

Dispensa del corso di “FLUIDODINAMICA DELLE MACCHINE”

Argomento: Onde di Mach e onde d'urto
(flusso stazionario, non viscoso di un gas perfetto)

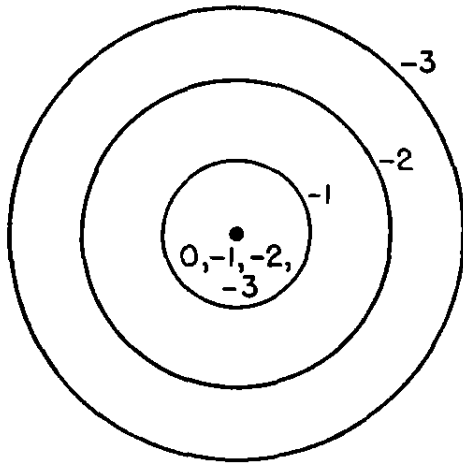
Prof. Pier Ruggero Spina
Dipartimento di Ingegneria



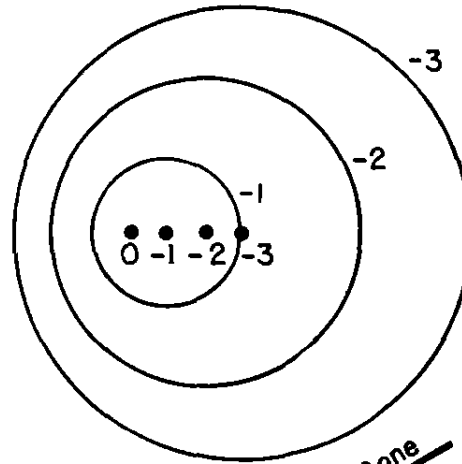
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI FERRARA
- EX LABORE FRUCTUS -

Campo di pressione generato da una sorgente di disturbo mobile

(a)



(b)

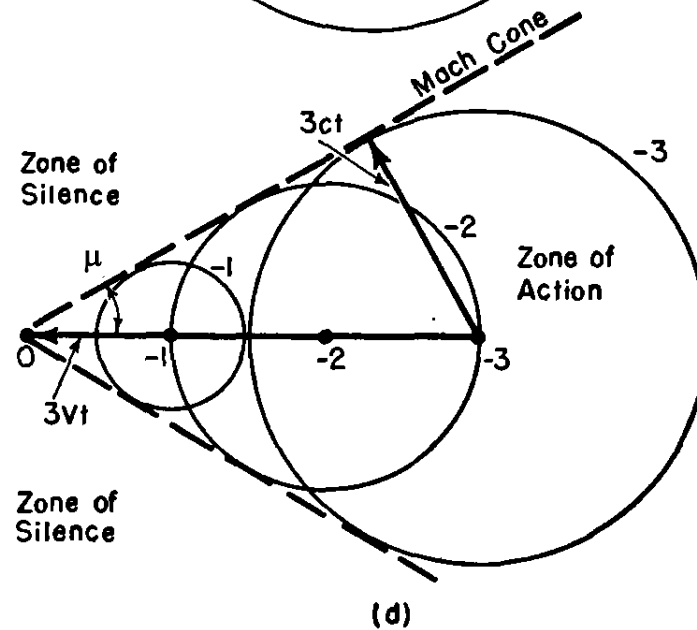
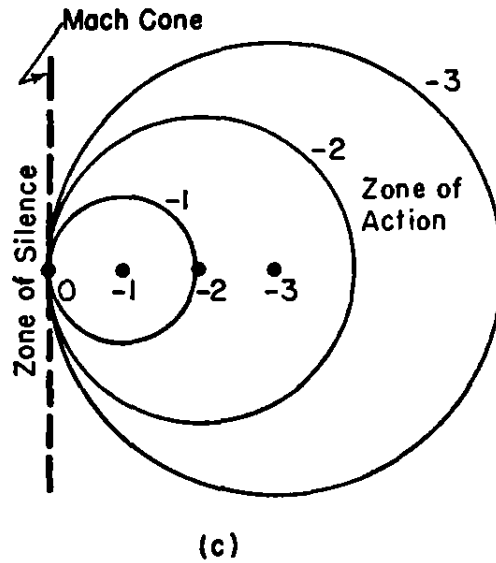


- (a) Incompressible fluid ($V/c = 0$).
- (b) Subsonic motion ($V/c = 1/2$).
- (c) Transonic motion ($V/c = 1$).
- (d) Supersonic motion ($V/c = 2$).

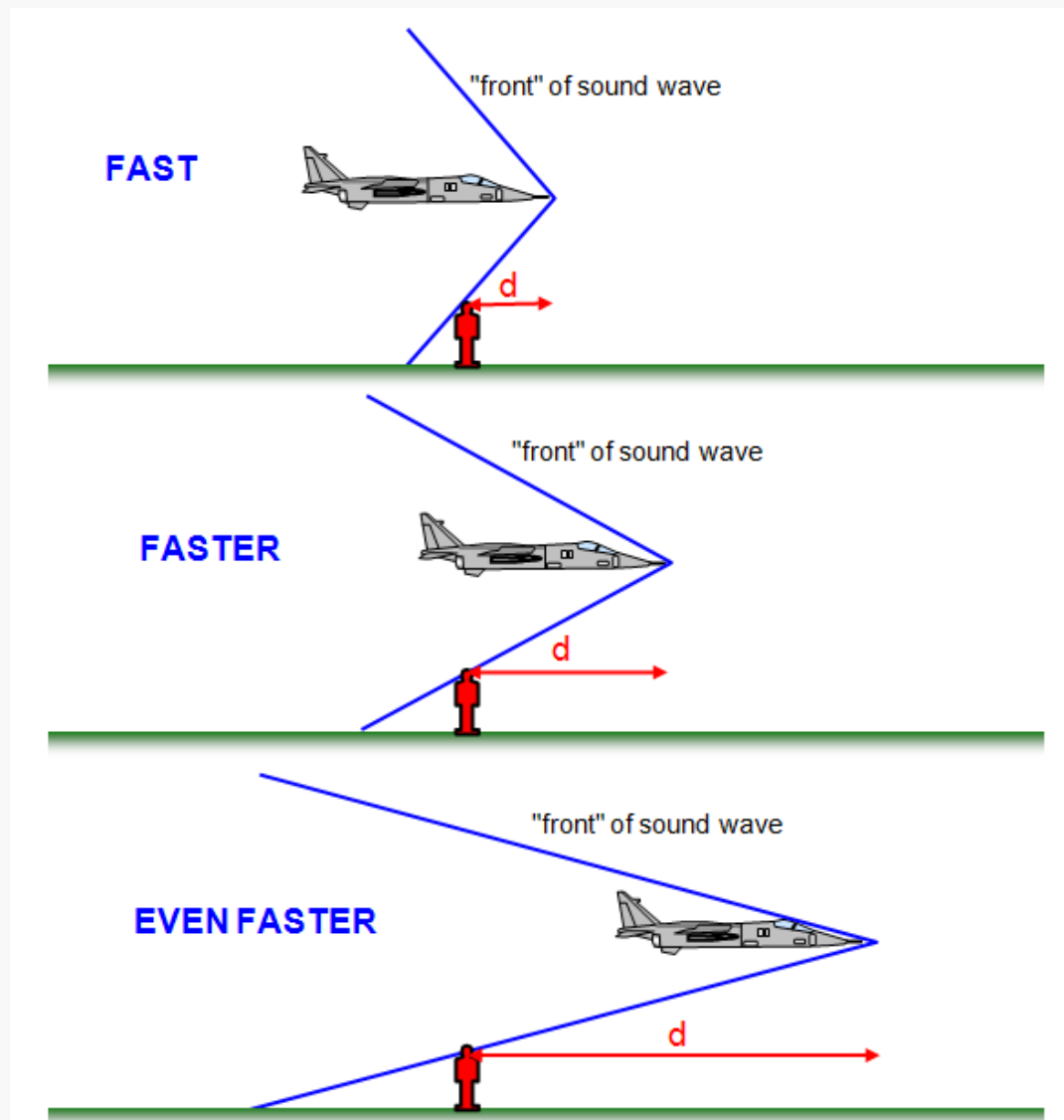
Angolo di Mach μ :

$$\mu = \arcsen \left(\frac{c}{V} \right) =$$

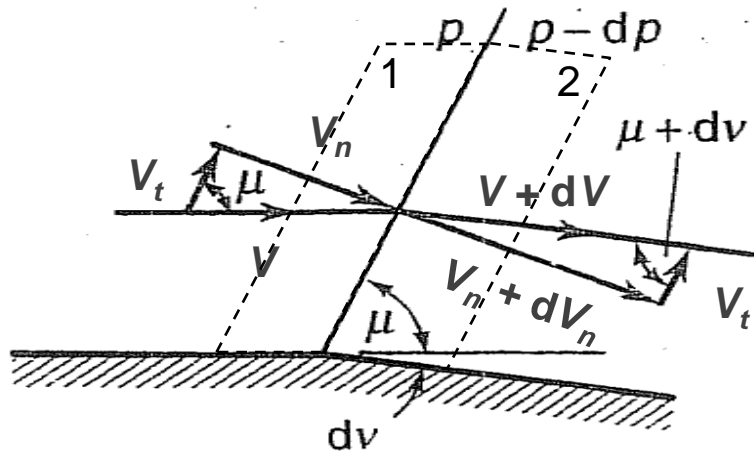
$$= \arcsen \left(\frac{1}{M} \right)$$



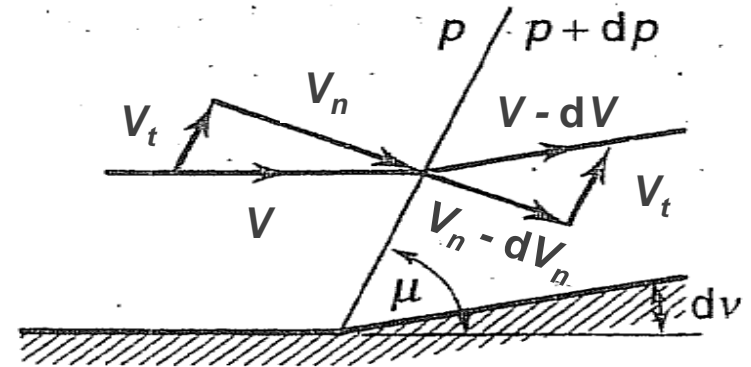
Campo di pressione generato da una sorgente di disturbo mobile



Espansione e compressione isentropiche in un flusso supersonico



(a) Convex



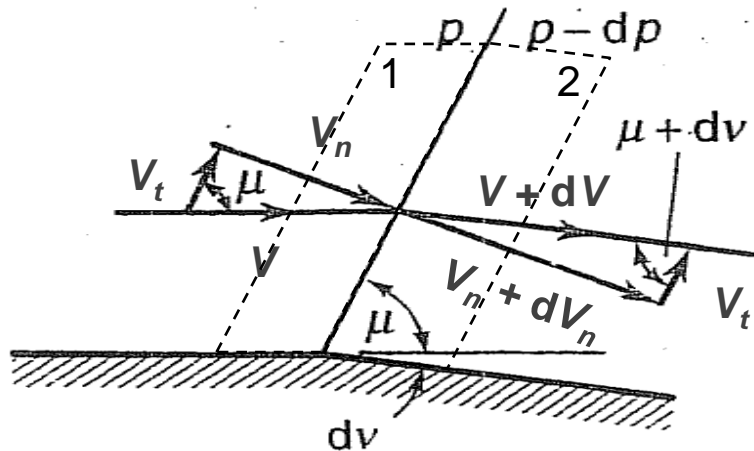
(b) Concave

Expansive and compressive Mach waves

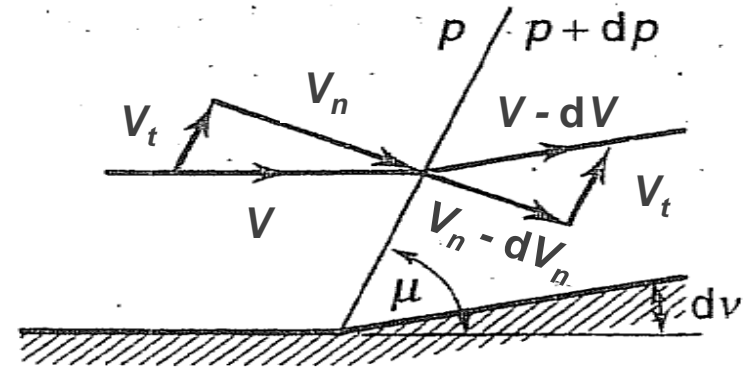
Bilancio di massa (applicato al volume di controllo, in figura delimitato dalla linea tratteggiata):

$$\rho_1 A V_{1n} = \rho_2 A V_{2n}$$

Espansione e compressione isentropiche in un flusso supersonico



(a) Convex



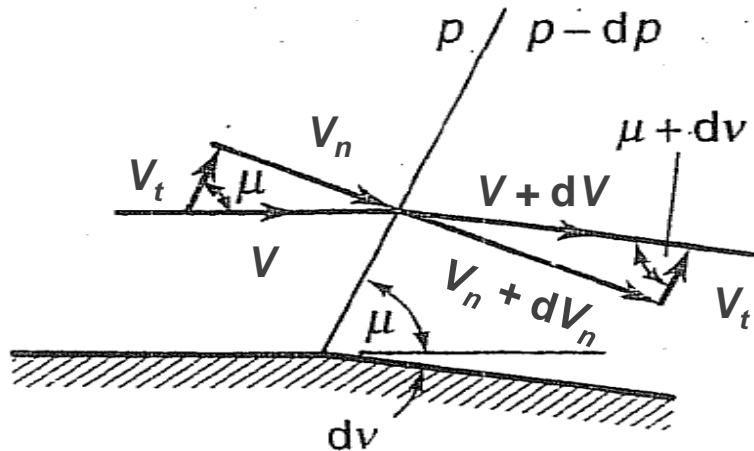
(b) Concave

Expansive and compressive Mach waves

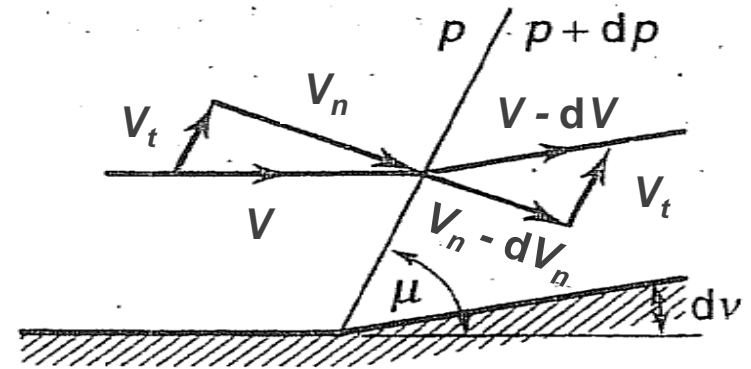
Bilancio della quantità di moto (applicato al volume di controllo, in figura delimitato dalla linea tratteggiata):

- direzione normale : $\rho_2 A V_{2n}^2 - \rho_1 A V_{1n}^2 + A(p_2 - p_1) = 0$
- direzione tangenziale : $\rho_2 A V_{2n} V_{2t} - \rho_1 A V_{1n} V_{1t} = 0 \Rightarrow V_{1t} = V_{2t}$

Espansione e compressione isentropiche in un flusso supersonico



(a) Convex



(b) Concave

Expansive and compressive Mach waves

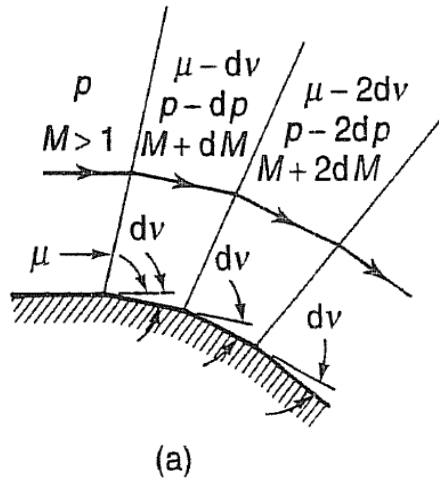
$$V_{2n} = V_n + dV_n > V_n = V_{1n}$$

$$p_2 = p - dp < p = p_1$$

$$V_{2n} = V_n - dV_n < V_n = V_{1n}$$

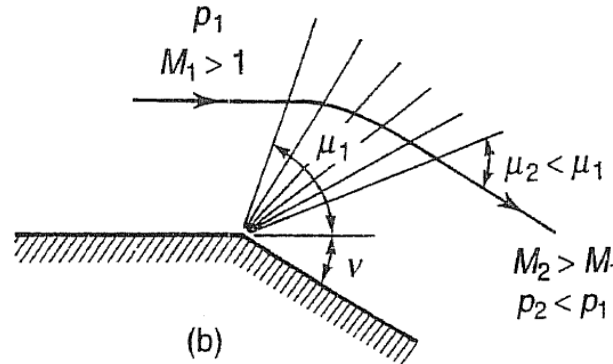
$$p_2 = p + dp > p = p_1$$

Espansione e compressione isentropiche in un flusso supersonico



(a)

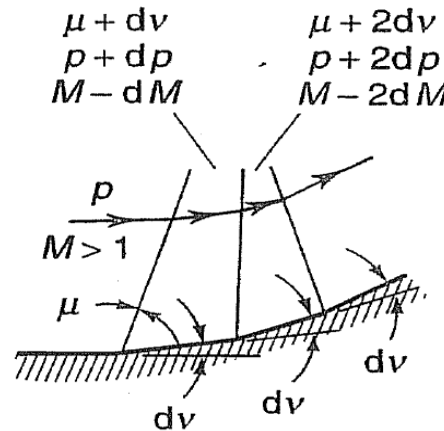
Isentropic expansion



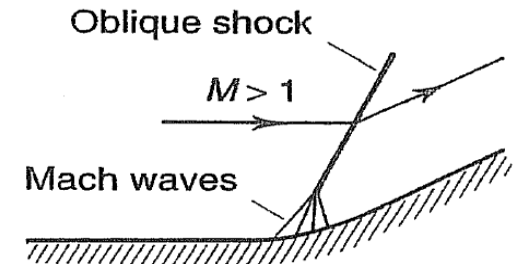
(b)

Un angolo **convesso** che genera una deviazione del flusso finita può essere visto come una sorgente di deviazioni infinitesime le cui onde di Mach divergono, non interferendo tra loro. Il flusso può quindi accelerare gradualmente e isentropicamente.

Nel caso di un angolo **concavo** che genera una deviazione del flusso finita le onde di Mach che si generano convergono e vanno a consolidarsi, formando un'onda d'urto obliqua attraverso la quale il processo di compressione non è isentropico.



