

# Dispensa del corso di “FLUIDODINAMICA DELLE MACCHINE”

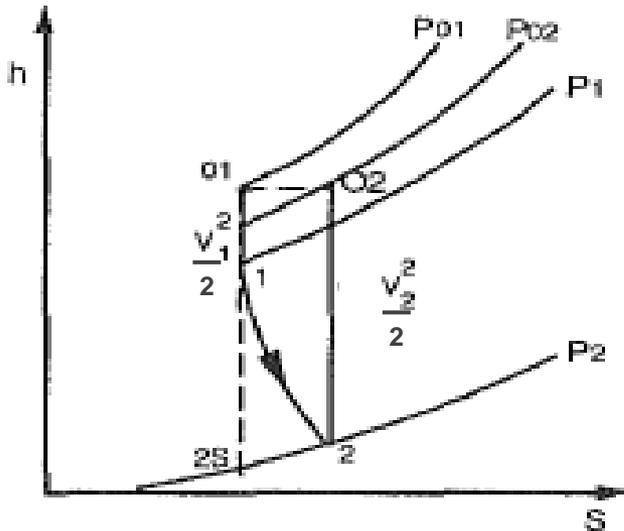
Argomento: Meccanismi di perdita

**Prof. Pier Ruggero Spina**  
Dipartimento di Ingegneria



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI FERRARA  
- EX LABORE FRUCTUS -

# Coefficienti di perdita

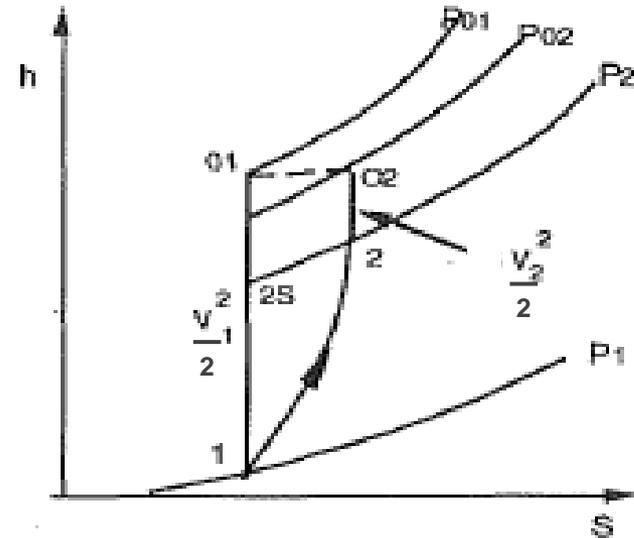


## Espansione

$$Y = \frac{p_{01} - p_{02}}{p_{02} - p_2}$$

$$\xi = \frac{h_2 - h_{2s}}{h_{02} - h_2} = \frac{h_2 - h_{2s}}{V_2^2/2}$$

$$\xi_s = \frac{T_2 \Delta s}{h_{02} - h_2} = \frac{T_2 (s_2 - s_1)}{V_2^2/2} \cong \xi$$



## Compressione

$$Y = \frac{p_{01} - p_{02}}{p_{01} - p_1}$$

$$\xi = \frac{h_2 - h_{2s}}{h_{01} - h_1} = \frac{h_2 - h_{2s}}{V_1^2/2}$$

$$\xi_s = \frac{T_2 \Delta s}{h_{01} - h_1} = \frac{T_2 (s_2 - s_1)}{V_1^2/2} \cong \xi$$



# Variazione di entropia

$$ds = \frac{\delta(q_{rev} + q_{irrev})}{T} = \frac{du + pdv}{T} = \frac{dh - vdp}{T}$$

Per un gas perfetto

$$ds = \frac{c_p dT - RT \frac{dp}{p}}{T} = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

Integrando tra 01 e 02 nell'ipotesi  $c_p = \text{cost.}$ , ed essendo  $T_{01} = T_{02}$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_{02}}{p_{01}}$$



# Variazione di entropia

Per piccole variazioni della pressione totale, approssimando con il primo termine dello sviluppo in serie di Taylor a partire da  $p_{02}$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_{02}}{p_{01}} \cong -R \ln \frac{p_{02}}{p_{02}} + \frac{R}{p_{02}} (p_{01} - p_{02}) = R \frac{p_{01} - p_{02}}{p_{02}}$$

⇓

$$T_{02} \Delta s \cong \frac{p_{01} - p_{02}}{\rho_{02}}$$



# Coefficienti di perdita

Nell'ipotesi di poter trascurare la comprimibilità del fluido

Espansione

$$Y = \frac{p_{01} - p_{02}}{\rho V_2^2 / 2}$$

Compressione

$$Y = \frac{p_{01} - p_{02}}{\rho V_1^2 / 2}$$

$$\xi_s = \frac{T_2 (s_2 - s_1)}{V_2^2 / 2} \cong \frac{p_{01} - p_{02}}{\rho V_2^2 / 2}$$

$$\xi_s = \frac{T_2 (s_2 - s_1)}{V_1^2 / 2} \cong \frac{p_{01} - p_{02}}{\rho V_1^2 / 2}$$



$$Y \cong \xi_s$$

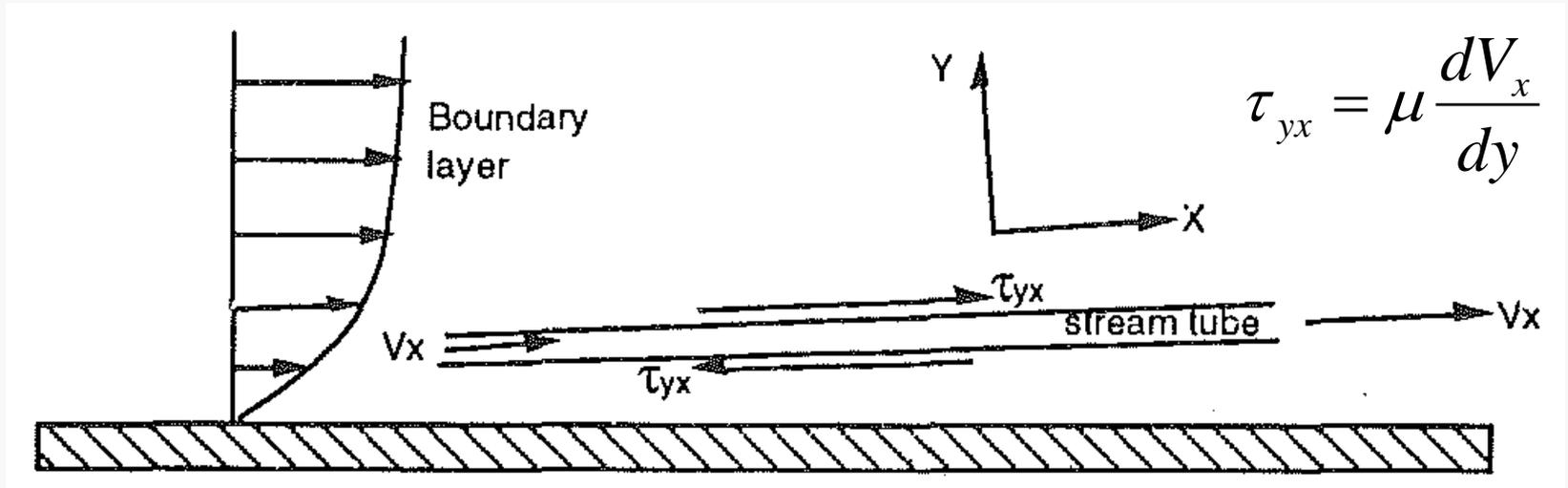


# Meccanismi di generazione dell'entropia

- Attrito viscoso, sia nello *strato limite*, sia in regioni caratterizzate da gradienti di velocità significativi (quali ad esempio regioni di miscelazione di flussi)
- Processi in condizioni di non-equilibrio, come quelli che avvengono a seguito di rapide espansioni o nelle onde d'urto
- Scambio di calore con differenze di temperatura finite

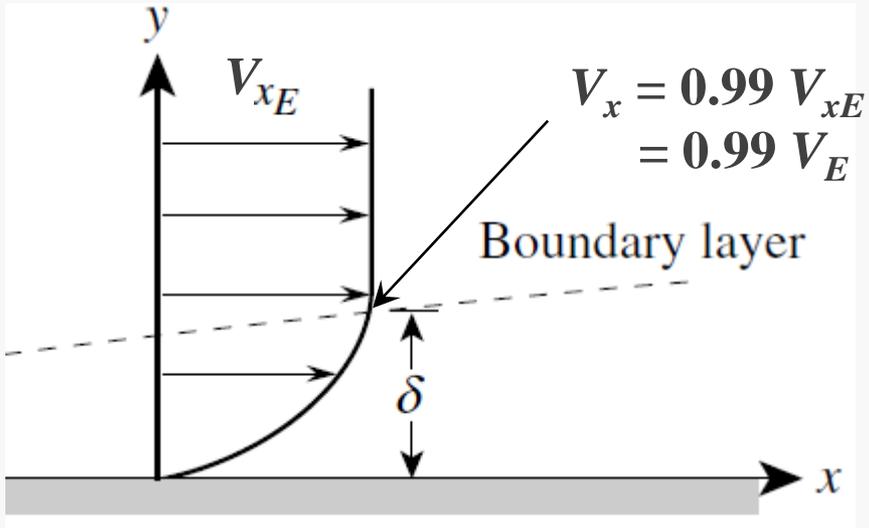


# Strato limite



Allontanandosi dalla parete  $dV_x/dy$  si riduce, così che, ad una certa distanza dalla parete, è possibile trascurare gli effetti della viscosità

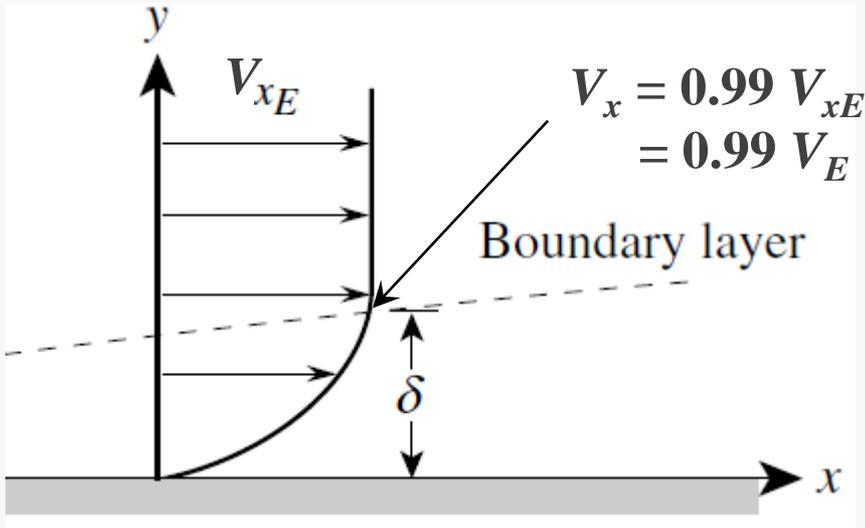
# Strato limite



Lastra piana di  
lunghezza  $L$  (Blasius):

$$\delta(x) \cong 5 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho V_E}} = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{V_E}}$$

# Strato limite



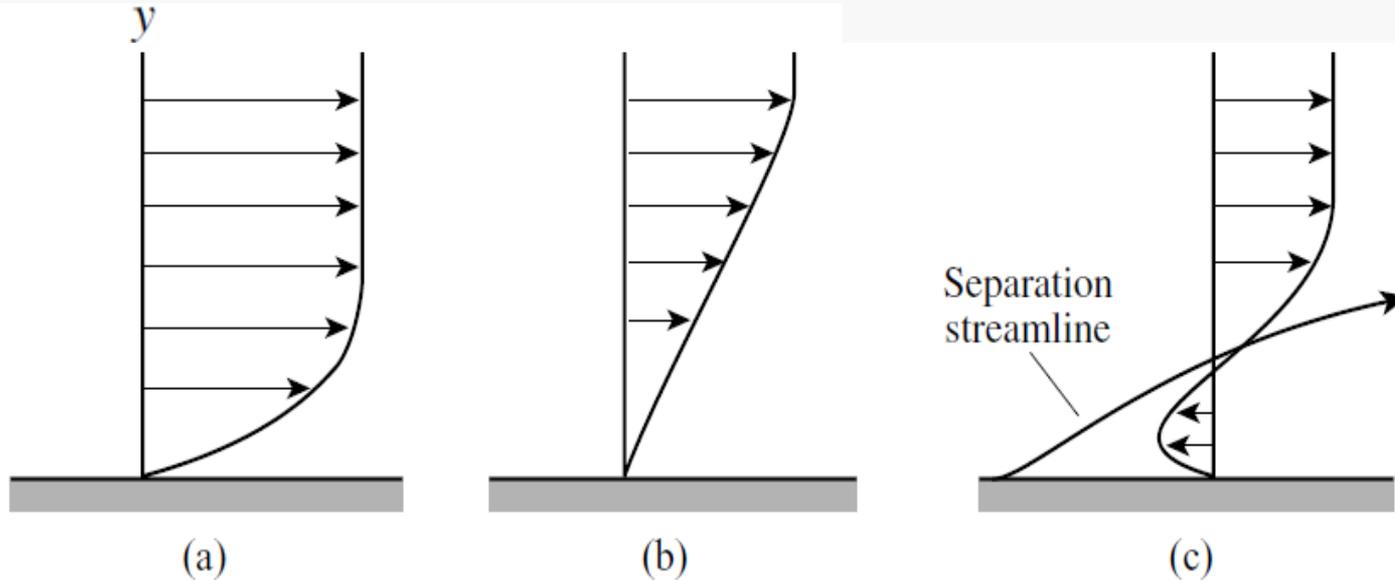
Lastra piana di  
lunghezza  $L$  (Blasius):

$$\delta(x) \cong 5 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho V_E}} = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{V_E}}$$

nella zona iniziale dello  
stato limite:

$$\frac{\delta}{L} \propto \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_L}}$$

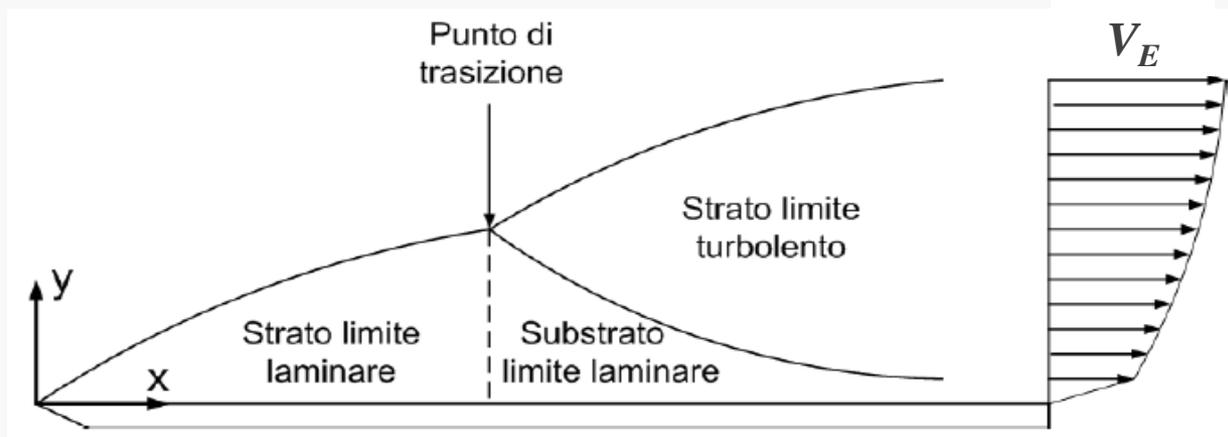
# Strato limite



Se il moto avviene con gradiente di pressione avverso, può accadere che le particelle di fluido più lente non abbiano energia sufficiente per avanzare, per cui si fermano (b) o invertono il moto (c)

