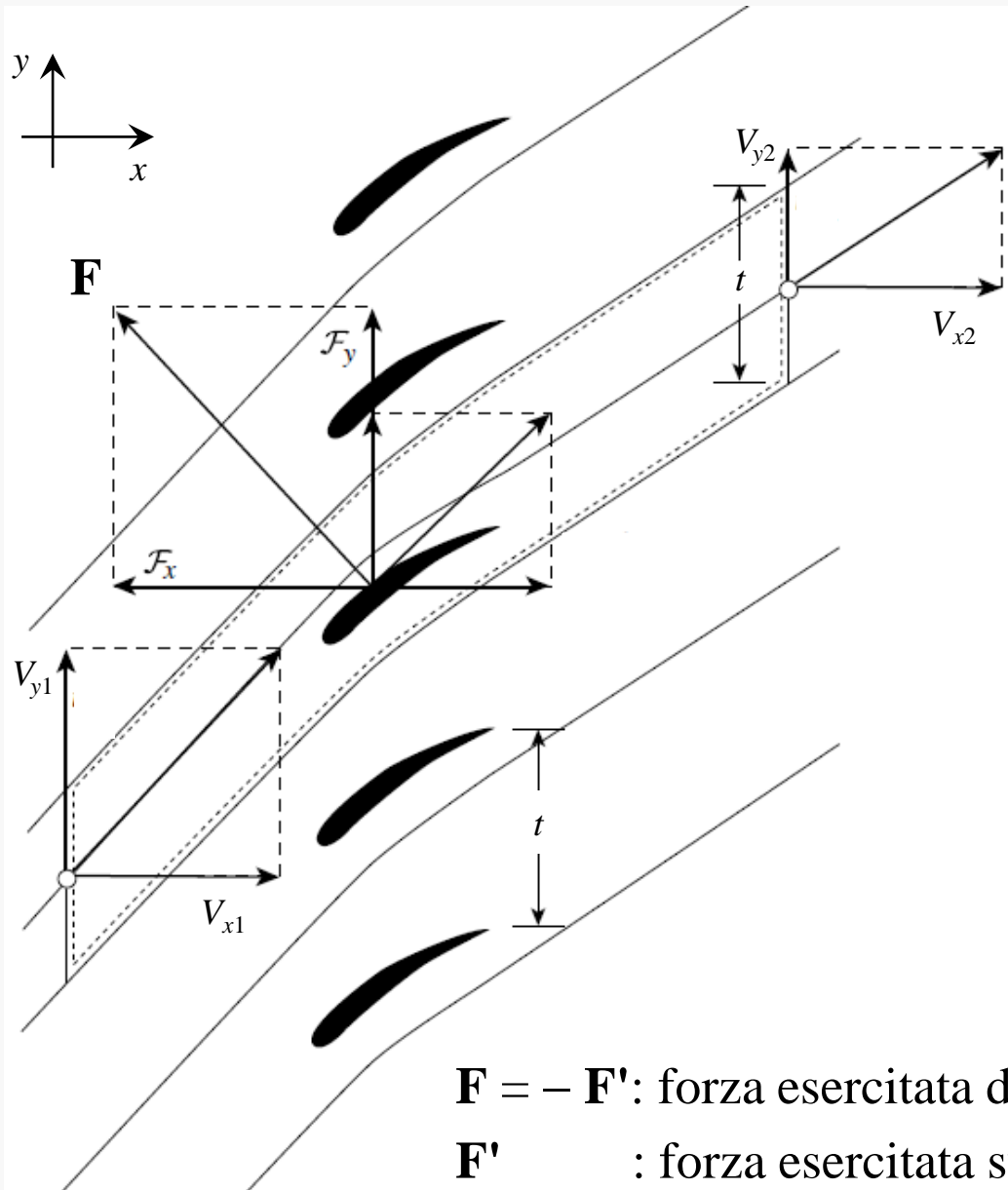
⇓

$$V_{x1} = V_{x2} = V_x$$

$\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$: forza esercitata dal fluido

\mathbf{F}' : forza esercitata sul fluido

Relazione di Kutta - Joukowsky



Bilancio della quantità di moto
in direzione x :

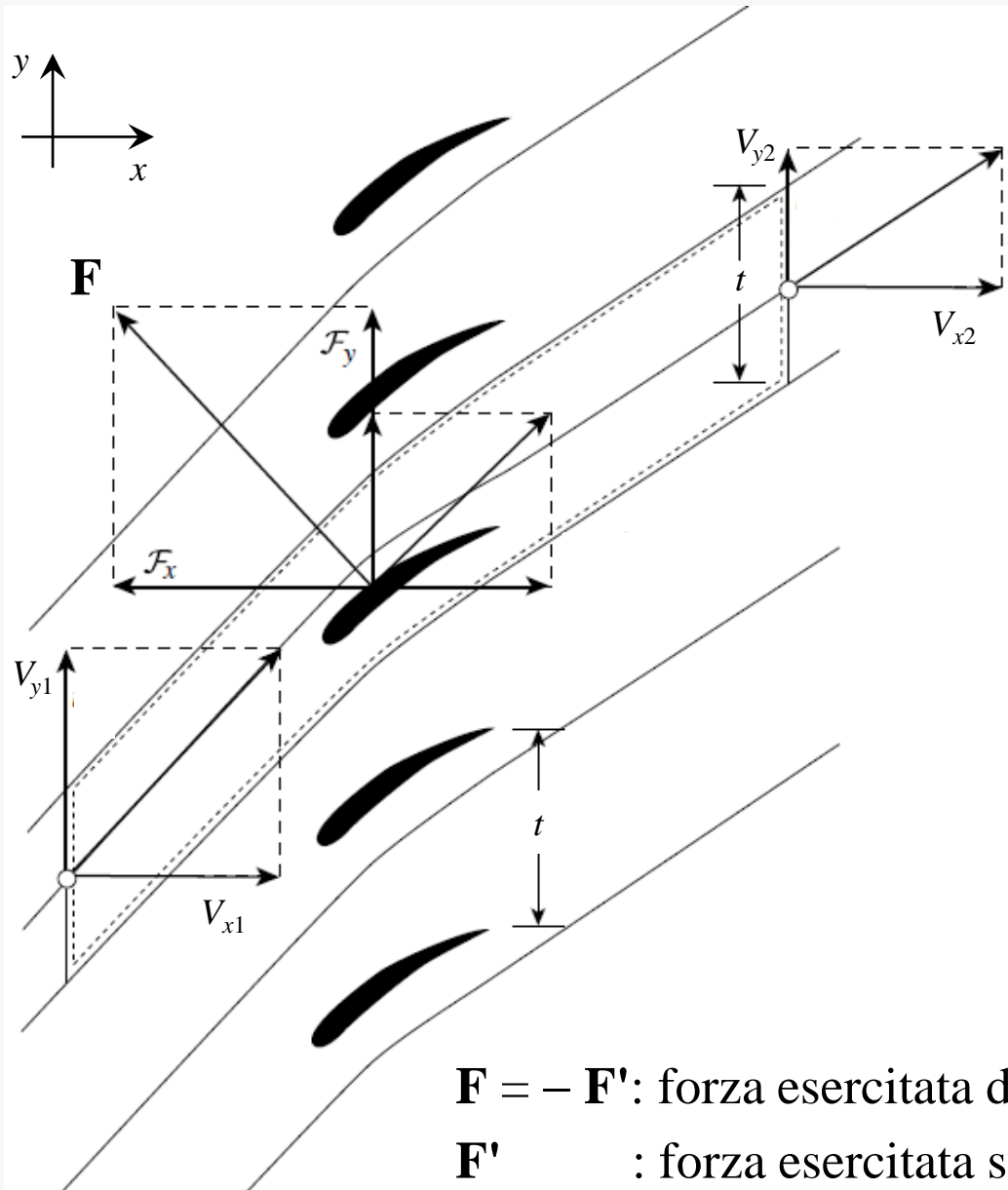
$$\begin{aligned}\sum F'_x &= F'_x + t(p_1 - p_2) = \\ &= \rho t (V_{x2}^2 - V_{x1}^2) = 0\end{aligned}$$

$$F_x = -F'_x = t(p_1 - p_2)$$

$\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$: forza esercitata dal fluido

\mathbf{F}' : forza esercitata sul fluido

Relazione di Kutta - Joukowski



Bilancio della quantità di moto
in direzione y :

$$\sum F'_y = F'_y = \rho V_x t (V_{y2} - V_{y1})$$

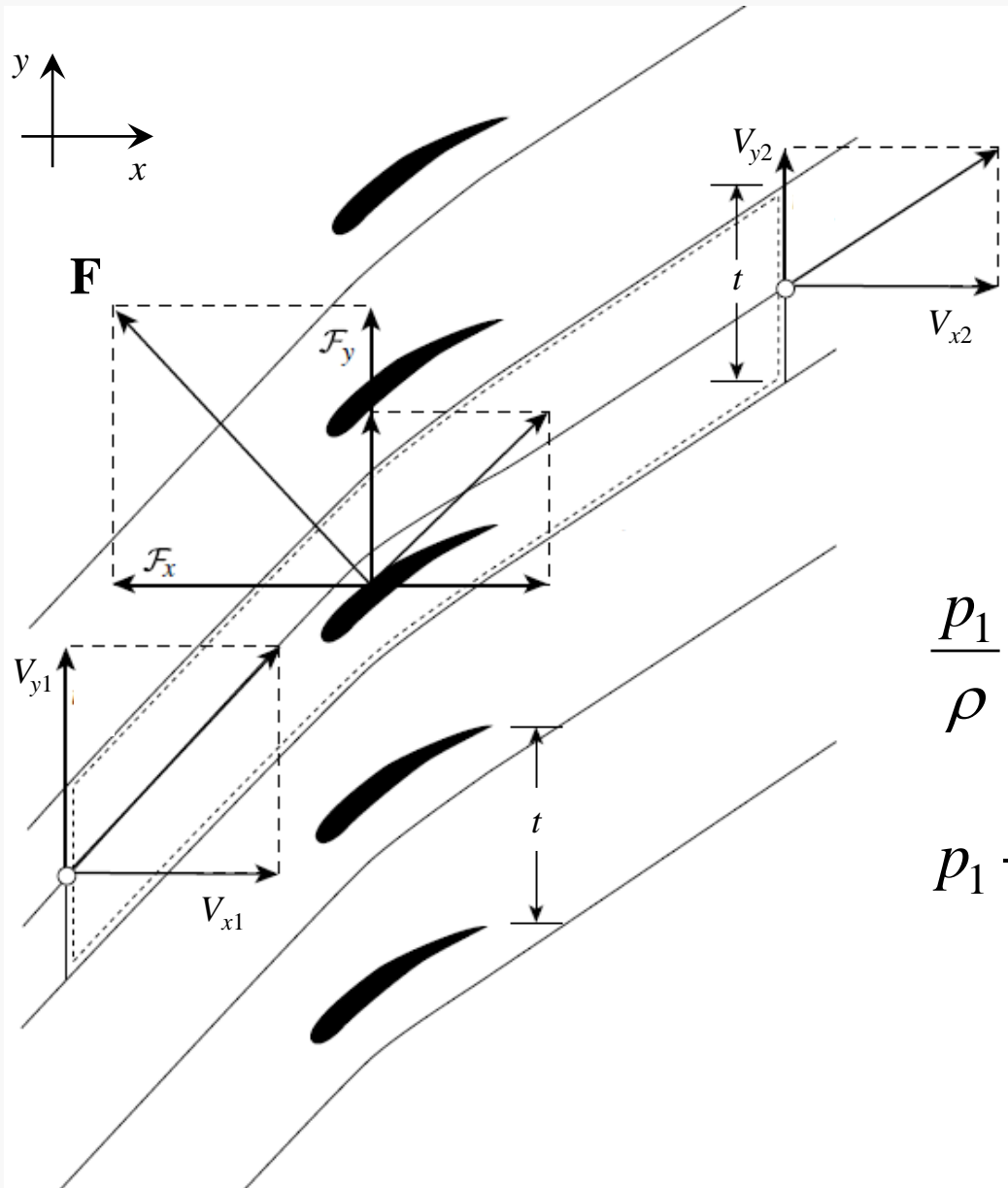
$$F_y = -F'_y = -\rho V_x t (V_{y2} - V_{y1})$$

$\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$: forza esercitata dal fluido

\mathbf{F}' : forza esercitata sul fluido



Relazione di Kutta - Joukowski



Bilancio dell'energia:

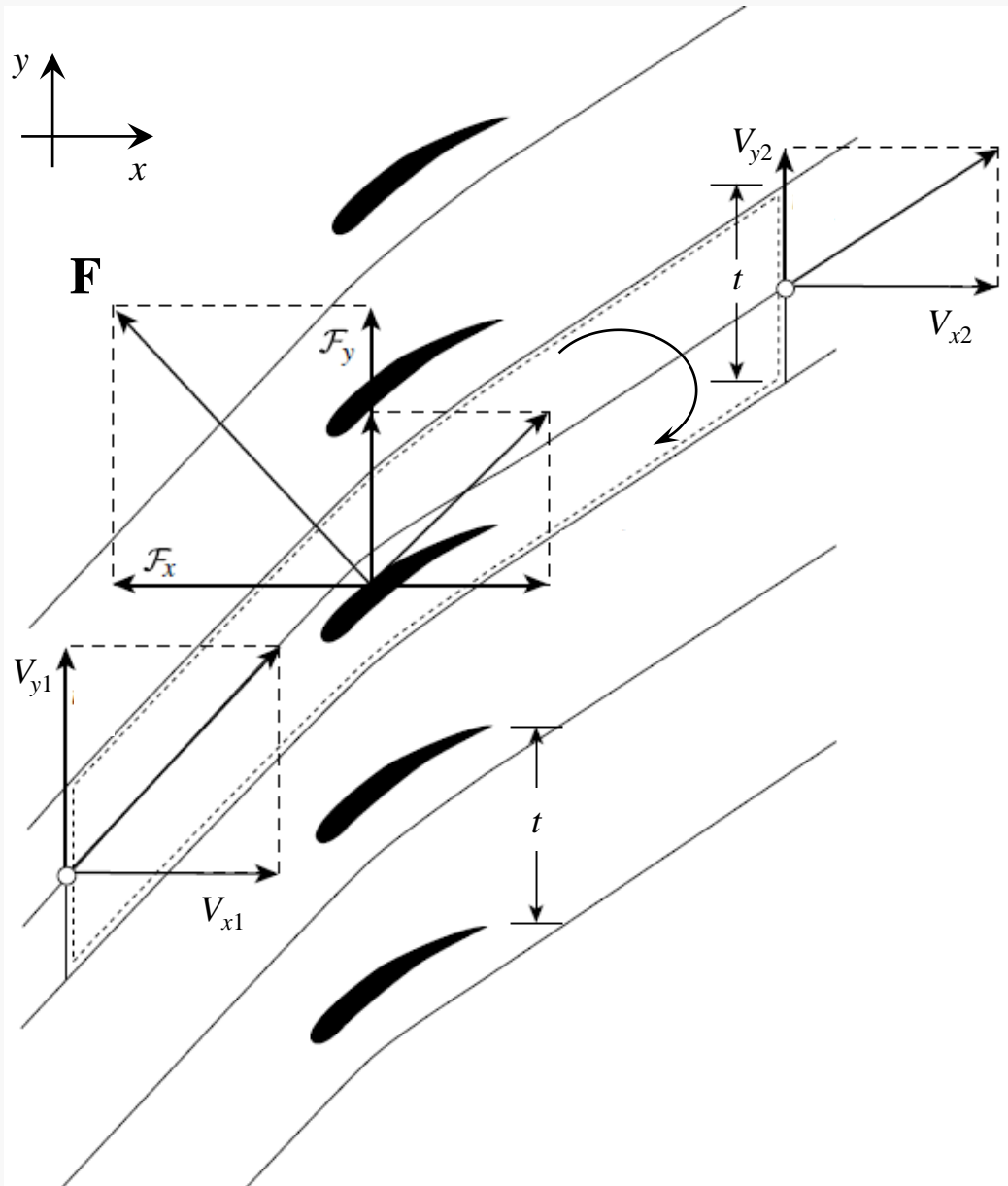
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_{x1}^2 + V_{y1}^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_{x2}^2 + V_{y2}^2}{2}$$