(a)

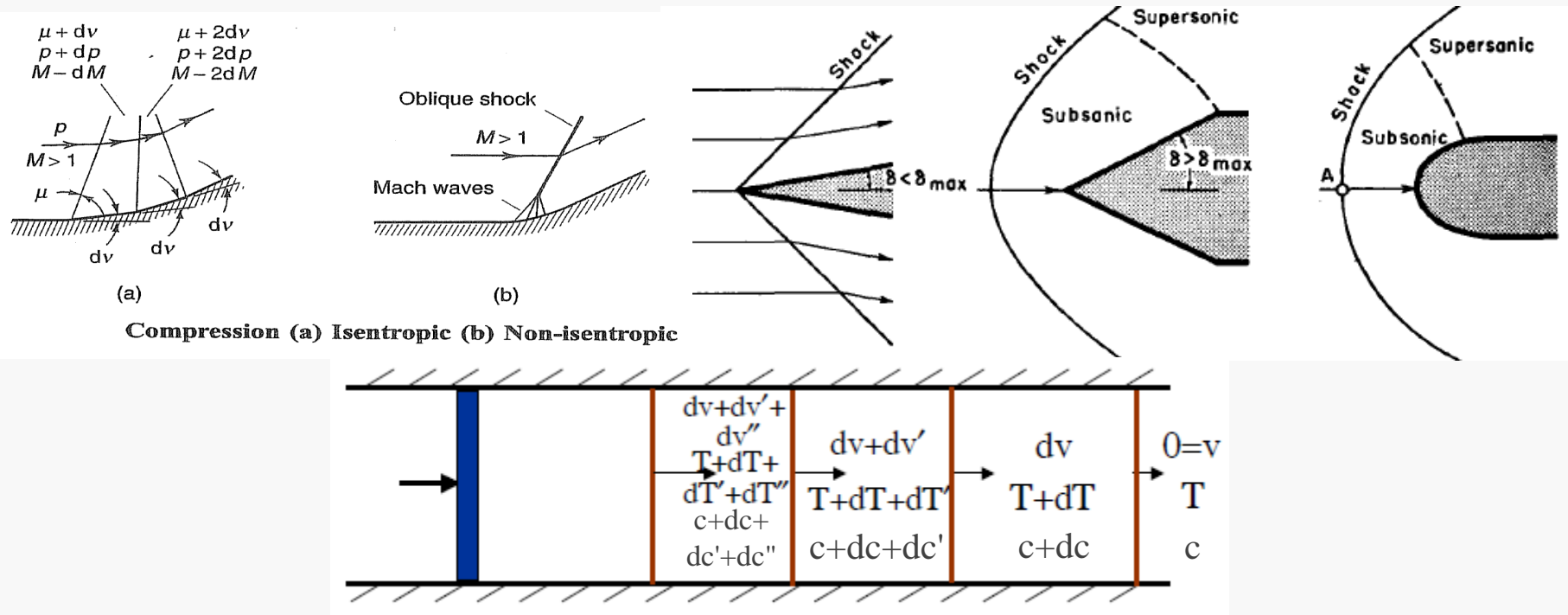


(b)

Compression (a) Isentropic (b) Non-isentropic

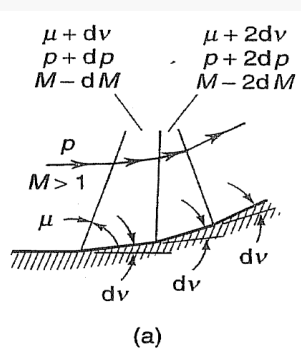


Formazione delle onde d'urto

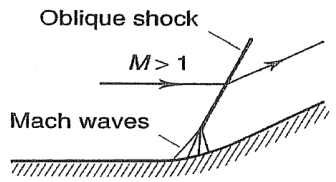


- **Si pensi ad una serie di onde di compressione discrete** (prodotte ad esempio da un pistone in un tubo mediante impulsi discreti, dove ciascun impulso del pistone produce un'onda di compressione debole che viaggia alla velocità del suono c , nel gas che si muove davanti ad essa alla velocità V)
- **Ciascuna onda viaggia nella scia dell'onda precedente, ad una velocità leggermente superiore** ($c \uparrow$, dato che $T \uparrow$, e $V \uparrow$)

Formazione delle onde d'urto

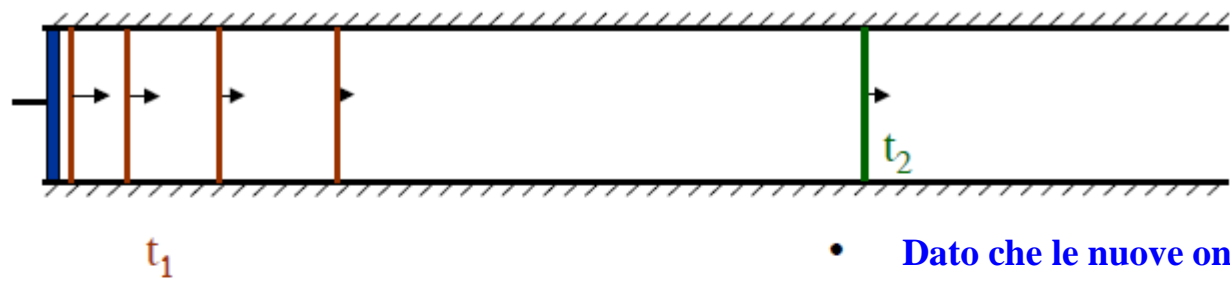
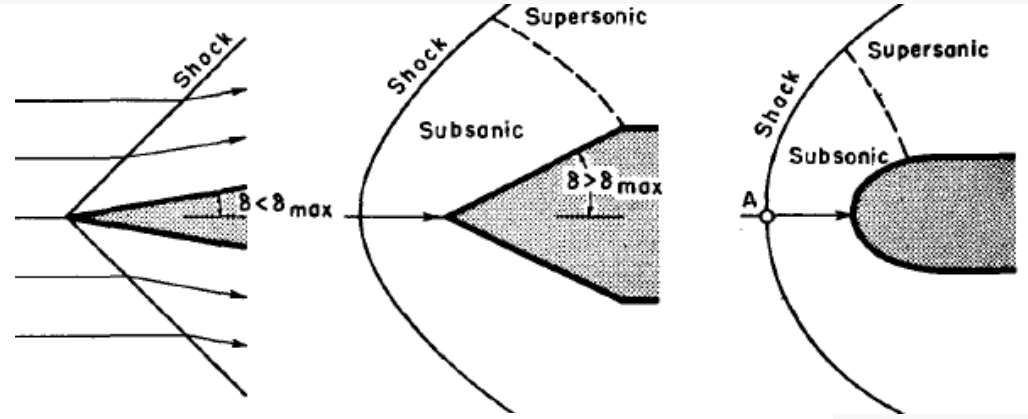


(a)

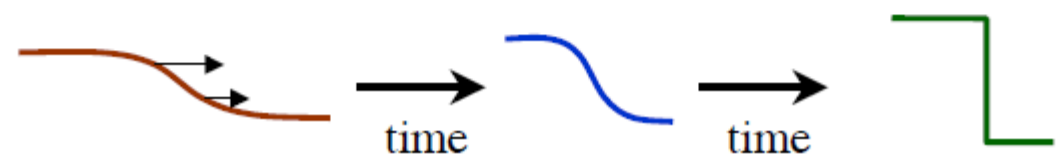


(b)

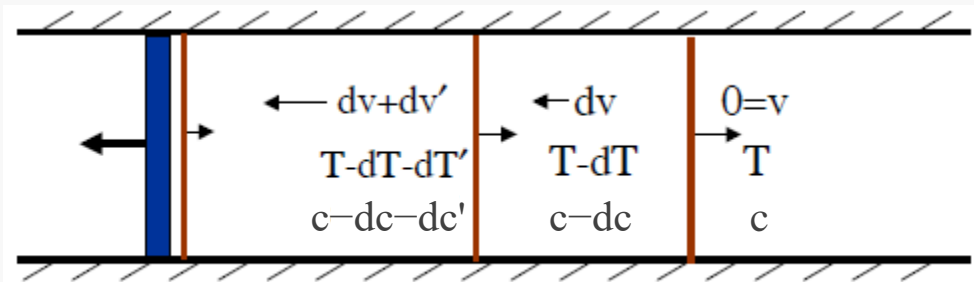
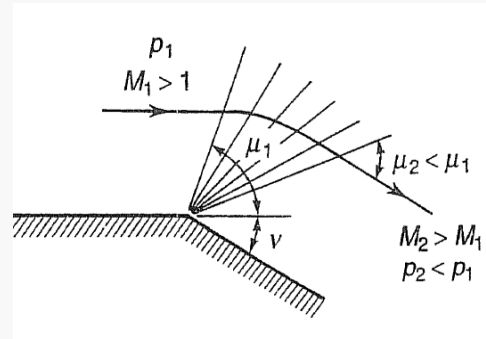
Compression (a) Isentropic (b) Non-isentropic



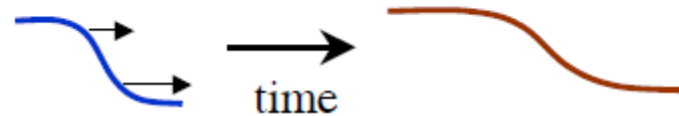
• Dato che le nuove onde si muovono più velocemente delle precedenti, finiscono per collidere e consolidarsi in un'onda urto



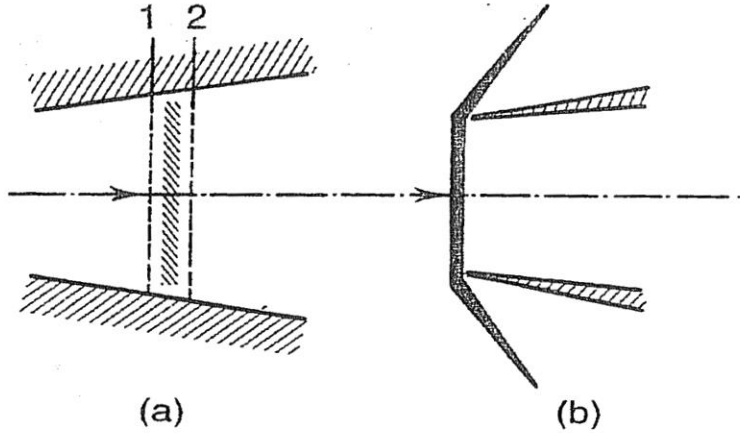
Formazione delle onde d'urto



- Nel caso di espansione onde successive presentano $T \downarrow$, $c \downarrow$ e $V \uparrow$
- Non si generano onde d'urto di espansione



Onde d'urto normali



Bilancio di massa:

$$\dot{M}_1 = \dot{M}_2 \Rightarrow \rho_1 A V_1 = \rho_2 A V_2$$

Bilancio della quantità di moto:

$$\rho_2 A V_2^2 - \rho_1 A V_1^2 + A(p_2 - p_1) = 0$$

Bilancio dell'energia:

$$\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + c_p (T_2 - T_1) = c_p (T_{02} - T_{01}) = 0$$

⇓

$$T_{01} = T_{02}$$



Onde d'urto normali

Utilizzando la definizione di numero di Mach:

$$M^2 = \frac{V^2}{\gamma R T} \Rightarrow V^2 = \gamma R T M^2$$

Dall'equazione di bilancio dell'energia:

$$\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + c_p (T_2 - T_1) = \frac{1}{2} (\gamma R T_2 M_2^2 - \gamma R T_1 M_1^2) + \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) = 0$$

$$T_2 \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right) = T_1 \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2} = \frac{T_2}{T_{02}} \frac{T_{01}}{T_1}$$



Onde d'urto normali

Utilizzando la definizione di numero di Mach:

$$M^2 = \rho \frac{V^2}{\gamma p} \Rightarrow \rho V^2 = \gamma p M^2$$

Dall'equazione di bilancio della quantità di moto:

$$\rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2 + p_2 - p_1 = \gamma p_2 M_2^2 - \gamma p_1 M_1^2 + p_2 - p_1 = 0$$

$$p_2 (1 + \gamma M_2^2) = p_1 (1 + \gamma M_1^2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}}$$



Onde d'urto normali

Utilizzando la definizione di numero di Mach:

$$M = \frac{V}{\sqrt{\gamma R T}} \Rightarrow V = M \sqrt{\gamma R T}$$

Dall'equazione di bilancio di massa:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \Rightarrow \frac{p_1}{R T_1} M_1 \sqrt{\gamma R T_1} = \frac{p_2}{R T_2} M_2 \sqrt{\gamma R T_2}$$

⇓

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{p_1}{p_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$



Onde d'urto normali

Sostituendo le espressioni di p_1/p_2 e T_2/T_1 precedentemente trovate:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2}$$

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{p_1}{p_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}$$

⇓

$$\frac{M_2 \sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}}{1 + \gamma M_2^2} = \frac{M_1 \sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}}{1 + \gamma M_1^2}$$



Onde d'urto normali

Elevando al quadrato ambo i membri della:

$$\frac{M_2 \sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}}{1 + \gamma M_2^2} = \frac{M_1 \sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}}{1 + \gamma M_1^2}$$

si ottiene un'equazione di secondo grado in M_2^2 :

$$\frac{M_2^2}{(1 + \gamma M_2^2)^2} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right) = \frac{M_1^2}{(1 + \gamma M_1^2)^2} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) = F(M_1^2)$$

⇓

$$(M_2^2)^2 \left[\frac{\gamma - 1}{2} - \gamma^2 F(M_1^2) \right] + M_2^2 [1 - 2\gamma F(M_1^2)] - F(M_1^2) = 0$$



Onde d'urto normali

che risolta fornisce le seguenti due soluzioni (la prima delle quali valida in assenza di onda d'urto):

$$M_2 = M_1$$

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{\gamma - 1}}{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} M_1^2 - 1}$$



Onde d'urto normali

Sostituendo, nell'espressione di T_2/T_1 precedentemente trovata,

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + 2/(\gamma - 1)}{[2\gamma/(\gamma - 1)]M_1^2 - 1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} M_1^2 - 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 + 1} \left(\frac{2\gamma}{\gamma - 1} M_1^2 - 1 \right) =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma - 1} M_1^2 - 1 \right)}{\frac{4\gamma + \gamma^2 - 2\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} M_1^2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma - 1} M_1^2 - 1 \right)}{\frac{(\gamma + 1)^2}{2(\gamma - 1)} M_1^2}$$



Onde d'urto normali

Sostituendo, nell'espressione di p_2/p_1 precedentemente trovata,

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + 2/(\gamma - 1)}{[2\gamma/(\gamma - 1)]M_1^2 - 1}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} M_1^2 - 1 + \gamma M_1^2 + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{2\gamma}{\gamma - 1} M_1^2 - 1 \right)} =$$

$$= \frac{1 + \gamma M_1^2}{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1 + \gamma^2 M_1^2 - \gamma M_1^2 + 2\gamma} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) =$$

$$= \frac{1 + \gamma M_1^2}{(1 + \gamma M_1^2)(\gamma + 1)} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$



Onde d'urto normali

Dalle espressioni di p_2/p_1 e T_1/T_2 si ricava ρ_2/ρ_1 :

$$\begin{aligned}\frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \frac{\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)} M_1^2}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_1^2 - 1 \right)} = \\ &= \frac{\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)}\end{aligned}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1) M_1^2}{2 + (\gamma-1) M_1^2}$$



Onde d'urto normali

Dalle espressioni di p_2/p_1 , T_1/T_2 e M_2 in funzione di M_1 si ricavano le variazioni di pressione totale p_{02}/p_{01} e di entropia Δs :

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$



Onde d'urto normali

Dalle espressioni di p_2/p_1 , T_1/T_2 e M_2 in funzione di M_1 si ricavano le variazioni di pressione totale p_{02}/p_{01} e di entropia Δs :

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{\gamma-1}}{\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_1^2 - 1}$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \cdot \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$



Onde d'urto normali

Dalle espressioni di p_2/p_1 , T_1/T_2 e M_2 in funzione di M_1 si ricavano le variazioni di pressione totale p_{02}/p_{01} e di entropia Δs :

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \cdot \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{\gamma-1}}{\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_1^2 - 1}$

$$\begin{aligned} \frac{p_{02}}{p_{01}} &= \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \cdot \left[\frac{\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_1^2 - 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 + 1}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_1^2 - 1\right)} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \cdot \left[\frac{M_1^2 \frac{4\gamma + \gamma^2 - 2\gamma + 1}{2(\gamma-1)}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_1^2 - 1\right)} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ &= \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \cdot \left[\frac{M_1^2 \frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_1^2 - 1\right)} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \cdot \left[\frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{aligned}$$



Onde d'urto normali

Dalle espressioni di p_2/p_1 , T_1/T_2 e M_2 in funzione di M_1 si ricavano le variazioni di pressione totale p_{02}/p_{01} e di entropia Δs :

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} / \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_{02}}{p_{01}}$$



Onde d'urto normali

In definitiva, tra monte (1) e valle (2) di un'onda d'urto normale, risulta:

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{\gamma - 1}}{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} M_1^2 - 1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma - 1} M_1^2 - 1\right)}{\frac{(\gamma + 1)^2}{2(\gamma - 1)} M_1^2}$$

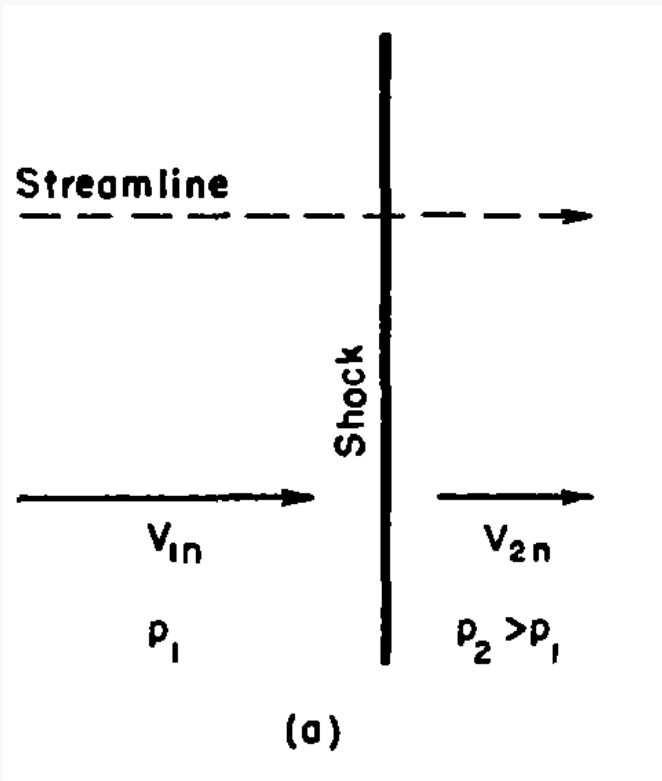
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2}$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{\frac{\gamma + 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} / \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

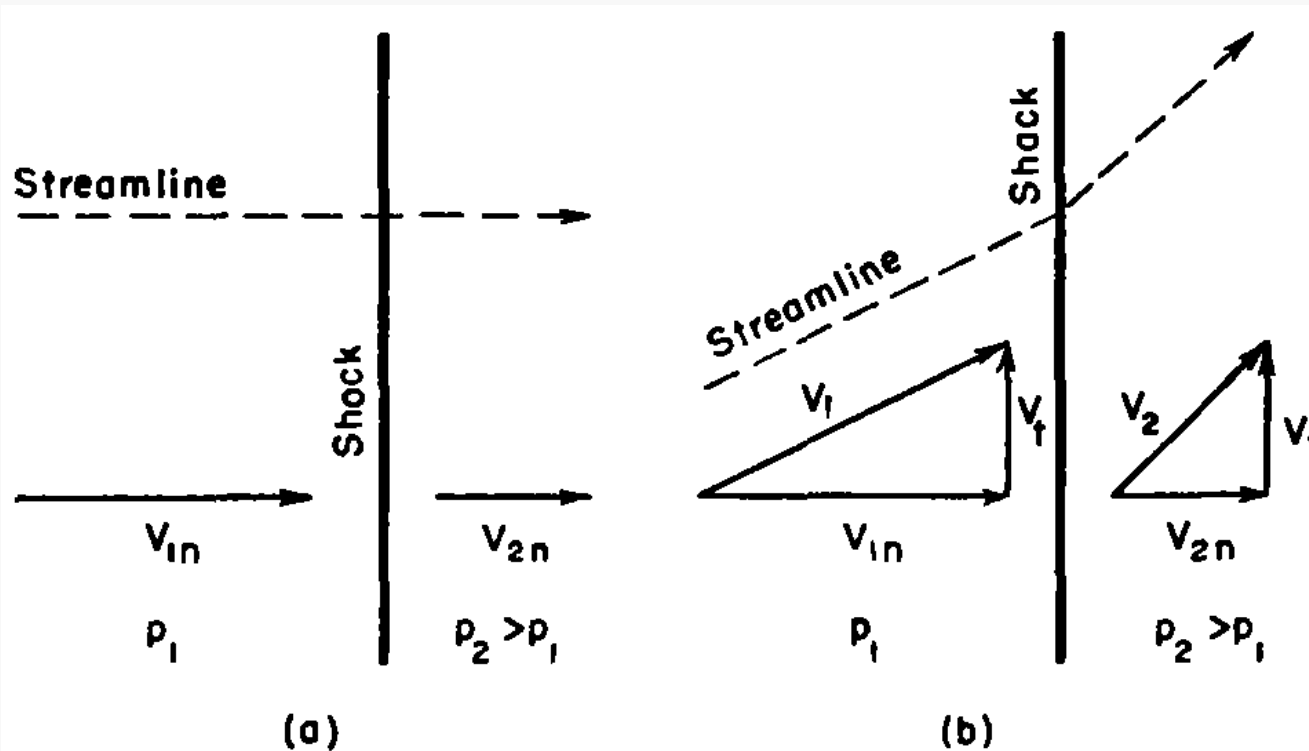


Onde d'urto oblique



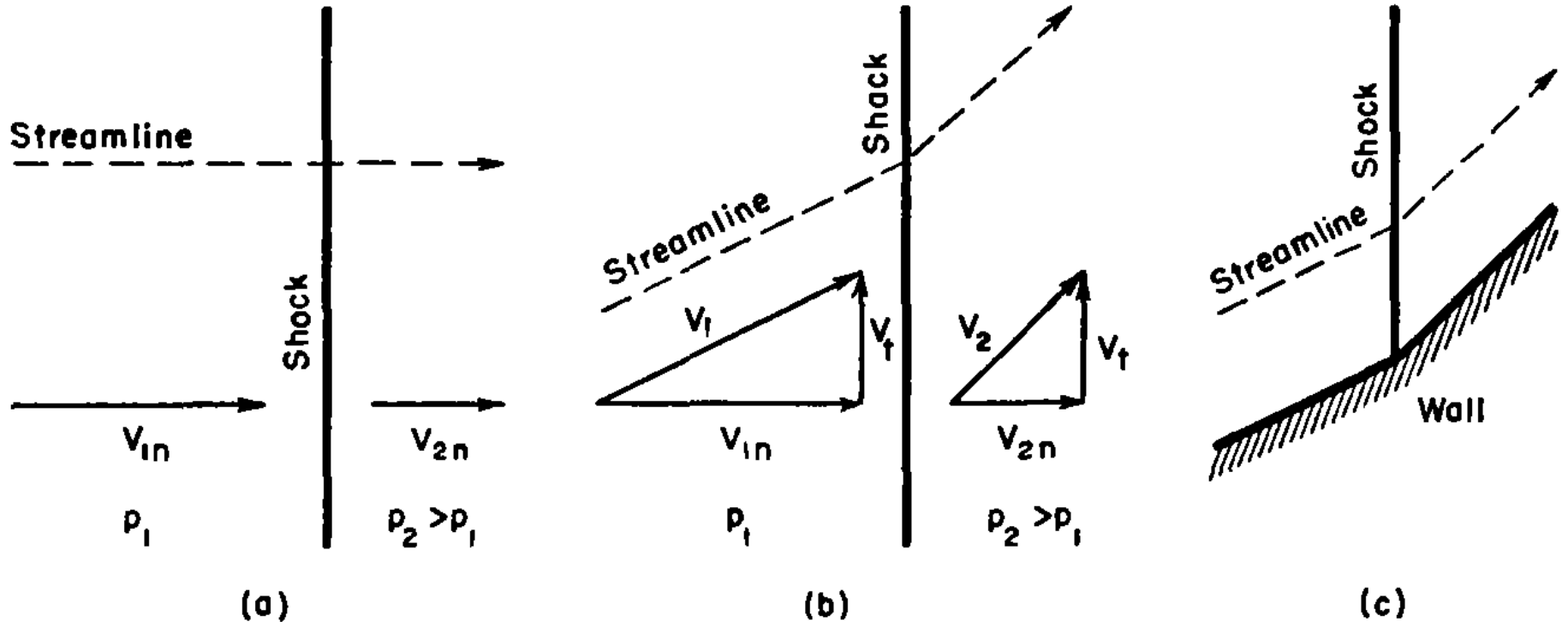
a) Un osservatore fisso vede l'onda d'urto normale.