# Strato limite

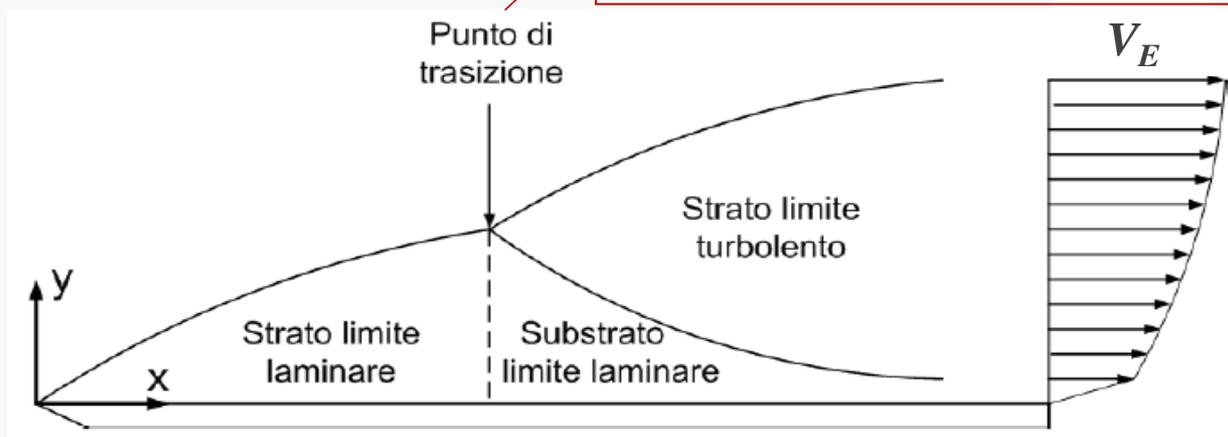
- Al crescere dello spessore dello strato limite il flusso nello strato limite diviene instabile, amplificando le fluttuazioni di velocità a spese dell'energia sottratta al flusso esterno: dopo un certo percorso il flusso nello strato limite diviene turbolento (*strato limite turbolento*)
- A contatto con la parete rimane una zona di flusso laminare, detta *substrato limite laminare*



# Strato limite

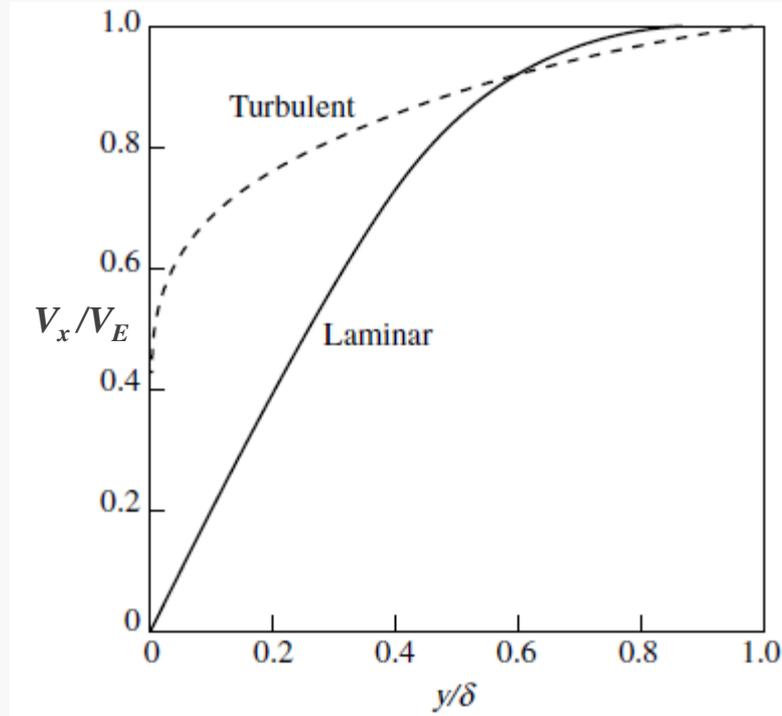
- Al crescere dello spessore dello strato limite il flusso nello strato limite diviene instabile, amplificando le fluttuazioni di velocità a spese dell'energia sottratta al flusso esterno: dopo un certo percorso il flusso nello strato limite diviene turbolento (*strato limite turbolento*)
- A contatto con la parete rimane una zona di flusso laminare, detta *substrato limite laminare*

$$\text{Superficie liscia: } 3 \cdot 10^5 \leq \text{Re}_x = \frac{V_E x}{\nu} \leq 5 \cdot 10^5$$

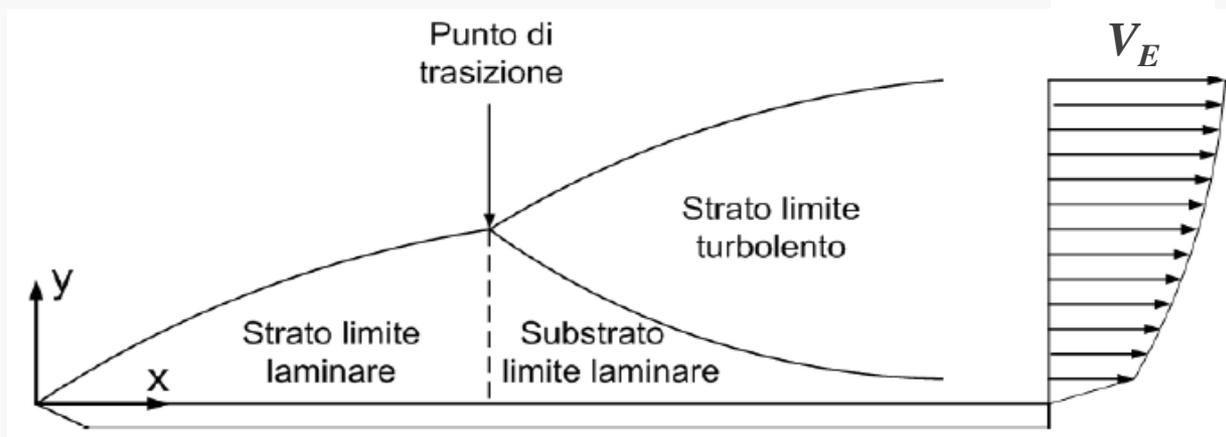


# Strato limite

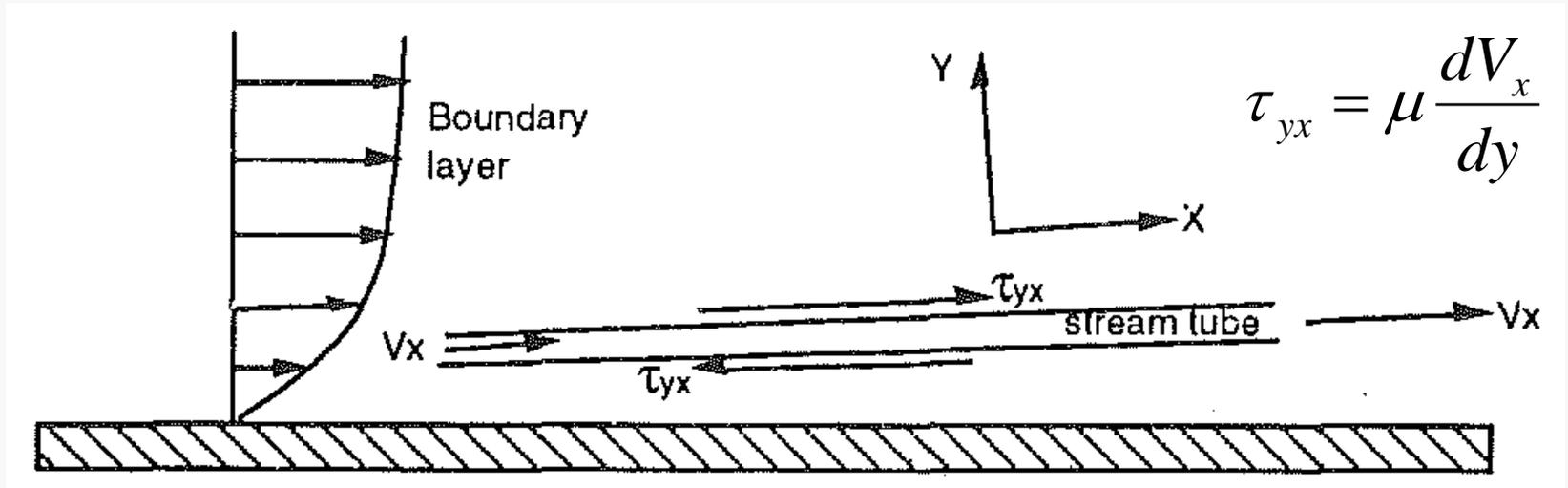
Andamento della velocità  $V_x$  nello strato limite su lamina piana in assenza di gradienti di pressione



- Il profilo della velocità  $V_x$  nello strato limite turbolento risulta più "piatto" di quello del caso laminare a causa del continuo rifornimento di energia da parte del fluido all'esterno allo strato limite dovuto alla turbolenza stessa
- Grazie alla maggiore energia all'interno dello strato limite turbolento questo risulta più "resistente" nei confronti del fenomeno della separazione (distacco di vena)



# Perdite nello strato limite



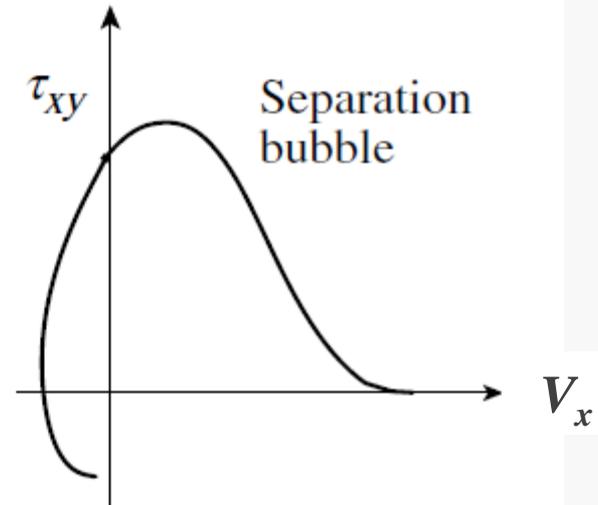
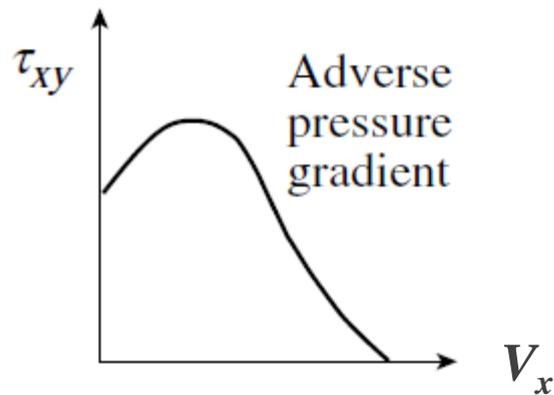
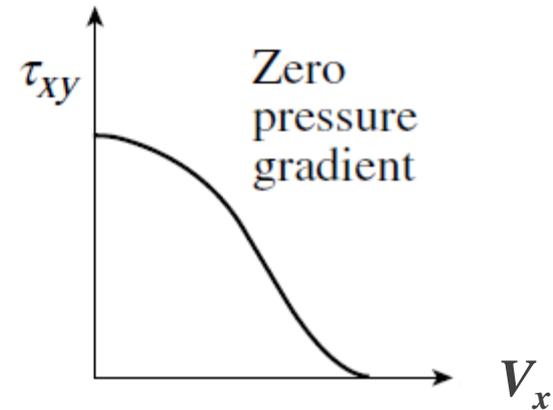
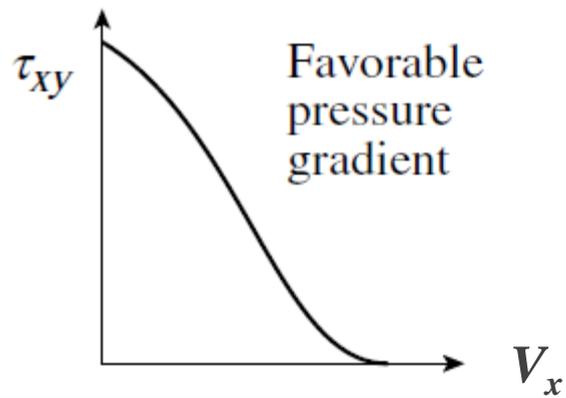
Si può dimostrare che il **tasso di produzione dell'entropia per unità di area** è pari a:

$$\dot{S}_A = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho V_x (s - s_\delta) dy \quad \Rightarrow \quad T \dot{S}_A = \int_0^{V_E} \tau_{yx} dV_x$$