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{V_{y2}^2 - V_{y1}^2}{2} =$$

$$= \frac{\rho}{2} (V_{y2} - V_{y1})(V_{y2} + V_{y1})$$



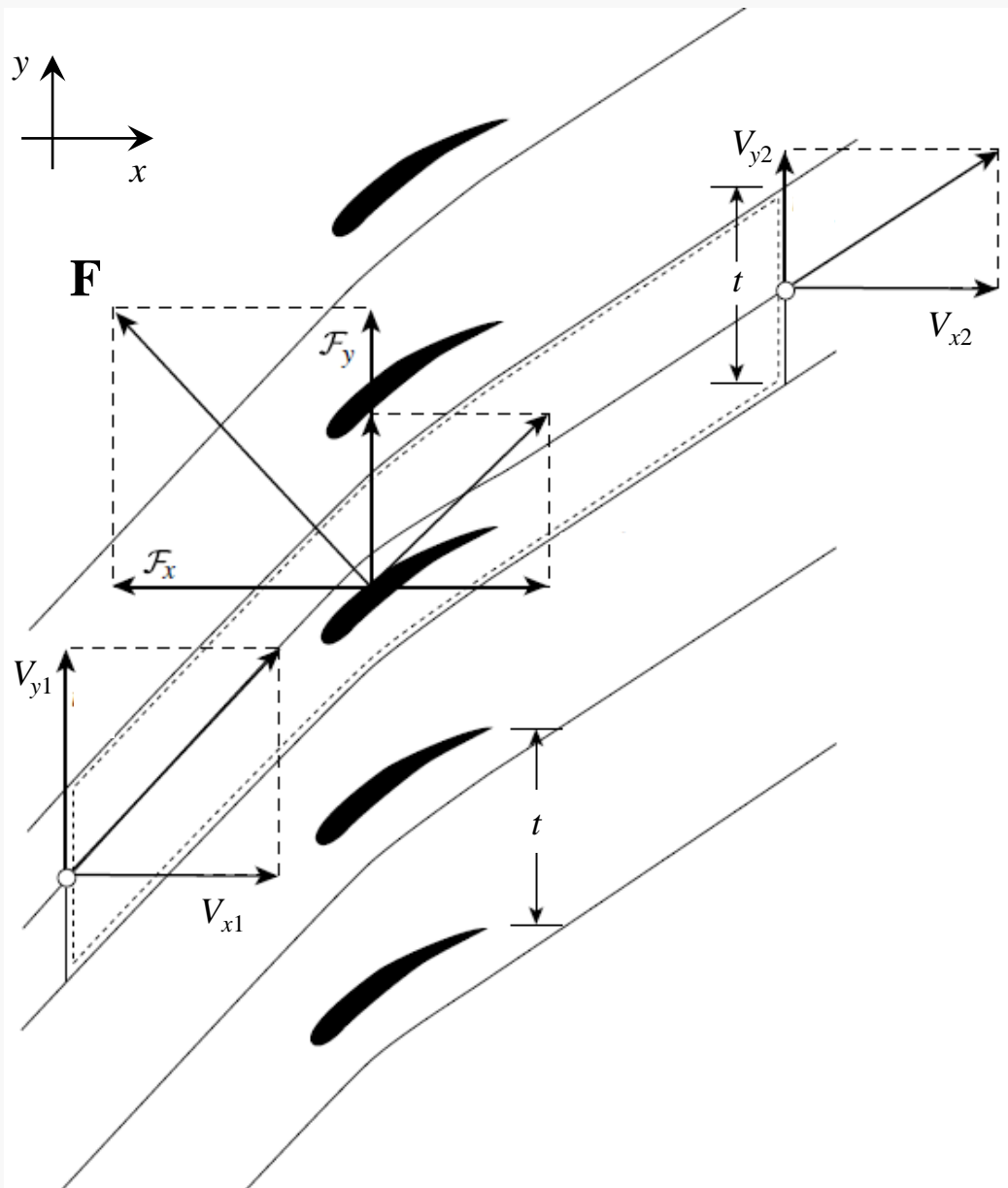
Relazione di Kutta - Joukowski



Circolazione del vettore V lungo la linea chiusa tratteggiata:

$$\Gamma = -t (V_{y2} - V_{y1})$$

Relazione di Kutta - Joukowski

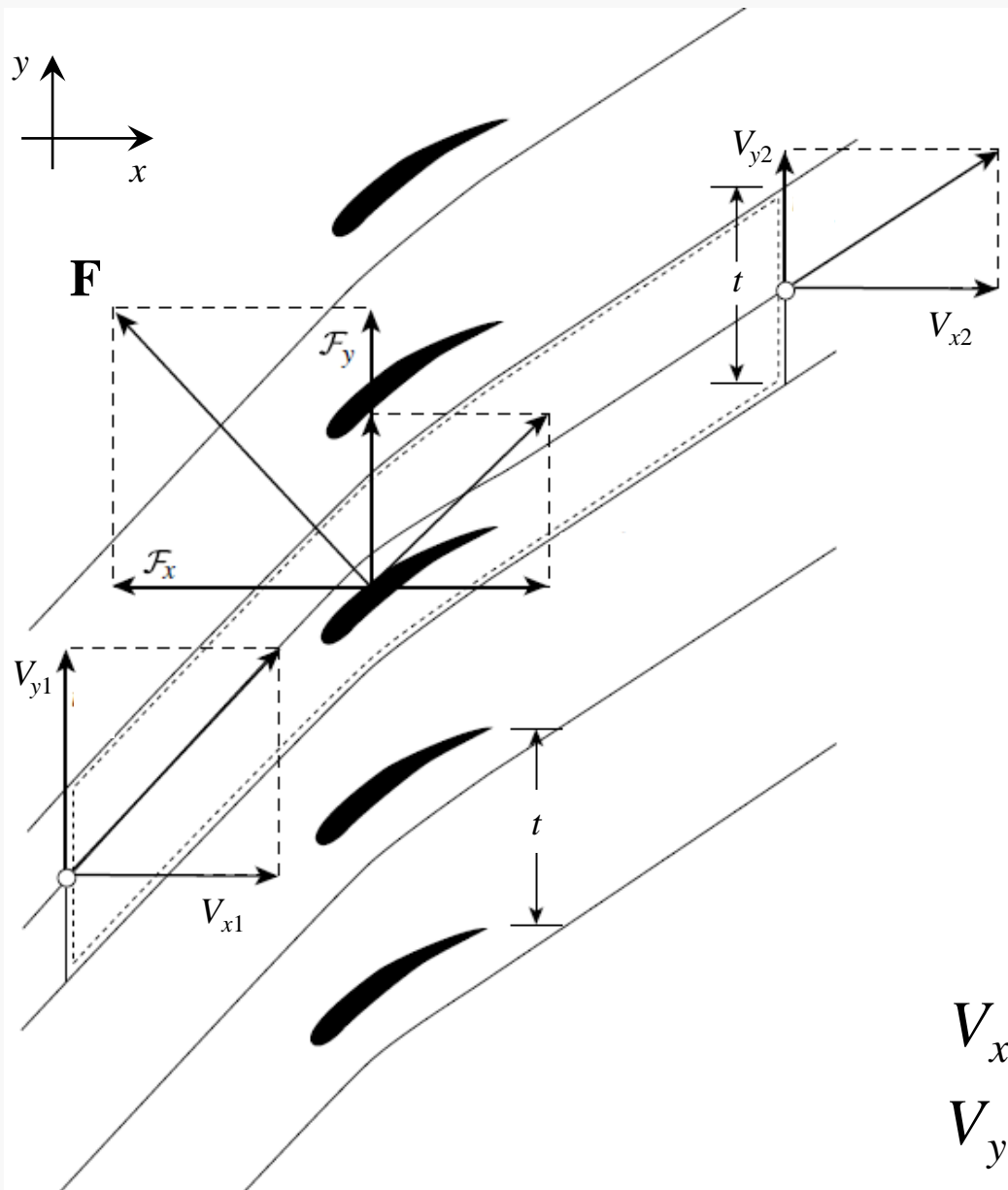


Le componenti della forza \mathbf{F} lungo x e y assumono la forma:

$$\begin{aligned} F_x &= t (p_1 - p_2) = \\ &= \frac{\rho}{2} t (V_{y2} - V_{y1})(V_{y2} + V_{y1}) \\ &= -\rho \Gamma \frac{(V_{y2} + V_{y1})}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y &= -\rho V_x t (V_{y2} - V_{y1}) = \\ &= \rho \Gamma V_x \end{aligned}$$

Relazione di Kutta - Joukowski



Facendo tendere il passo t all'infinito, la circolazione Γ attorno al profilo mantiene comunque un valore finito diverso da zero:

$$\Gamma = -t (V_{y2} - V_{y1})$$

$$\text{per } t \rightarrow \infty \Rightarrow V_{y2} \rightarrow V_{y1}$$

Il profilo tende quindi al profilo isolato dove:

$$\left. \begin{array}{l} V_{x2} = V_{x1} = V_x \\ V_{y2} = V_{y1} = V_y \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_\infty$$

Relazione di Kutta - Joukowsky

Per profilo isolato, facendo coincidere la direzione di V_∞ con la direzione x , risulta:

$$\mathbf{V}_\infty = (V_x, 0) \quad , \quad V_x = V_\infty$$

$$F_x = t(p_1 - p_2) = -\rho \Gamma \frac{(V_{y2} + V_{y1})}{2} = 0$$

$$F_y = L = C_L \rho \frac{V_\infty^2}{2} c = \rho \Gamma V_\infty$$

$$C_L = \frac{2\Gamma}{c V_\infty}$$



Campi potenziali di velocità

Flusso uniforme con velocità parallela all'asse x (in coordinate cartesiane ortogonali):

$$\Phi = V_0 x$$

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = V_0$$

$$V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

$$V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$



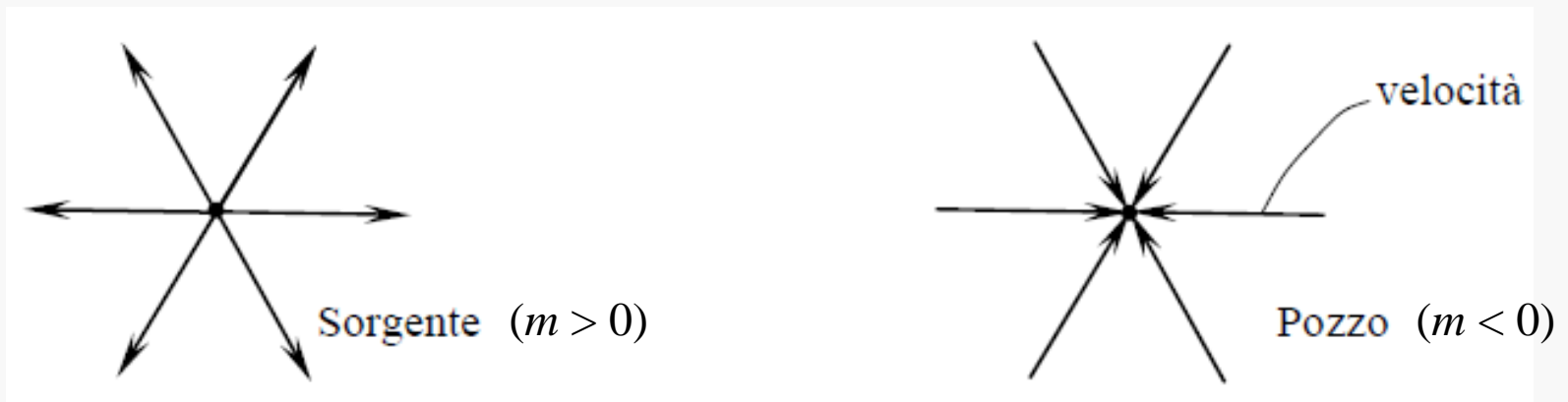
Campi potenziali di velocità

Sorgente e pozzo (in coordinate polari o cilindriche):

$$\Phi = m \ln r$$

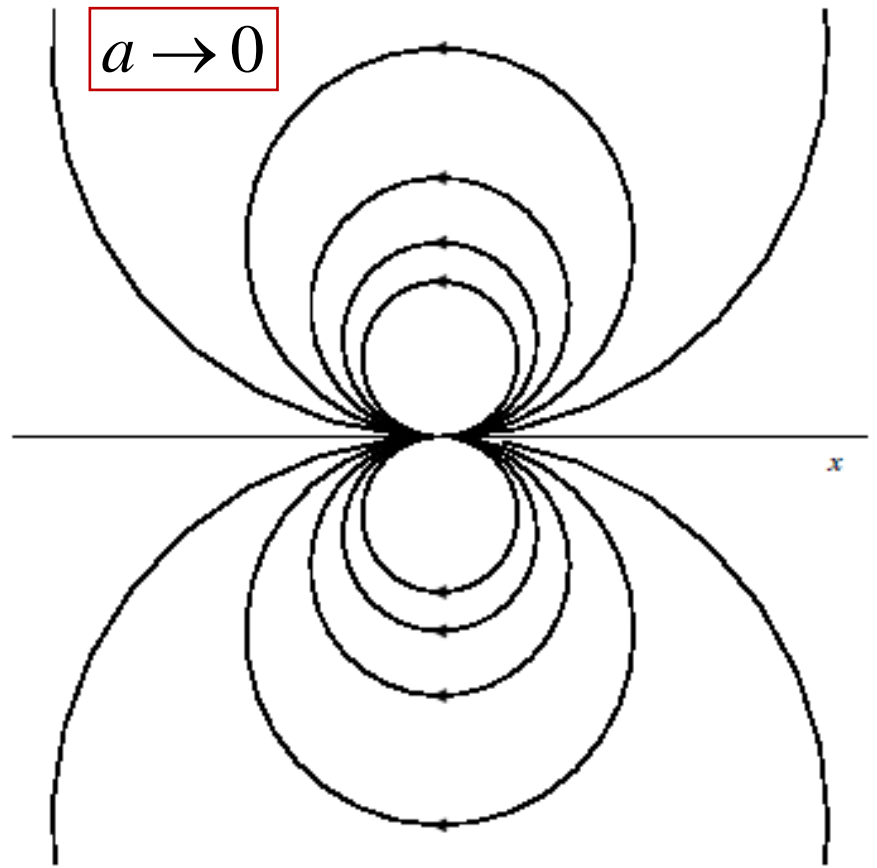
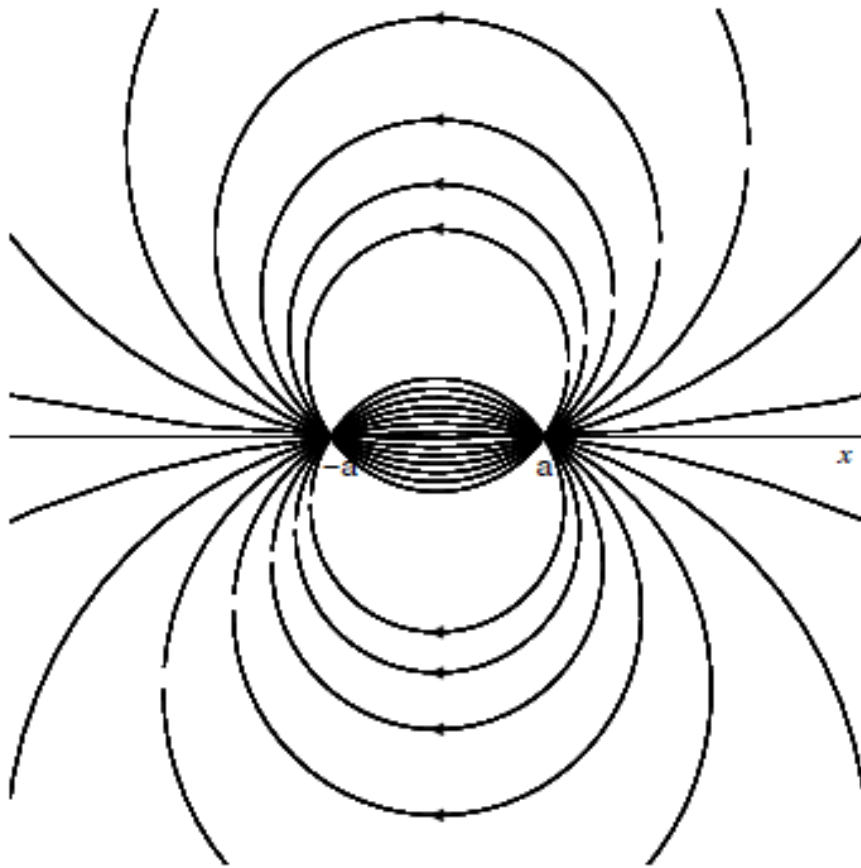
La sola componente di velocità diversa da zero è V_r :

$$V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{m}{r}$$



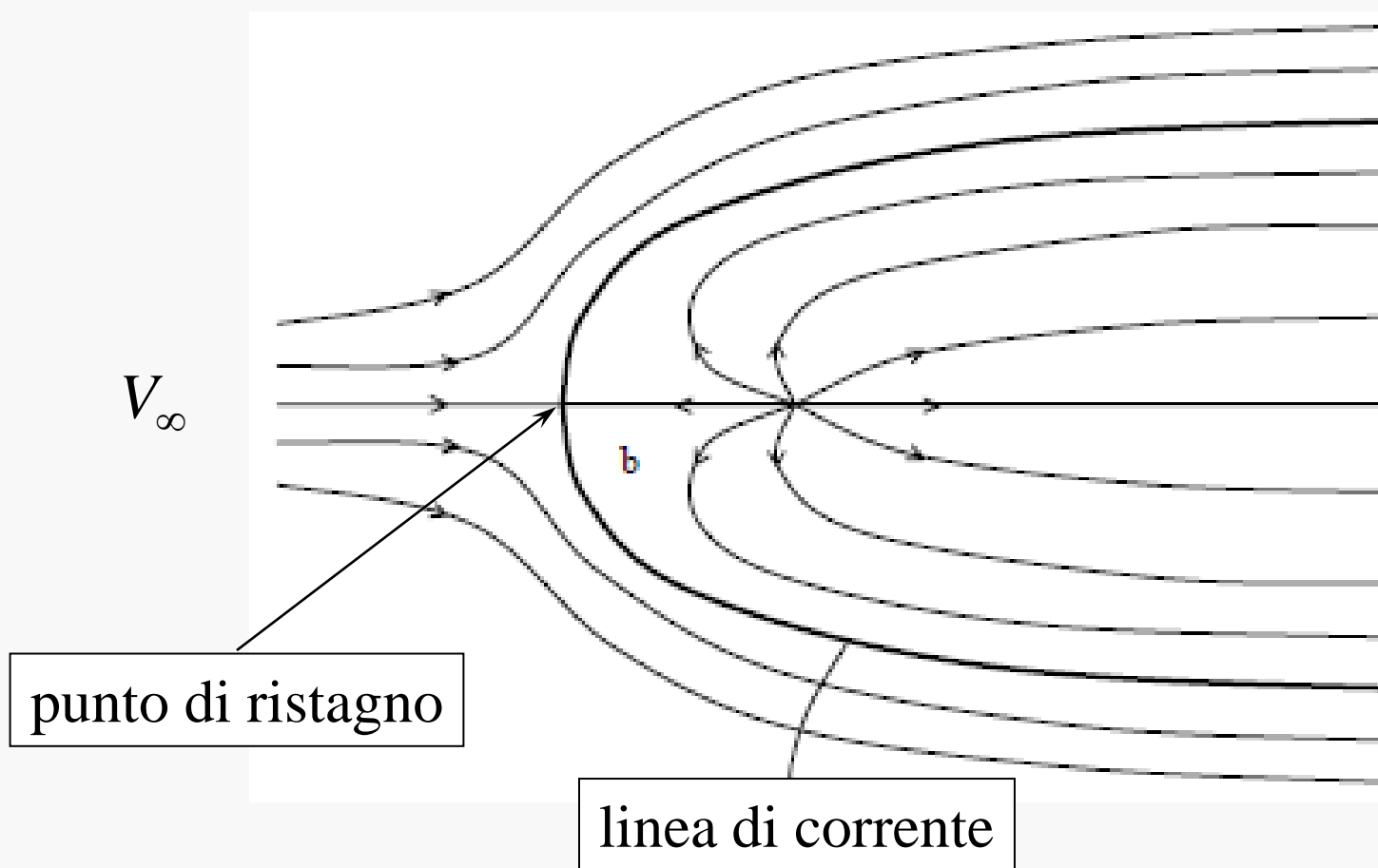
Campi potenziali di velocità

Dipolo o doppietta: è un campo di velocità costituito da una sorgente e un pozzo di intensità uguali (e contrarie) posti a distanza $2a$.