Onde d'urto obliqua



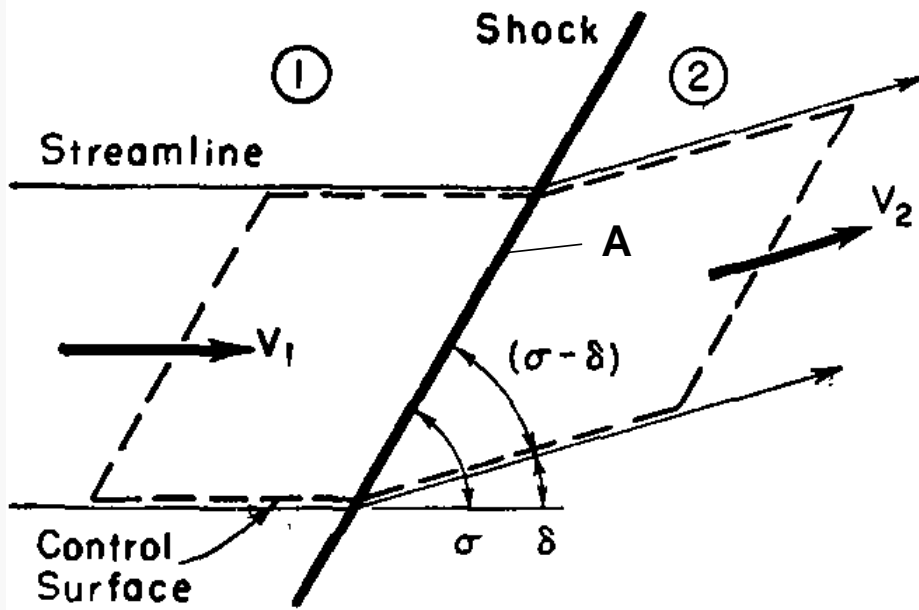
- a) Un osservatore fisso vede l'onda d'urto normale.
- b) Un osservatore che si muove verso il basso con velocità costante V_t lungo l'onda d'urto vede l'onda d'urto obliqua.

Onde d'urto obliqua



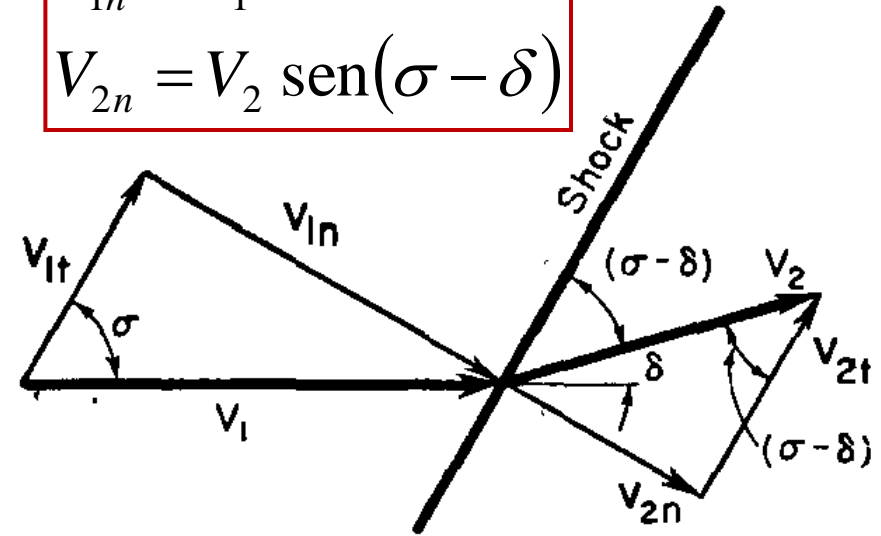
- a) Un osservatore fisso vede l'onda d'urto normale.
- b) Un osservatore che si muove verso il basso con velocità costante V_t lungo l'onda d'urto vede l'onda d'urto obliqua.
- c) Il flusso in (b) può essere interpretato come la geometria di flusso che si produce in prossimità di una parete che forma un angolo concavo.

Onde d'urto oblique



$$V_{1n} = V_1 \sin \sigma$$

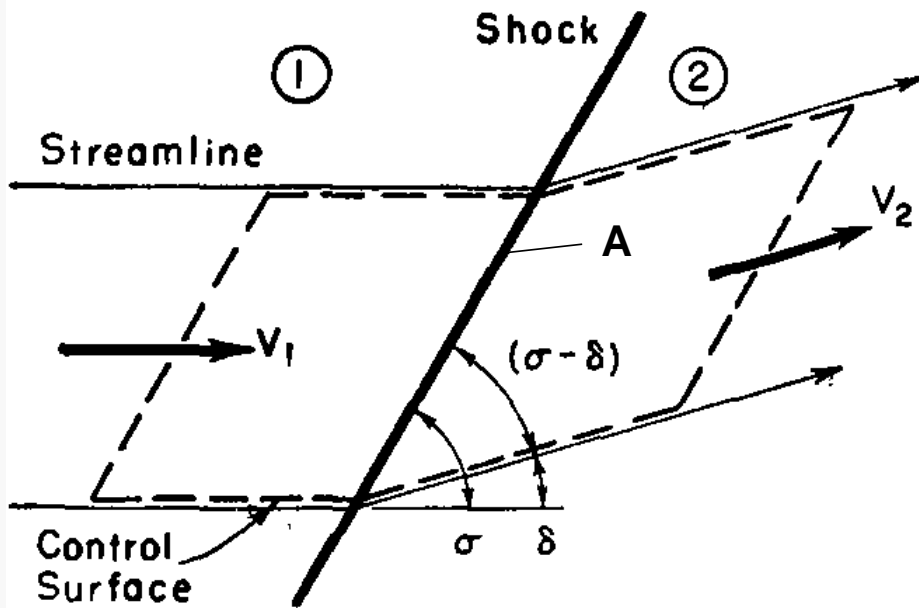
$$V_{2n} = V_2 \sin(\sigma - \delta)$$



Bilancio di massa (applicato al volume di controllo, in figura delimitato dalla linea tratteggiata):

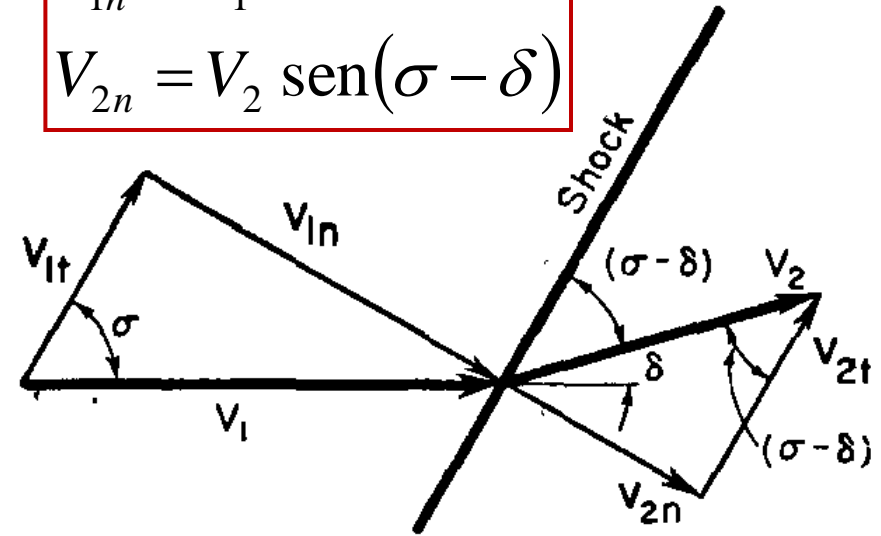
$$\rho_1 A V_{1n} = \rho_2 A V_{2n} \Rightarrow \frac{V_{1n}}{V_{2n}} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Onde d'urto oblique



$$V_{1n} = V_1 \sin \sigma$$

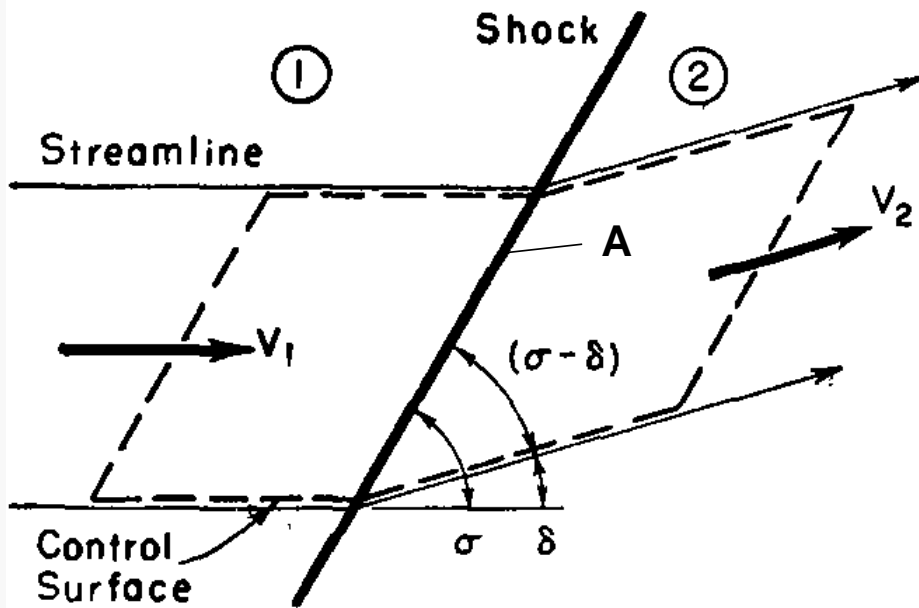
$$V_{2n} = V_2 \sin(\sigma - \delta)$$



Bilancio della quantità di moto (applicato al volume di controllo, in figura delimitato dalla linea tratteggiata):

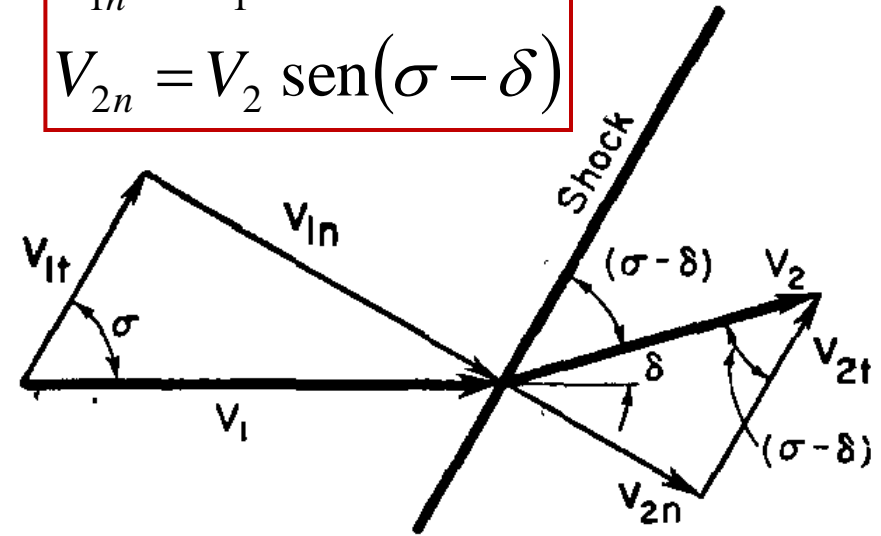
- direzione normale all'onda d'urto: $\rho_2 A V_{2n}^2 - \rho_1 A V_{1n}^2 + A(p_2 - p_1) = 0$
- direzione tangenziale: $\rho_2 A V_{2n} V_{2t} - \rho_1 A V_{1n} V_{1t} = 0 \Rightarrow V_{1t} = V_{2t}$

Onde d'urto oblique



$$V_{1n} = V_1 \sin \sigma$$

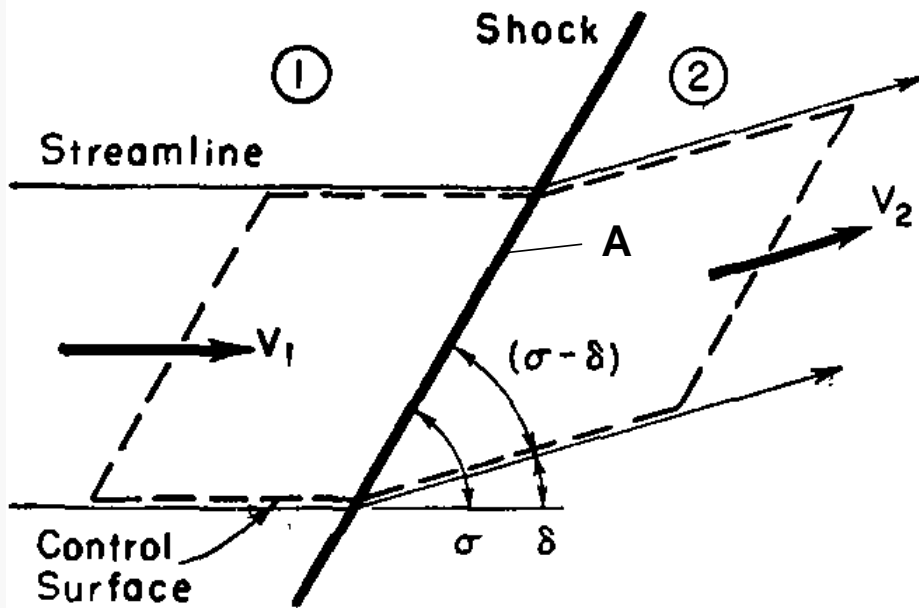
$$V_{2n} = V_2 \sin(\sigma - \delta)$$



Bilancio dell'energia (applicato al volume di controllo, in figura delimitato dalla linea tratteggiata):

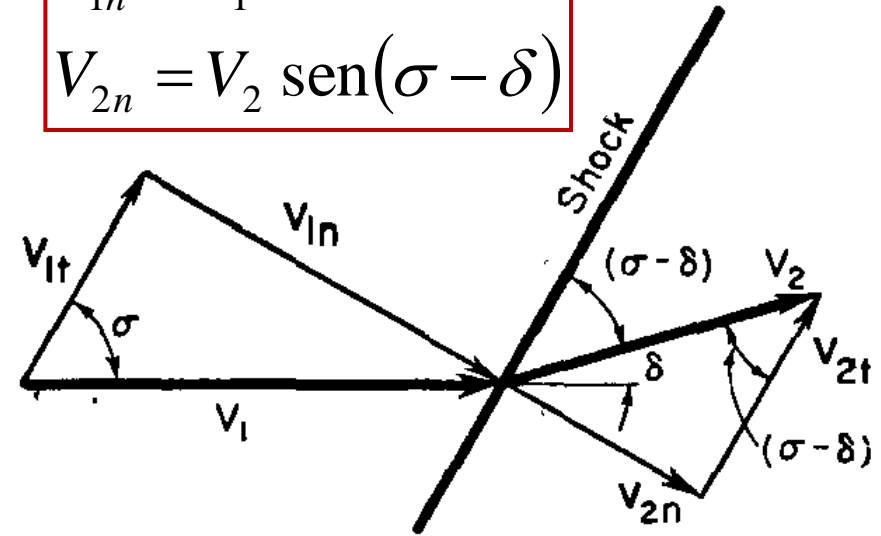
$$c_p(T_{02} - T_{01}) = \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + c_p(T_2 - T_1) = \frac{V_{2n}^2}{2} - \frac{V_{1n}^2}{2} + c_p(T_2 - T_1) = 0$$

Onde d'urto oblique



$$V_{1n} = V_1 \sin \sigma$$

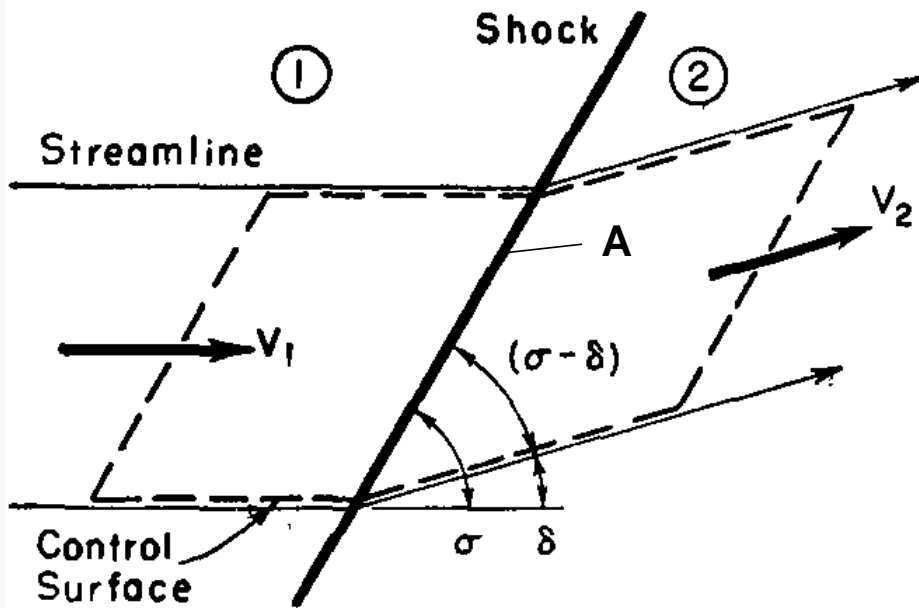
$$V_{2n} = V_2 \sin(\sigma - \delta)$$



Bilancio dell'energia (applicato al volume di controllo, in figura delimitato dalla linea tratteggiata):

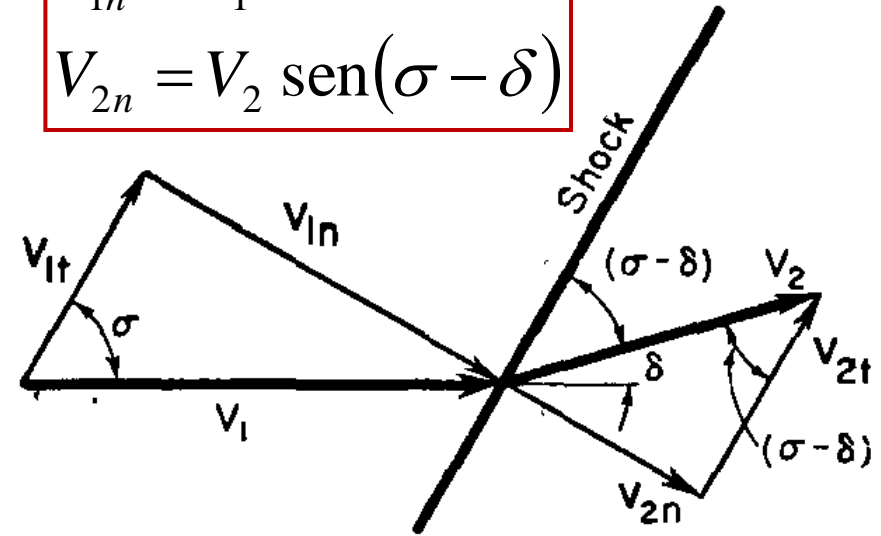
$$T_{02} = T_{01} \Rightarrow \frac{T_{02}}{T_{01}} = 1 = \frac{T_2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right)}{T_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)} \Rightarrow \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Onde d'urto oblique



$$V_{1n} = V_1 \sin \sigma$$

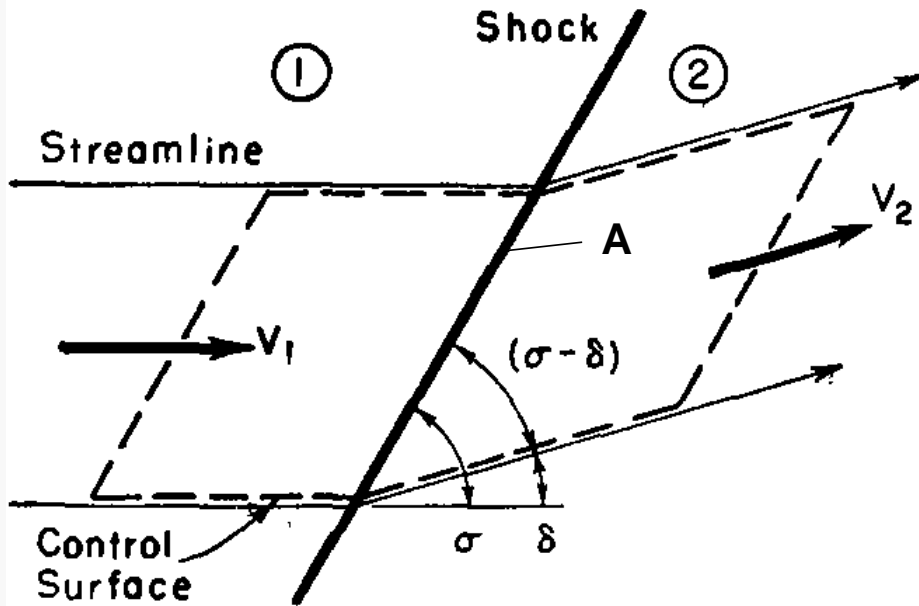
$$V_{2n} = V_2 \sin(\sigma - \delta)$$



Bilancio dell'energia (applicato al volume di controllo, in figura delimitato dalla linea tratteggiata):

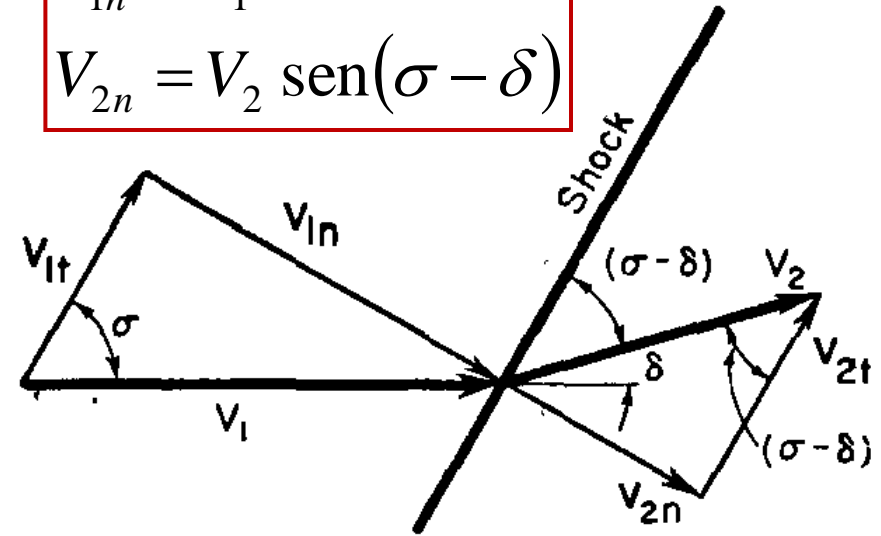
$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}{p_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Onde d'urto oblique



$$V_{1n} = V_1 \sin \sigma$$

$$V_{2n} = V_2 \sin(\sigma - \delta)$$



Le equazioni di bilancio di massa, quantità di moto ed energia per le onde d'urto oblique sono identiche a quelle per le onde d'urto normali, se si sostituiscono le velocità con le rispettive componenti normali all'onda d'urto, che equivale a vedere il flusso attraverso un'onda d'urto normale da un sistema di coordinate che si muove con velocità costante V_t lungo l'onda d'urto.