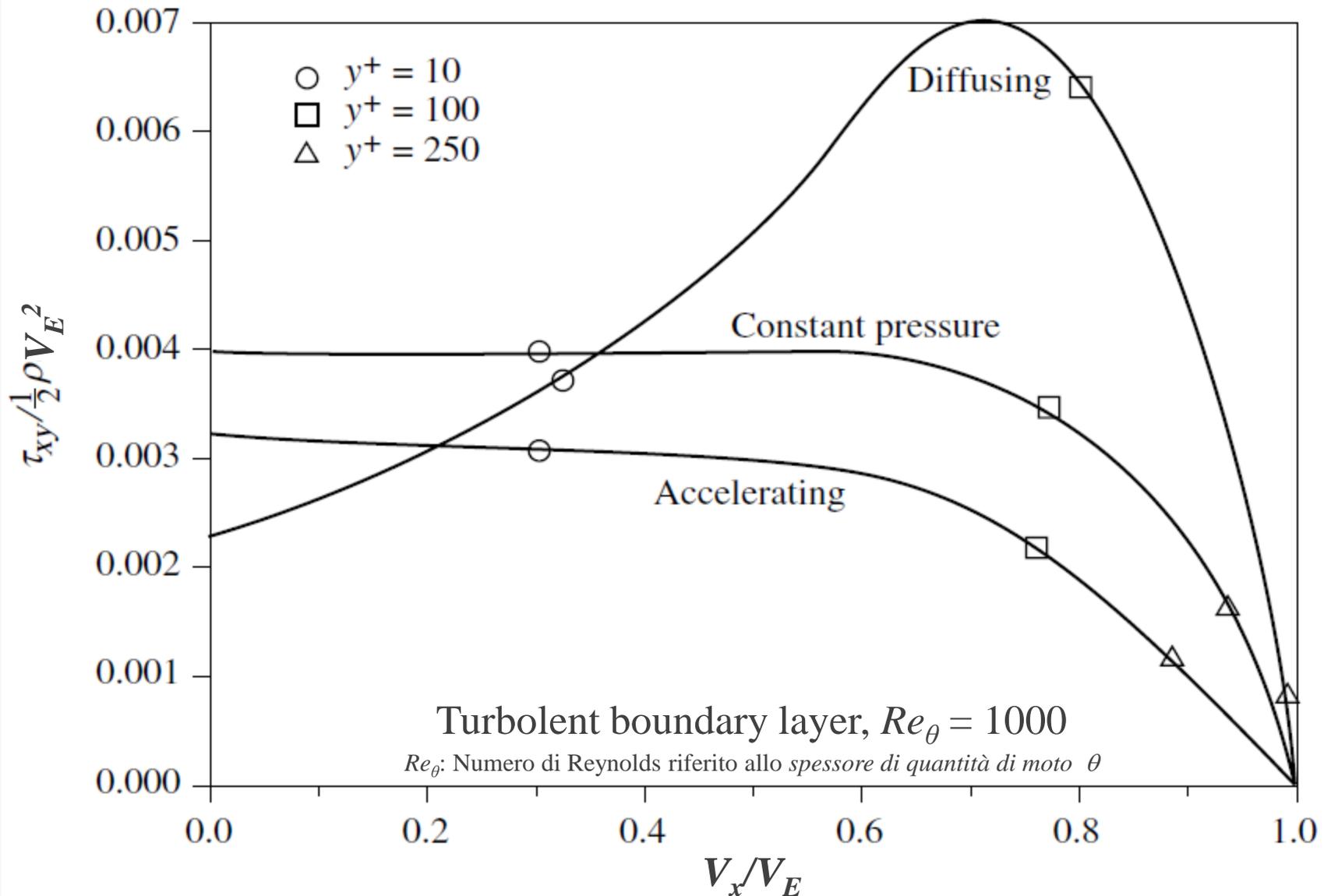
Denton, J.D., 1993, "Loss Mechanisms in Turbomachines", *ASME Journal of Turbomachinery*, **115**, pp. 621-656, 1993.



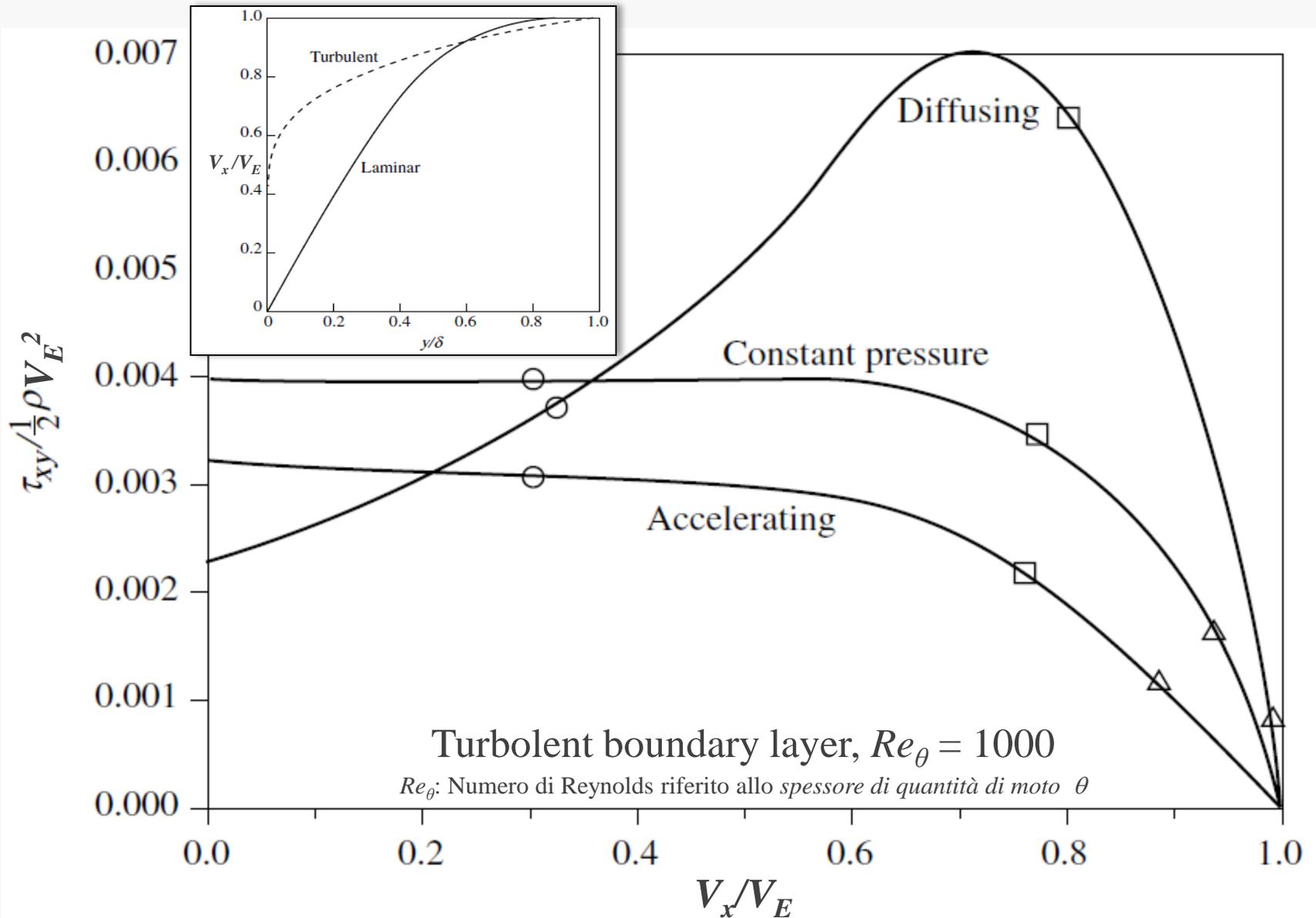
# Perdite nello strato limite



# Perdite nello strato limite



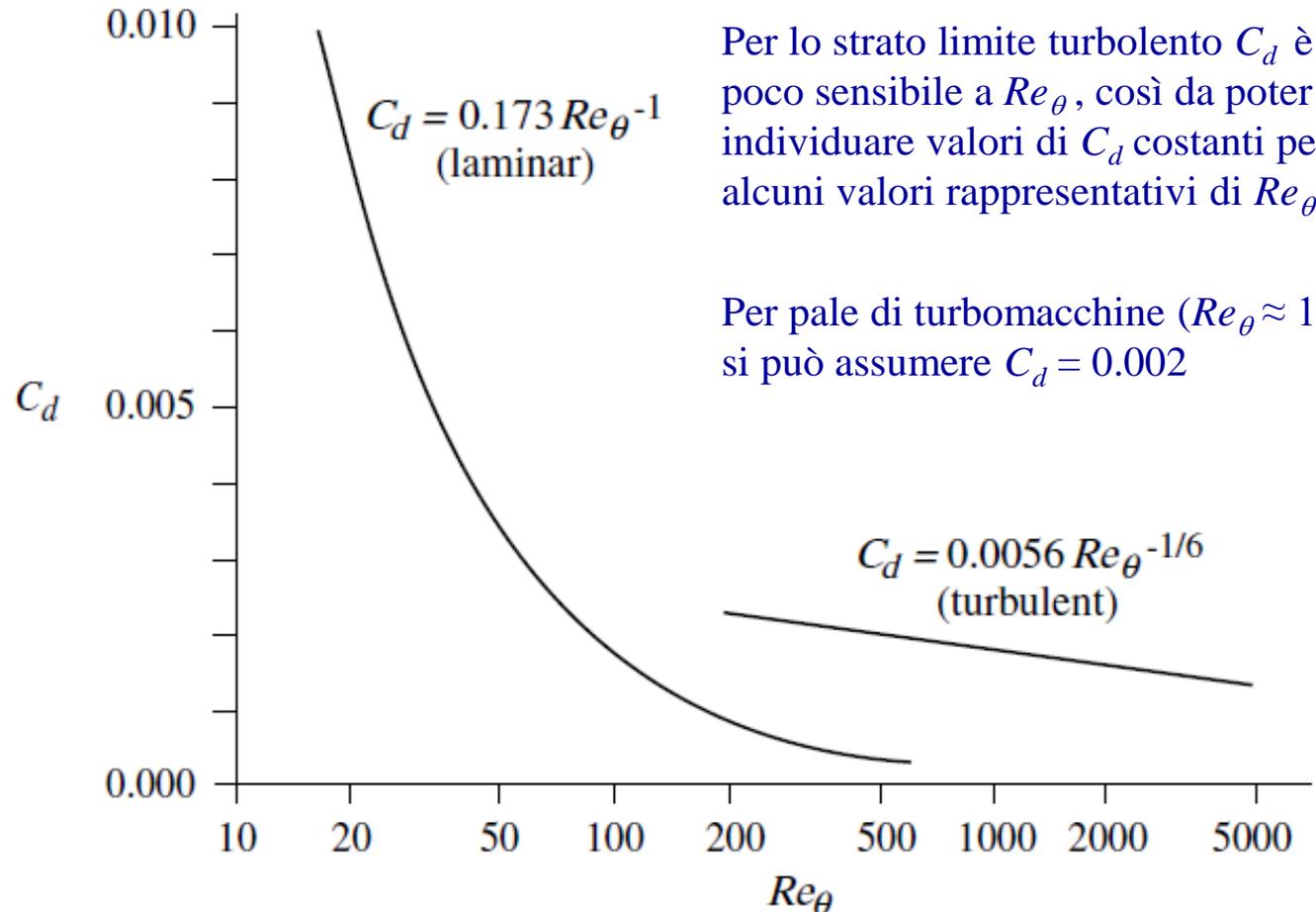
# Perdite nello strato limite



# Perdite nello strato limite

E' utile definire un coefficiente adimensionale di perdita nello strato limite legato al tasso di produzione dell'entropia:

$$C_d = \frac{T\dot{S}_A}{\rho V_E^3}$$



Per lo strato limite turbolento  $C_d$  è poco sensibile a  $Re_\theta$ , così da poter individuare valori di  $C_d$  costanti per alcuni valori rappresentativi di  $Re_\theta$

Per pale di turbomacchine ( $Re_\theta \approx 1000$ ) si può assumere  $C_d = 0.002$

$Re_\theta$ : Numero di Reynolds riferito allo spessore di quantità di moto  $\theta$



# Perdite nello strato limite

Per flussi in condotti bidimensionali, il **tasso di produzione dell'entropia totale** (per una profondità in direzione  $z$  unitaria) si può determinare integrando lungo la lunghezza  $x$  delle superfici il tasso di produzione dell'entropia per unità di area.

Nell'ipotesi in cui  $C_d$  e  $\rho$  possano essere ritenuti costanti lungo  $x$  risulta:

$$T\dot{S}_{tot} = \sum_{\text{tutte le superfici}} \int_0^{x_{fin}} T\dot{S}_A dx = C_d \rho \sum_{\text{tutte le superfici}} \int_0^{x_{fin}} V_E^3 dx$$


$$\dot{S}_A = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho V_x (s - s_{\delta}) dy$$



# Perdite nello strato limite

Per flussi in condotti bidimensionali, il **tasso di produzione dell'entropia totale** (per una profondità in direzione  $z$  unitaria) si può determinare integrando lungo la lunghezza  $x$  delle superfici il tasso di produzione dell'entropia per unità di area.

Nell'ipotesi in cui  $C_d$  e  $\rho$  possano essere ritenuti costanti lungo  $x$  risulta:

$$T\dot{S}_{tot} = \sum_{\text{tutte le superfici}} \int_0^{x_{fin}} T\dot{S}_A dx = C_d \rho \sum_{\text{tutte le superfici}} \int_0^{x_{fin}} V_E^3 dx$$

La variazione di entropia (mediata sulla portata in massa) è legata al tasso di produzione dell'entropia totale mediante la

$$\dot{S}_{tot} = \dot{M} \Delta\bar{s}$$



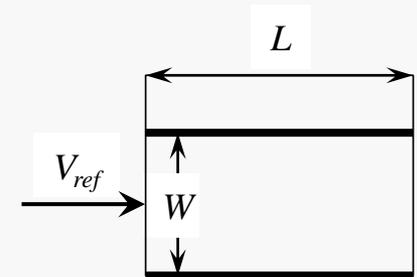
# Perdite nello strato limite

Nell'ipotesi di poter trascurare la comprimibilità del fluido

$$T\dot{S}_{tot} = \dot{M} T \Delta\bar{s} = \dot{M} \frac{\Delta\bar{p}_0}{\rho}$$



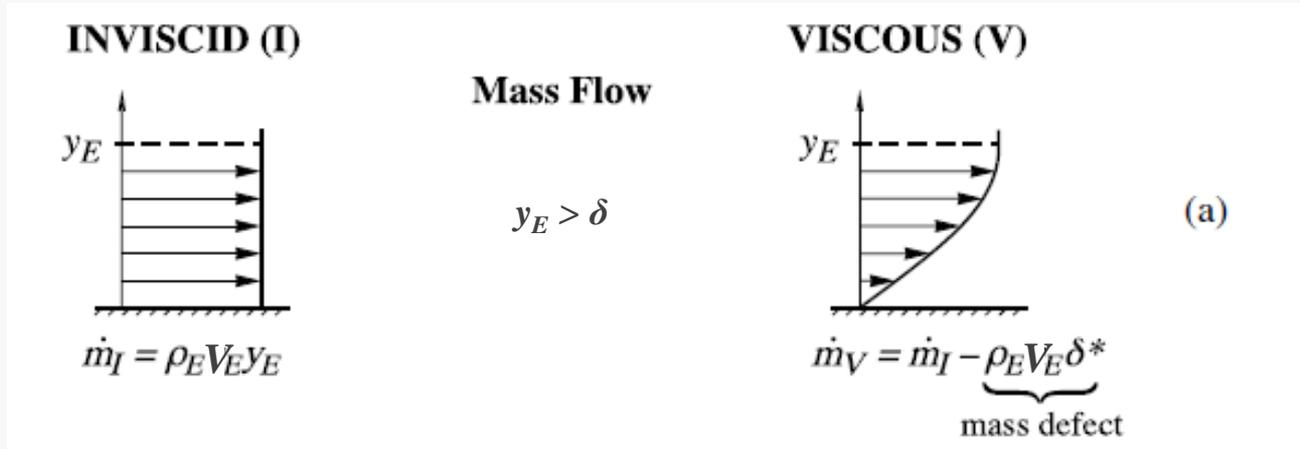
$$Y = \frac{\Delta\bar{p}_0}{\rho V_{ref}^2 / 2} = \frac{T\dot{S}_{tot}}{\dot{M} V_{ref}^2 / 2}$$



$$Y = \frac{\Delta\bar{p}_0}{\rho V_{ref}^2 / 2} = \frac{C_d \rho \sum_{\text{tutte le superfici}} \int_0^{x_{fin}} V_E^3 dx}{W \rho V_{ref} V_{ref}^2 / 2} \cdot \frac{L}{L} = 2C_d \frac{L}{W} \sum_{\text{tutte le superfici}} \int_0^{x_{fin}} \left( \frac{V_E}{V_{ref}} \right)^3 d\left( \frac{x}{L} \right)$$