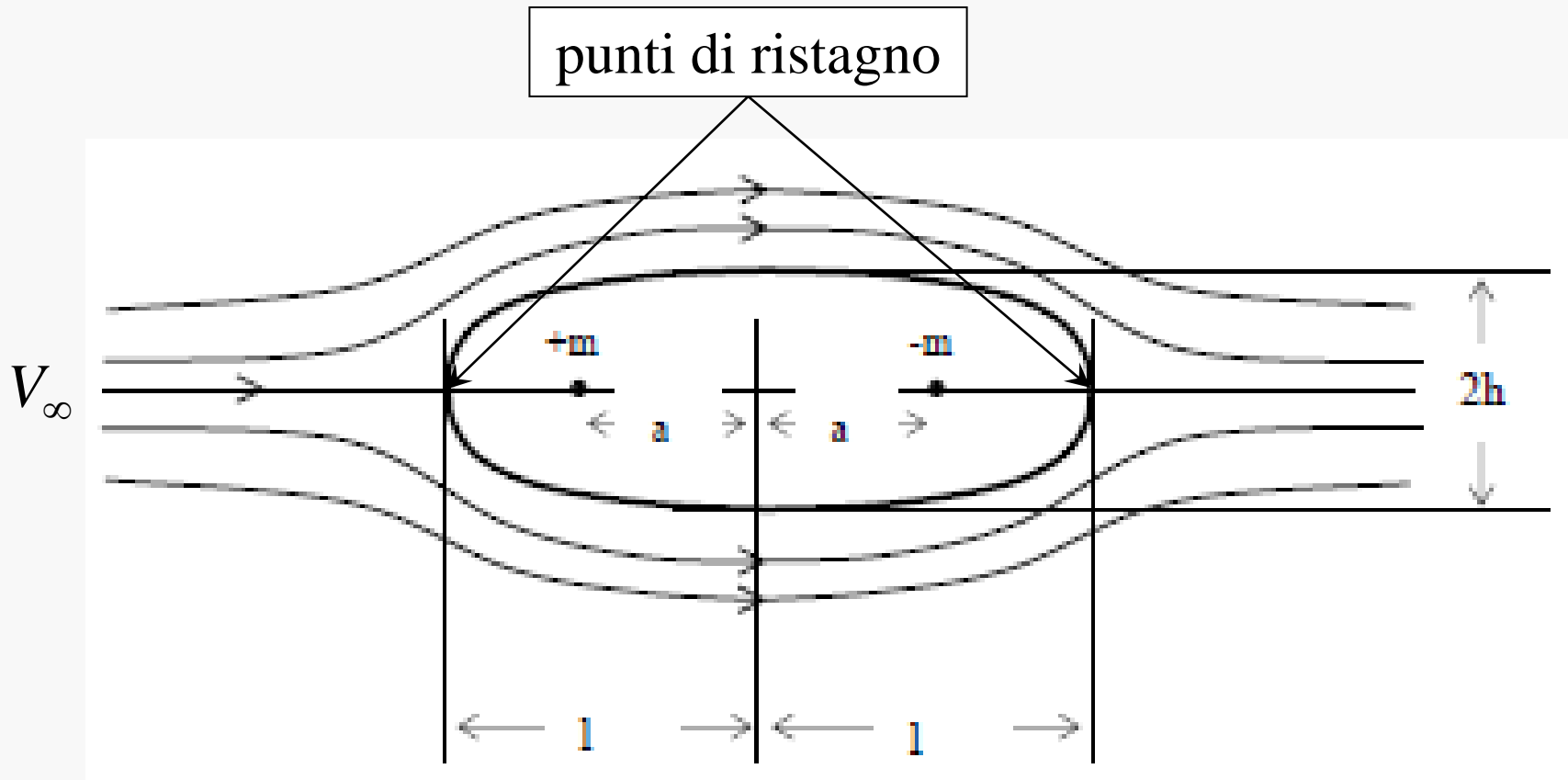
Sovrapposizione di campi potenziali di velocità 2D

Sovrapposizione di un flusso uniforme e di una sorgente:



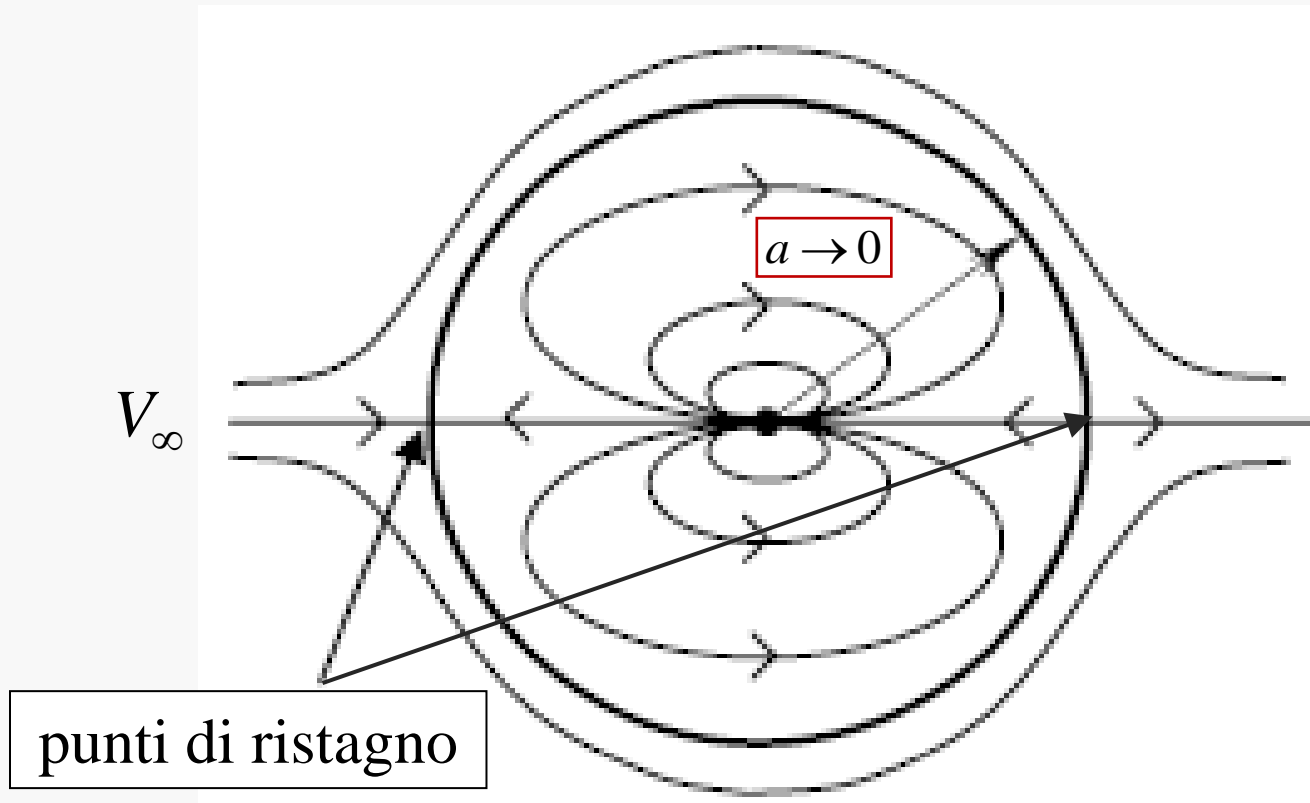
Sovrapposizione di campi potenziali di velocità 2D

Sovrapposizione di un flusso uniforme e di un dipolo (o doppietta):



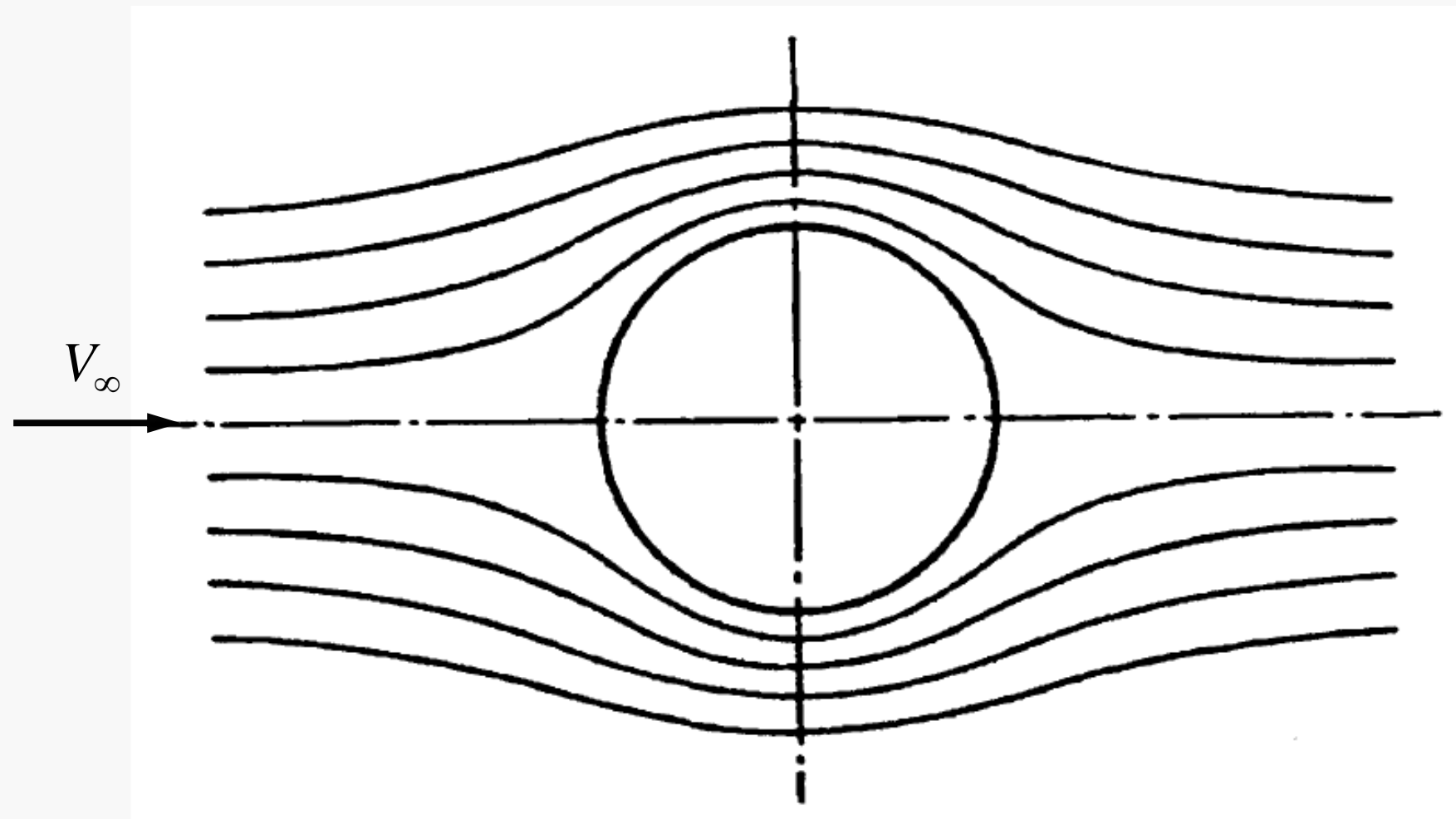
Sovrapposizione di campi potenziali di velocità 2D

Sovrapposizione di un flusso uniforme e di un dipolo (o doppietta):



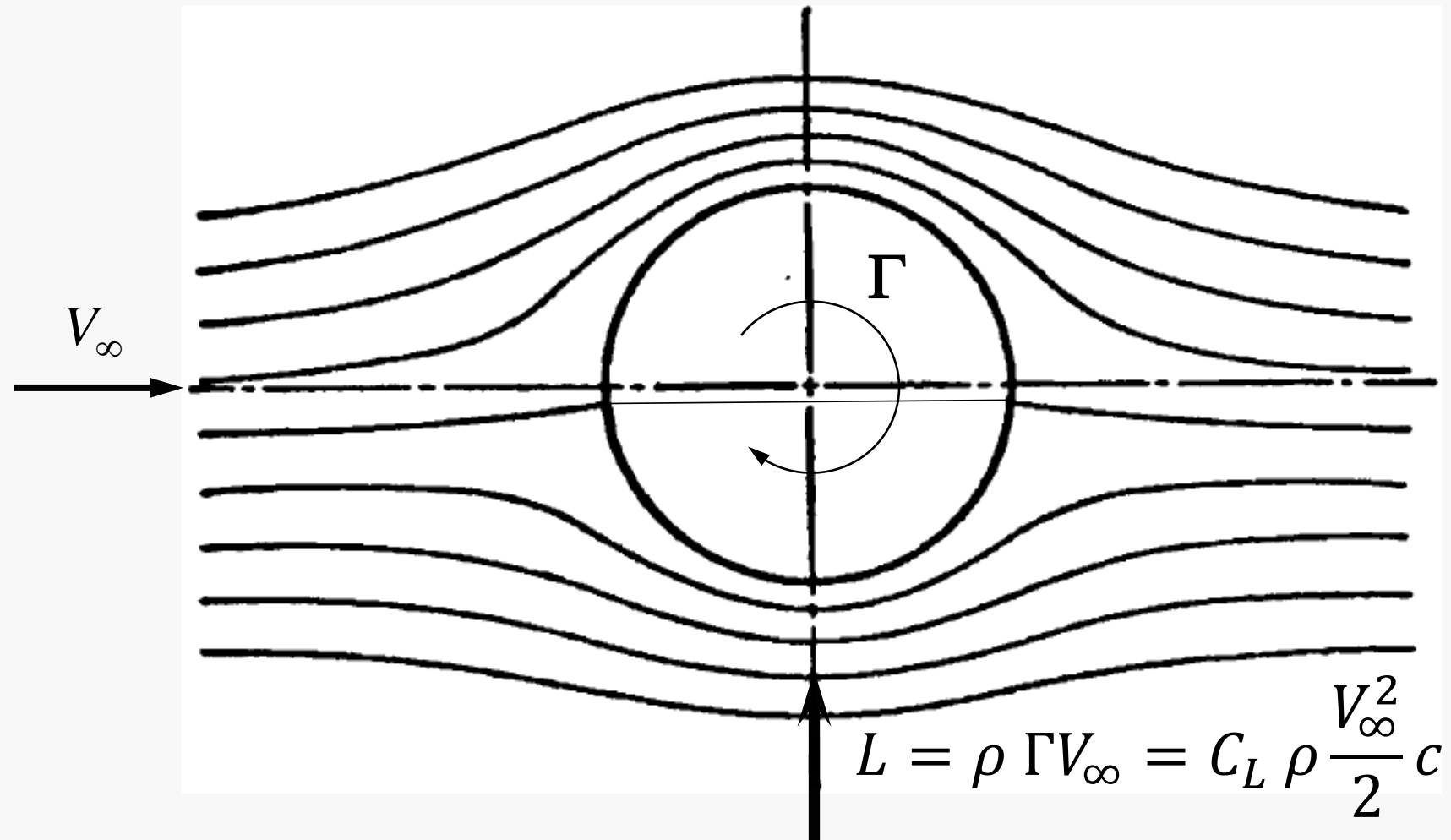
Sovrapposizione di campi potenziali di velocità 2D

Sovrapposizione di un flusso uniforme e di un dipolo (o doppietta):