Onde d'urto oblique

Pertanto, tra monte (1) e valle (2) di un'onda d'urto obliqua, risulta:

$$M_{2n}^2 = \frac{M_{1n}^2 + \frac{2}{\gamma - 1}}{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} M_{1n}^2 - 1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{1n}^2\right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma - 1} M_{1n}^2 - 1\right)}{\frac{(\gamma + 1)^2}{2(\gamma - 1)} M_{1n}^2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_{1n}^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) M_{1n}^2}{2 + (\gamma - 1) M_{1n}^2}$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{\frac{\gamma + 1}{2} M_{1n}^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{1n}^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} / \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_{1n}^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$



Onde d'urto oblique

essendo:

$$M_{1n} = M_1 \sin \sigma$$

$$M_{2n} = M_2 \sin(\sigma - \delta)$$

$$\frac{M_{2t}}{M_{1t}} = \frac{\frac{V_{2t}}{\sqrt{\gamma RT_2}}}{\frac{V_{1t}}{\sqrt{\gamma RT_1}}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

Pertanto:

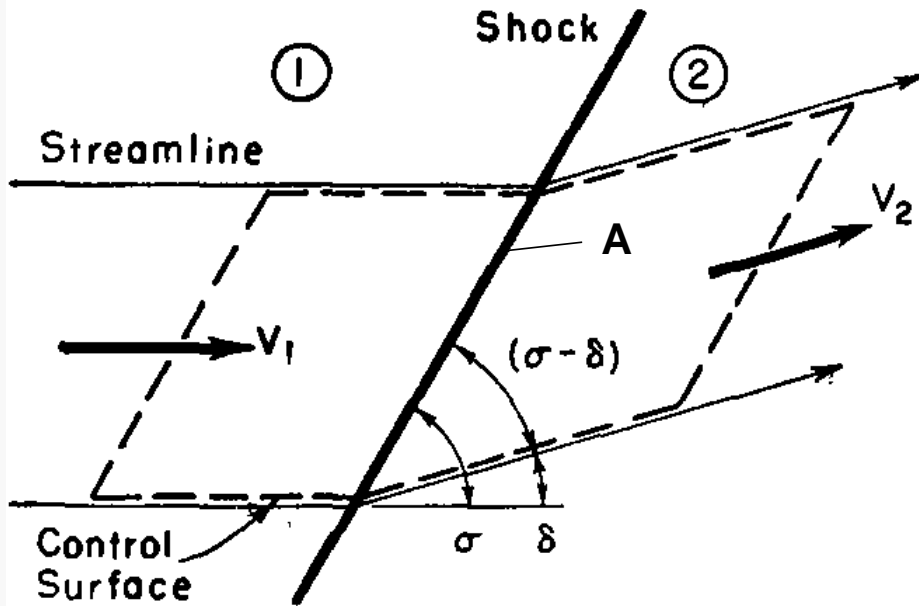
$$M_2 = F_M(M_1, \sigma) \quad , \quad \frac{T_2}{T_1} = F_{rT}(M_1, \sigma)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = F_{rp}(M_1, \sigma) \quad , \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = F_{rp}(M_1, \sigma)$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = F_{rp0}(M_1, \sigma) \quad , \quad \Delta s = F_{\Delta s}(M_1, \sigma)$$

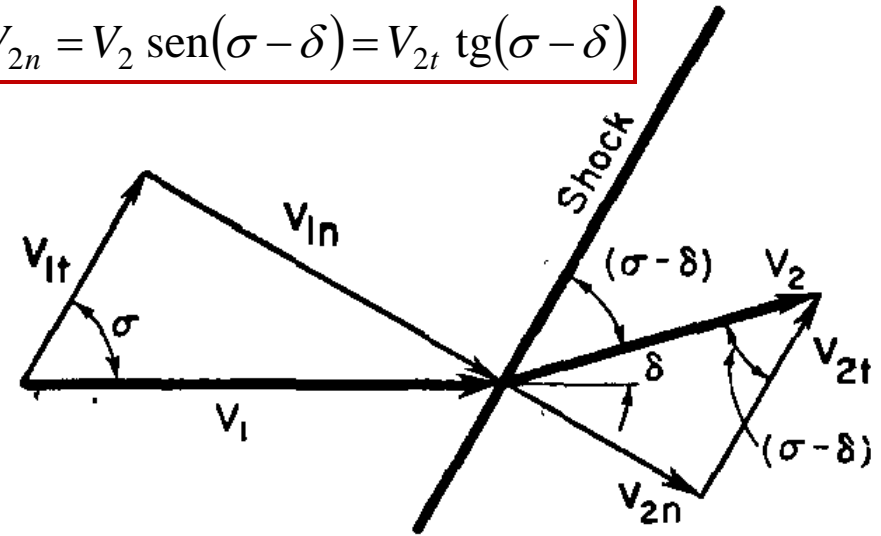


Onde d'urto oblique



$$V_{1n} = V_1 \sin \sigma = V_{1t} \operatorname{tg} \sigma$$

$$V_{2n} = V_2 \sin(\sigma - \delta) = V_{2t} \operatorname{tg}(\sigma - \delta)$$

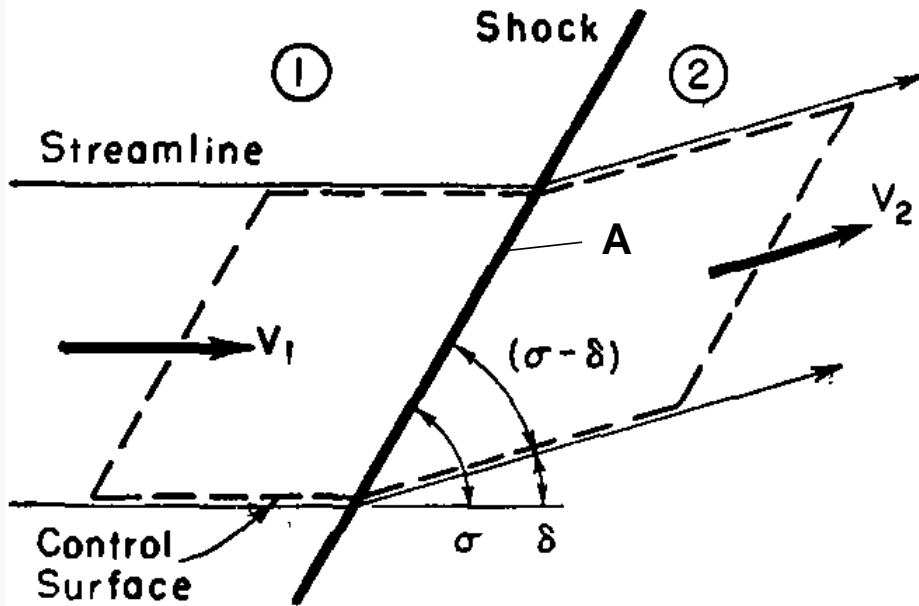


Per determinare la relazione che intercorre tra gli angoli δ e σ :

$$\frac{V_{1n}}{V_{2n}} = \frac{V_{1t} \operatorname{tg} \sigma}{V_{2t} \operatorname{tg}(\sigma - \delta)} = \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\operatorname{tg}(\sigma - \delta)} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \sigma}{2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \sigma}$$

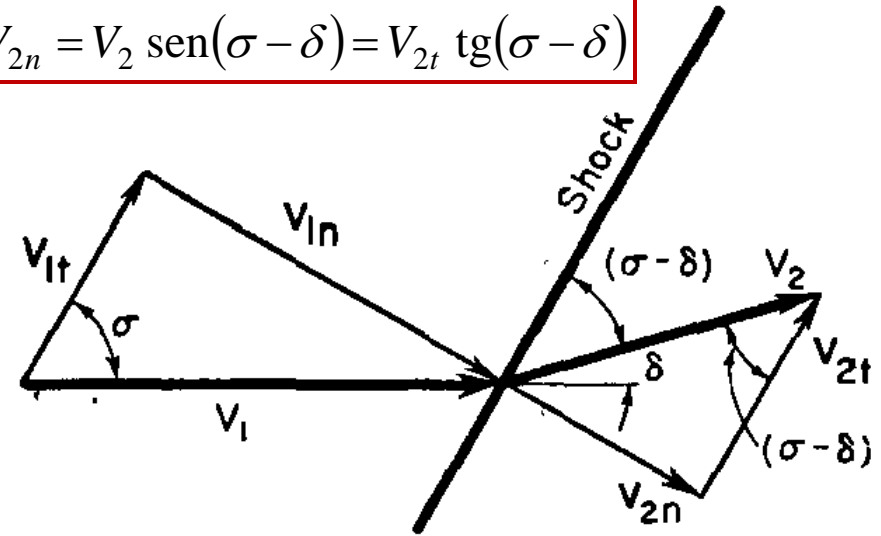


Onde d'urto oblique



$$V_{1n} = V_1 \sin \sigma = V_{1t} \operatorname{tg} \sigma$$

$$V_{2n} = V_2 \sin(\sigma - \delta) = V_{2t} \operatorname{tg}(\sigma - \delta)$$



da cui:

$$\frac{\operatorname{tg} \sigma}{\operatorname{tg}(\sigma - \delta)} = \operatorname{tg} \sigma \frac{1 + \operatorname{tg} \sigma \cdot \operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \sigma - \operatorname{tg} \delta} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \sigma}{2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \sigma}$$

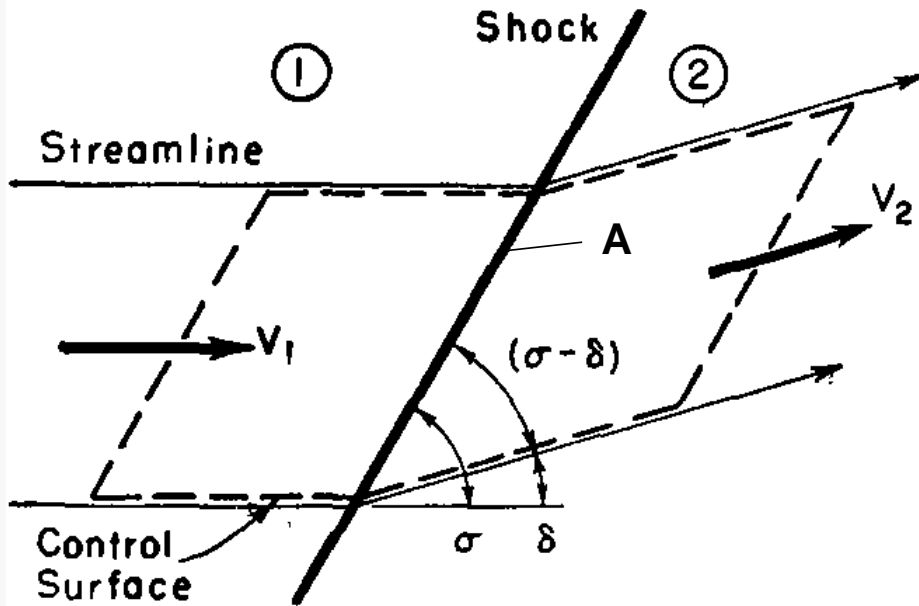
⇓

$$2 \operatorname{tg} \sigma + \operatorname{tg} \sigma (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \sigma + 2 \operatorname{tg}^2 \sigma \cdot \operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg}^2 \sigma \cdot \operatorname{tg} \delta (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \sigma = \operatorname{tg} \sigma (\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \sigma - \operatorname{tg} \delta (\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \sigma$$

⇓

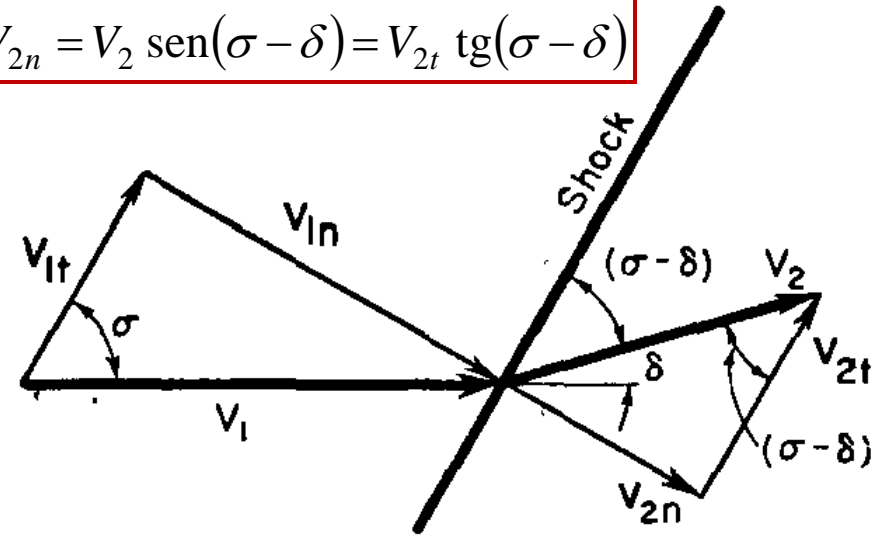
$$2 \operatorname{tg} \sigma (M_1^2 \sin^2 \sigma - 1) = \operatorname{tg} \delta [2 \operatorname{tg}^2 \sigma + \operatorname{tg}^2 \sigma (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \sigma + (\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \sigma]$$

Onde d'urto oblique



$$V_{1n} = V_1 \sin \sigma = V_{1t} \tan \sigma$$

$$V_{2n} = V_2 \sin(\sigma - \delta) = V_{2t} \tan(\sigma - \delta)$$



che permette di ottenere:

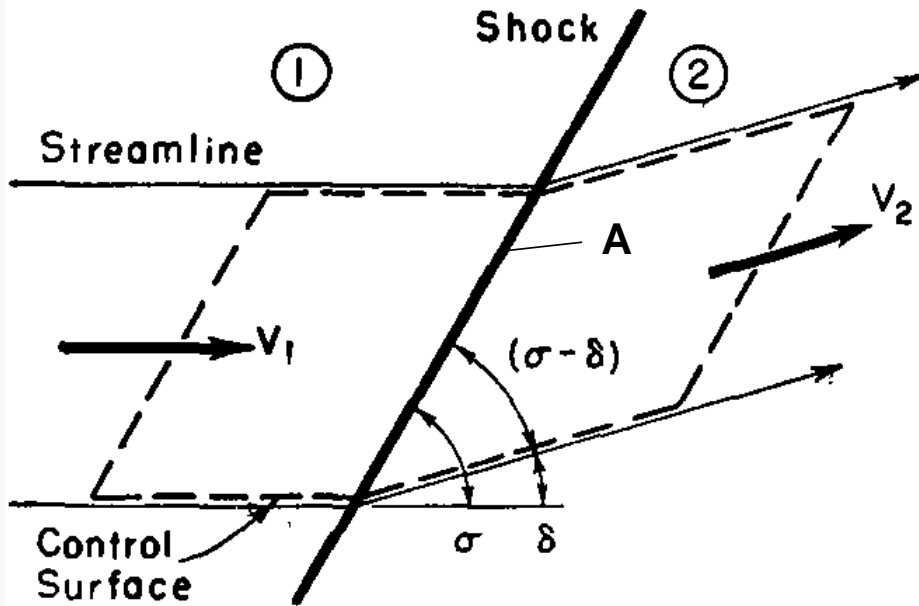
$$2 \tan \sigma (M_1^2 \sin^2 \sigma - 1) = \tan \delta [2 \tan^2 \sigma + \tan^2 \sigma (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \sigma + (\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \sigma]$$

$$\tan \delta = \frac{2}{\tan \sigma} \cdot \frac{M_1^2 \sin^2 \sigma - 1}{2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \sigma + (\gamma + 1) M_1^2 \frac{\sin^2 \sigma}{\tan^2 \sigma}} = \frac{2}{\tan \sigma} \cdot \frac{M_1^2 \sin^2 \sigma - 1}{2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \sigma + (\gamma + 1) M_1^2 \cos^2 \sigma} =$$

$$= \frac{2}{\tan \sigma} \cdot \frac{M_1^2 \sin^2 \sigma - 1}{2 + \gamma M_1^2 + M_1^2 \cos 2\sigma}$$

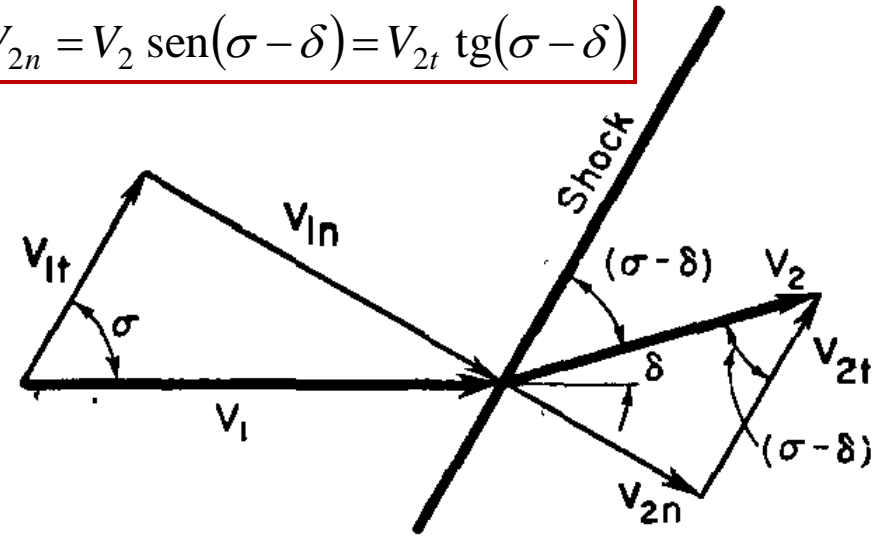


Onde d'urto oblique



$$V_{1n} = V_1 \sin \sigma = V_{1t} \operatorname{tg} \sigma$$

$$V_{2n} = V_2 \sin(\sigma - \delta) = V_{2t} \operatorname{tg}(\sigma - \delta)$$