# Spessori dello strato limite: spessore di spostamento

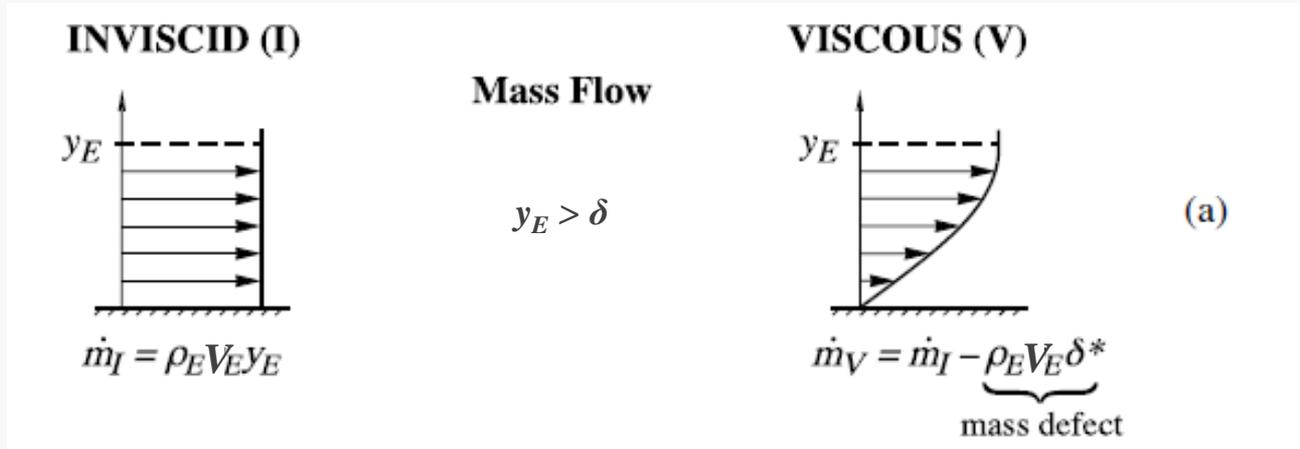


$$\rho_E V_E \delta^* = \int_0^{y_E} \rho_E V_E dy - \int_0^{y_E} \rho V_x dy = \int_0^{y_E} (\rho_E V_E - \rho V_x) dy$$

$$\delta^* = \int_0^{y_E} \left( 1 - \frac{\rho V_x}{\rho_E V_E} \right) dy$$



# Spessori dello strato limite: spessore di spostamento



$$\rho_E V_E \delta^* = \int_0^{y_E} \rho_E V_E dy - \int_0^{y_E} \rho V_x dy = \int_0^{y_E} (\rho_E V_E - \rho V_x) dy$$

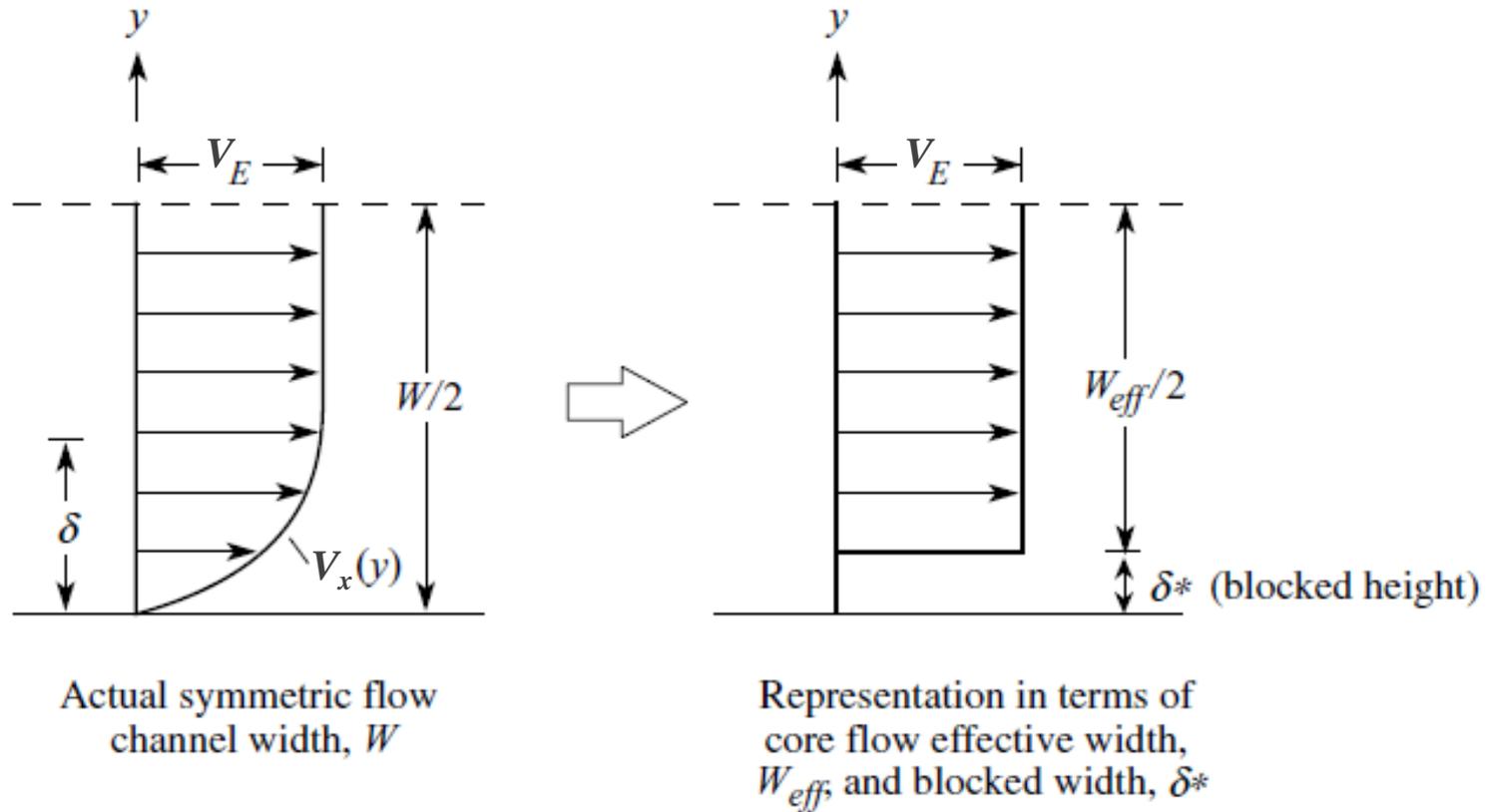
$$\delta^* = \int_0^{y_E} \left( 1 - \frac{\rho V_x}{\rho_E V_E} \right) dy$$

Nell'ipotesi di poter trascurare la comprimibilità del fluido

$$\delta^* = \int_0^{y_E} \left( 1 - \frac{V_x}{V_E} \right) dy$$



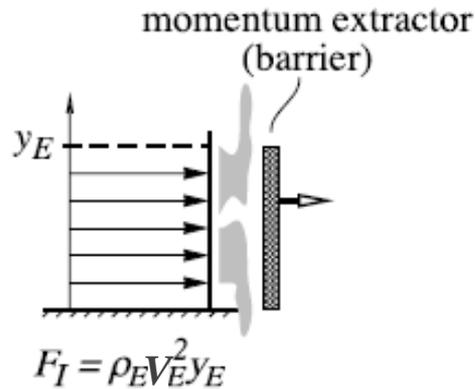
# Significato di spessore di spostamento



# Spessori dello strato limite: spessore di quantità di moto

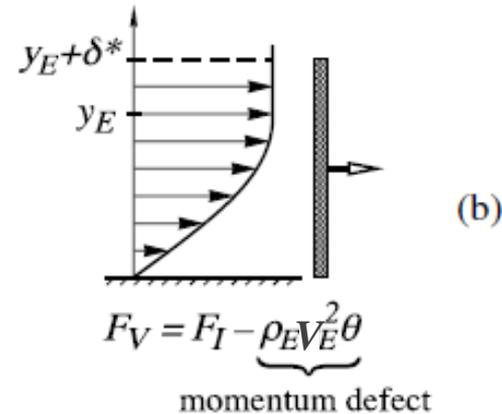
INVISCID (I)

Momentum Flow (force,  $F$ ): Comparison of  $F_I$  and  $F_V$  done with same  $\dot{m}$



$y_E > \delta$

VISCOUS (V)



$$\rho_E V_E^2 \theta = \int_0^{y_E} \rho V_x^2 dy - \int_0^{y_E} \rho V_x^2 dy - \int_{y_E}^{y_E + \delta^*} \rho V_x^2 dy$$

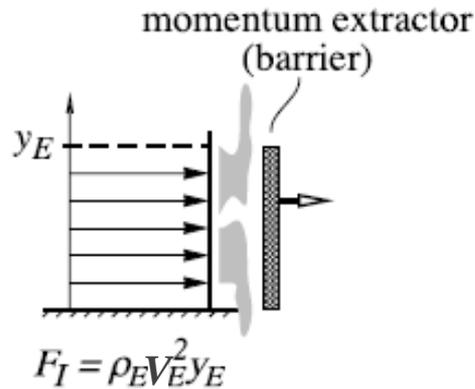
$$\theta = \int_0^{y_E} \left( 1 - \frac{\rho V_x}{\rho_E V_E} \frac{V_x}{V_E} \right) dy - \delta^* = \int_0^{y_E} \left[ \left( 1 - \frac{\rho V_x}{\rho_E V_E} \frac{V_x}{V_E} \right) - \left( 1 - \frac{\rho V_x}{\rho_E V_E} \right) \right] dy$$

# Spessori dello strato limite: spessore di quantità di moto

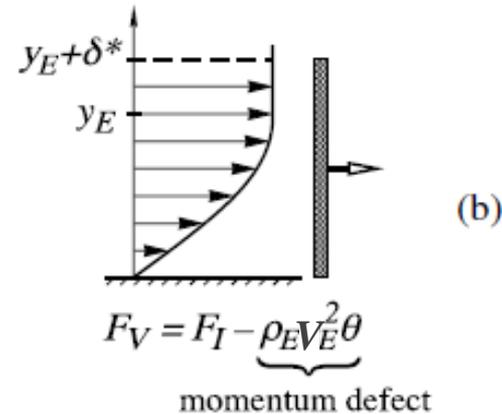
INVISCID (I)

VISCOUS (V)

Momentum Flow (force,  $F$ ): Comparison of  $F_I$  and  $F_V$  done with same  $\dot{m}$



$$y_E > \delta$$



$$\theta = \int_0^{y_E} \frac{\rho V_x}{\rho_E V_E} \left( 1 - \frac{V_x}{V_E} \right) dy$$

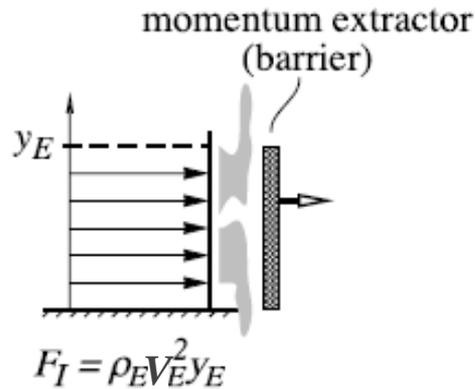


# Spessori dello strato limite: spessore di quantità di moto

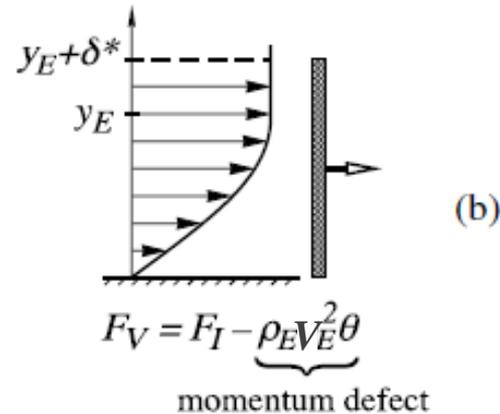
INVISCID (I)

VISCOUS (V)

Momentum Flow (force,  $F$ ): Comparison of  $F_I$  and  $F_V$  done with same  $\dot{m}$



$$y_E > \delta$$



$$\theta = \int_0^{y_E} \frac{\rho V_x}{\rho_E V_E} \left( 1 - \frac{V_x}{V_E} \right) dy$$

Nell'ipotesi di poter trascurare la comprimibilità del fluido

$$\theta = \int_0^{y_E} \frac{V_x}{V_E} \left( 1 - \frac{V_x}{V_E} \right) dy$$

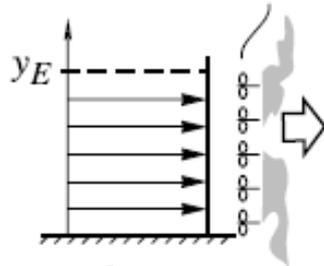
# Spessori dello strato limite: spessore di energia

INVISCID (I)

VISCOUS (V)

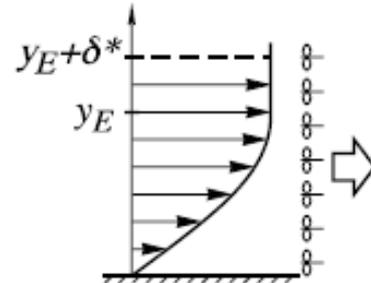
Kinetic Energy Flow (power,  $P$ ): Comparison of  $P_I$  and  $P_V$  done with same  $\dot{m}$

K.E. extractor  
(windmill array)



$$P_I = \frac{1}{2} \rho_E V_E^3 y_E$$

$$y_E > \delta$$



$$P_V = P_I - \underbrace{\frac{1}{2} \rho_E V_E^3 \theta^*}_{\text{kinetic energy defect}}$$

kinetic energy defect

(c)

$$\frac{1}{2} \rho_E V_E^3 \theta^* = \int_0^{y_E} \frac{1}{2} \rho_E V_E^3 dy - \int_0^{y_E} \frac{1}{2} \rho V_x^3 dy - \int_{y_E}^{y_E + \delta^*} \frac{1}{2} \rho_E V_E^3 dy$$

$$\theta^* = \int_0^{y_E} \left( 1 - \frac{\rho V_x}{\rho_E V_E} \frac{V_x^2}{V_E^2} \right) dy - \delta^* = \int_0^{y_E} \left[ \left( 1 - \frac{\rho V_x}{\rho_E V_E} \frac{V_x^2}{V_E^2} \right) - \left( 1 - \frac{\rho V_x}{\rho_E V_E} \right) \right] dy$$