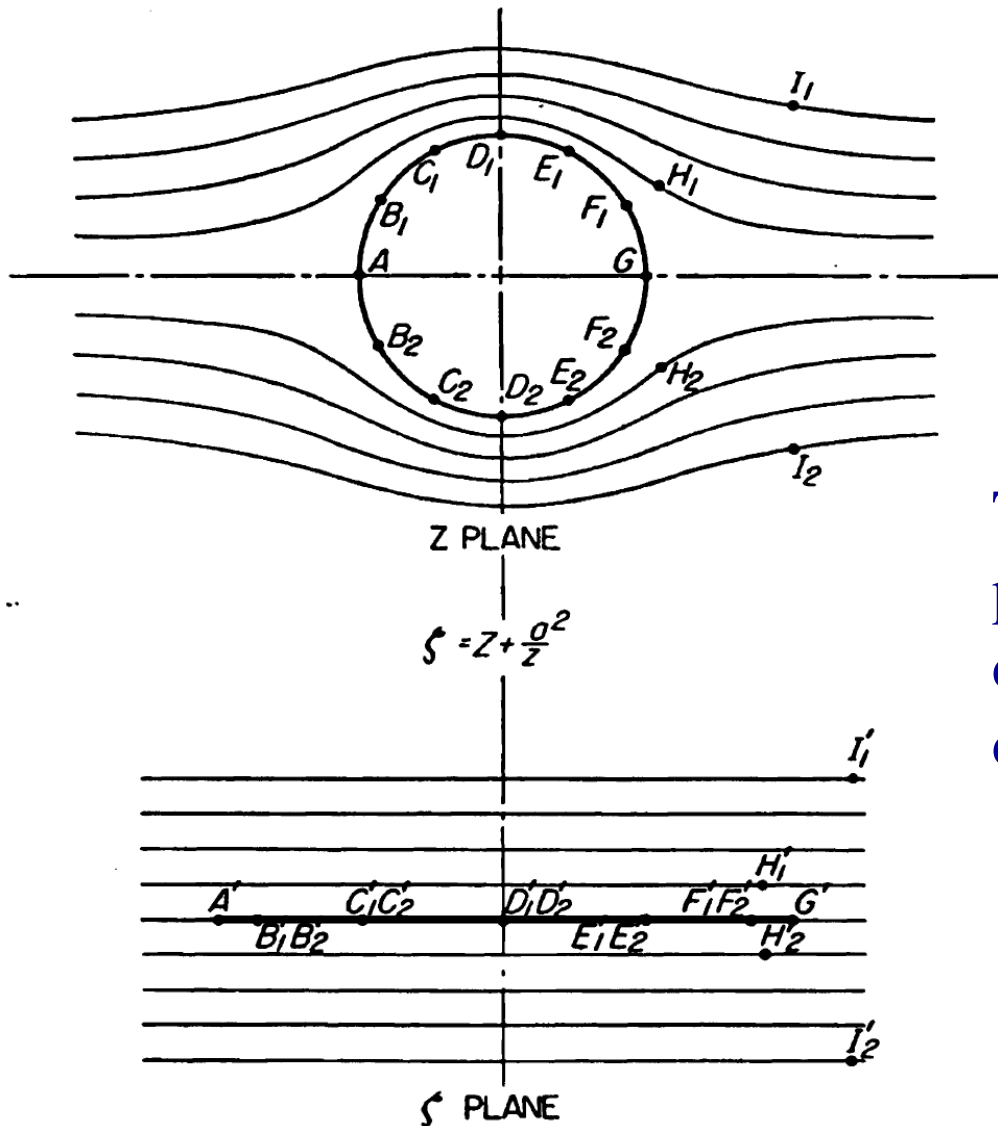


Sovrapposizione di campi potenziali di velocità 2D

Sovrapposizione di un vortice ad un flusso uniforme e un dipolo:



Trasformazione conforme di Joukowski profilo circolare con centro nell'origine

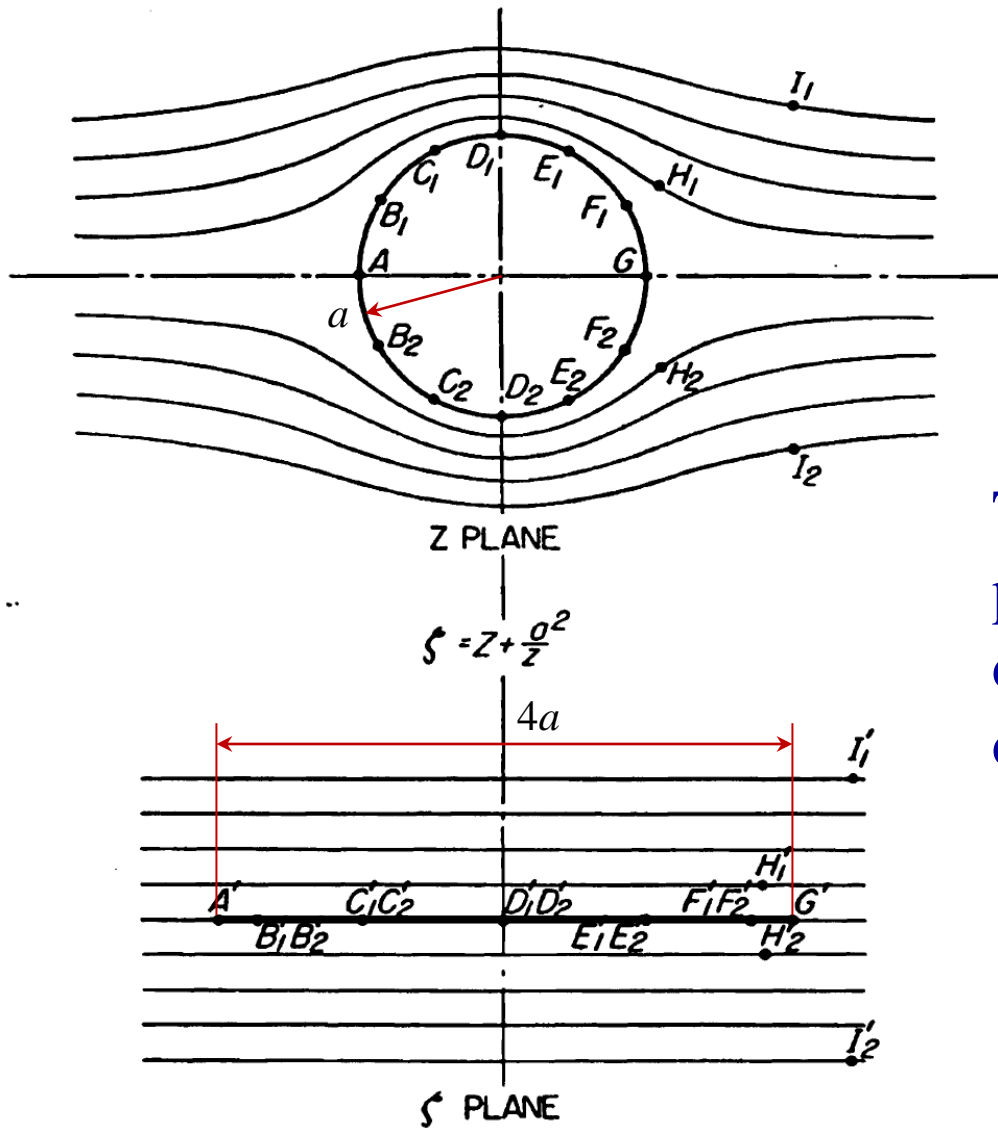


$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}$$

Trasformazione conforme che permette di passare dal piano complesso $z = x + iy$ al piano complesso $\zeta = \xi + i\eta$



Trasformazione conforme di Joukowski profilo circolare con centro nell'origine

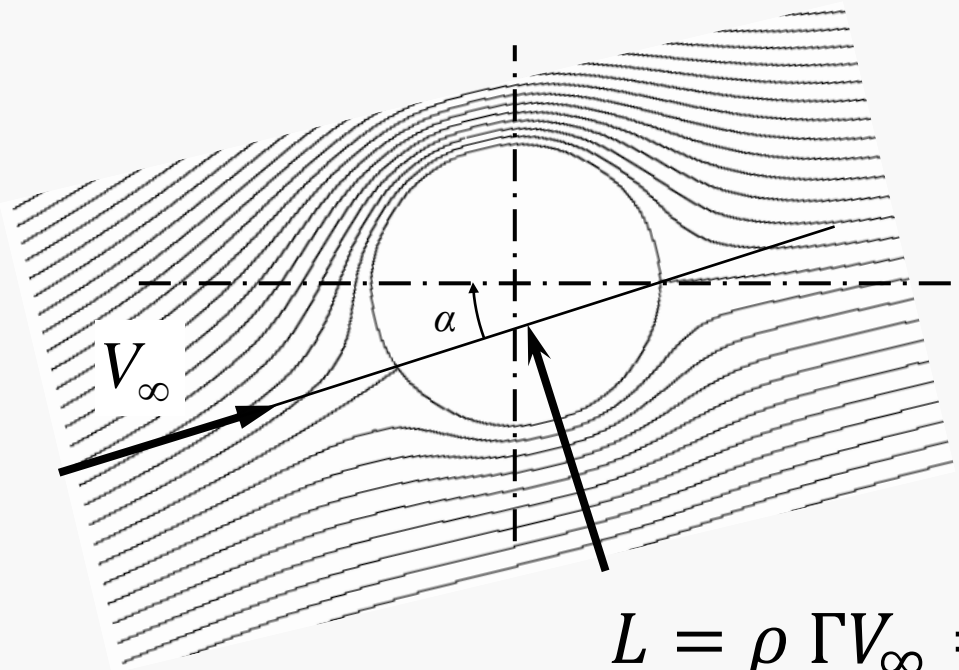


$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}$$

Trasformazione conforme che permette di passare dal piano complesso $z = x + iy$ al piano complesso $\zeta = \xi + i\eta$



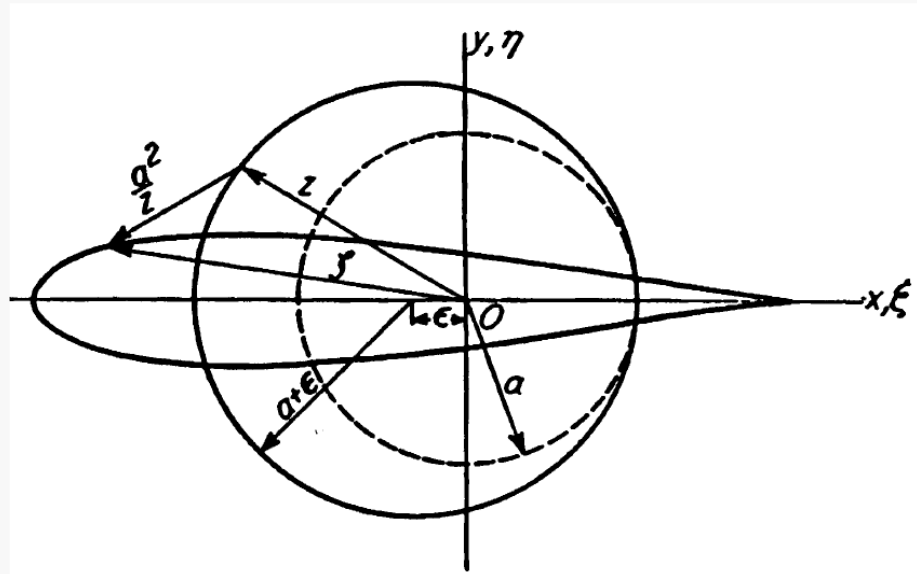
Trasformazione conforme di Joukowski profilo circolare con centro nell'origine



$$L = \rho \Gamma V_\infty = C_L \rho \frac{V_\infty^2}{2} c$$

$$C_L = 2\pi \text{sen} \alpha$$

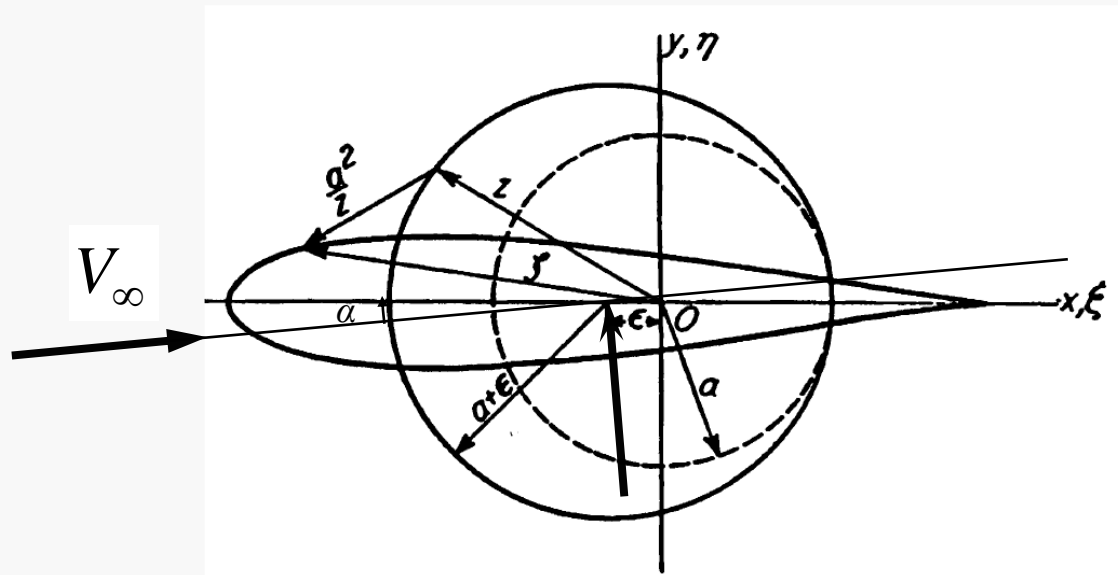
Trasformazione conforme di Joukowski profilo circolare con centro decentrato sull'asse x



$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}$$



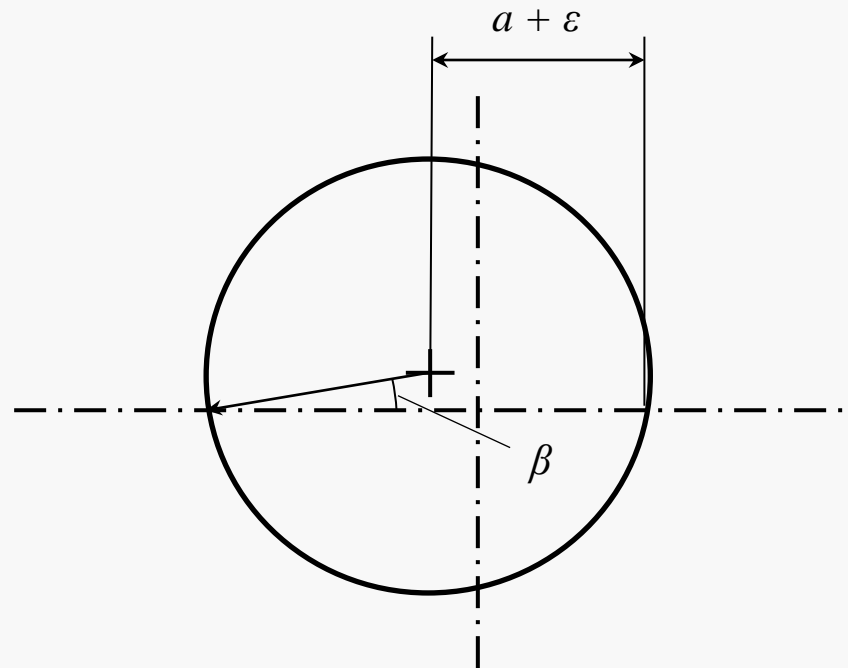
Trasformazione conforme di Joukowski profilo circolare con centro decentrato sull'asse x



$$L = \rho \Gamma V_{\infty} = C_L \rho \frac{V_{\infty}^2}{2} c$$

$$C_L = 2\pi \left(1 + \frac{\varepsilon}{a} \right) \text{sen} \alpha$$

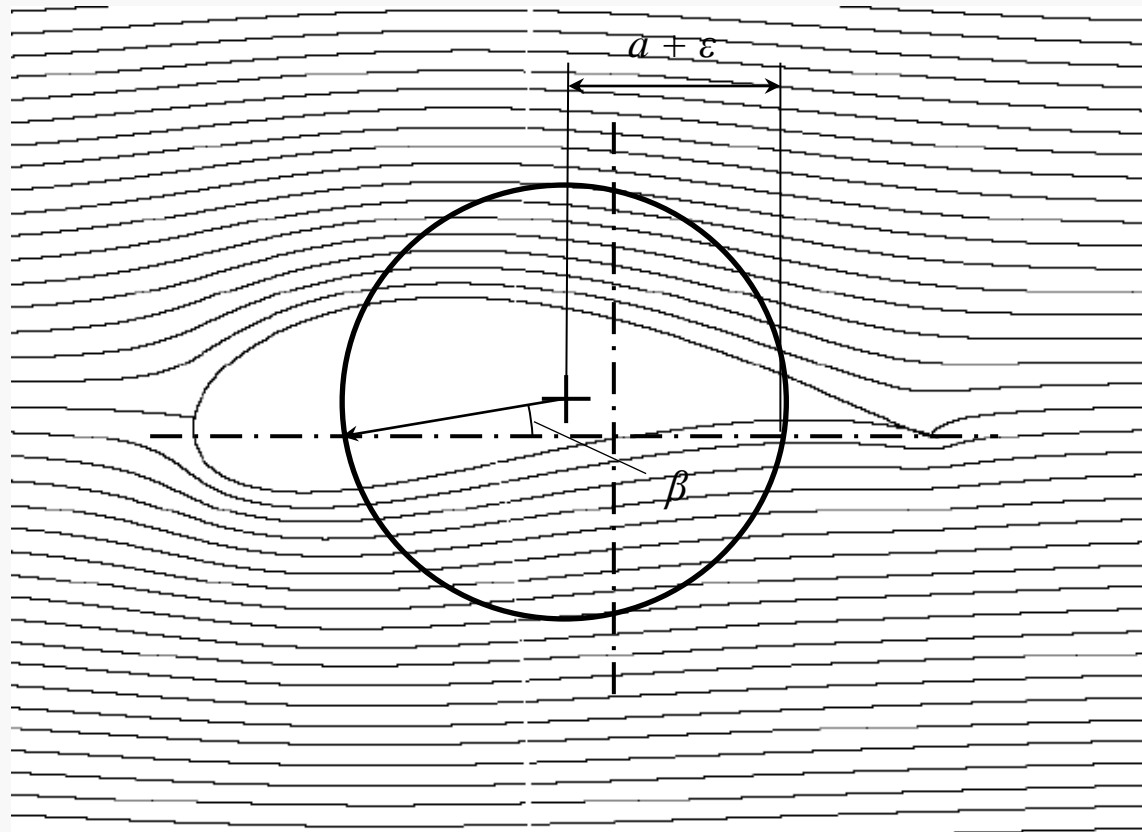
Trasformazione conforme di Joukowski profilo circolare con centro decentrato