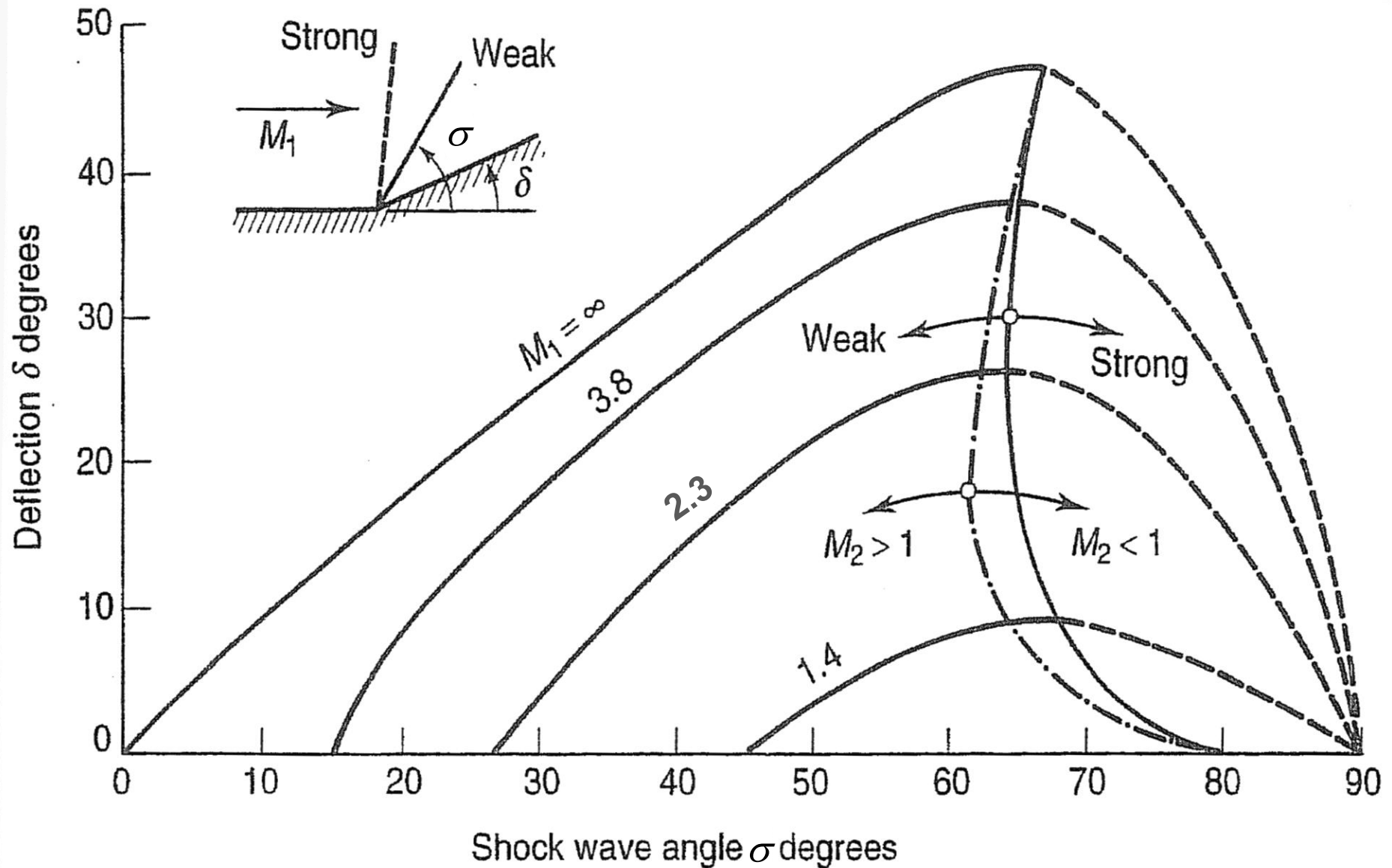


che permette di ottenere:

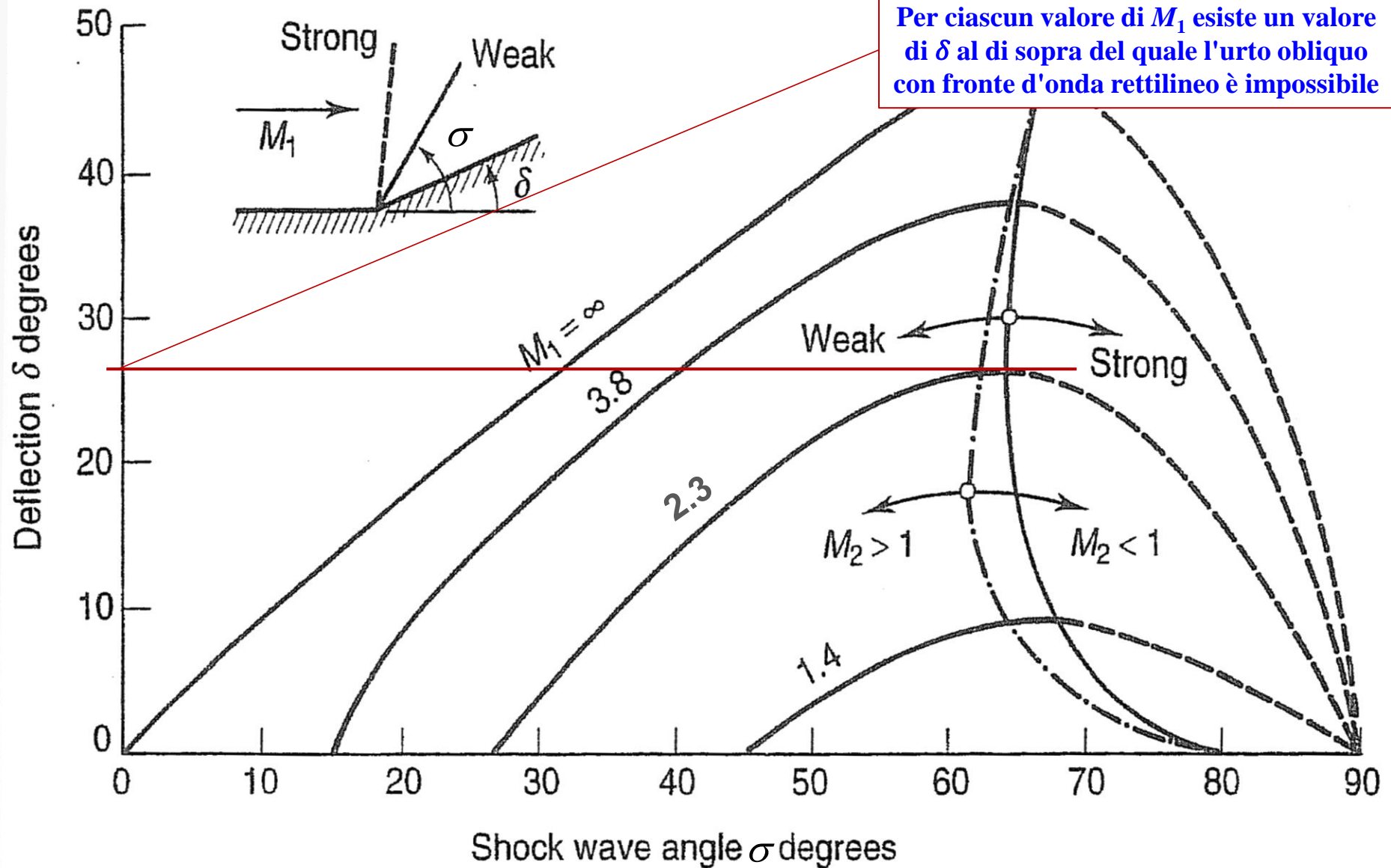
$$\delta = \operatorname{arctg} \left[\frac{2}{\operatorname{tg} \sigma} \cdot \frac{M_1^2 \sin^2 \sigma - 1}{2 + M_1^2 (\gamma + \cos 2\sigma)} \right] = F_\delta(M_1, \sigma)$$