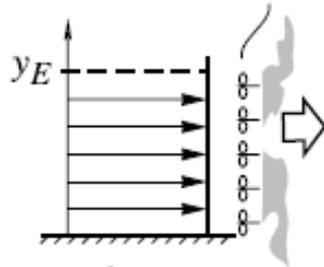
# Spessori dello strato limite: spessore di energia

INVISCID (I)

VISCOUS (V)

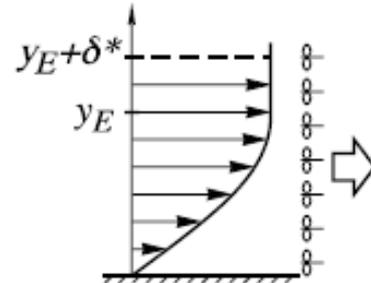
Kinetic Energy Flow (power,  $P$ ): Comparison of  $P_I$  and  $P_V$  done with same  $\dot{m}$

K.E. extractor  
(windmill array)



$$P_I = \frac{1}{2} \rho_E V_E^3 y_E$$

$$y_E > \delta$$



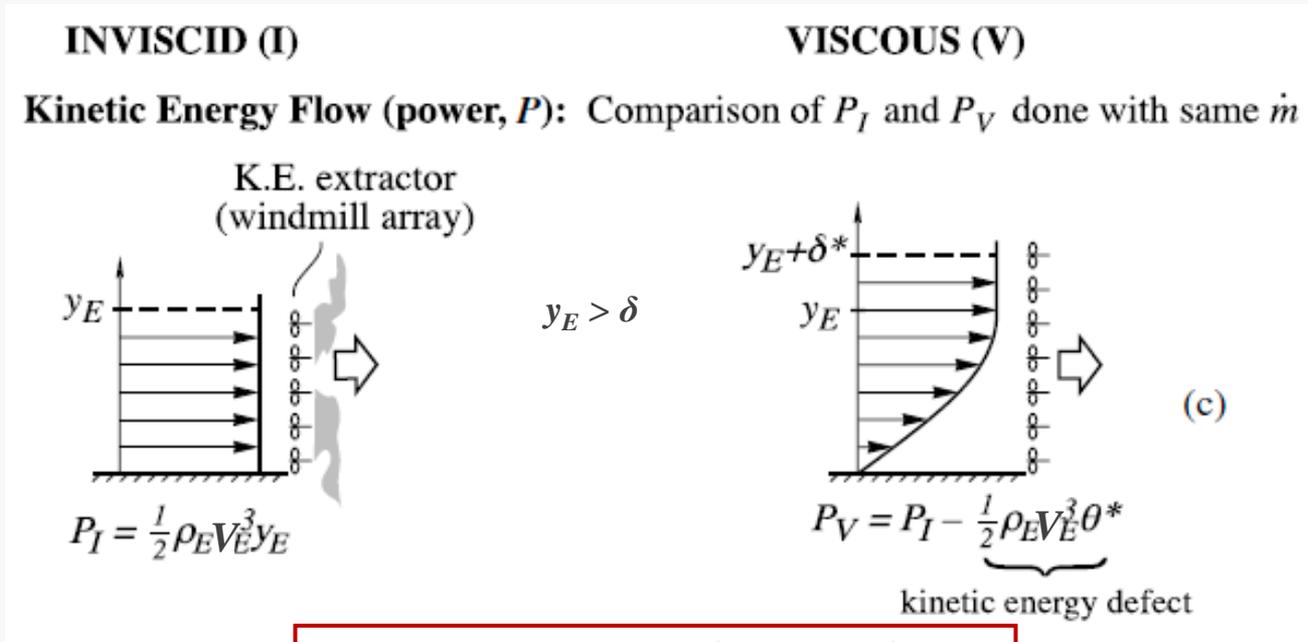
$$P_V = P_I - \underbrace{\frac{1}{2} \rho_E V_E^3 \theta^*}_{\text{kinetic energy defect}}$$

kinetic energy defect

$$\theta^* = \int_0^{y_E} \frac{\rho V_x}{\rho_E V_E} \left( 1 - \frac{V_x^2}{V_E^2} \right) dy$$



# Spessori dello strato limite: spessore di energia



$$\theta^* = \int_0^{y_E} \frac{\rho V_x}{\rho_E V_E} \left( 1 - \frac{V_x^2}{V_E^2} \right) dy$$

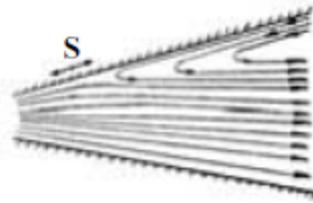
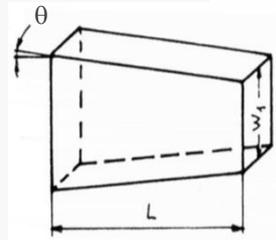
Nell'ipotesi di poter trascurare la comprimibilità del fluido

$$\theta^* = \int_0^{y_E} \frac{V_x}{V_E} \left( 1 - \frac{V_x^2}{V_E^2} \right) dy$$

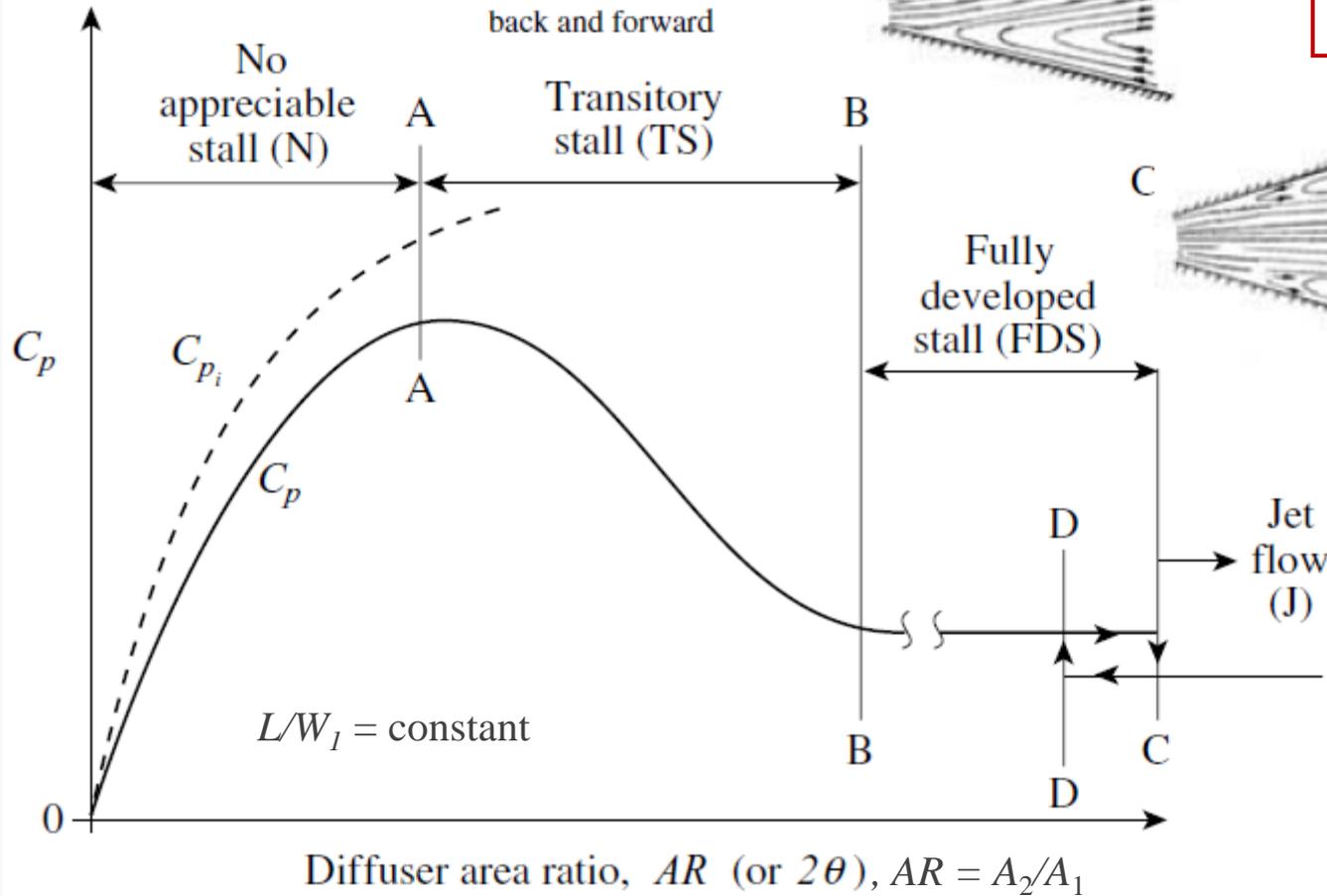
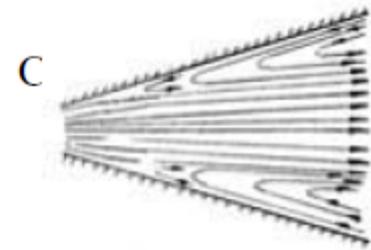
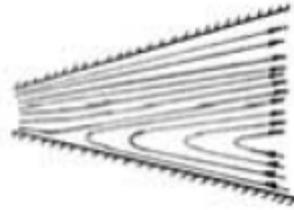
# Prestazioni e perdite dei diffusori (flusso stazionario)



# Prestazioni e perdite dei diffusori (flusso incomprimibile)



The separation position S moves along the wall, back and forward



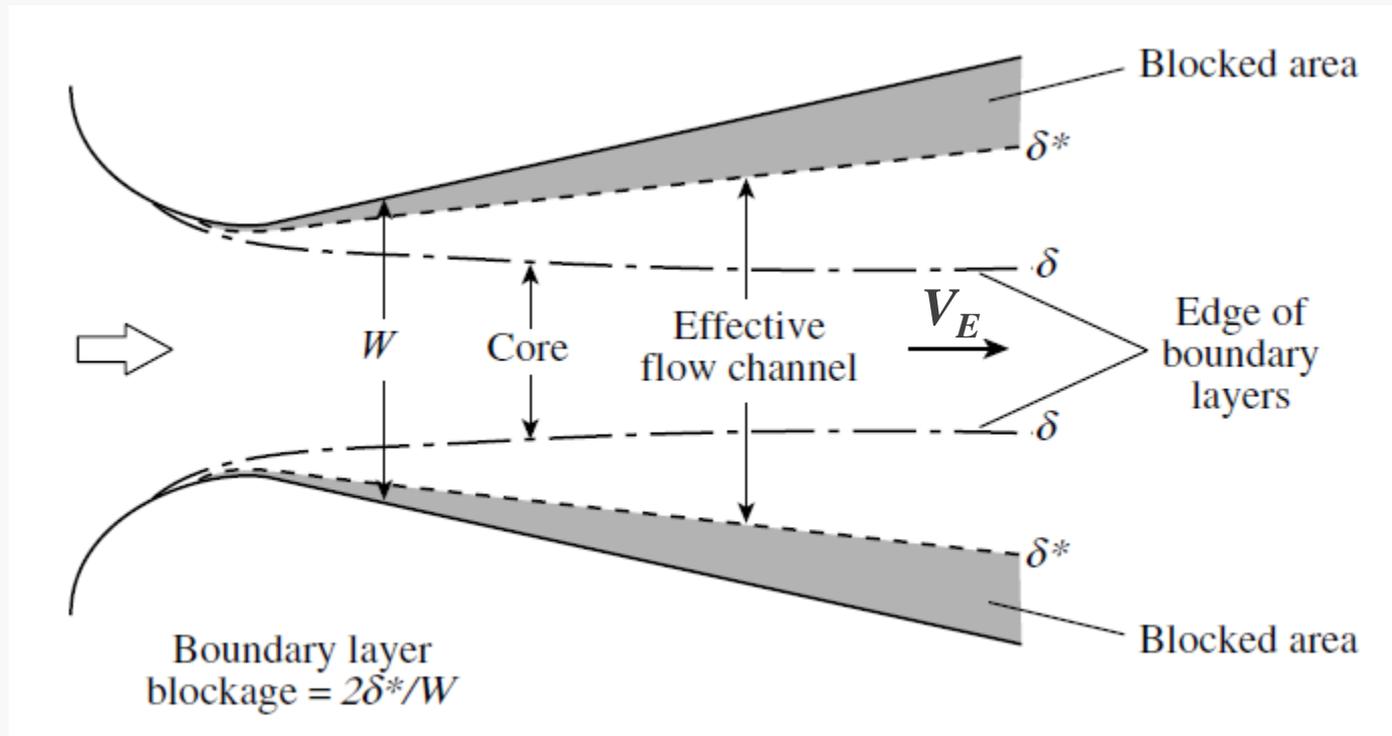
$$C_{p_i} = \frac{p_2 - p_1}{\rho V_1^2 / 2} = 1 - \frac{V_2^2}{V_1^2}$$

$$C_{p_i} = 1 - \frac{A_1^2}{A_2^2} = 1 - \frac{1}{AR^2}$$



# Prestazioni e perdite dei diffusori (flusso incomprimibile)

Nel caso reale di fluido viscoso

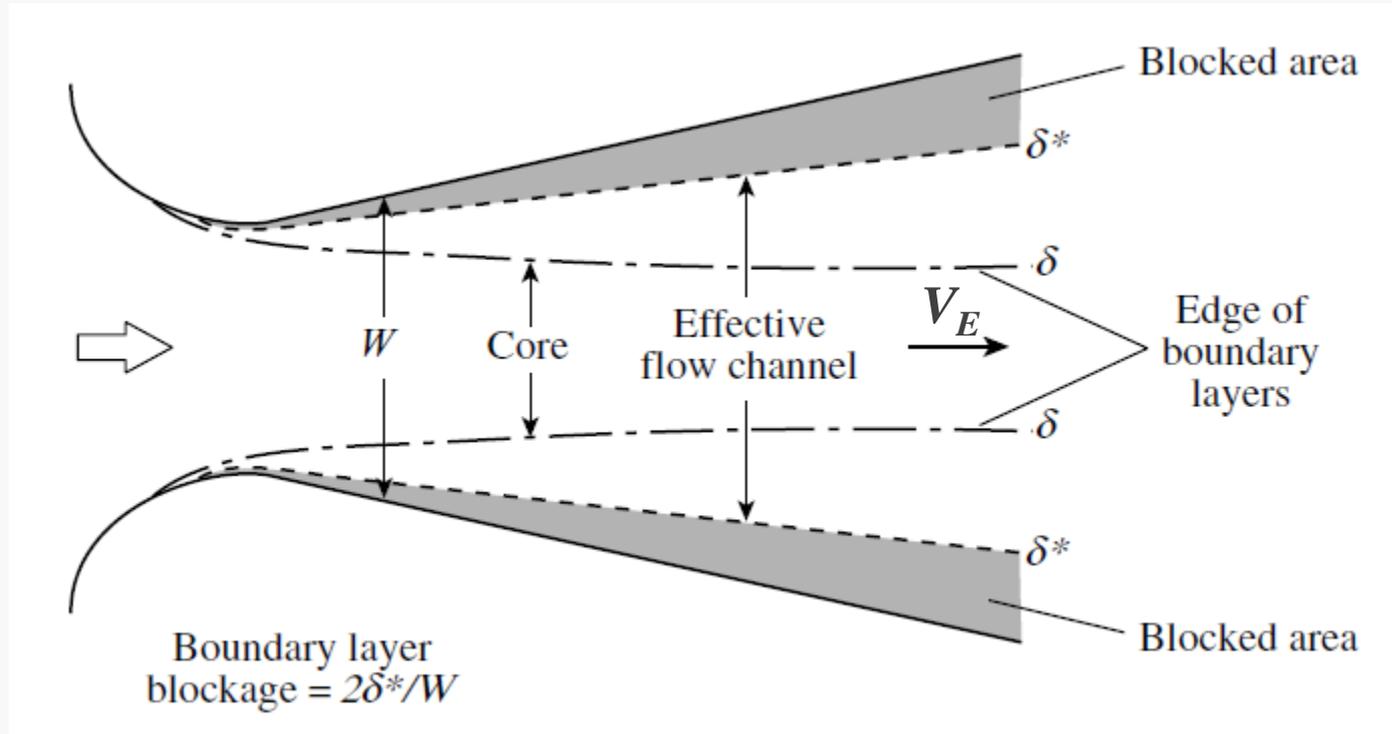


$$W_e = W - 2\delta^* \Rightarrow W_{1e} \approx W_1, \quad W_{2e} = W_2 - 2\delta_2^*$$

$$AR_e = \frac{A_{2e}}{A_{1e}} = \frac{W_{2e}}{W_{1e}} = \frac{W_2 - 2\delta_2^*}{W_1} = \frac{1 - 2\delta_2^*/W_2}{W_1/W_2} = AR \left( 1 - 2\frac{\delta_2^*}{W_2} \right)$$