$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}$$



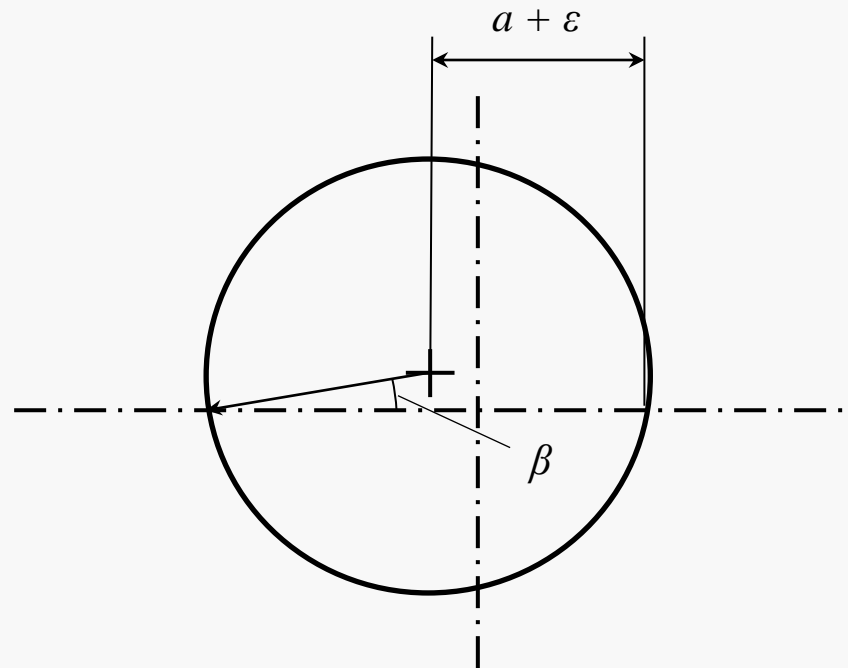
Trasformazione conforme di Joukowski profilo circolare con centro decentrato



$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}$$



Trasformazione conforme di Joukowski profilo circolare con centro decentrato

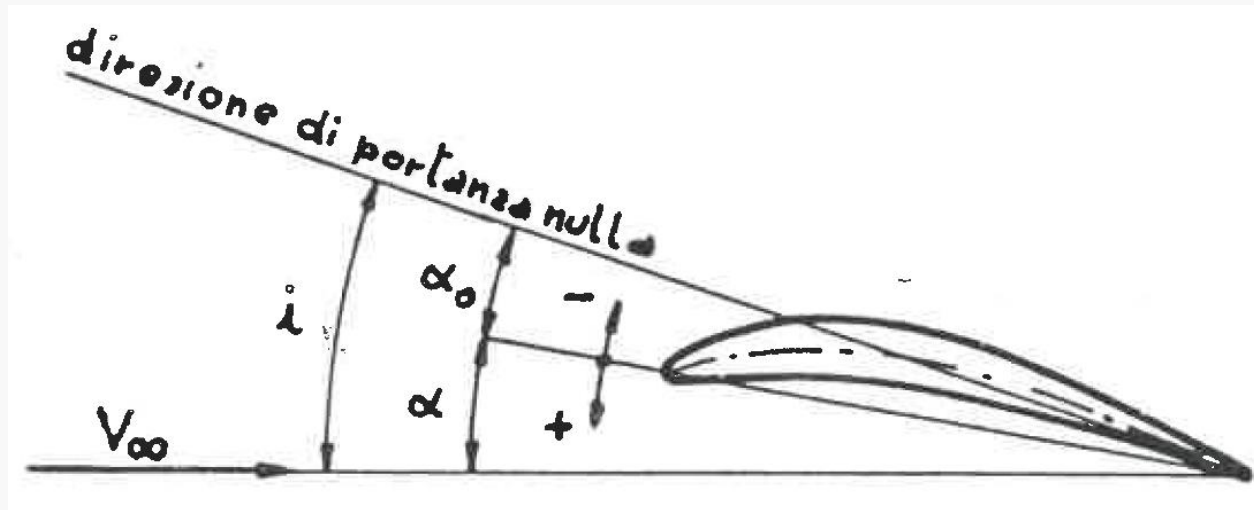


$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}$$

$$C_L = 2\pi \left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\right) \text{sen}(\alpha + \beta)$$

Trasformazione conforme di Joukowski

$$C_L = 2\pi \left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\right) \text{sen}(\alpha + \beta)$$

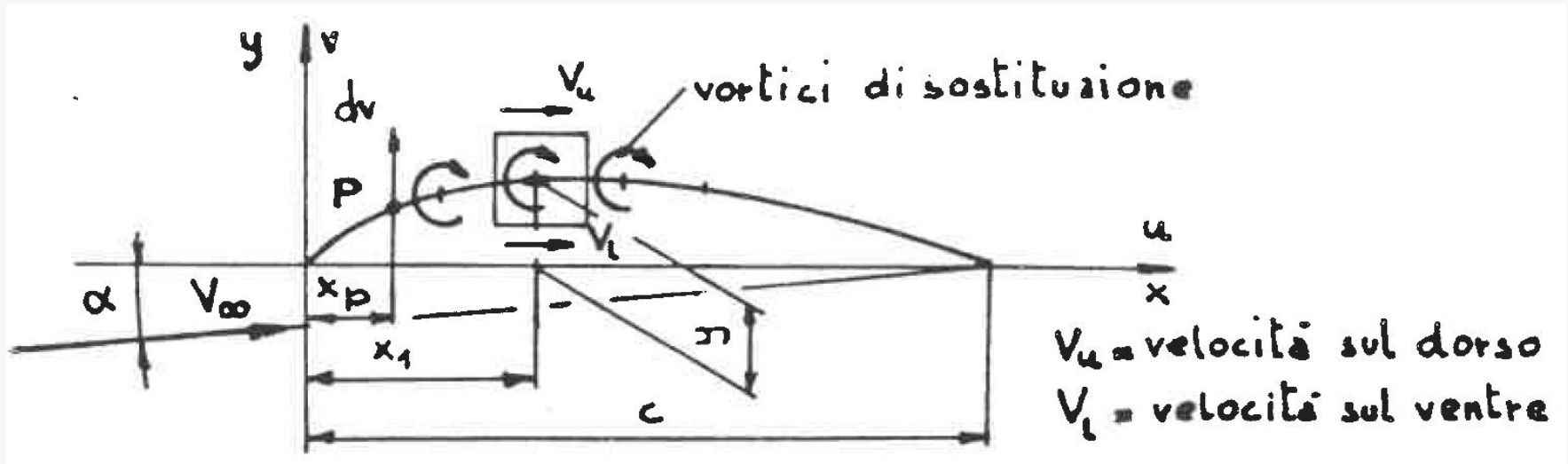


Per angoli d'attacco α piccoli, considerando che $\beta = -\alpha_0$, risulta:

$$C_L = 2\pi \left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\right) (\alpha - \alpha_0) = 2\pi \left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\right) i$$



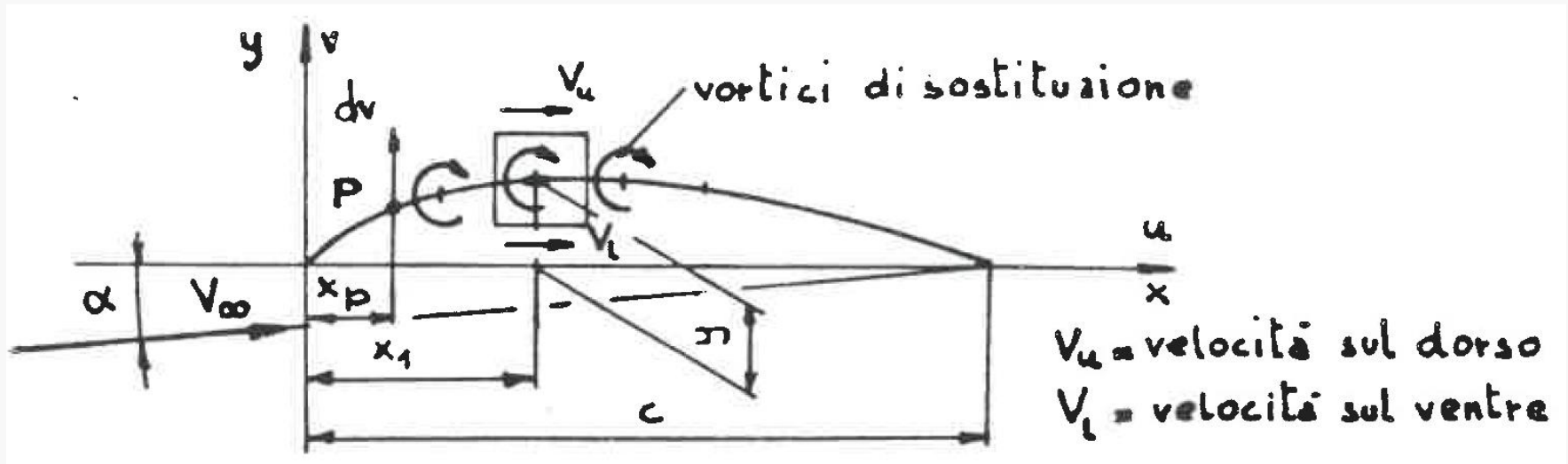
Teoria aerodinamica dei profili sottili



La linea media del profilo viene sostituita da una distribuzione di vortici che induce una circolazione

$$\Gamma = \int_0^c \gamma dx = \int_0^c (V_u - V_l) dx$$

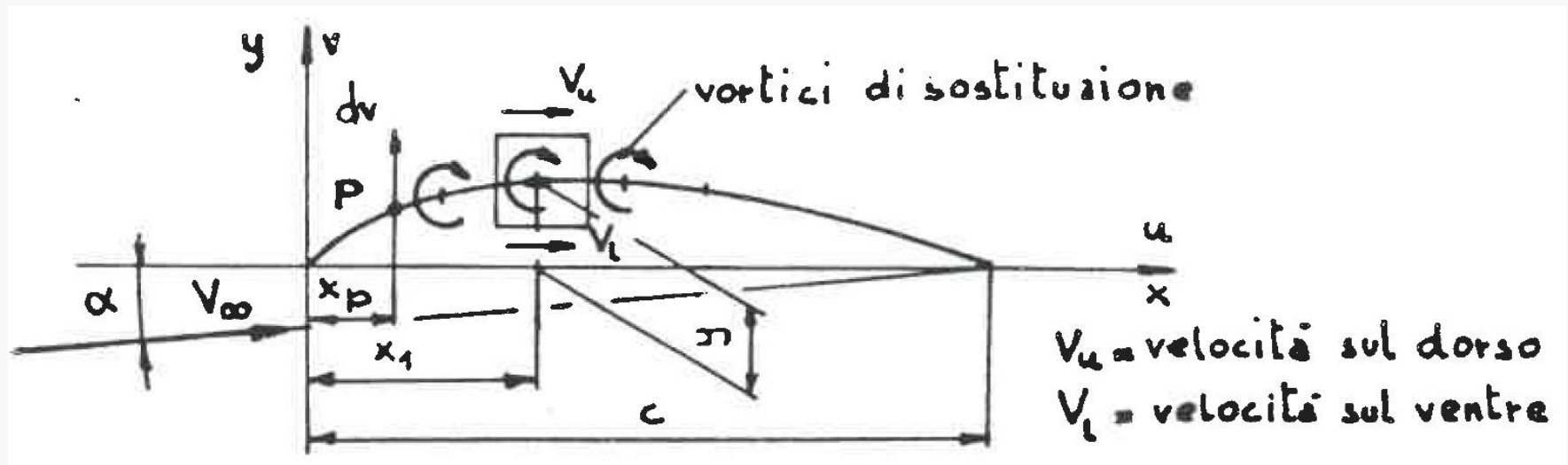
Teoria aerodinamica dei profili sottili



La componente lungo y della velocità indotta nel generico punto P dal vortice infinitesimo posizionato in x vale:

$$dv_{x_P} = \frac{\gamma dx}{2\pi(x - x_P)}$$

Teoria aerodinamica dei profili sottili



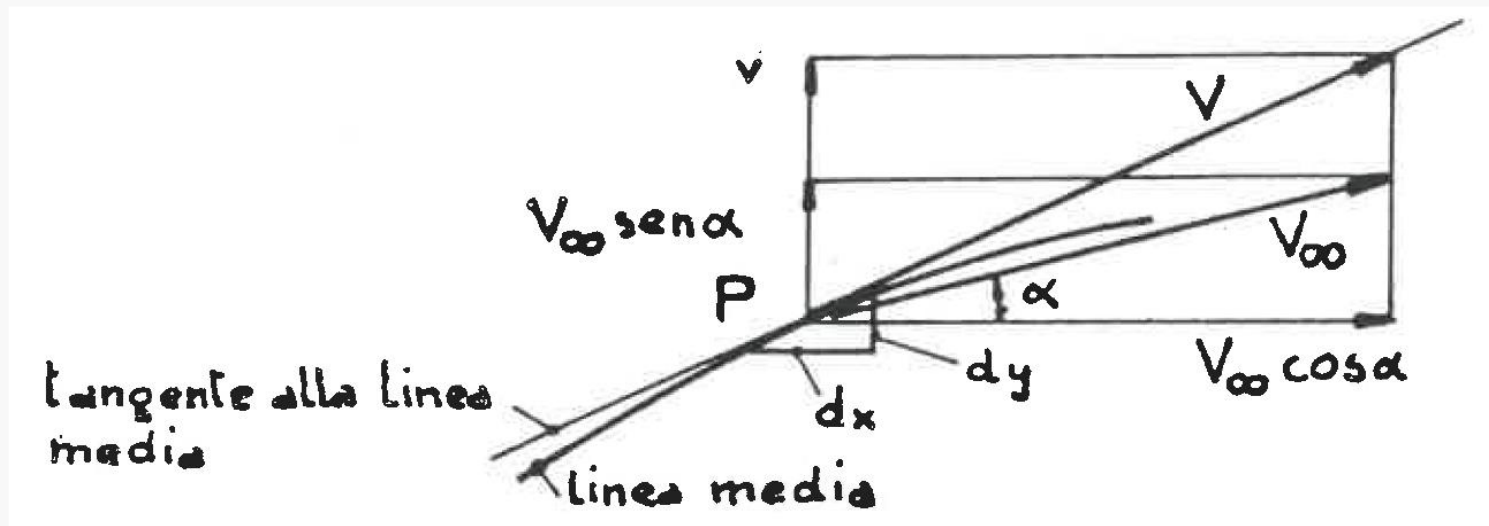
L'intera linea di vortici indurrà pertanto globalmente nel punto P la componente di velocità v lungo y

$$v_{x_P} = \int_0^c \frac{\gamma dx}{2\pi(x - x_P)}$$

Teoria aerodinamica dei profili sottili

Dato che la componente di velocità u lungo x della velocità indotta è trascurabile, la velocità risultante \mathbf{V} tra la velocità indisturbata \mathbf{V}_∞ e la velocità indotta \mathbf{v} deve essere in ogni punto tangente alla linea media

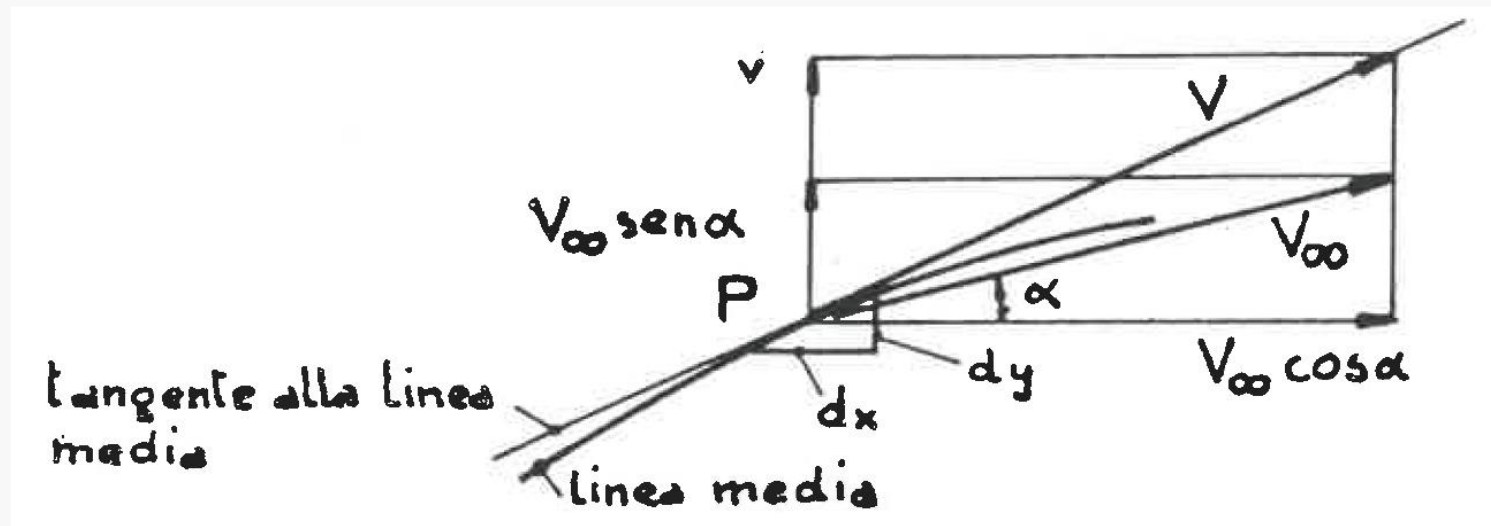
$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_\infty \sin \alpha + v}{V_\infty \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha + \frac{v}{V_\infty \cos \alpha}$$



Teoria aerodinamica dei profili sottili

Per angoli d'attacco α piccoli

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_{\infty} \sin \alpha + v}{V_{\infty} \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha + \frac{v}{V_{\infty} \cos \alpha} \approx \alpha + \frac{v}{V_{\infty}}$$



Teoria aerodinamica dei profili sottili

L'equazione integrale (1) lega la circolazione per unità di lunghezza γ alla componente v lungo y della velocità indotta nel punto P dalla linea di vortici

$$v_{x_P} = \int_0^c \frac{\gamma dx}{2\pi(x - x_P)} \quad (1)$$

L'equazione (2) lega a sua volta la componente v lungo y della velocità indotta nel punto P dalla linea di vortici alla pendenza della linea media in P $(dy/dx)_P$

$$\frac{dy}{dx} = \alpha + \frac{v}{V_\infty} \quad (2)$$



Teoria aerodinamica dei profili sottili

Combinando le equazioni (1) e (2) è possibile legare la distribuzione di vortici $\gamma = f(x)$ alla geometria della linea media dy/dx