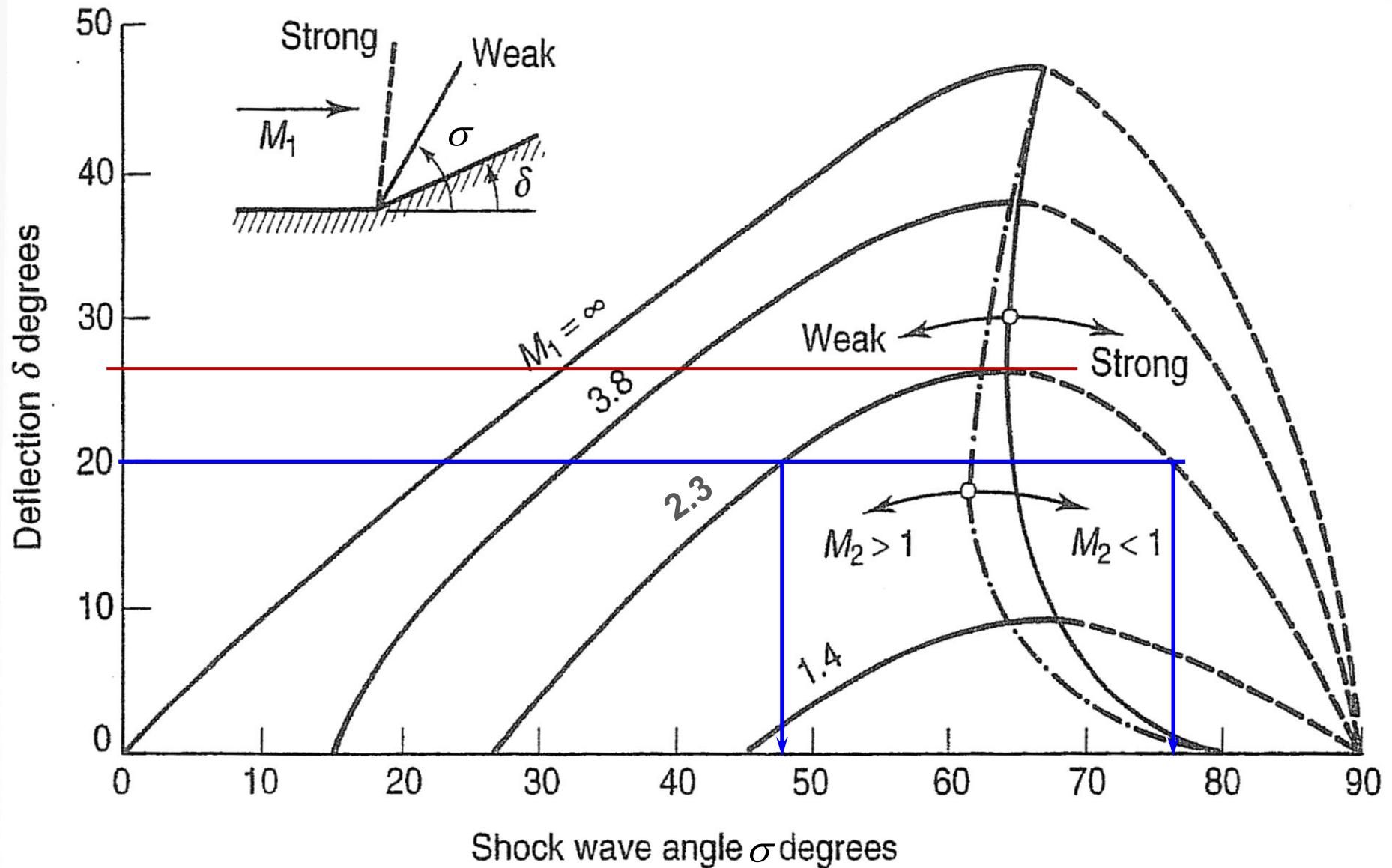
Onde d'urto oblique



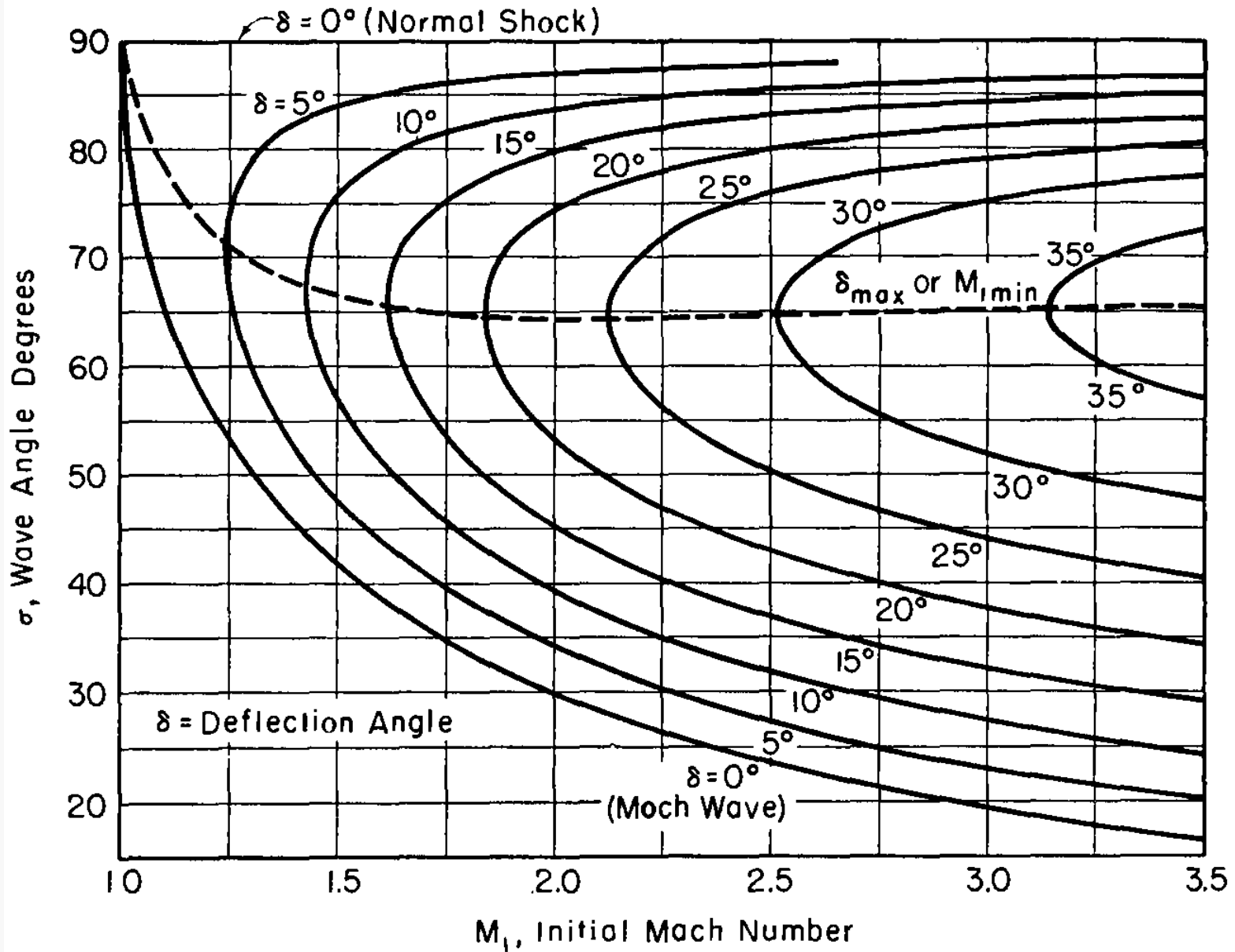
Onde d'urto oblique



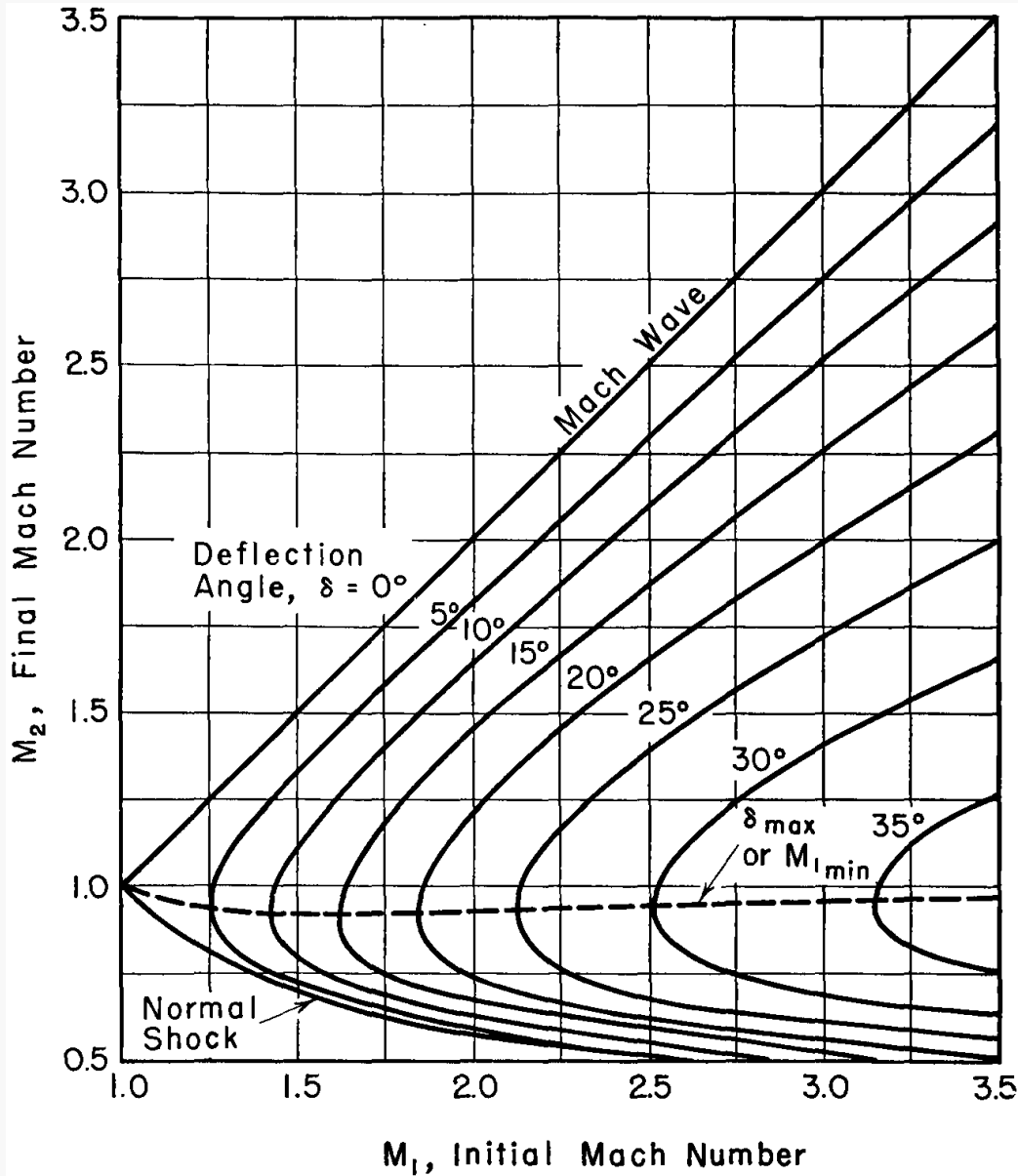
Onde d'urto oblique



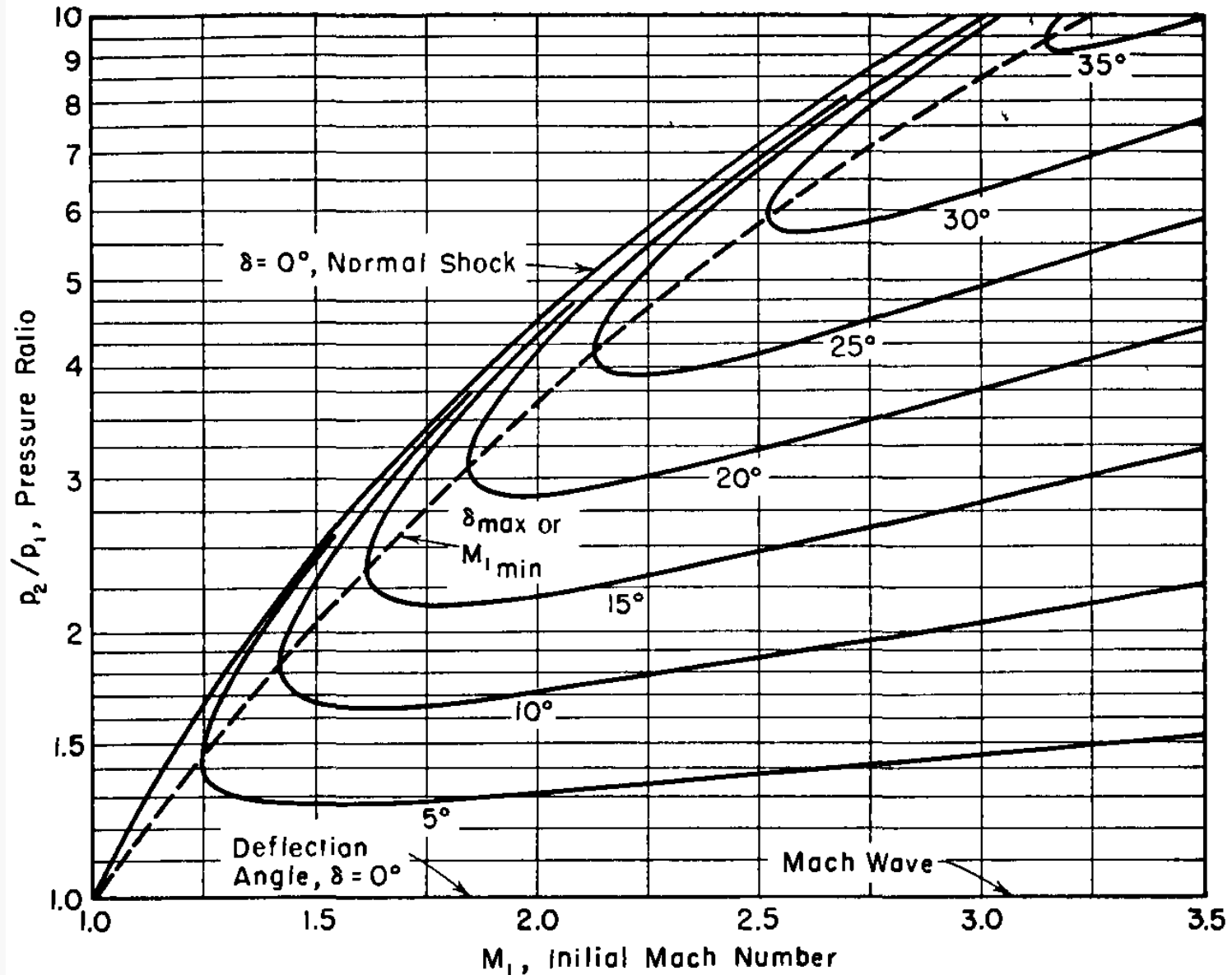
Onde d'urto oblique



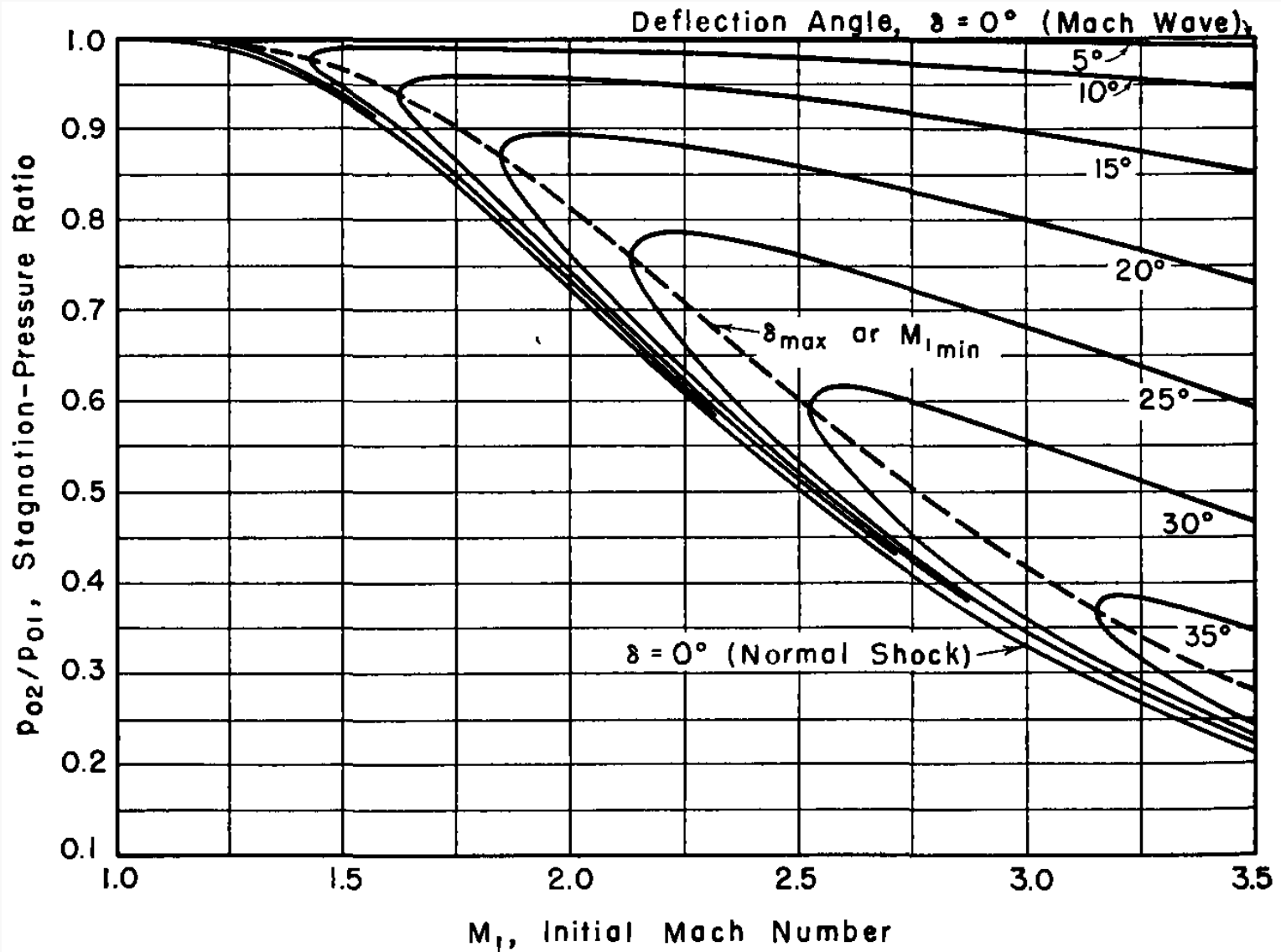
Onde d'urto oblique



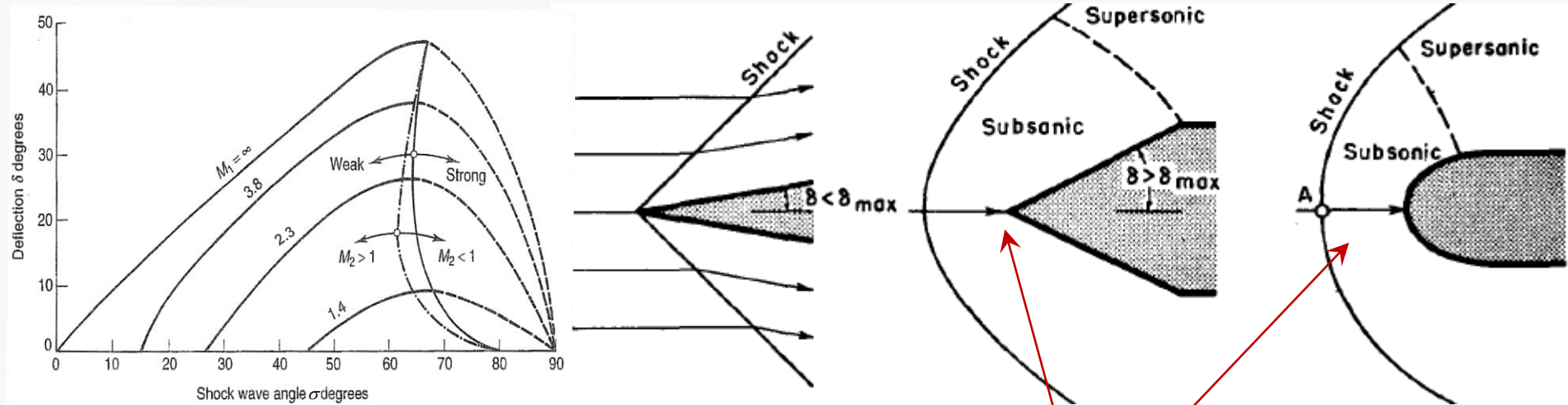
Onde d'urto oblique



Onde d'urto oblique



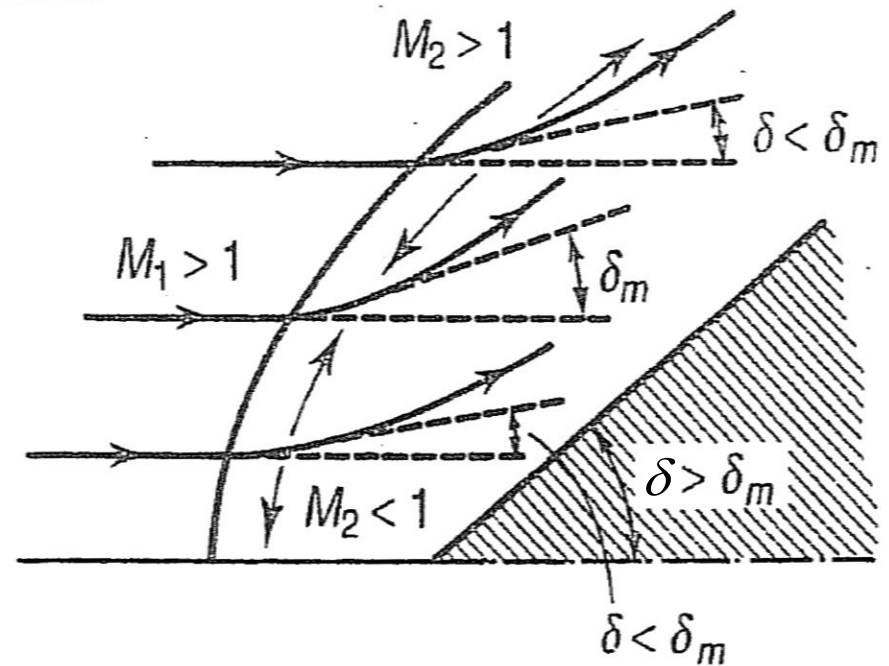
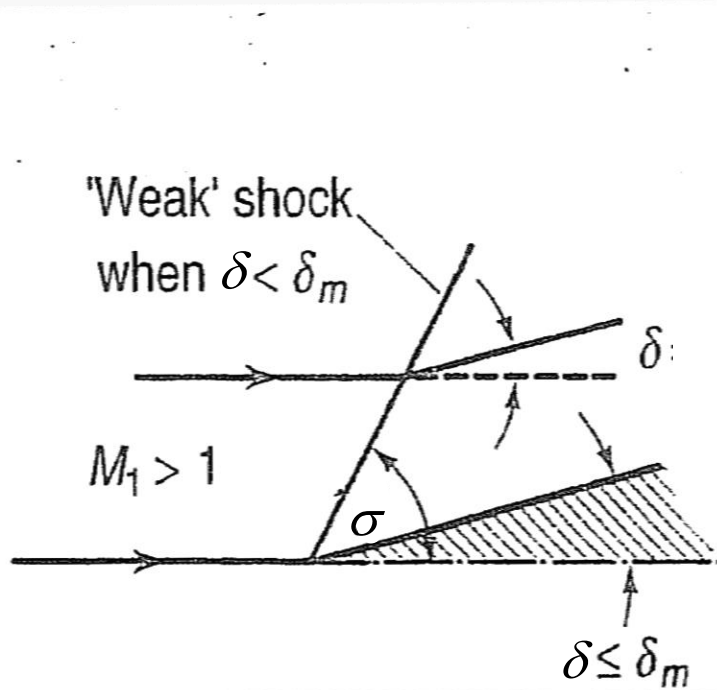
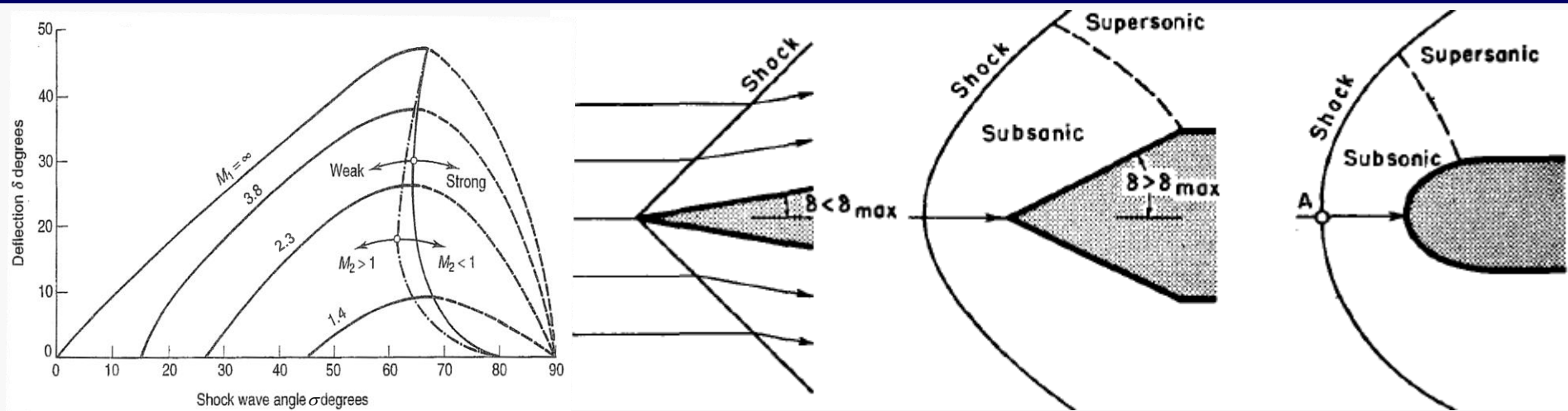
Onde d'urto oblique



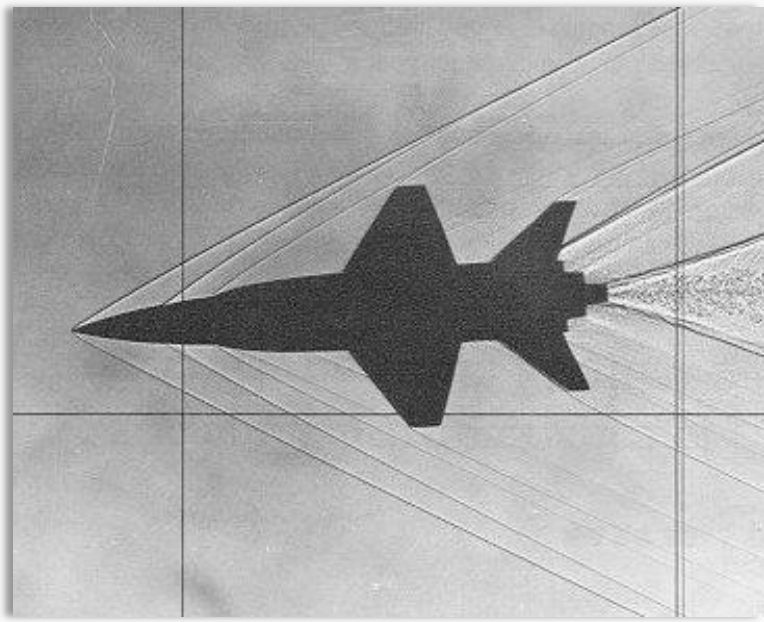
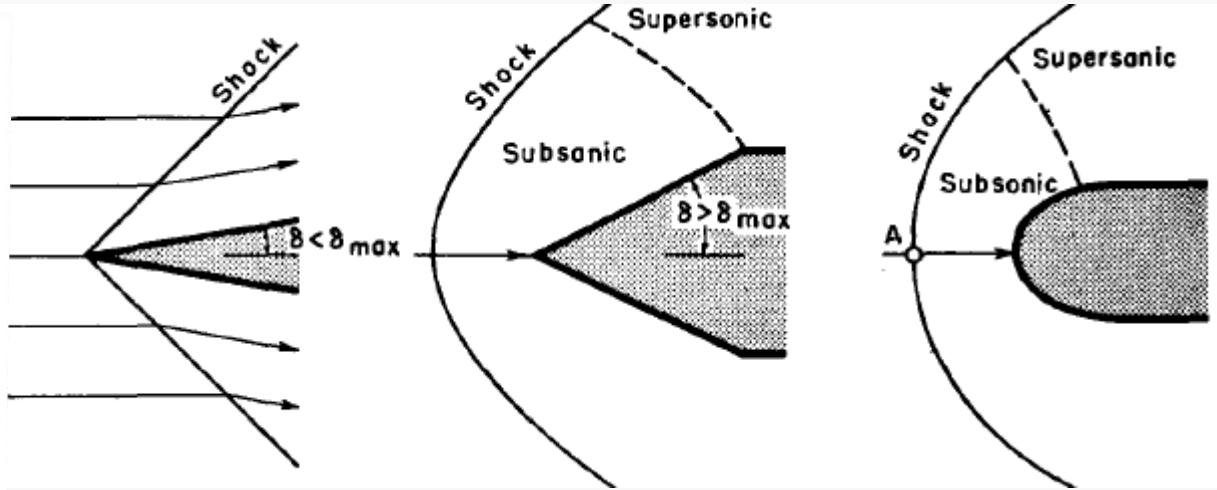
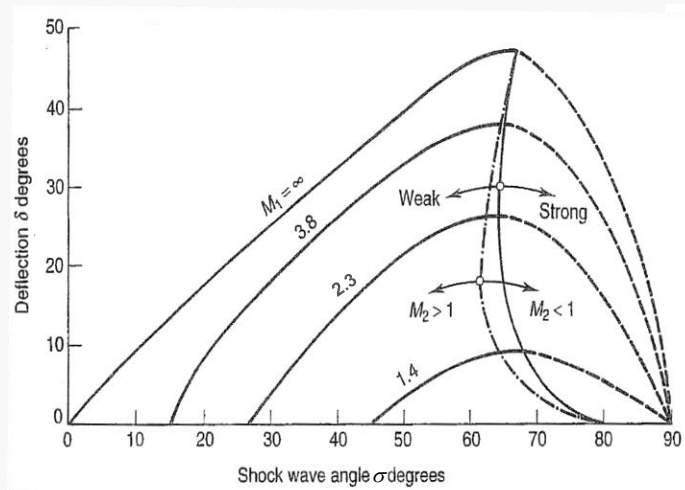
Nel caso di una corrente supersonica, per $\delta > \delta_{max}$, il disturbo (sonico) non è in grado di risalire la corrente (supersonica) al di là di una zona prossima al corpo, nella quale la corrente è fortemente rallentata e diventa subsonica.

L'urto obliquo con fronte d'onda rettilineo è impossibile e le onde di pressione continuamente generate si consolidano su una superficie, che diviene una superficie di discontinuità

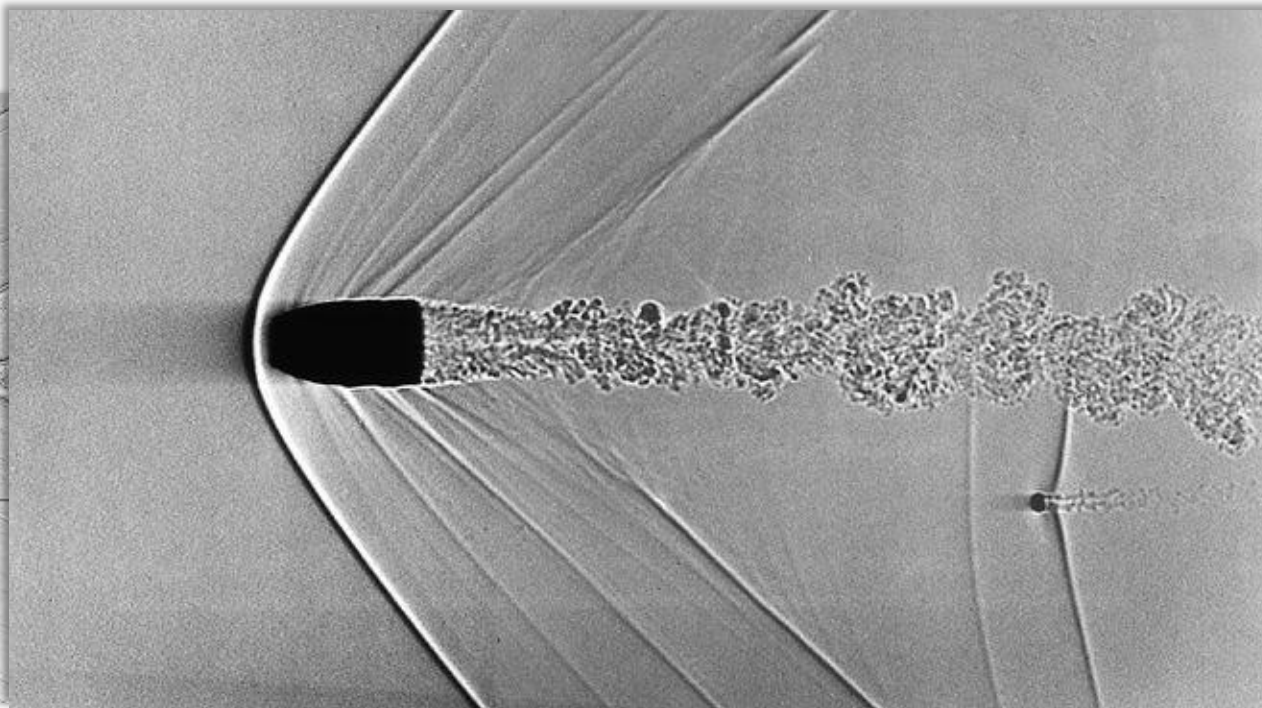
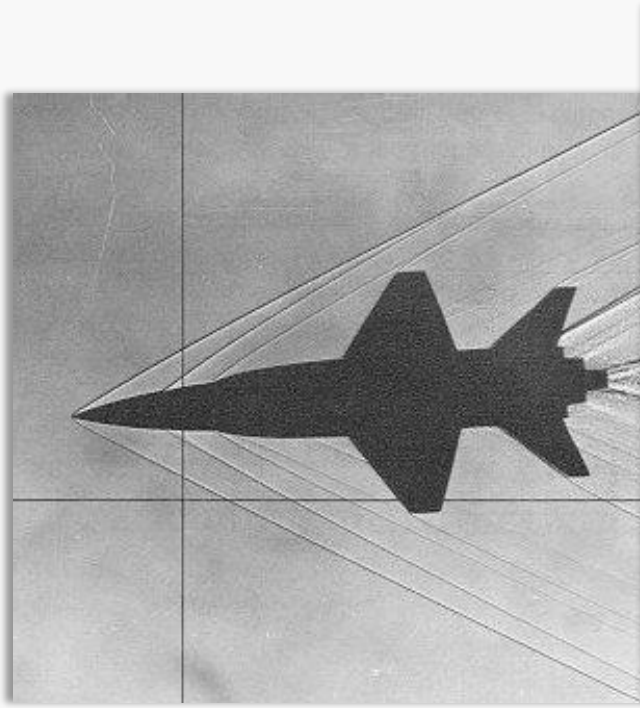
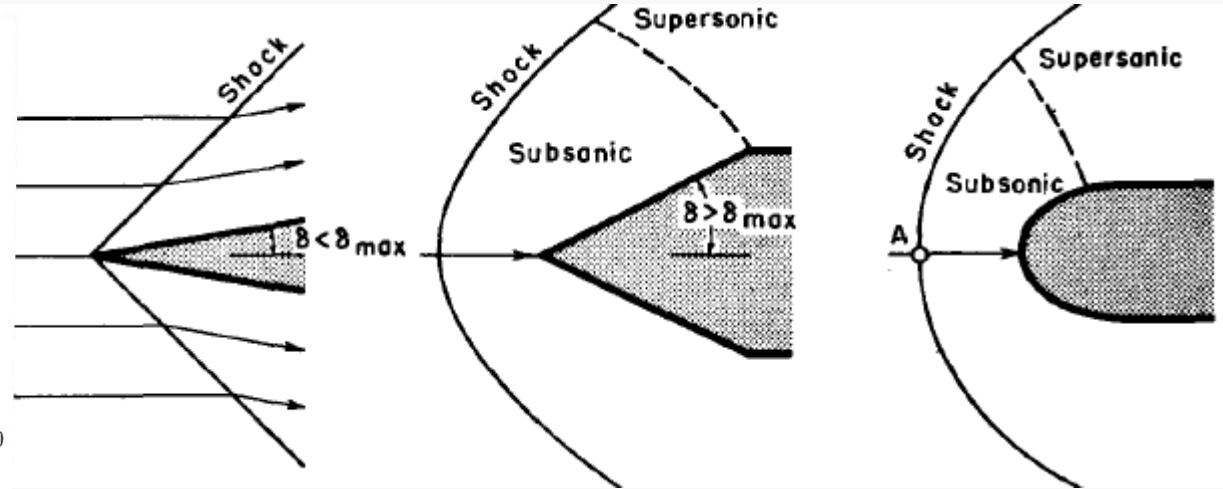
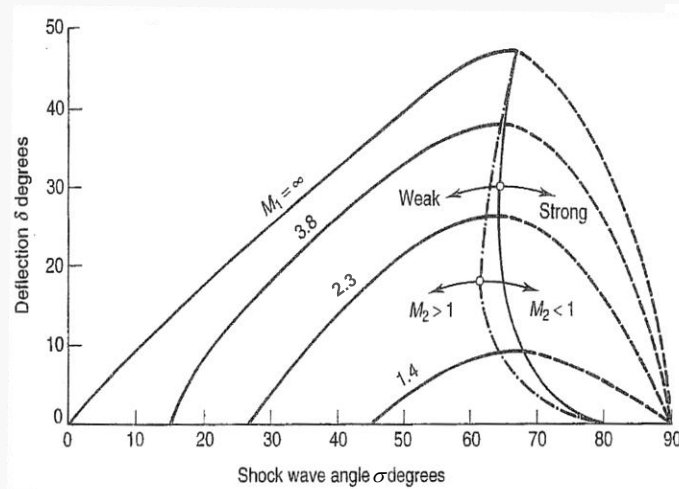
Onde d'urto oblique