# Prestazioni e perdite dei diffusori (flusso incomprimibile)

Nel caso reale di fluido viscoso



$$C_p = \frac{p_{2e} - p_1}{\rho V_1^2 / 2} = 1 - \frac{1}{AR_e^2} = 1 - \frac{1}{AR^2 \left(1 - 2\delta_2^*/W_2\right)^2}$$



# Prestazioni e perdite dei diffusori (flusso incomprimibile)

Nel caso reale di fluido viscoso

Perdita di pressione totale:

$$Y = \frac{p_{01} - p_{02e}}{\rho V_1^2 / 2} = \frac{p_1 - p_{2e} + \rho \frac{V_1^2}{2} - \rho e_{c2e}}{\rho V_1^2 / 2} = 1 - C_p - \frac{e_{c2e}}{V_1^2 / 2}$$

$$e_{c2e} = \frac{P_{c2e}}{\dot{M}} = \frac{1}{\dot{M}} \left[ \rho \frac{V_{E2}^3}{2} (W_2 - 2\delta_2^*) - \rho \frac{V_{E2}^3}{2} 2\theta_2^* \right] =$$
$$= \frac{1}{\dot{M}} \left[ \rho \frac{V_{E2}^3}{2} (W_2 - 2\delta_2^* - 2\theta_2^*) \right]$$

$$\dot{M} = \rho V_{E2} (W_2 - 2\delta_2^*) \Rightarrow e_{c2e} = \frac{V_{E2}^2}{2} \left( 1 - \frac{2\theta_2^*}{W_2 - 2\delta_2^*} \right)$$



# Prestazioni e perdite dei diffusori (flusso incomprimibile)

Nel caso reale di fluido viscoso

Perdita di pressione totale:

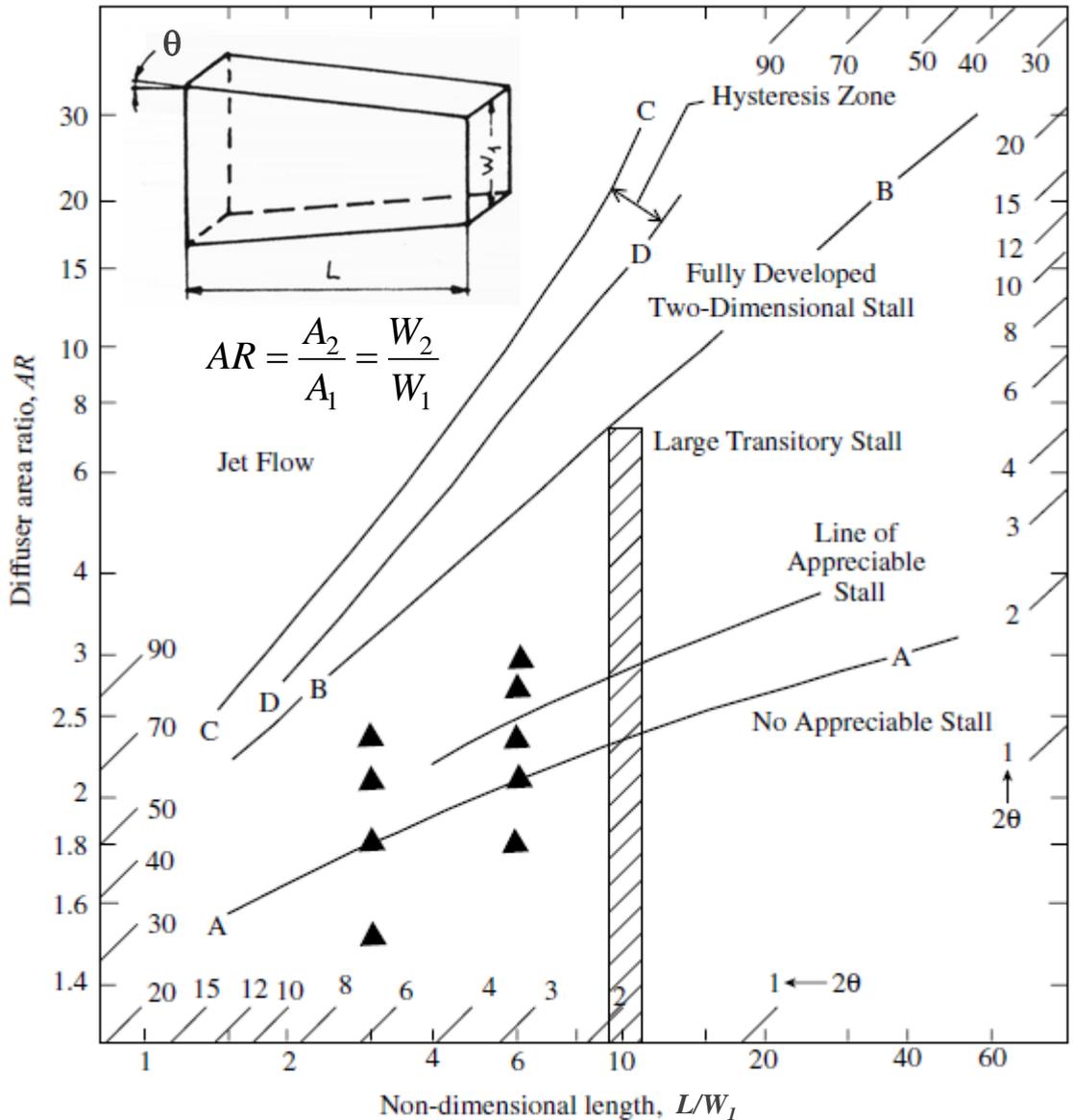
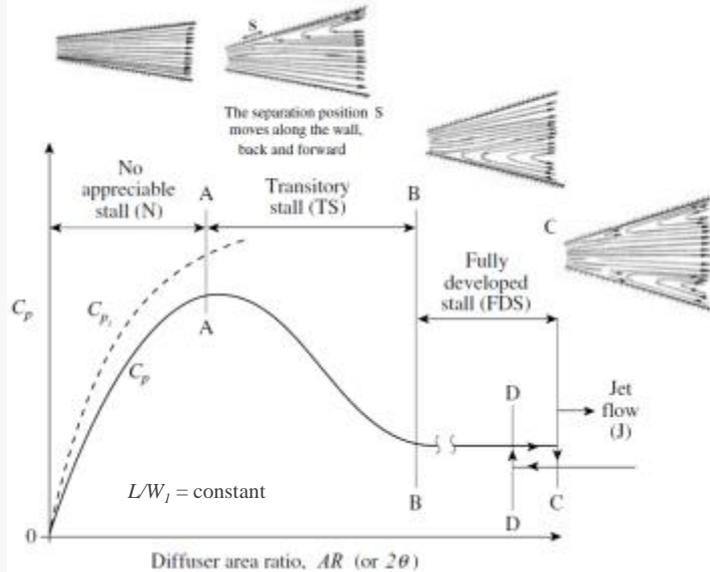
$$Y = \frac{p_{01} - p_{02e}}{\rho V_1^2 / 2} = 1 - C_p - \frac{V_{E2}^2}{V_1^2} \left( 1 - \frac{2\theta_2^*}{W_2 - 2\delta_2^*} \right) =$$
$$= 1 - C_p - \frac{A_1^2}{A_{2e}^2} \left( 1 - \frac{2\theta_2^*/W_2}{1 - 2\delta_2^*/W_2} \right)$$

$$Y = \frac{p_{01} - p_{02e}}{\rho V_1^2 / 2} = 1 - 1 + \frac{1}{AR_e^2} - \frac{1}{AR_e^2} \left( 1 - \frac{2\theta_2^*/W_2}{1 - 2\delta_2^*/W_2} \right)$$

$$Y = \frac{p_{01} - p_{02e}}{\rho V_1^2 / 2} = \frac{2\theta_2^*/W_2}{AR^2(1 - 2\delta_2^*/W_2)^3}$$



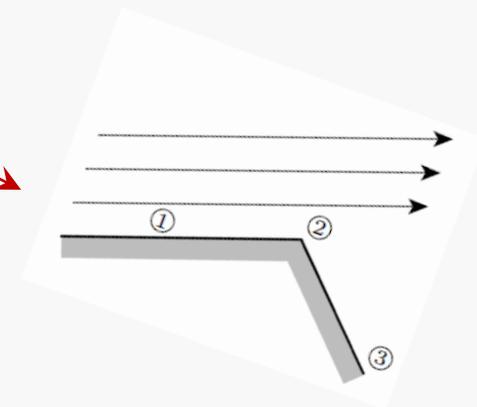
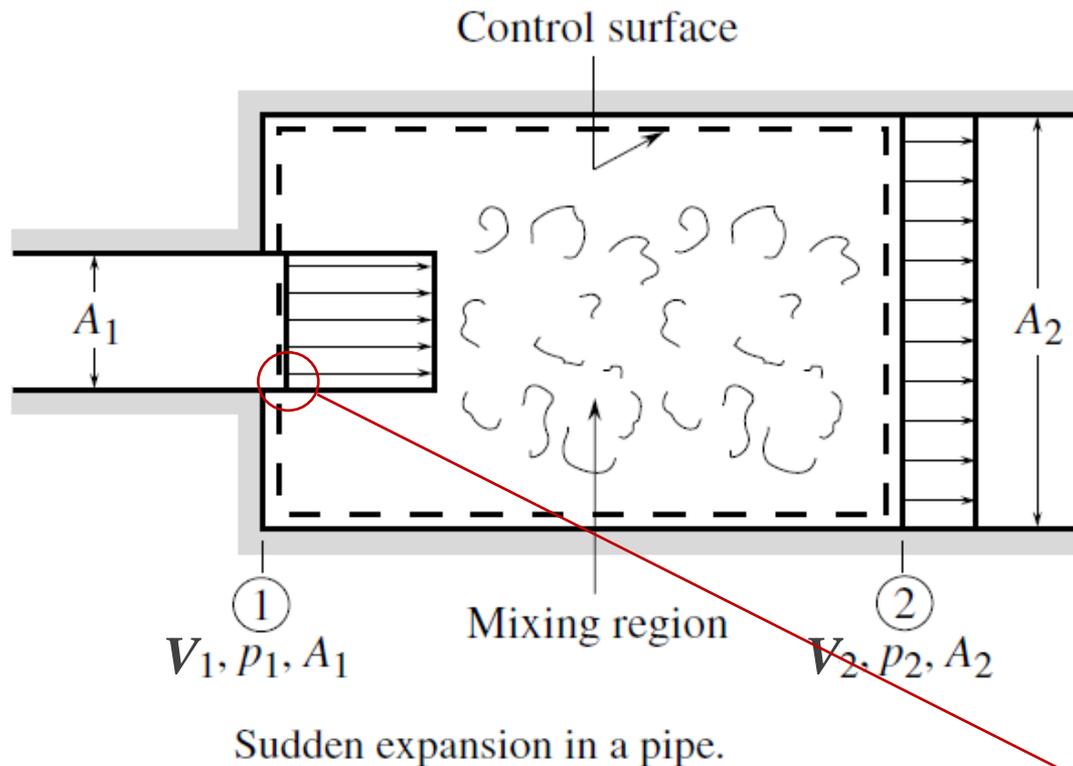
# Prestazioni e perdite dei diffusori



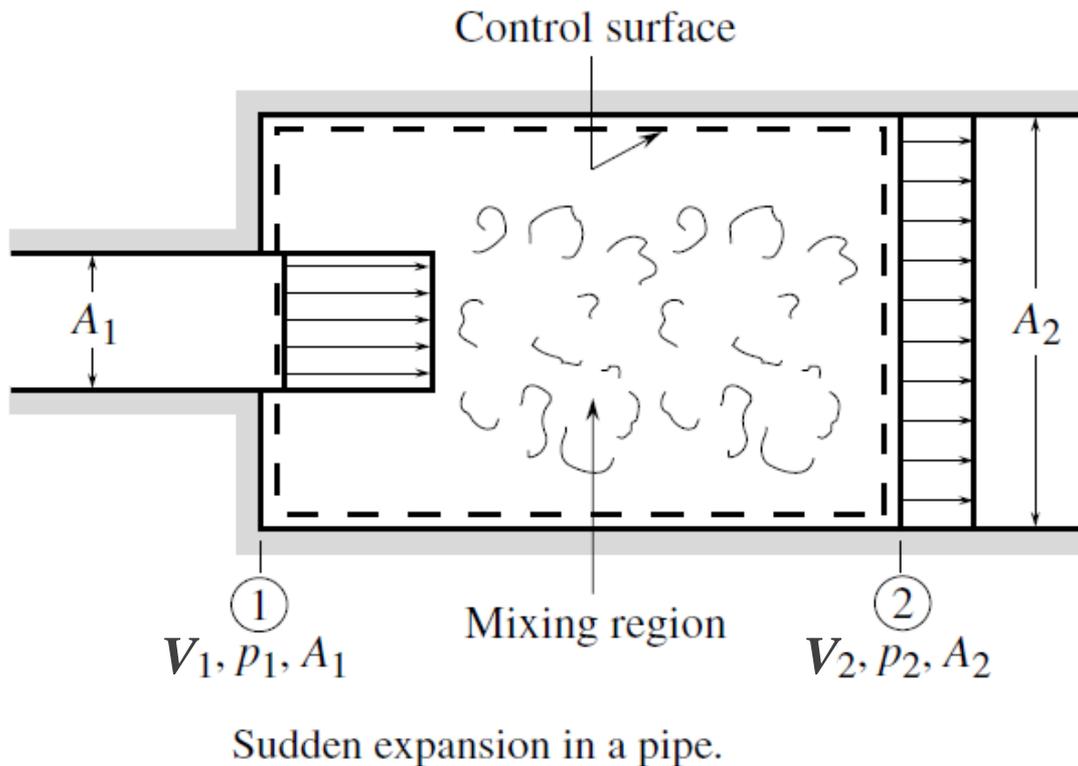
$$\theta = \arctg\left(\frac{W_2 - W_1}{2L}\right) = \arctg\left(\frac{AR - 1}{2L/W_1}\right)$$