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_P = \alpha + \frac{v}{V_\infty} = \alpha + \frac{1}{V_\infty} \int_0^c \frac{\gamma dx}{2\pi(x - x_P)}$$

Per data geometria della linea media è possibile determinare la circolazione intorno al profilo sottile e la corrispondente portanza L

$$L = C_L \rho \frac{V_\infty^2}{2} c = \rho \Gamma V_\infty = \rho V_\infty \int_0^c \gamma dx$$



Teoria aerodinamica dei profili sottili

Per data geometria della linea è possibile determinare la circolazione intorno al profilo sottile e la corrispondente portanza L

$$L = C_L \rho \frac{V_\infty^2}{2} c = \rho \Gamma V_\infty = \rho V_\infty \int_0^c \gamma dx$$

il coefficiente di portanza, l'angolo di portanza nulla e il coefficiente di momento

$$C_L = \frac{2\Gamma}{cV_\infty} = 2\pi (\alpha - \alpha_0) = 2\pi i$$

$$\alpha_0 [^\circ] \approx -\frac{(y_c)_{max}}{c} 100$$

$$C_{M_{c/4}} \approx -2.5 \frac{(y_c)_{max}}{c}$$



Sovrapposizione degli effetti aerodinamici

Con un'accuratezza accettabile dal punto di vista ingegneristico, si può assumere che la distribuzione di velocità attorno ad un profilo possa essere determinata come somma di tre contributi

$$c_p^0 = \frac{p_0 - p}{\rho \frac{V_\infty^2}{2}} = \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2 = \left(\frac{v}{V_\infty} \pm \frac{\Delta v}{V_\infty} \pm \frac{\Delta v_a}{V_\infty} \right)^2$$

$$p_0 = p + \rho \frac{V^2}{2} = p_{0\infty} = p_\infty + \rho \frac{V_\infty^2}{2}$$



Sovrapposizione degli effetti aerodinamici

$$c_p^0 = \frac{p_0 - p}{\rho \frac{V_\infty^2}{2}} = \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2 = \left(\frac{v}{V_\infty} \pm \frac{\Delta v}{V_\infty} \pm \frac{\Delta v_a}{V_\infty} \right)^2$$

$$\frac{v}{V_\infty}$$

contributo distribuzione di spessori (distribuzione di velocità sul profilo simmetrico con stessa distribuzione di spessori, investito con angolo d'attacco nullo)

$$\frac{\Delta v}{V_\infty}$$

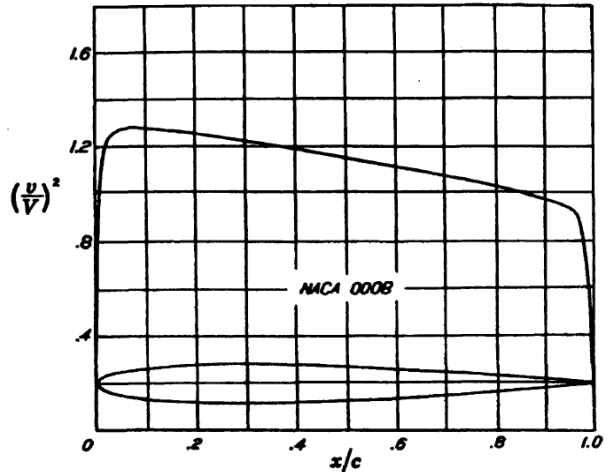
contributo linea media (distribuzione di velocità sul profilo sottile coincidente con la linea media, investito con angolo d'attacco ideale)

$$\frac{\Delta v_a}{V_\infty}$$

contributo angolo d'attacco (distribuzione di velocità che determina un coefficiente di portanza aggiuntivo C_{L_0})



Sovrapposizione degli effetti aerodinamici

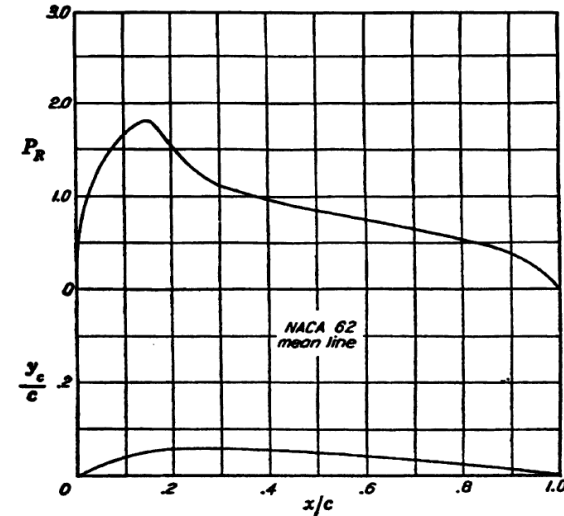


$C_{L_0} = 1$

x (per cent c)	y (per cent c)	$(v/V)^2$	v/V	$\Delta x_n/V$
0	0	0	0	2.900
0.5	0.792	0.890	1.795
1.25	1.263	1.103	1.050	1.310
2.5	1.743	1.221	1.105	0.971
5.0	2.369	1.272	1.128	0.694
7.5	2.800	1.284	1.133	0.561
10	3.121	1.277	1.130	0.479
15	3.564	1.272	1.128	0.379
20	3.825	1.259	1.122	0.318
25	3.961	1.241	1.114	0.273
30	4.001	1.223	1.106	0.239
40	3.869	1.186	1.089	0.188
50	3.529	1.149	1.072	0.152
60	3.043	1.111	1.054	0.121
70	2.443	1.080	1.039	0.096
80	1.749	1.034	1.017	0.071
90	0.965	0.968	0.984	0.047
95	0.537	0.939	0.969	0.031
100	0.084	0

L.E. radius: 0.70 per cent c

NACA 0008 Basic Thickness Form



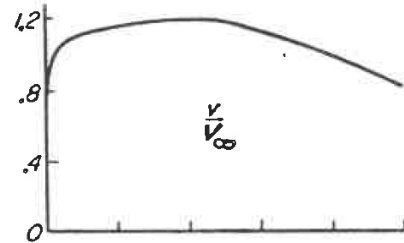
$c_{l_0} = 0.90 \quad \alpha_0 = 2.81^\circ \quad c_{m_0/4} = -0.113$				
x (per cent c)	y_c (per cent c)	dy_c/dx	P_R	$\Delta v/V = P_R/4$
0	0	0.60000	0	0
1.25	0.726	0.56250	0.682	0.171
2.5	1.406	0.52500	1.031	0.258
5.0	2.625	0.45000	1.314	0.328
7.5	3.656	0.37500	1.503	0.376
10	4.500	0.30000	1.651	0.413
15	5.625	0.15000	1.802	0.451
20	6.000	0	1.530	0.383
25	5.977	-0.00938	1.273	0.318
30	5.906	-0.01875	1.113	0.279
40	5.625	-0.03750	0.951	0.238
50	5.156	-0.05625	0.843	0.211
60	4.500	-0.07500	0.741	0.185
70	3.656	-0.09375	0.635	0.159
80	2.625	-0.11250	0.525	0.131
90	1.406	-0.13125	0.377	0.094
95	0.727	-0.14062	0.261	0.065
100	0	-0.15000	0	0

Data for NACA Mean Line 62

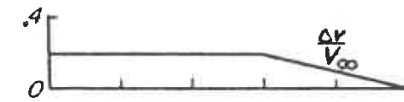


Sovrapposizione degli effetti aerodinamici

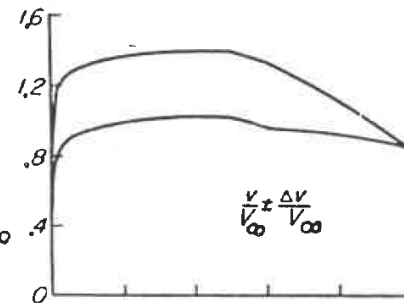
profilo simmetrico posizionato a angolo di attacco nullo



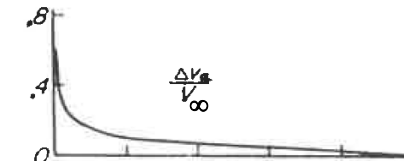
Linea media posizionata a angolo di attacco ideale



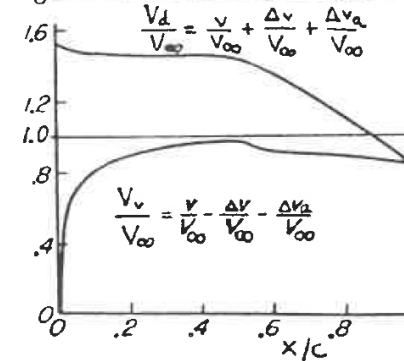
profilo camberato posizionato a angolo di attacco ideale



incremento di velocità dovuto all'angolo di attacco per profilo simmetrico



profilo camberato posizionato all'angolo di attacco



$$\frac{V_d}{V_\infty} = \frac{v}{V_\infty} + \frac{\Delta v}{V_\infty} + \frac{\Delta v_a}{V_\infty}$$

$$\frac{V_v}{V_\infty} = \frac{v}{V_\infty} - \frac{\Delta v}{V_\infty} - \frac{\Delta v_a}{V_\infty}$$



Sovrapposizione degli effetti aerodinamici

$$\begin{aligned}\Delta c_p^0 &= \left(\frac{v}{V_\infty} + \frac{\Delta v}{V_\infty} + f(\alpha) \frac{\Delta v_a}{V_\infty} \right)^2 - \left(\frac{v}{V_\infty} - \frac{\Delta v}{V_\infty} - f(\alpha) \frac{\Delta v_a}{V_\infty} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{V_d}{V_\infty} \right)^2 - \left(\frac{V_v}{V_\infty} \right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_L &= \frac{L}{\rho \frac{V_\infty^2}{2} c} = \int_0^c \frac{p_v - p_d}{\rho \frac{V_\infty^2}{2} c} dx = \int_0^c \frac{p_v - p_d - p_0 + p_0}{\rho \frac{V_\infty^2}{2} c} dx = \\ &= \frac{1}{c} \int_0^c (c_{pd}^0 - c_{pv}^0) dx = \frac{1}{c} \int_0^c \left[\left(\frac{V_d}{V_\infty} \right)^2 - \left(\frac{V_v}{V_\infty} \right)^2 \right] dx\end{aligned}$$



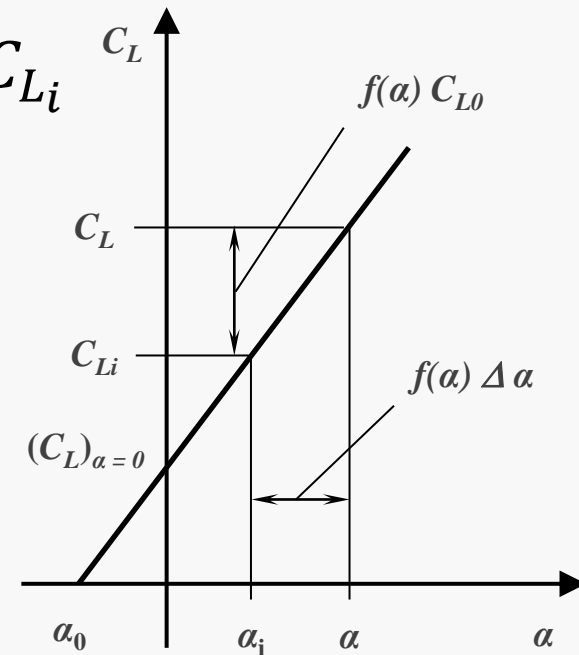
Sovrapposizione degli effetti aerodinamici

$$f(\alpha) = \frac{C_L - C_{Li}}{C_{L0}} = \frac{k(\alpha - \alpha_0) - k(\alpha_i - \alpha_0)}{k\Delta\alpha} = \frac{\alpha - \alpha_i}{\Delta\alpha}$$

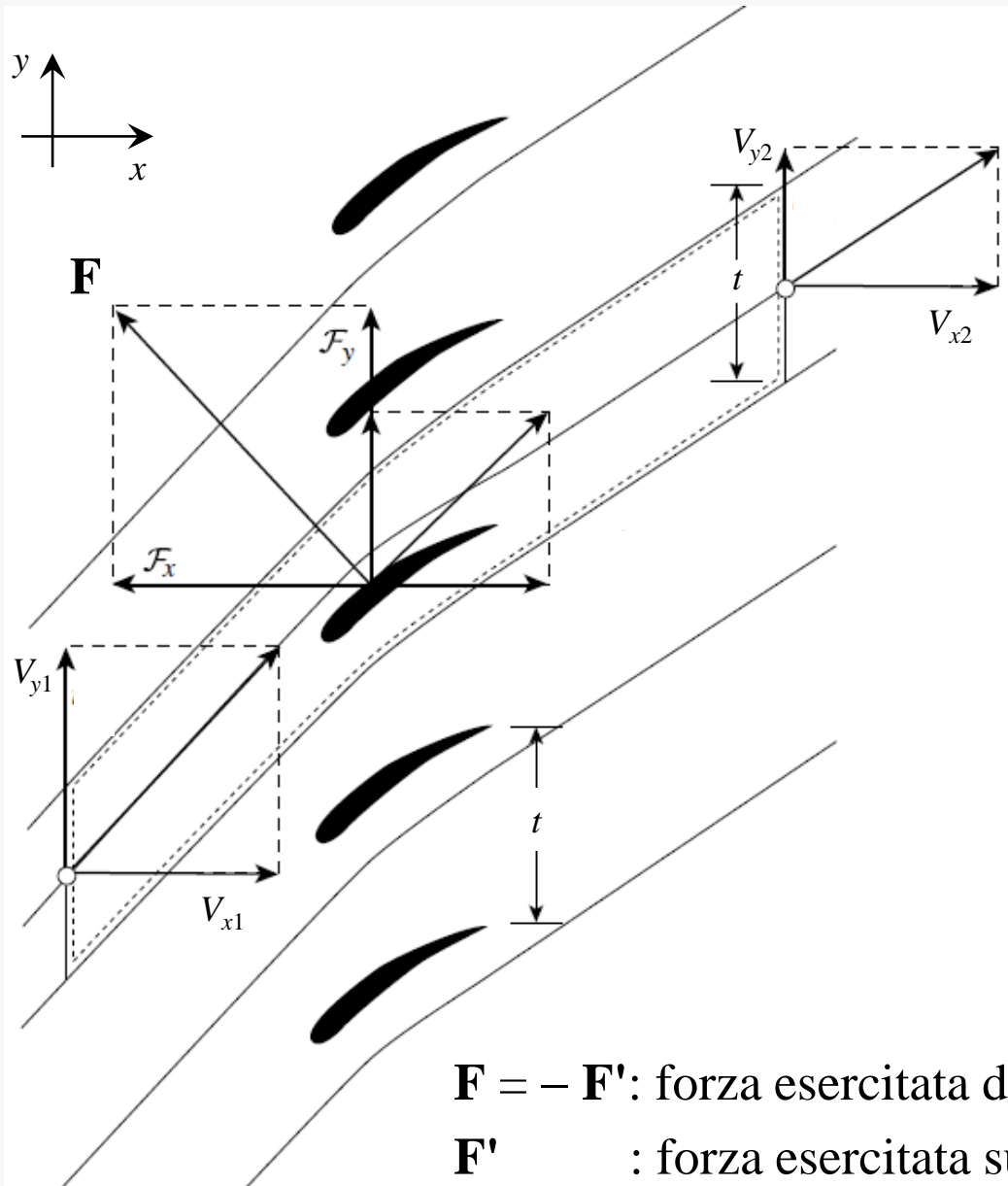
$$\alpha = \frac{C_L - C_{Li}}{C_{L0}} \Delta\alpha + \alpha_i, \quad C_L = \frac{\alpha - \alpha_i}{\Delta\alpha} C_{L0} + C_{Li}$$

$$C_{Li} = \frac{1}{c} \int_0^c \left[\left(\frac{v}{V_\infty} + \frac{\Delta v}{V_\infty} \right)^2 - \left(\frac{v}{V_\infty} - \frac{\Delta v}{V_\infty} \right)^2 \right] dx$$

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{C_{Li}}{\alpha_i - \alpha_0} \\ \alpha_0 [^\circ] &\approx -\frac{(y_c)_{max}}{c} 100 \end{aligned} \right\} \rightarrow \Delta\alpha = \frac{C_{L0}}{k}$$