Onde d'urto oblique



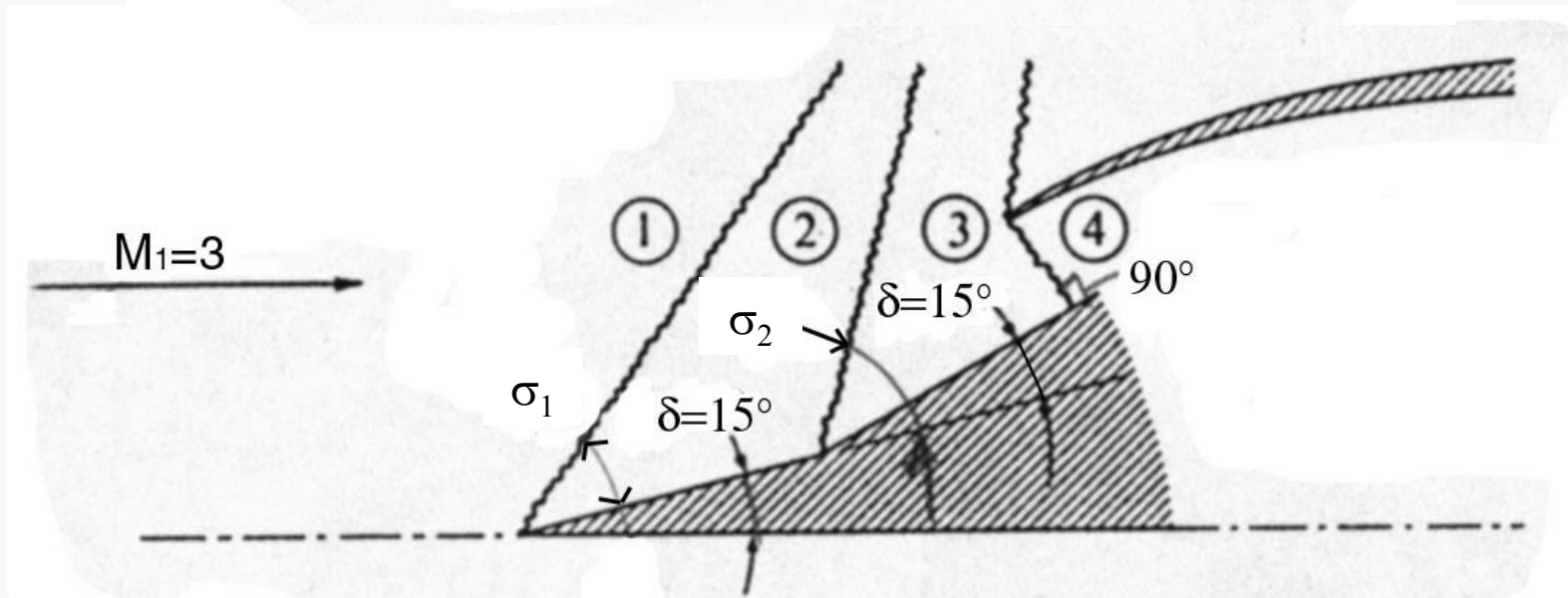
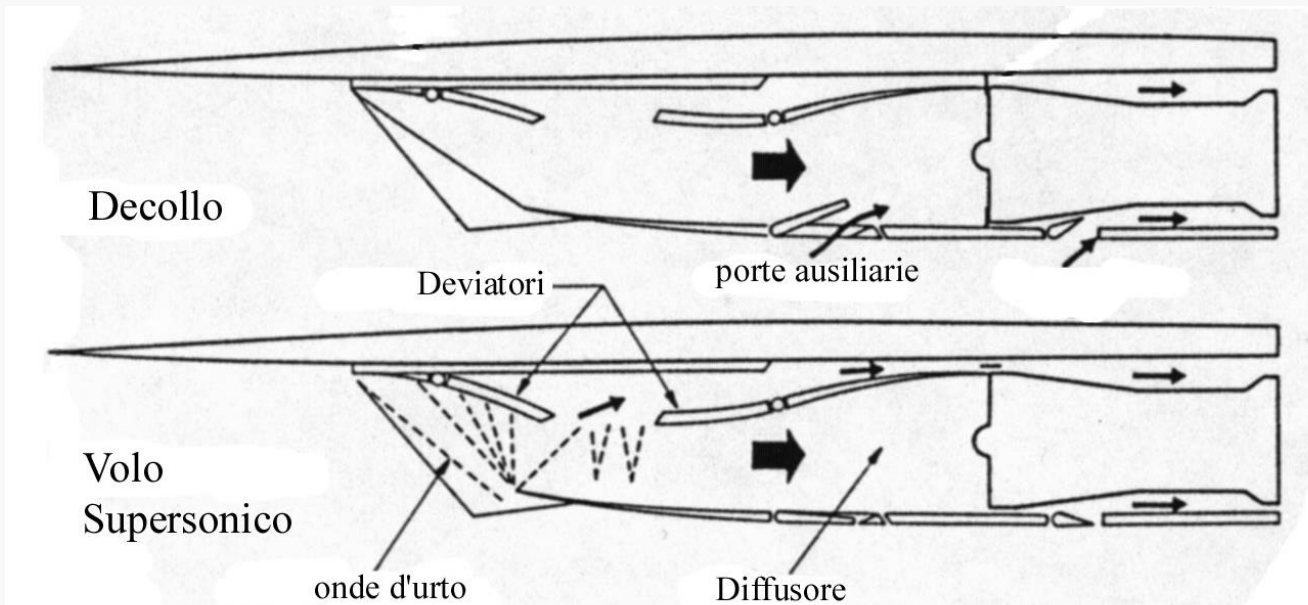
Onde d'urto oblique



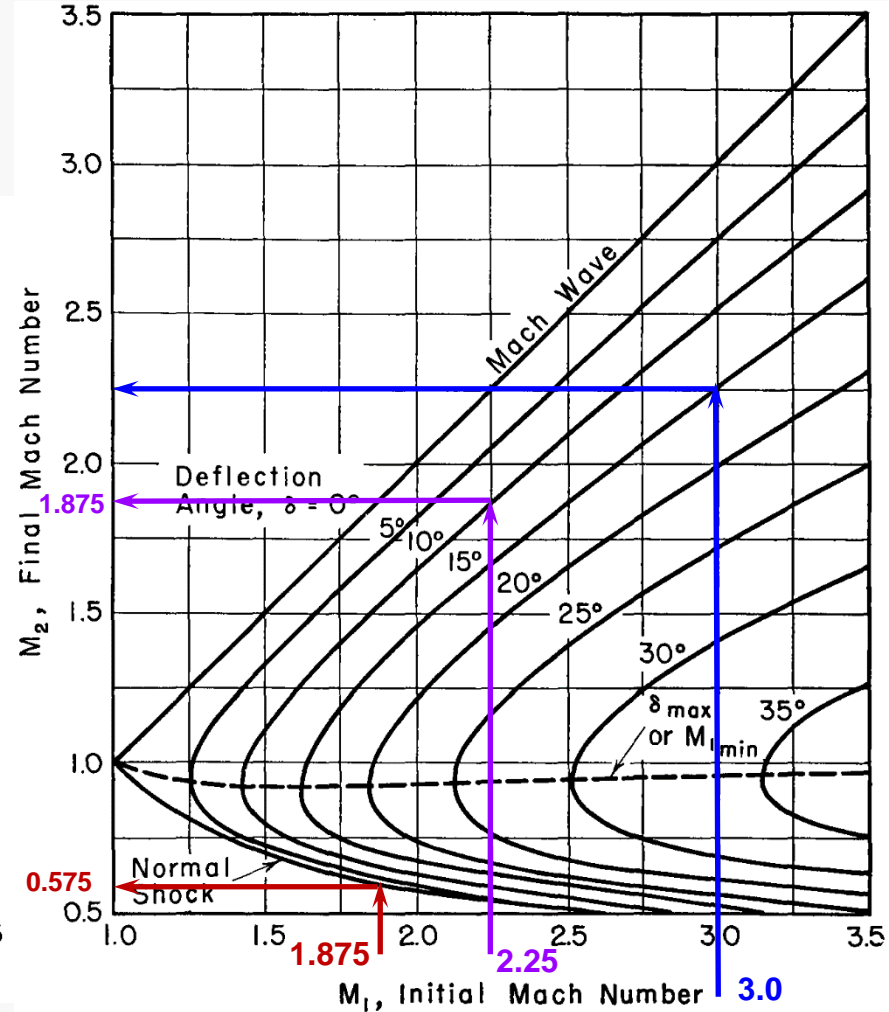
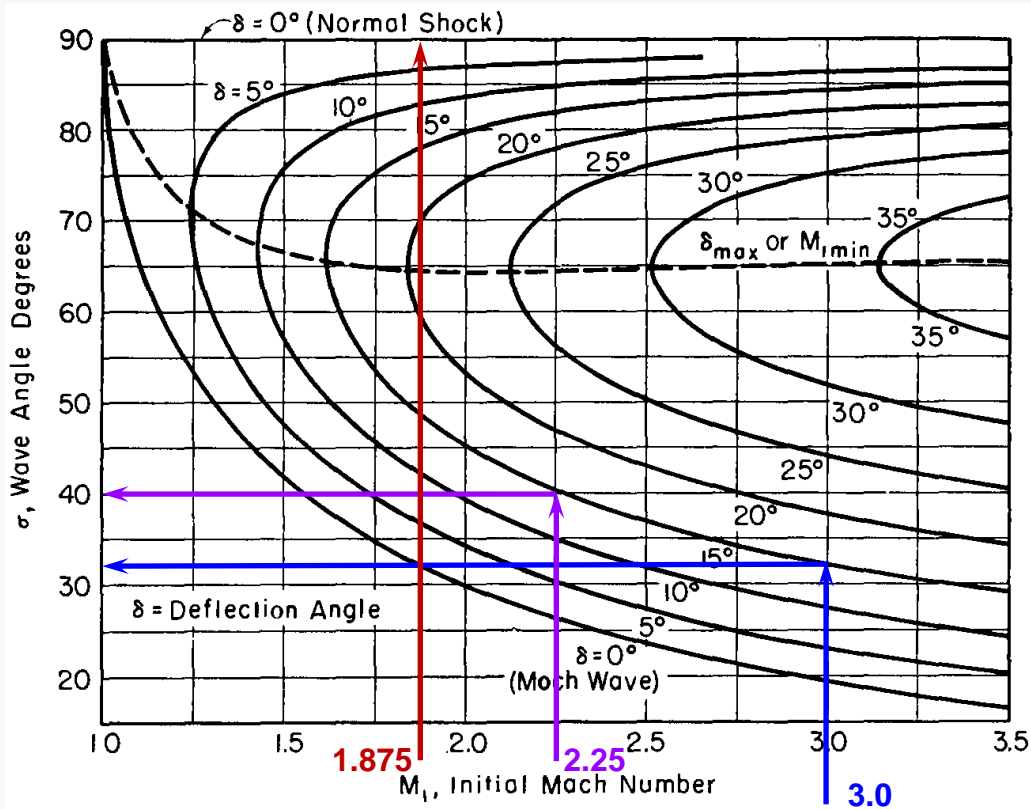
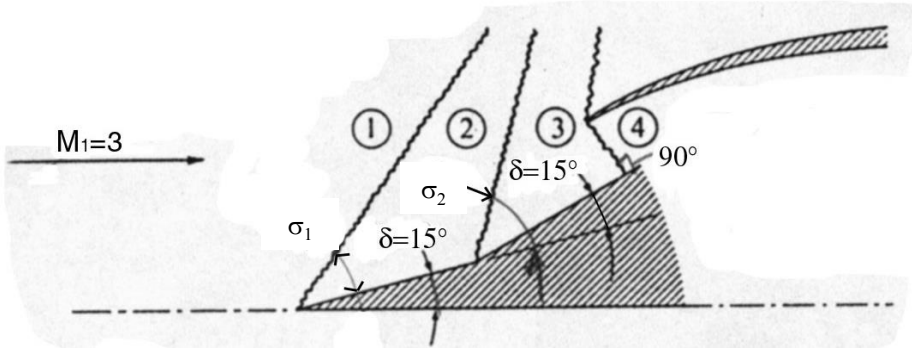
Onde d'urto oblique



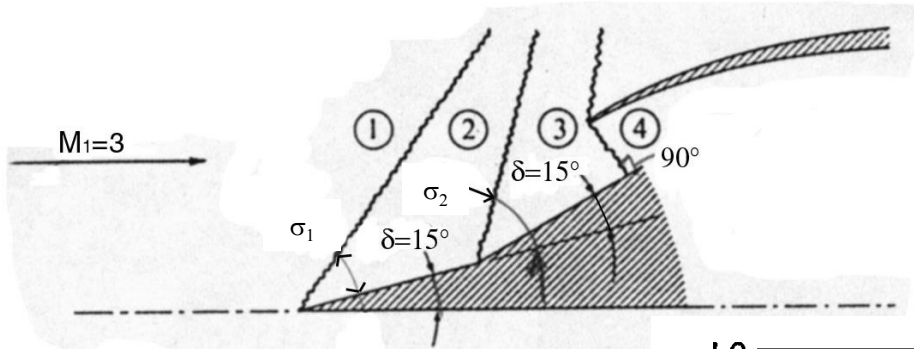
Prese d'aria supersoniche



Prese d'aria supersoniche

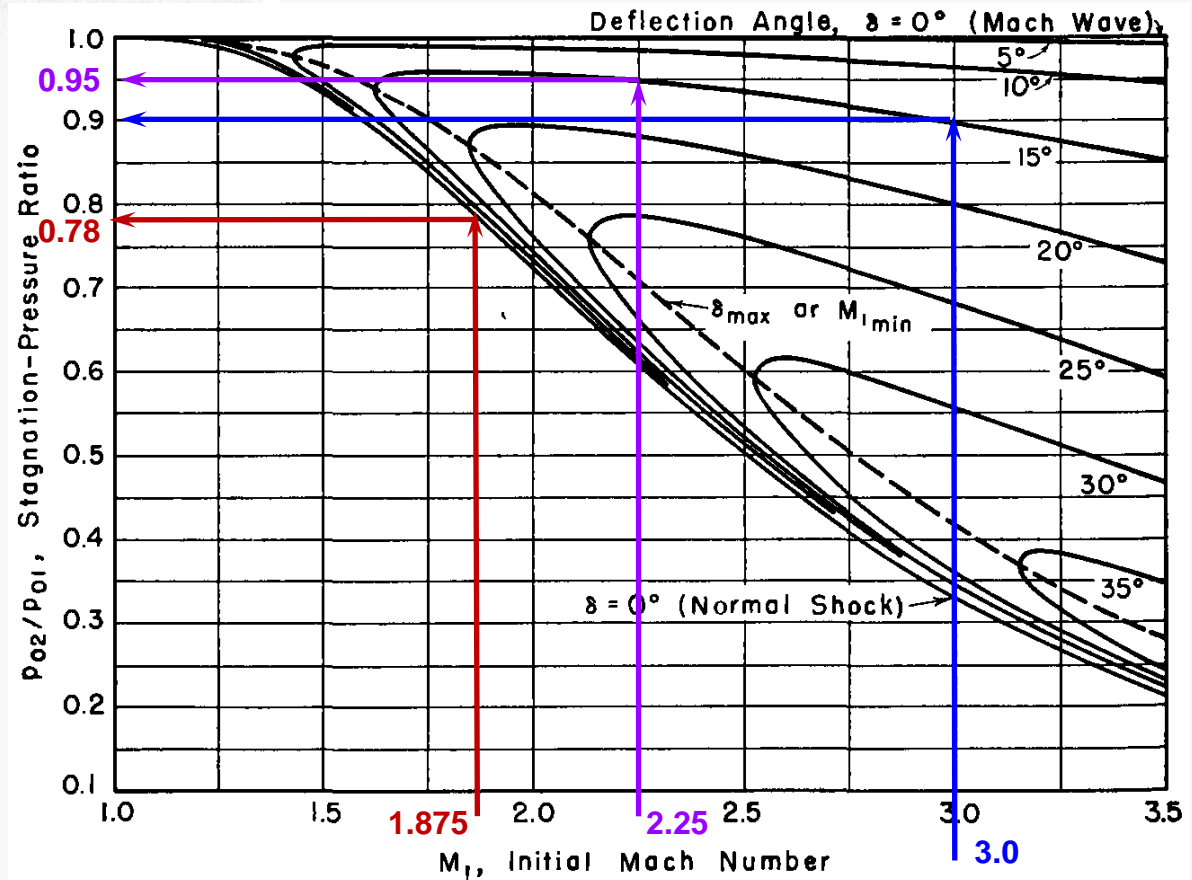


Prese d'aria supersoniche

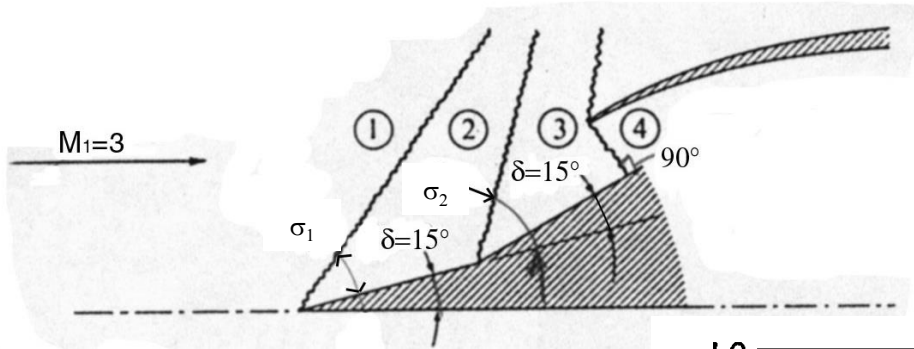


$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = 0.90; \frac{P_{03}}{P_{02}} = 0.95; \frac{P_{04}}{P_{03}} = 0.78$$

$$\frac{P_{04}}{P_{01}} = \frac{P_{02}}{P_{01}} \times \frac{P_{03}}{P_{02}} \times \frac{P_{04}}{P_{03}} = 0.90 \times 0.95 \times 0.78 = 0.667$$