# Perdite per brusco allargamento di sezione (flusso stazionario, incomprimibile, non viscoso)



# Perdite per brusco allargamento di sezione (flusso stazionario, incomprimibile, non viscoso)

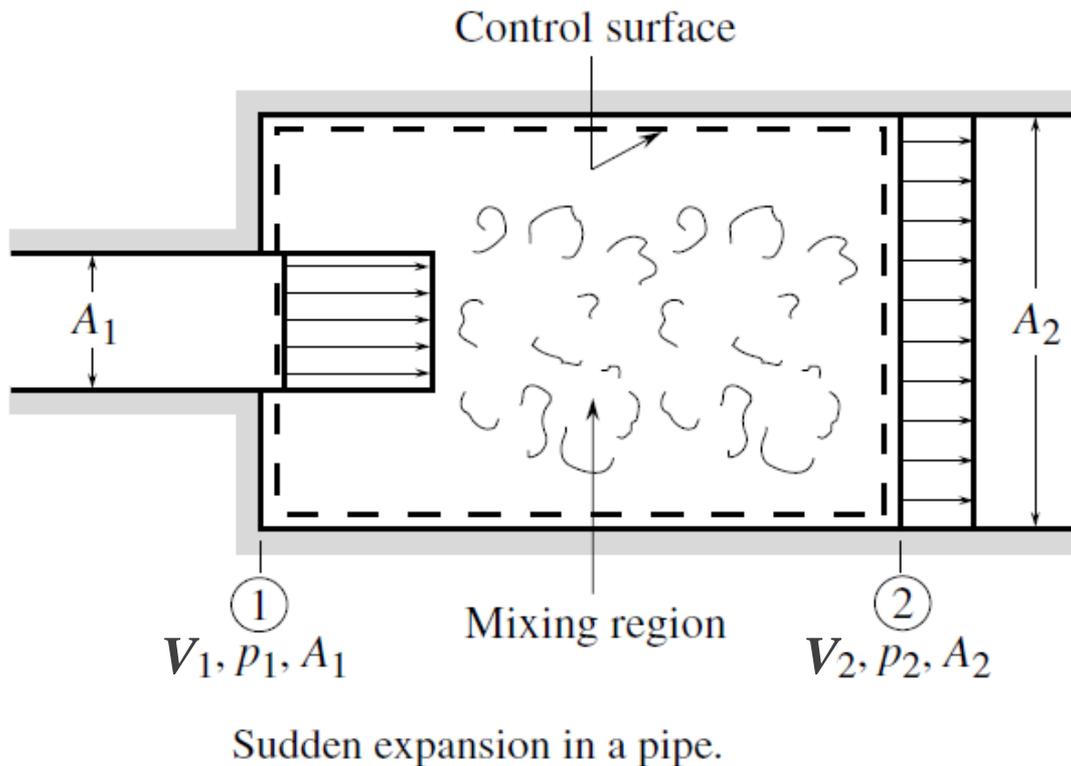


Bilancio di massa:

$$\dot{M}_2 = \dot{M}_1 \Rightarrow A_2 V_2 = A_1 V_1 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{A_2}{A_1} = AR$$



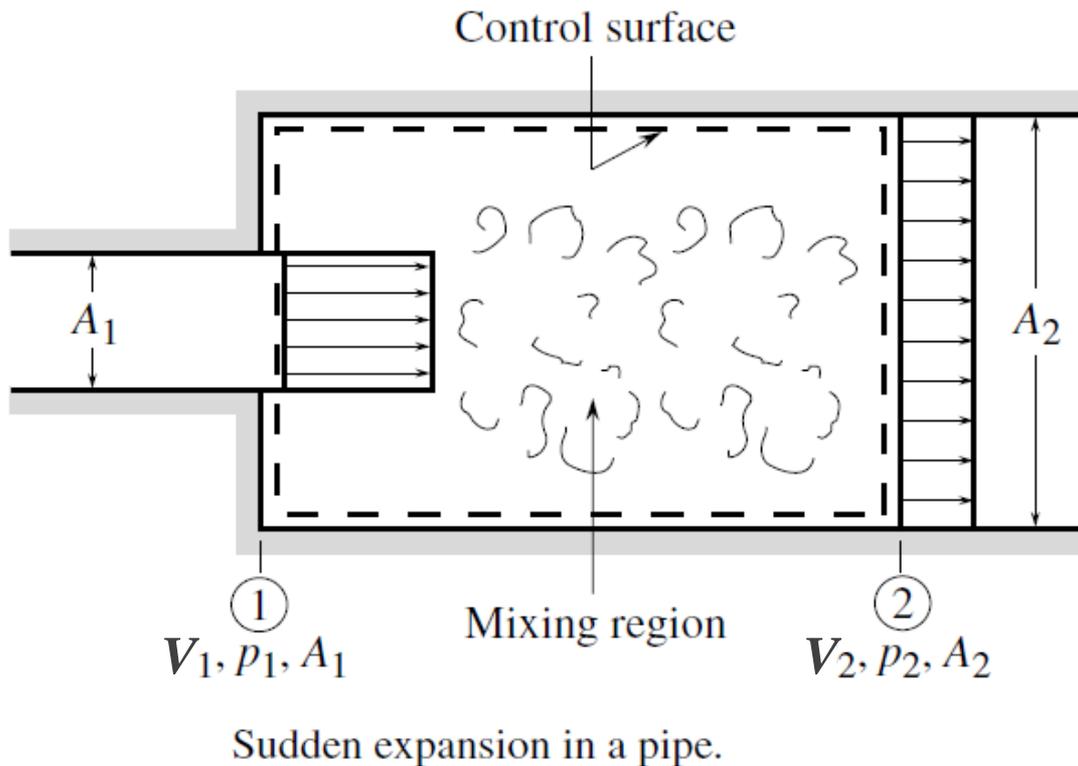
# Perdite per brusco allargamento di sezione (flusso stazionario, incomprimibile, non viscoso)



Bilancio della quantità di moto:

$$p_1 A_2 + \rho A_1 V_1^2 = p_2 A_2 + \rho A_2 V_2^2 \Rightarrow (p_2 - p_1) A_2 = \rho A_1 V_1^2 \left( 1 - \frac{A_2 V_2^2}{A_1 V_1^2} \right)$$

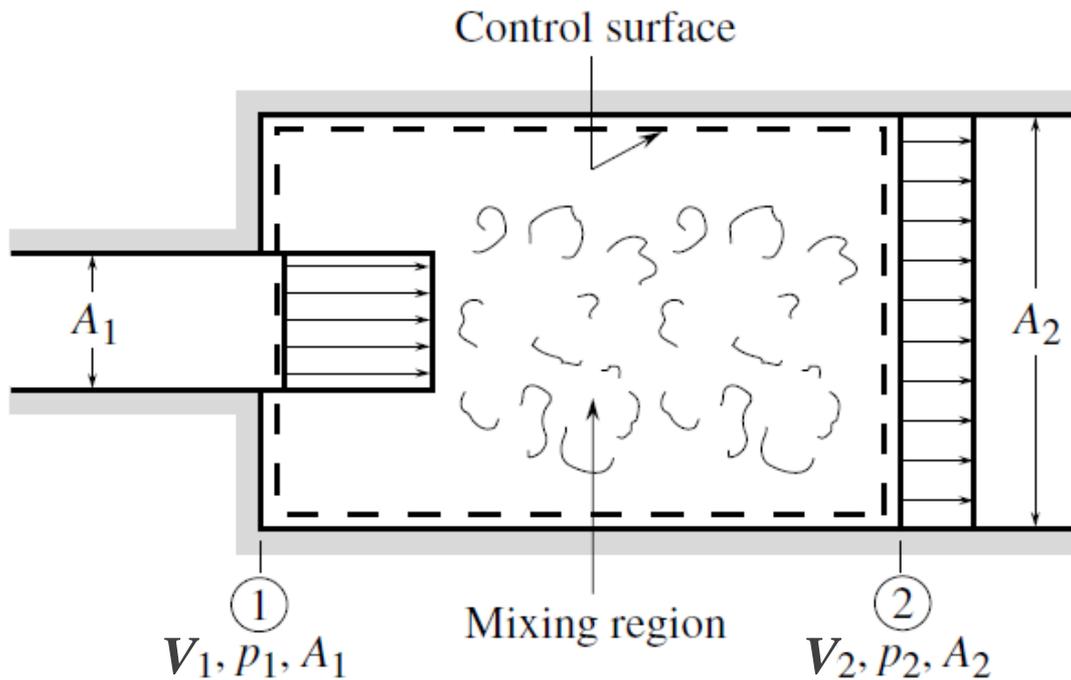
# Perdite per brusco allargamento di sezione (flusso stazionario, incomprimibile, non viscoso)



$$C_p = \frac{p_2 - p_1}{\rho V_1^2 / 2} = 2 \frac{A_1}{A_2} \left( 1 - \frac{A_2 V_2^2}{A_1 V_1^2} \right) = \frac{2}{AR} \left( 1 - \frac{1}{AR} \right)$$



# Perdite per brusco allargamento di sezione (flusso stazionario, incomprimibile, non viscoso)



Sudden expansion in a pipe.

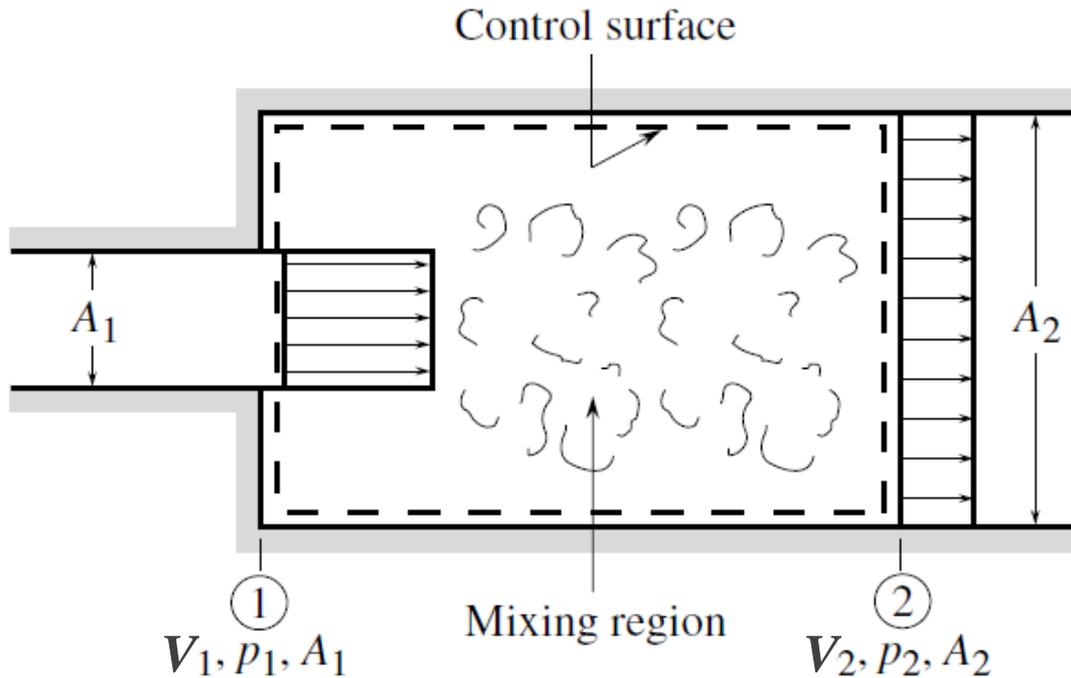
$$Y = \frac{p_{01} - p_{02}}{\rho V_1^2 / 2} = \left(1 - \frac{1}{AR}\right)^2$$

Perdita di pressione totale:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{p_{01} - p_{02}}{\rho V_1^2 / 2} = \\ &= \frac{p_1 - p_2}{\rho V_1^2 / 2} + 1 - \frac{V_2^2}{V_1^2} = \\ &= 1 - \frac{2}{AR} + \frac{2}{AR^2} - \frac{1}{AR^2} = \\ &= 1 - \frac{2}{AR} + \frac{1}{AR^2} \end{aligned}$$

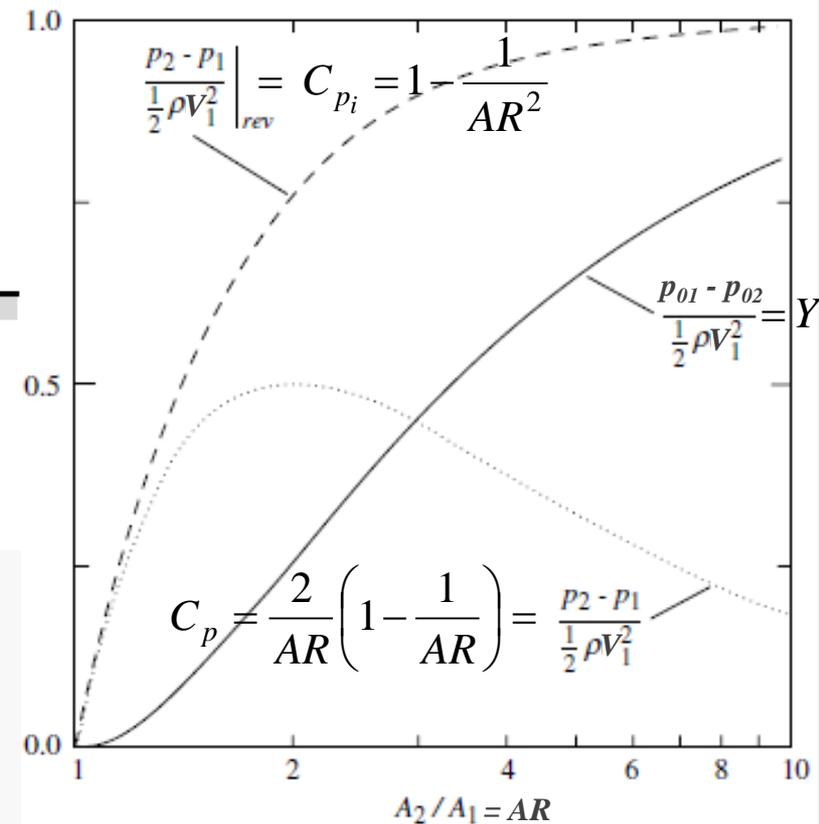


# Perdite per brusco allargamento di sezione (flusso stazionario, incomprimibile, non viscoso)



Sudden expansion in a pipe.