Coefficiente di portanza di un profilo in schiera



Schiera formata da un numero infinito di pale di lunghezza infinita

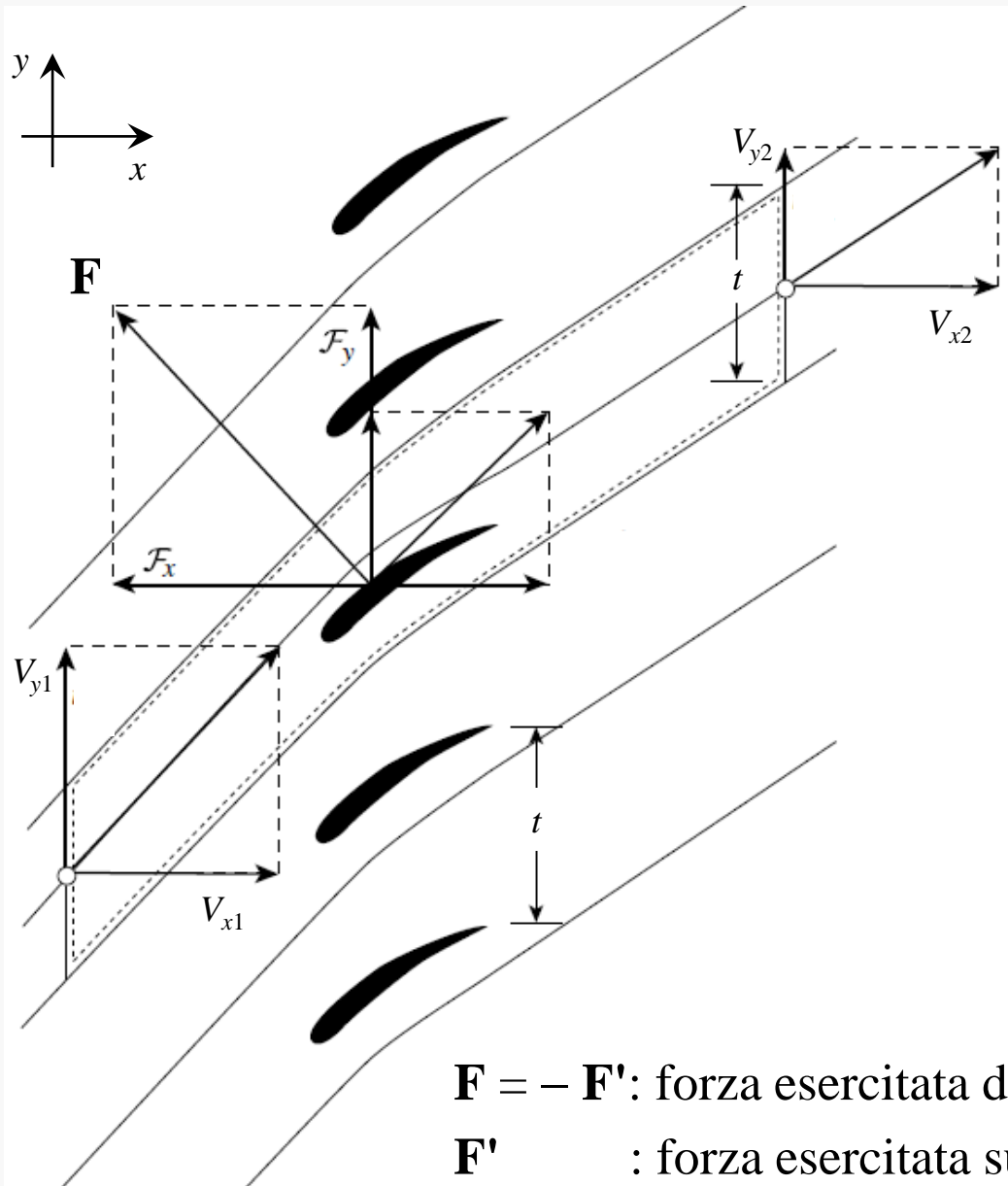
Flusso:

- stazionario
- incomprimibile
- non viscoso
- irrotazionale
- ad energia totale costante

$\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$: forza esercitata dal fluido

\mathbf{F}' : forza esercitata sul fluido

Coefficiente di portanza di un profilo in schiera



Bilancio di massa:

$$\rho_1 A_1 V_{x1} = \rho_2 A_2 V_{x2}$$

$$\rho t V_{x1} = \rho t V_{x2}$$

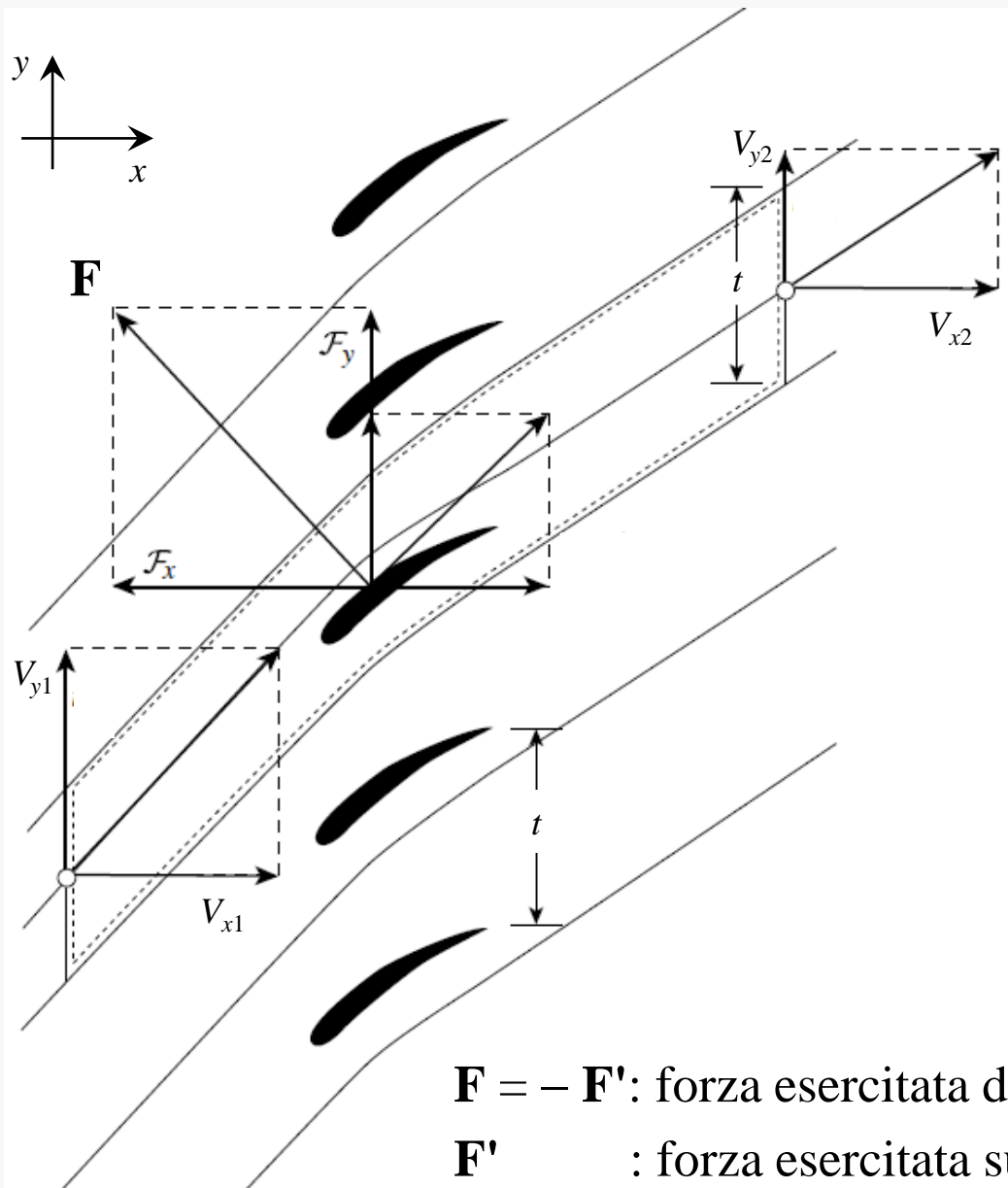
⇓

$$V_{x1} = V_{x2} = V_x$$

$\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$: forza esercitata dal fluido

\mathbf{F}' : forza esercitata sul fluido

Coefficiente di portanza di un profilo in schiera



Bilancio della quantità di moto
in direzione x:

$$\begin{aligned}\sum F'_x &= F'_x + t(p_1 - p_2) = \\ &= \rho t (V_{x2}^2 - V_{x1}^2) = 0\end{aligned}$$

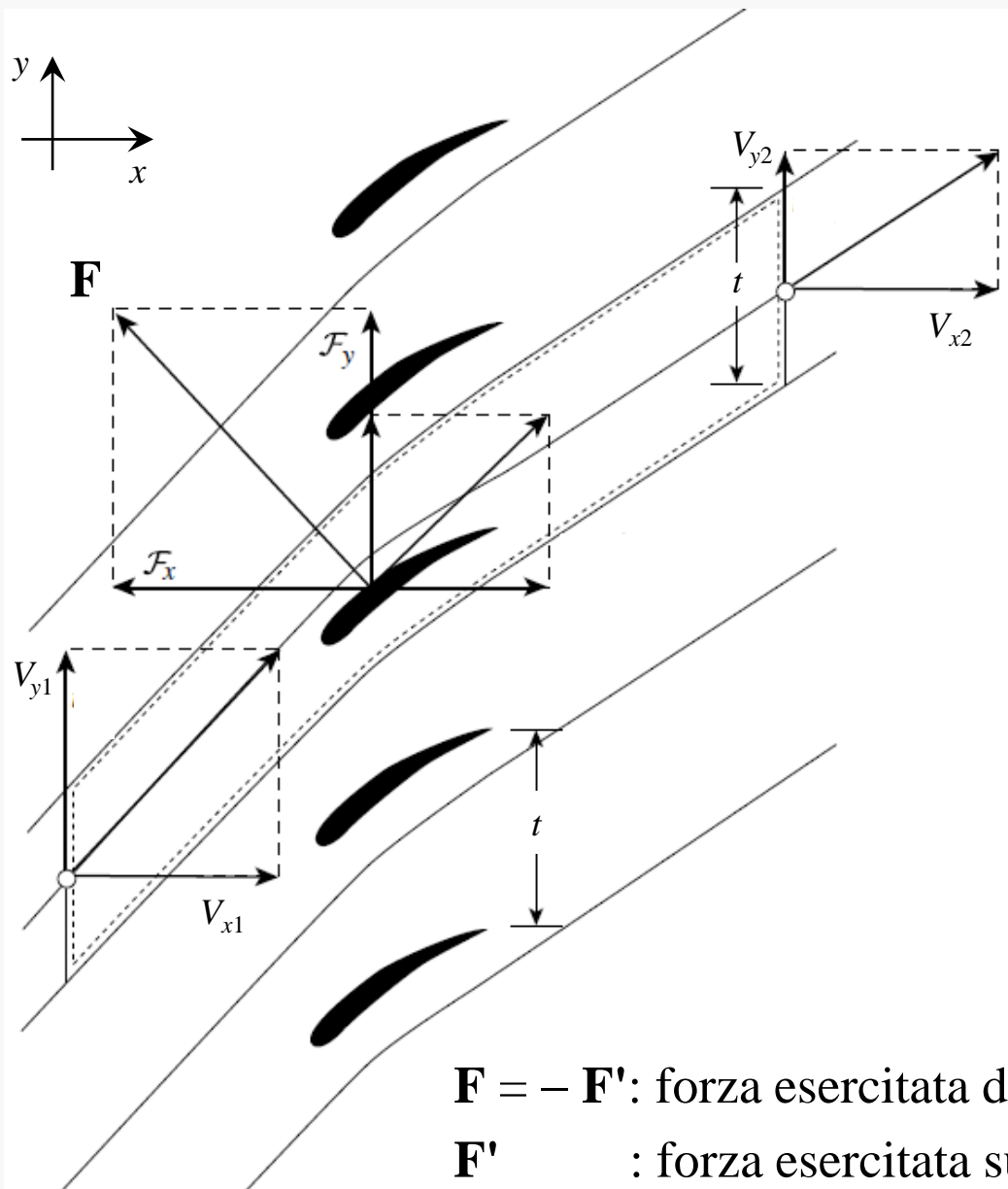
$$F_x = -F'_x = t(p_1 - p_2)$$

$\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$: forza esercitata dal fluido

\mathbf{F}' : forza esercitata sul fluido



Coefficiente di portanza di un profilo in schiera



Bilancio della quantità di moto
in direzione y:

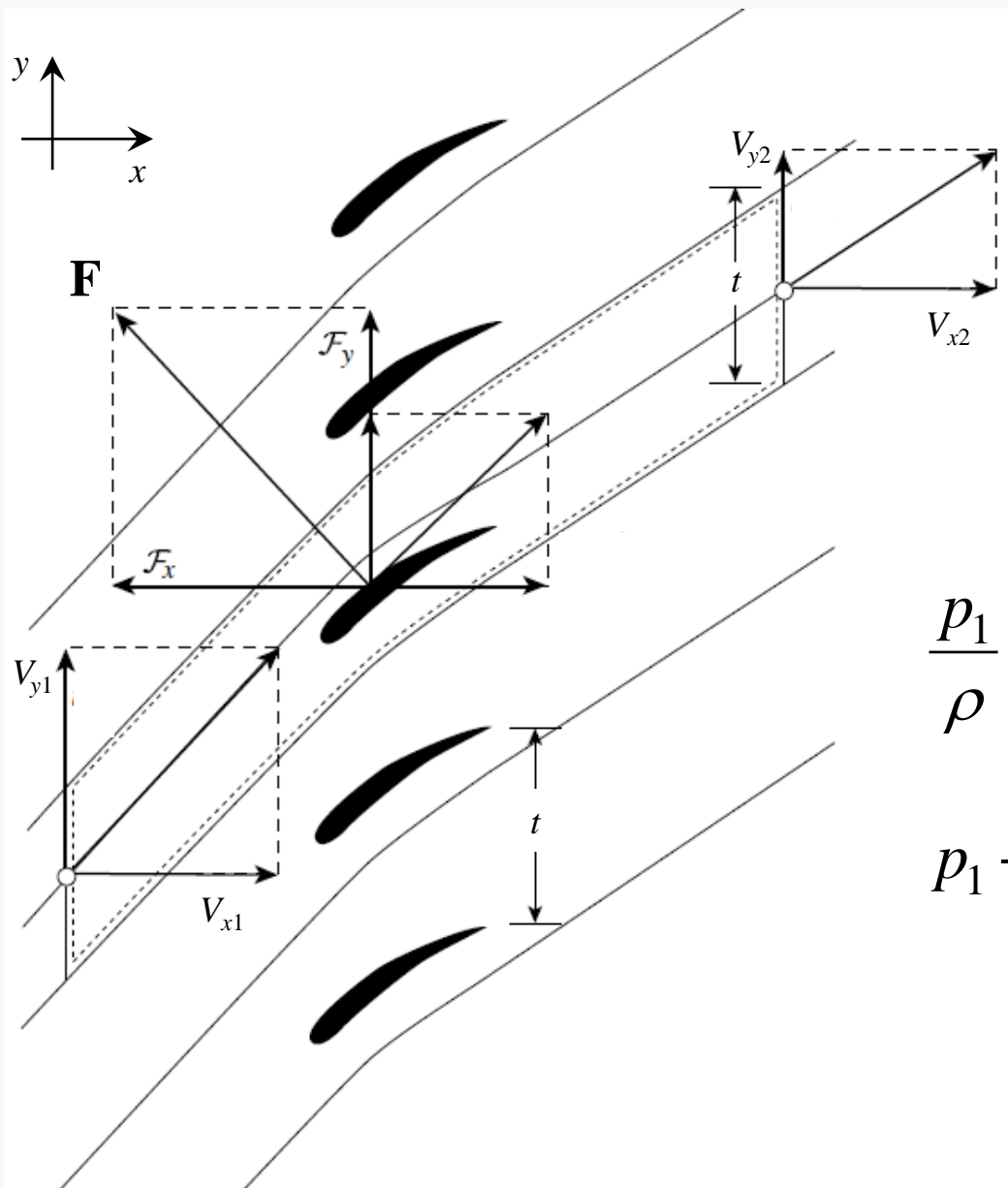
$$\sum F'_y = F'_y = \rho V_x t (V_{y2} - V_{y1})$$

$$F_y = -F'_y = -\rho V_x t (V_{y2} - V_{y1})$$

$\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$: forza esercitata dal fluido

\mathbf{F}' : forza esercitata sul fluido

Coefficiente di portanza di un profilo in schiera



Bilancio dell'energia:

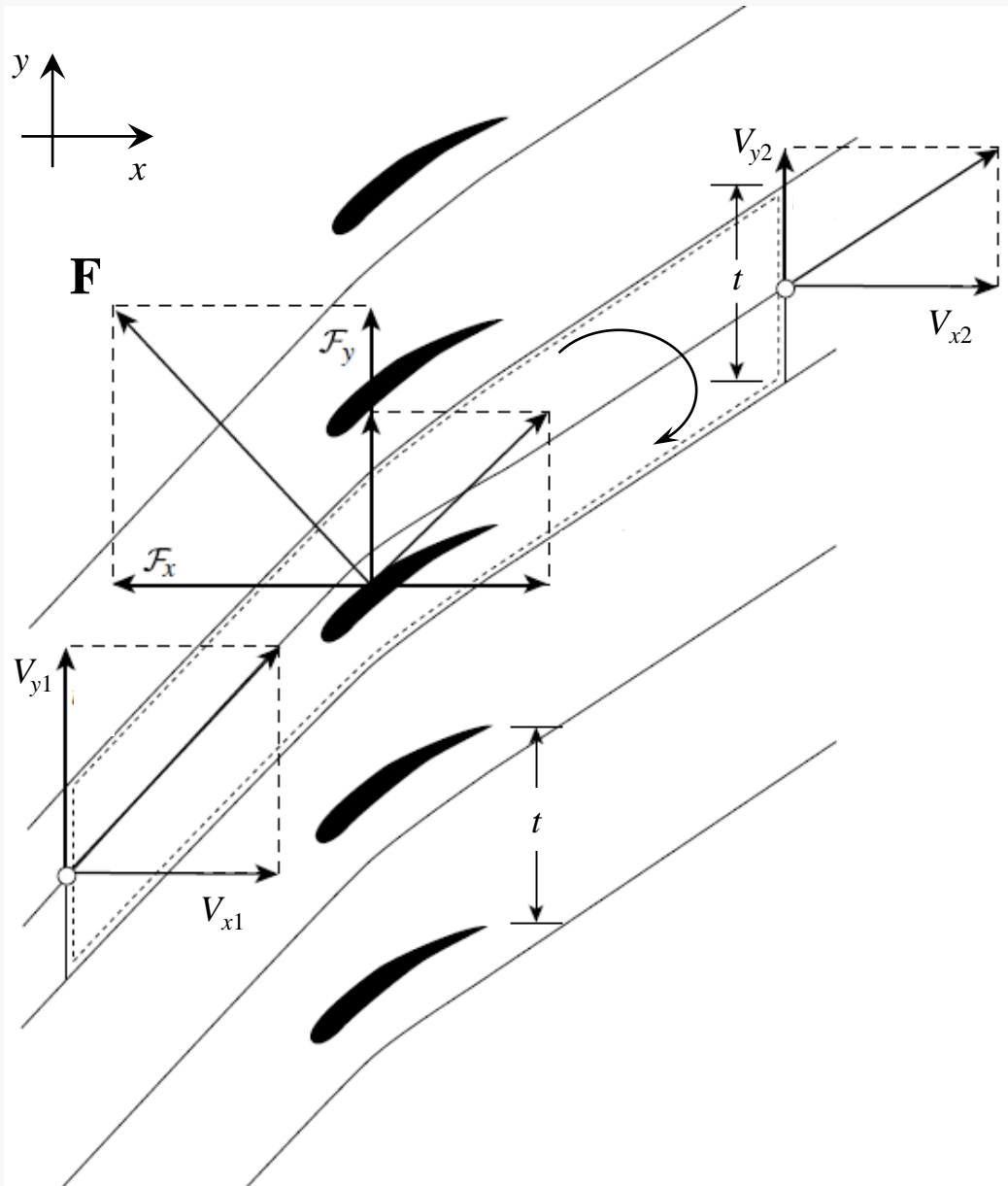
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_{x1}^2 + V_{y1}^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_{x2}^2 + V_{y2}^2}{2}$$