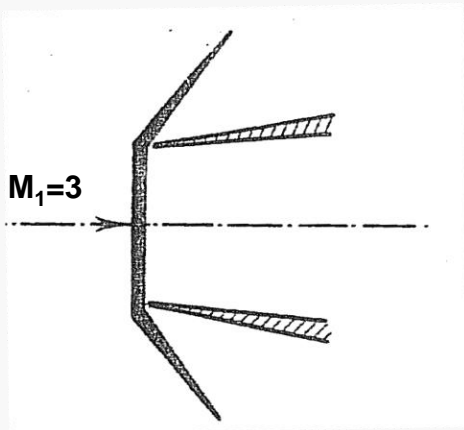
Prese d'aria supersoniche



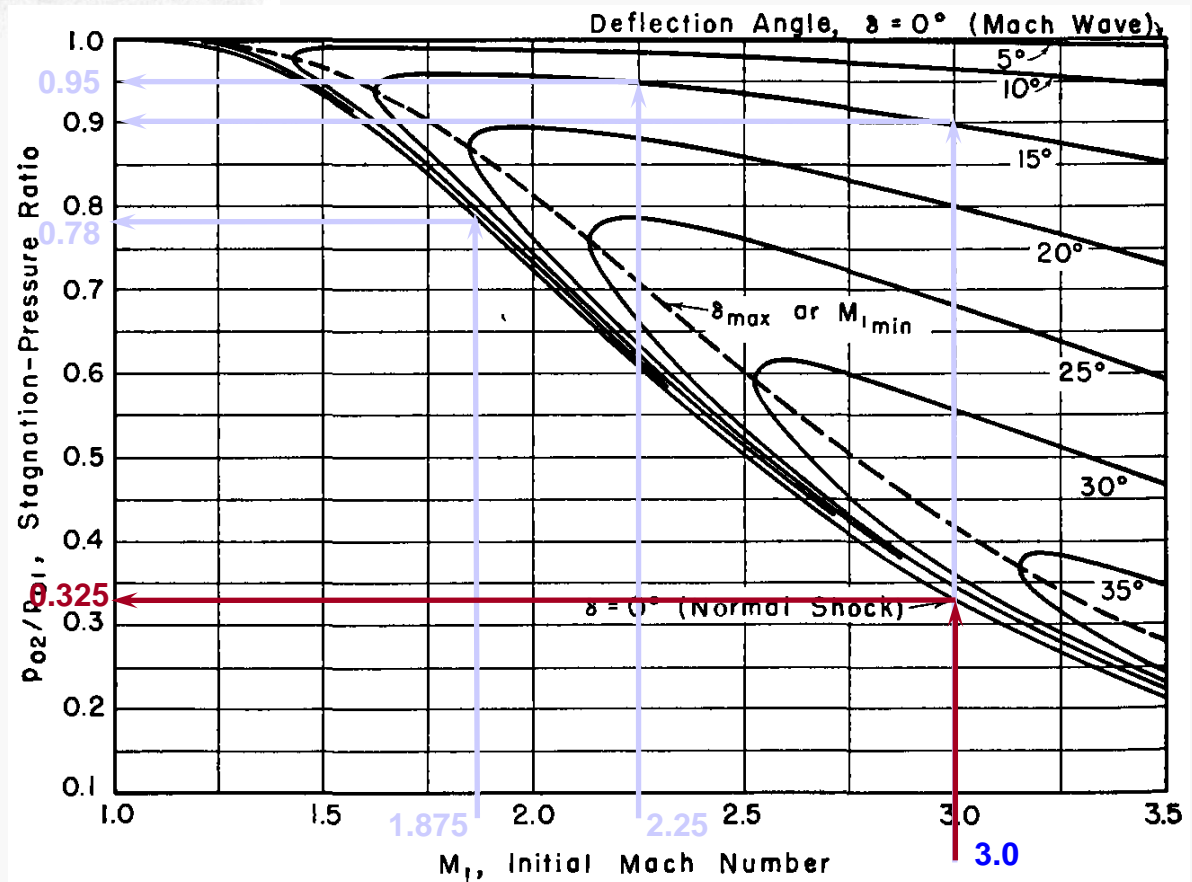
$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = 0.90; \frac{P_{03}}{P_{02}} = 0.95; \frac{P_{04}}{P_{03}} = 0.78$$

$$\frac{P_{04}}{P_{01}} = \frac{P_{02}}{P_{01}} \times \frac{P_{03}}{P_{02}} \times \frac{P_{04}}{P_{03}} = 0.90 \times 0.95 \times 0.78 = 0.667$$

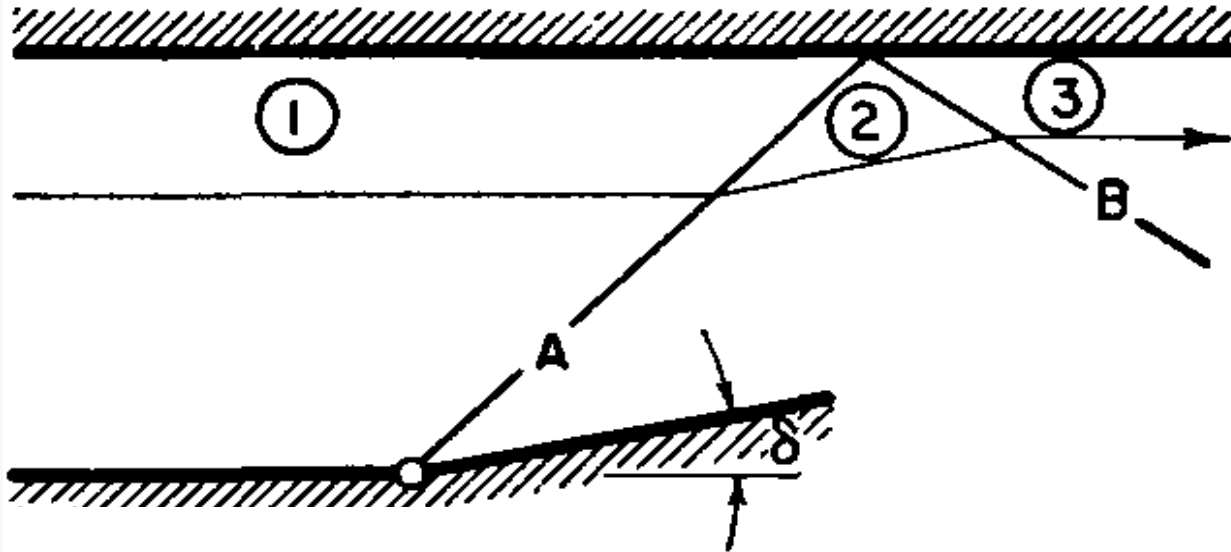
Nel caso di sola onda d'urto normale con $M_1 = 3$:



$$\frac{P_{02}}{P_{01}} \approx 0.325$$

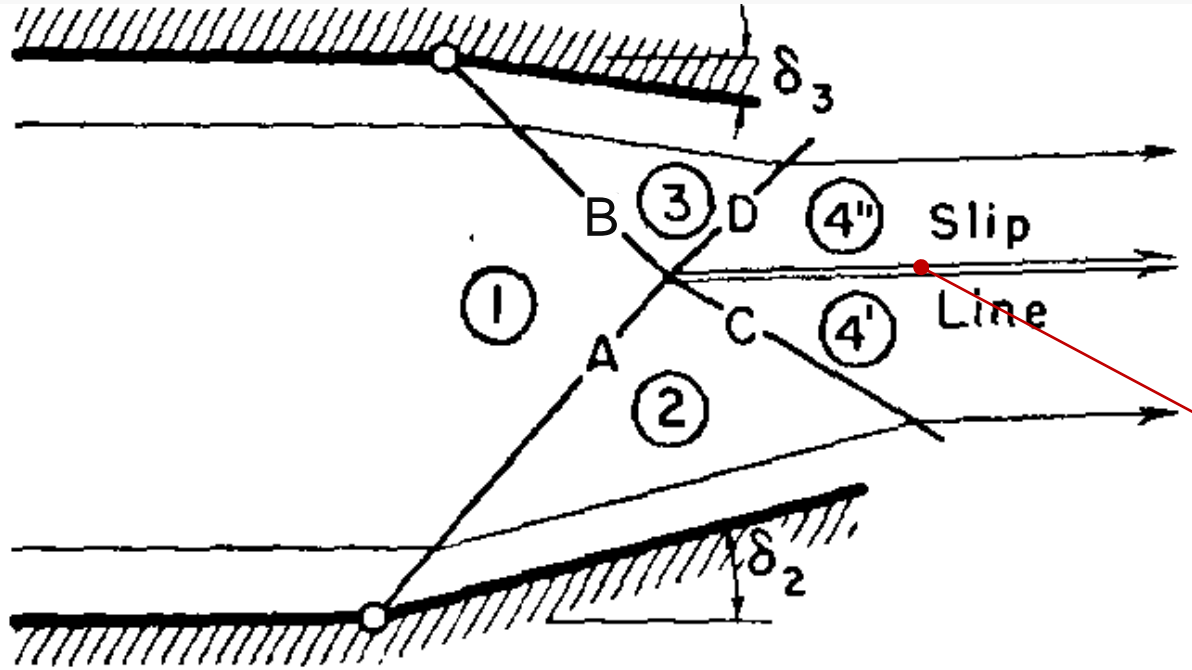


Riflessioni e interazioni di onde d'urto



- L'onda d'urto obliqua *diretta* **A** devia il flusso supersonico di un angolo δ
- Nel caso usuale in cui il flusso nella regione (2) sia ancora supersonico, si genera un'onda d'urto *riflessa* **B** che deve deviare il flusso dello stesso angolo δ
- Lo stato fisico del fluido e il numero di Mach nelle regioni (2) e (3) sono determinati a partire dallo stato fisico del fluido e dal numero di Mach rispettivamente nelle regioni (1) e (2)

Riflessioni e interazioni di onde d'urto



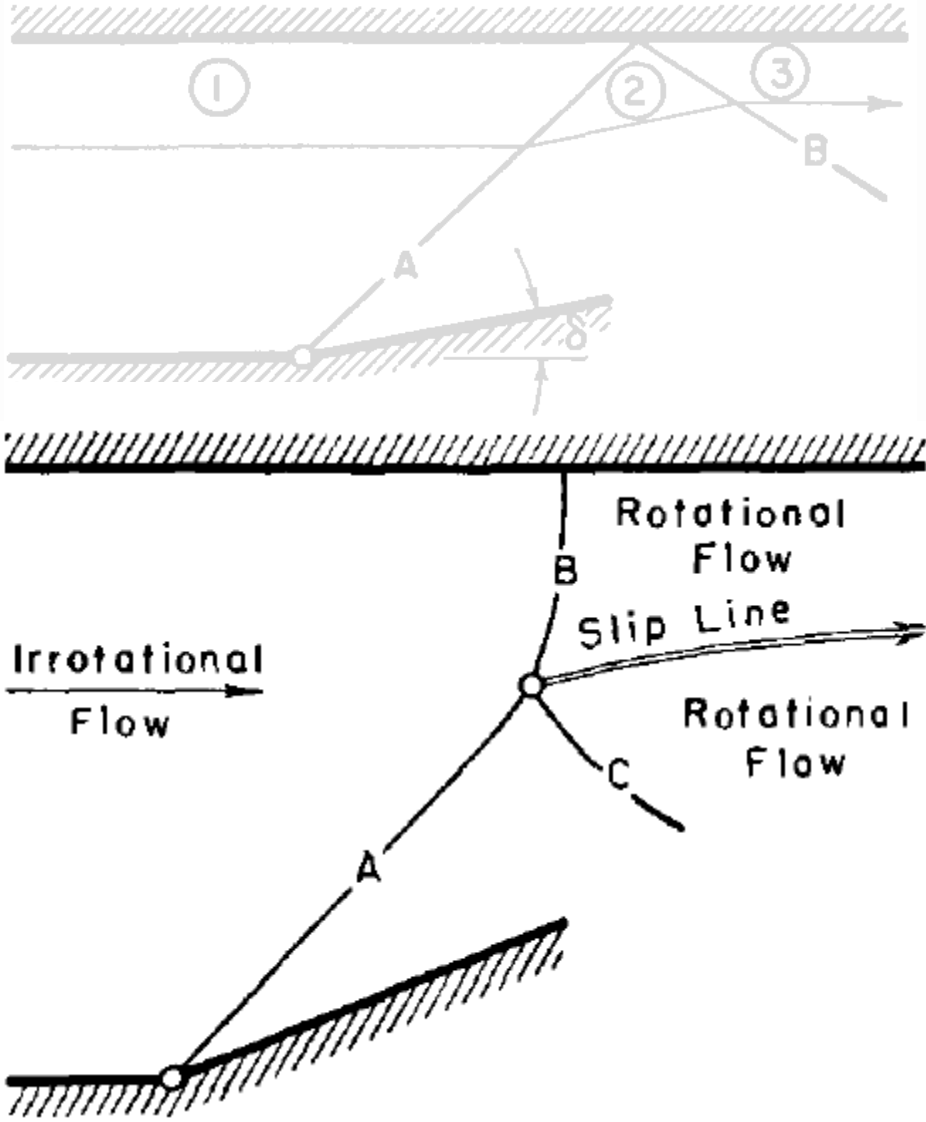
- Le onde d'urto **A** e **B** si incontrano in un punto, dando origine alle onde d'urto **D** e **C**

Le due linee di corrente adiacenti, che passano da parti opposte rispetto al punto di giunzione di **A** e **B**, sono generate:

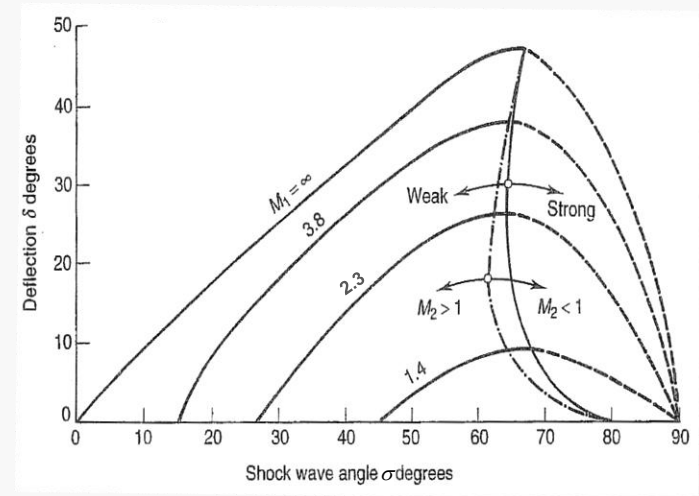
- nella regione (4') dalle onde d'urto **A** e **C**
- nella regione (4'') dalle onde d'urto **B** e **D**

- **Il flusso nelle regioni (4') e (4'') deve avere stessa pressione e stessa direzione**, anche se, essendo diverse le variazioni di entropia subite nel passaggio attraverso le onde d'urto, **saranno diversi i moduli delle velocità**
- **Nel punto di giunzione si genera una superficie di discontinuità costituita da una regione molto sottile di vortici concentrati (*vortex sheet*), la cui traccia sul piano è la "*linea di scorrimento*" (*slip line*)**

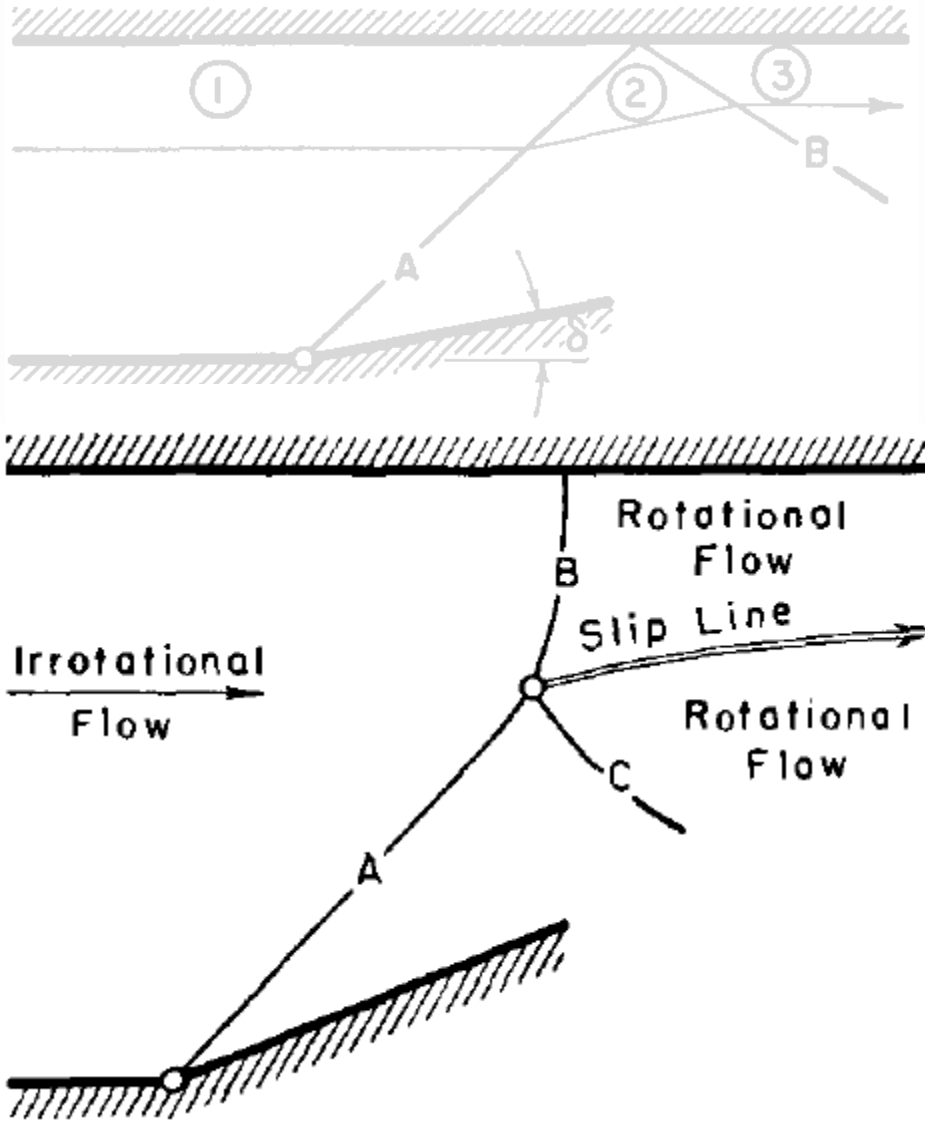
Riflessioni e interazioni di onde d'urto



- Nel caso in cui M_1 sia abbastanza piccolo e sia elevata la deviazione richiesta per rendere il flusso parallelo alla parete superiore ($\delta > \delta_{\max}$), si genera la *riflessione di Mach*, cioè l'onda incidente si incurva in prossimità della parete superiore originando un'onda d'urto normale

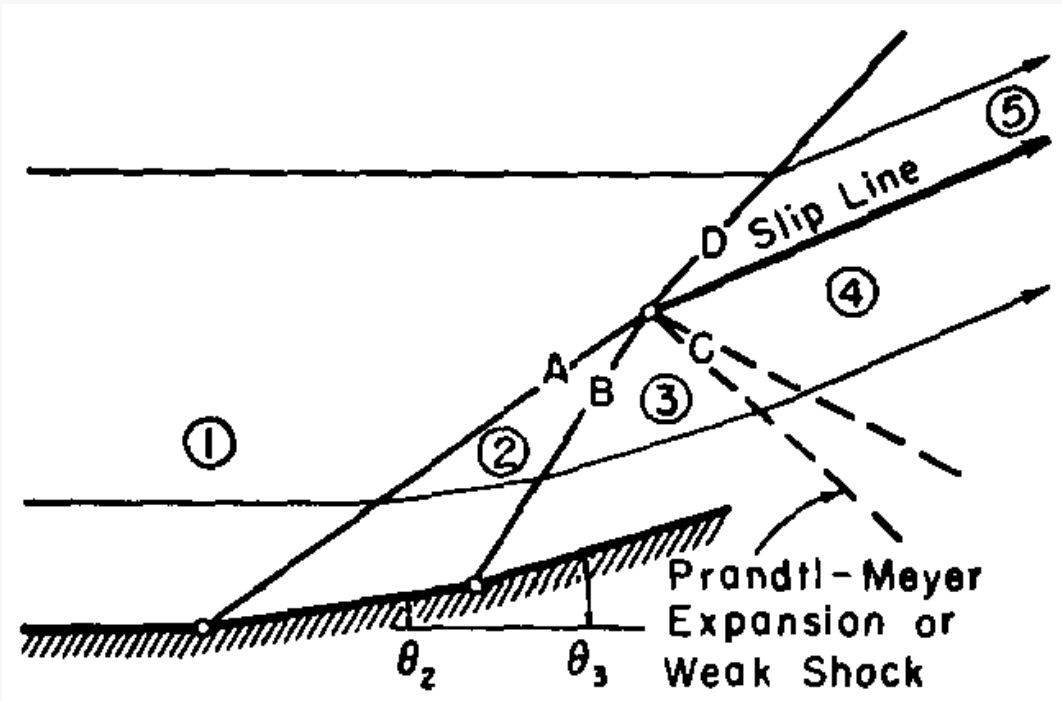


Riflessioni e interazioni di onde d'urto



- Nel caso in cui M_1 sia abbastanza piccolo e sia elevata la deviazione richiesta per rendere il flusso parallelo alla parete superiore ($\delta > \delta_{\max}$), si genera la *riflessione di Mach*, cioè l'onda incidente si incurva in prossimità della parete superiore originando un'onda d'urto normale
- Dall'incontro delle onde d'urto **A** e **B** si origina l'onda d'urto **C**; le onde d'urto **A**, **B** e **C** non risultano essere rettilinee in prossimità del punto di giunzione
- Nel punto di giunzione si genera una "*slip line*" e il flusso a valle delle onde d'urto **A**, **B** e **C** risulta rotazionale a causa della curvatura delle onde d'urto

Riflessioni e interazioni di onde d'urto



- Nel caso siano presenti due spigoli consecutivi le onde d'urto oblique **A** e **B**, originatesi nei due spigoli, si incontrano in un punto generando un'onda d'urto più forte **D**; l'inclinazione delle onde d'urto **A** e **B** è imposta dai valori di θ_2 , θ_3 e M_1

- Il flusso nelle regioni (4) e (5) dovrà avere stessa pressione e stessa direzione, ma con diverso modulo delle velocità (nel punto di giunzione si genererà una "slip line")
- Affinché tali condizioni siano verificate è necessario supporre che si generino dal punto di giunzione delle onde, che possono essere sia onde di espansione, sia onde d'urto deboli