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{V_{y2}^2 - V_{y1}^2}{2} =$$

$$= \frac{\rho}{2} (V_{y2} - V_{y1})(V_{y2} + V_{y1})$$



Coefficiente di portanza di un profilo in schiera

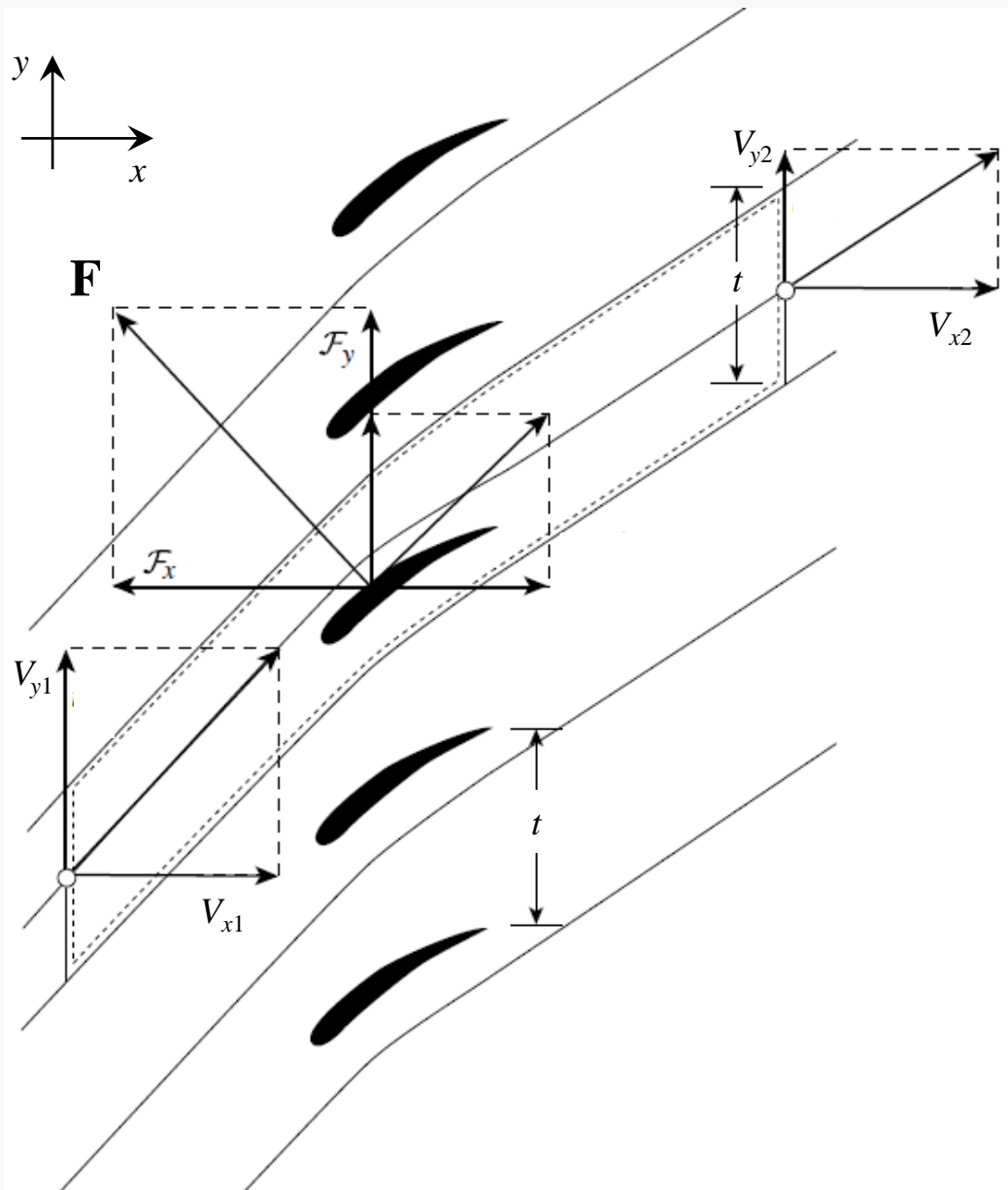


Circolazione del vettore V lungo la linea chiusa tratteggiata:

$$\Gamma = -t (V_{y2} - V_{y1})$$



Coefficiente di portanza di un profilo in schiera

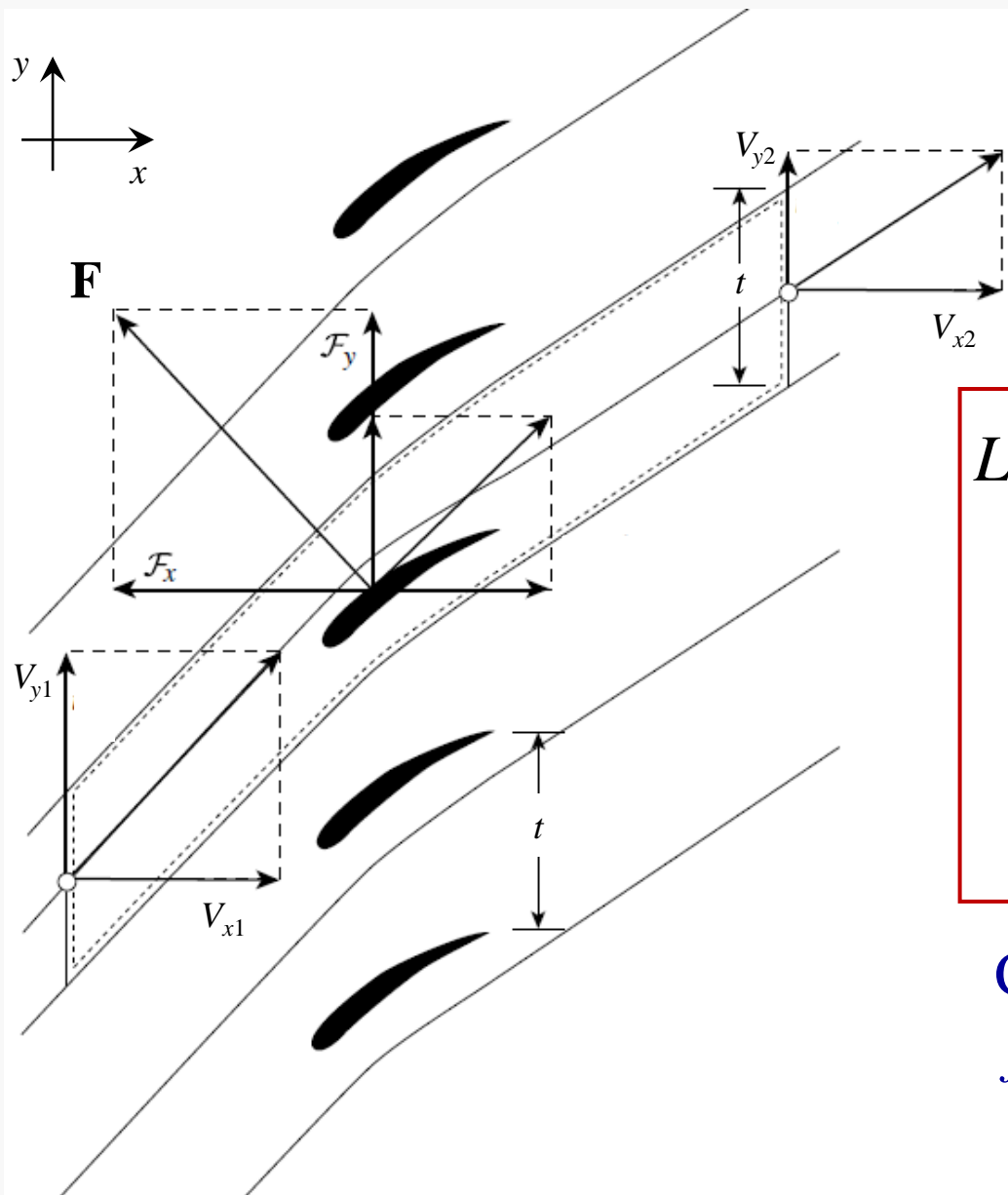


Le componenti della forza F lungo x e y assumono la forma:

$$\begin{aligned} F_x &= t (p_1 - p_2) = \\ &= \frac{\rho}{2} t (V_{y2} - V_{y1})(V_{y2} + V_{y1}) \\ &= -\rho \Gamma \frac{(V_{y1} + V_{y2})}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y &= -\rho V_x t (V_{y2} - V_{y1}) = \\ &= \rho \Gamma V_x \end{aligned}$$

Coefficiente di portanza di un profilo in schiera



Nel caso di fluido non viscoso la forza risultante \mathbf{F} coincide con la portanza L :

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{(F_y^2 + F_x^2)} = \\ &= \rho \Gamma \sqrt{V_x^2 + \left(\frac{V_{y1} + V_{y2}}{2}\right)^2} = \\ &= \rho \Gamma V_\infty \end{aligned}$$

Con V_∞ si è indicata la velocità *fittizia* media tra le velocità di ingresso e uscita della schiera

Coefficiente di portanza di un profilo in schiera

$$L = C_{Ls} \rho \frac{V_\infty^2}{2} c = \rho \Gamma V_\infty$$

La circolazione può essere scritta come: $\Gamma = -t (V_{y2} - V_{y1}) = t \Delta V_y$

Il coefficiente di portanza del profilo in schiera risulta:

$$C_{Ls} = 2 \frac{\Delta V_y}{V_\infty} \cdot \frac{t}{c}$$

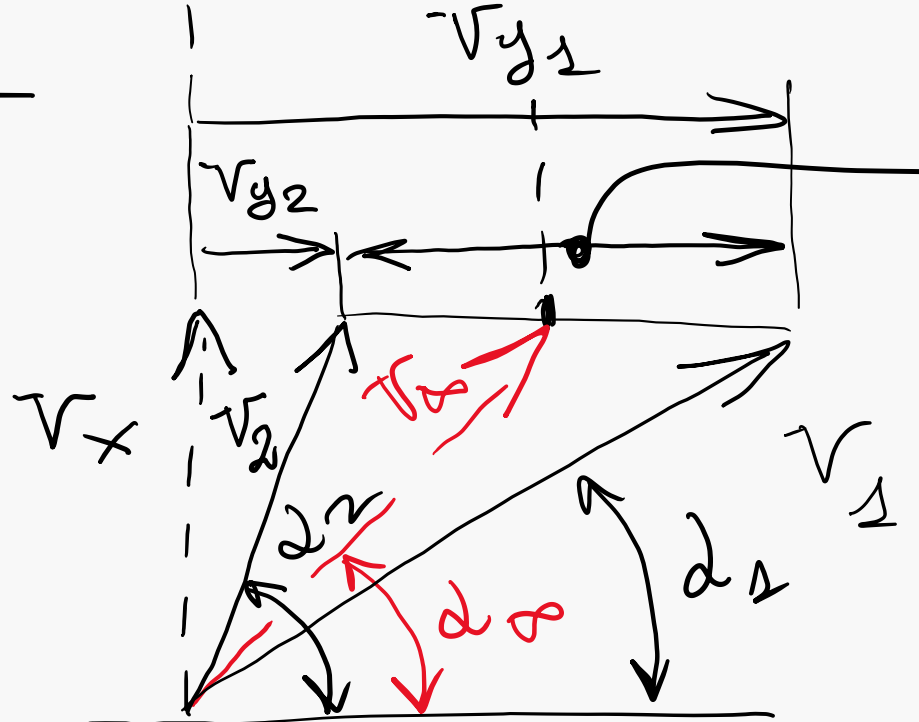


Schiera stocelerante

$$\frac{v_{y2} + v_{y1} - v_{y2}}{2} = \frac{v_{y1} + v_{y2}}{2}$$

$$\frac{v_{y1} + v_{y2}}{2}$$

$$C_{Ls} = 2 \frac{\Delta v_y}{v_\infty} \frac{t}{c}$$



$$\Delta v_y = v_{y1} - v_{y2}$$



Schiera docoblemente

$$C_{Ls} \approx 2 \frac{V_{y1} - V_{y2}}{V_{\infty}} \frac{t}{c}$$

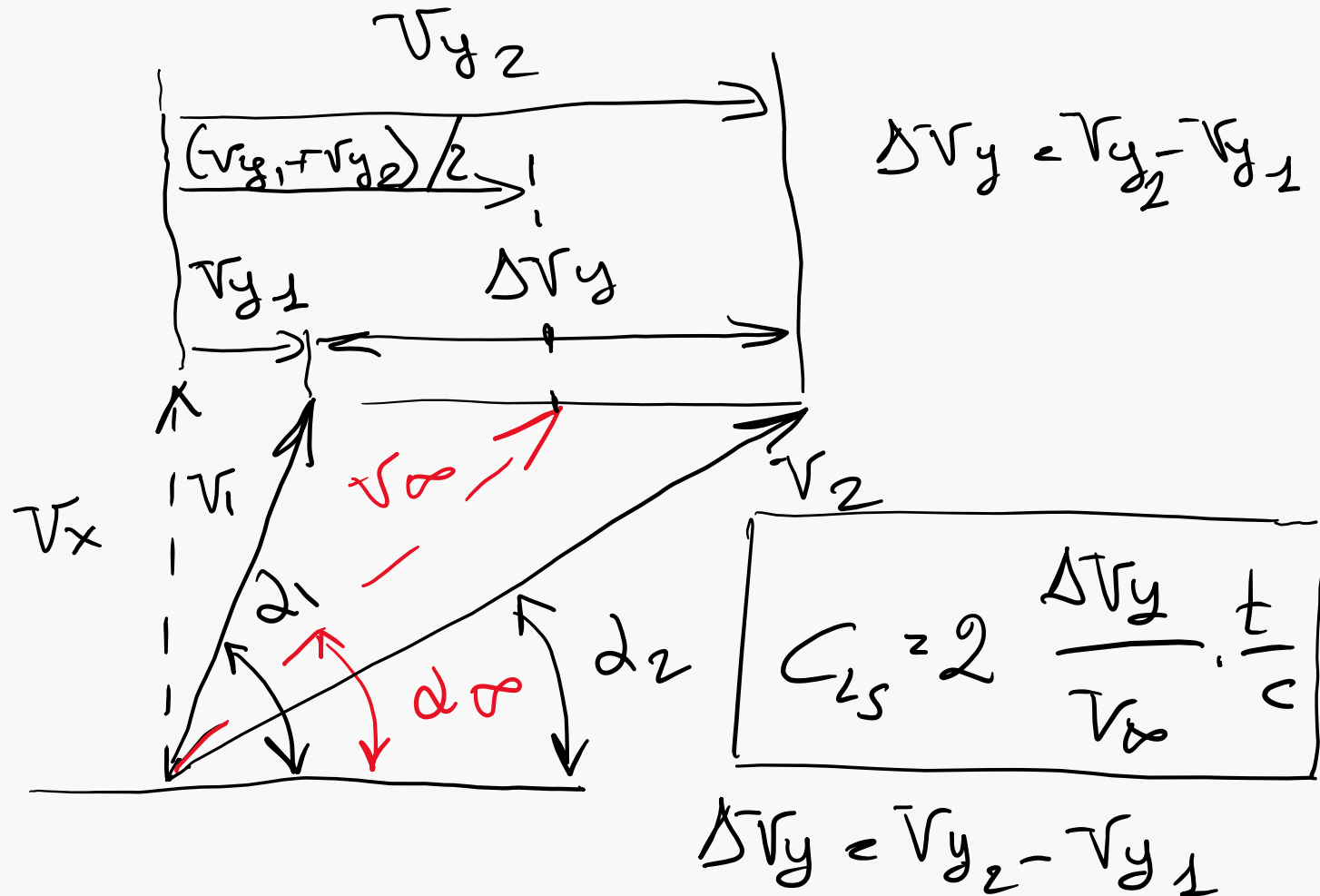
$$V_y = V_x \cos \alpha$$

$$V_{\infty} = V_x / \sin \alpha$$

$$C_{Ls} \approx 2 \frac{V_x (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)}{V_x / \sin \alpha} \frac{t}{c} \approx 2 \frac{t}{c} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \sin \alpha$$



Schiera accelerata



Schiera accelerante

$$C_{2s} \approx 2 \frac{V_{y2} - V_{y1}}{V_x} \frac{t}{c} \approx$$

$$\approx 2 \frac{V_x (\cos \alpha d_2 - \cos \alpha d_1)}{V_x / \sin \alpha} \frac{t}{c} \approx$$

$$\approx 2 \frac{t}{c} (\cos \alpha d_2 - \cos \alpha d_1) \sin \alpha$$



$$V_x \cos \alpha_\infty = \frac{V_{y1} + V_{y2}}{2} \quad \approx$$

$$\approx V_x \frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{2}$$

$$\cos \alpha_\infty = \frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{2}$$