$$Y = \frac{p_{01} - p_{02}}{\rho V_1^2 / 2} = \left(1 - \frac{1}{AR}\right)^2$$

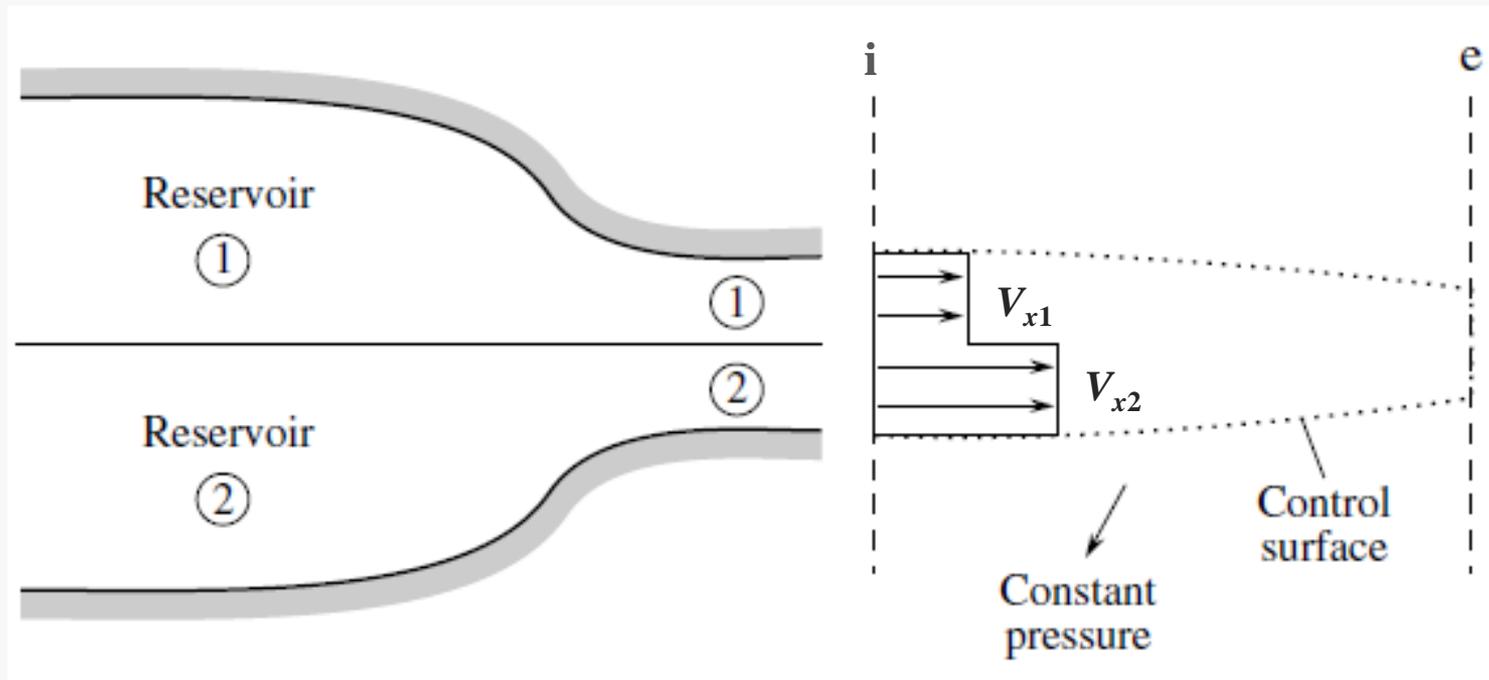


# Perdite per miscelazione

(flusso stazionario, non viscoso)



# Miscelazione di due flussi in ambiente a pressione costante

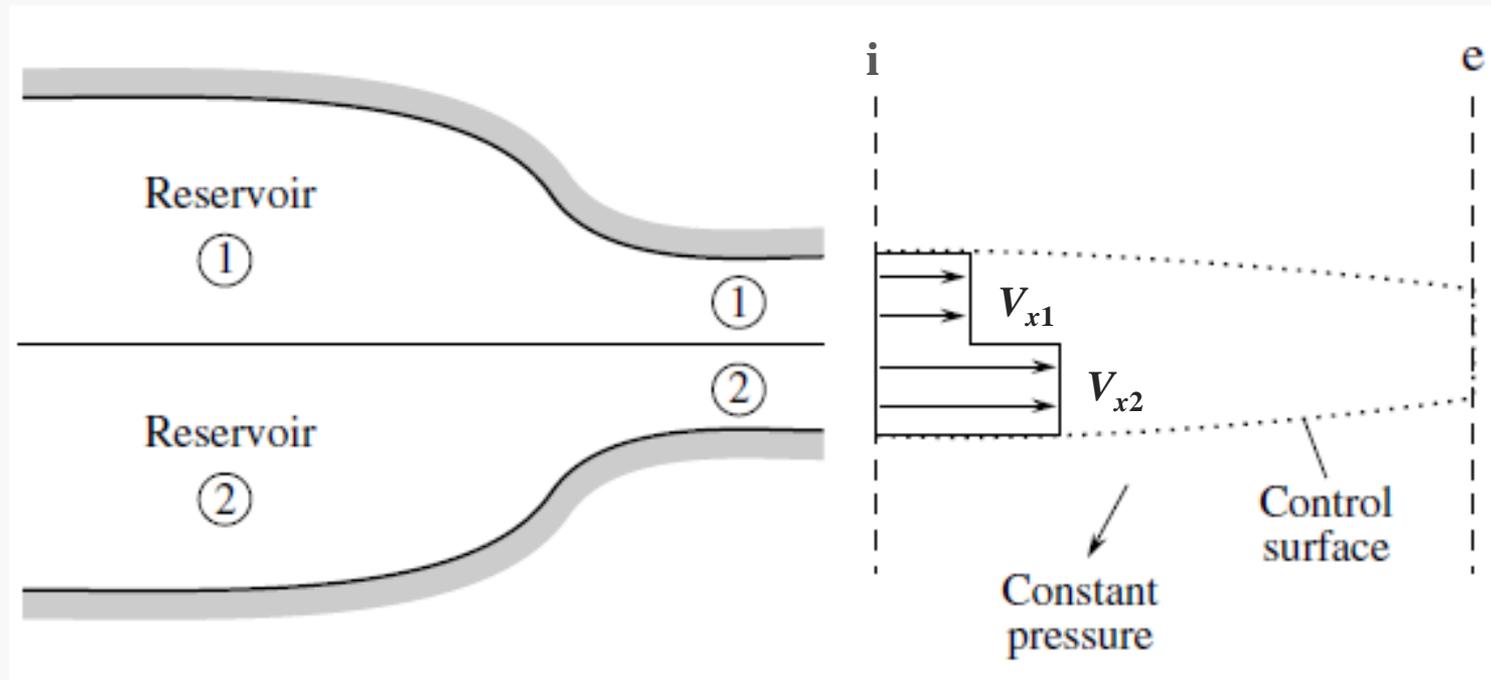


Bilancio di massa:

$$\dot{M}_e = \dot{M}_1 + \dot{M}_2 \quad , \quad \dot{M}_1 = f \dot{M}_e \quad , \quad \dot{M}_2 = (1 - f) \dot{M}_e$$

$$f = \frac{\dot{M}_1}{\dot{M}_e}$$

# Miscelazione di due flussi in ambiente a pressione costante

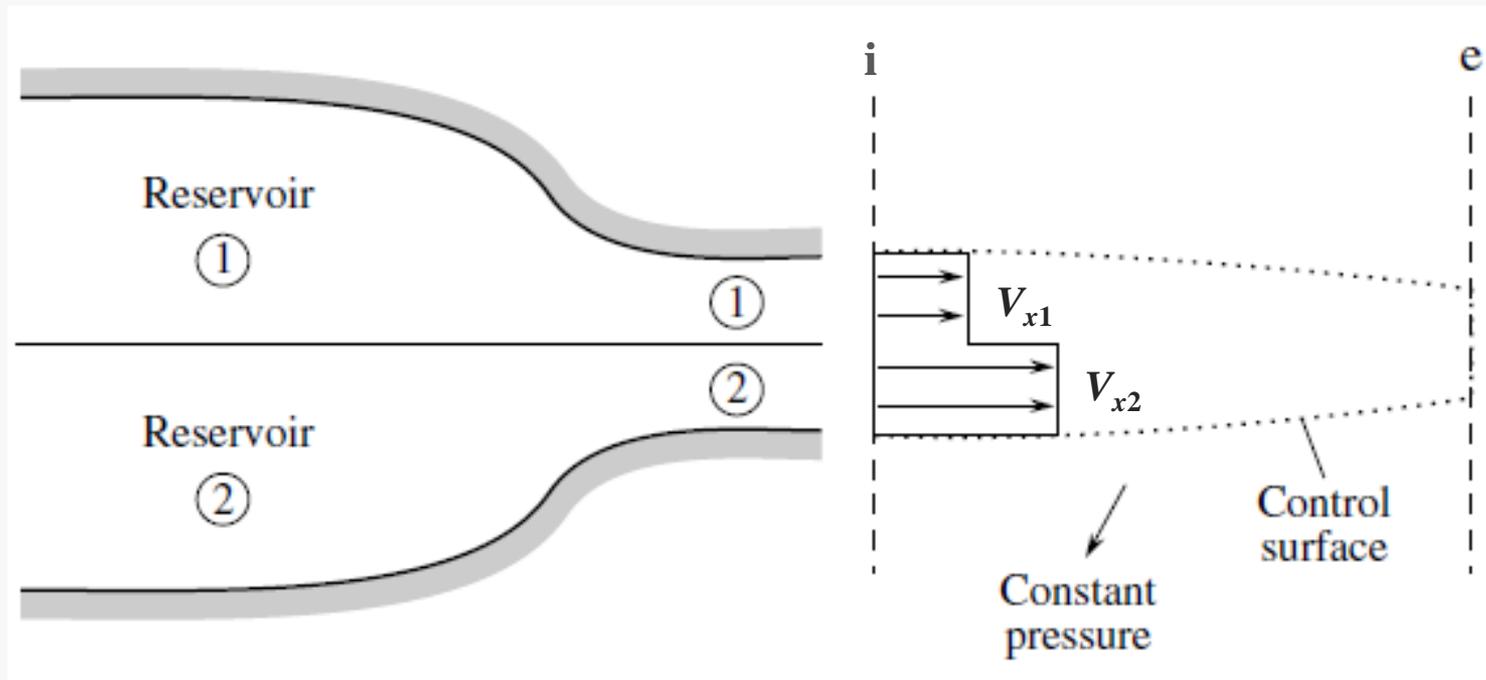


Bilancio della quantità di moto (pressione statica costante):

$$f V_{x1} + (1 - f) V_{x2} = V_{xe}$$



# Miscelazione di due flussi in ambiente a pressione costante



Variazione di pressione totale (pressione statica costante):

$$\bar{p}_{0i} - p_{0e} = [f p_{01} + (1-f) p_{02}] - p_{0e} = \frac{\rho}{2} [f V_{x1}^2 + (1-f) V_{x2}^2 - V_{xe}^2]$$



# Miscelazione di due flussi in ambiente a pressione costante

Ricavando  $V_{xe}$  dall'equazione di bilancio della quantità di moto:

$$V_{xe}^2 = f^2 V_{x1}^2 + (1-f)^2 V_{x2}^2 + 2f(1-f)V_{x1}V_{x2}$$

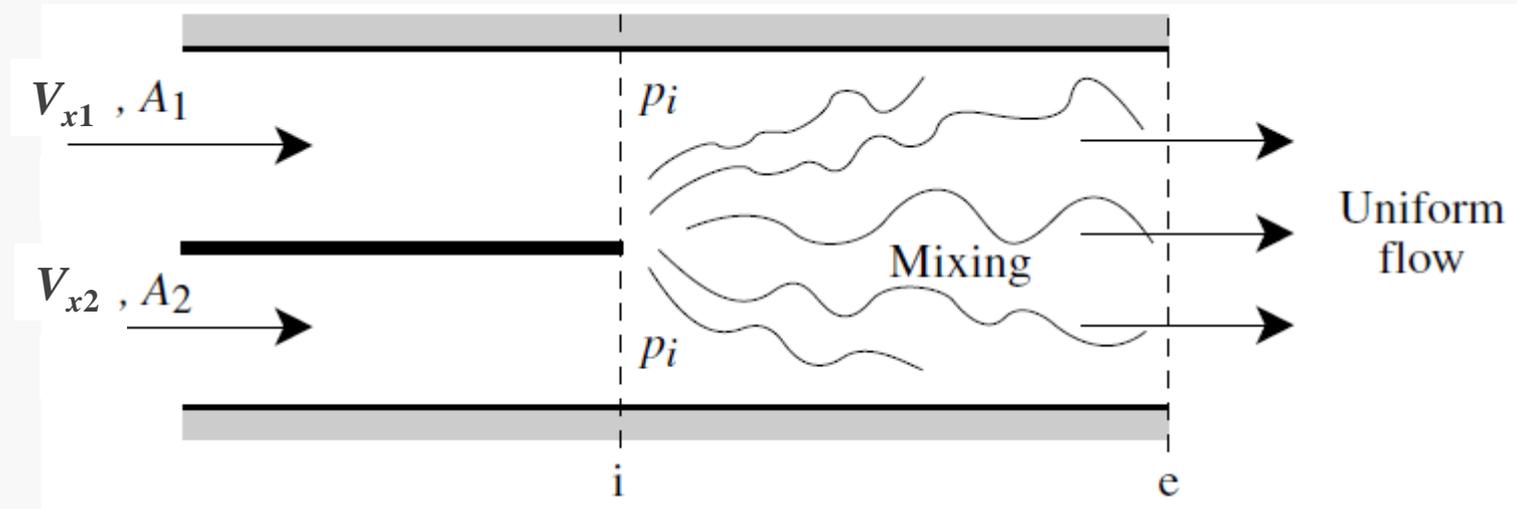
$$\bar{p}_{0i} - p_{0e} = \frac{\rho}{2} f(1-f)(V_{x2} - V_{x1})^2$$

Il coefficiente di perdita assume la forma:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{\bar{p}_{0i} - p_{0e}}{\rho V_{xe}^2 / 2} = f(1-f) \frac{(V_{x2} - V_{x1})^2}{V_{xe}^2} = \\ &= \frac{\dot{M}_1 \dot{M}_2}{(\dot{M}_1 + \dot{M}_2)^2} \left[ \left( \frac{V_{x1}}{V_{xe}} \right)^2 + \left( \frac{V_{x2}}{V_{xe}} \right)^2 - \frac{2V_{x1}V_{x2}}{V_{xe}^2} \right] \end{aligned}$$



# Miscelazione di due flussi incomprimibili in condotto di area costante



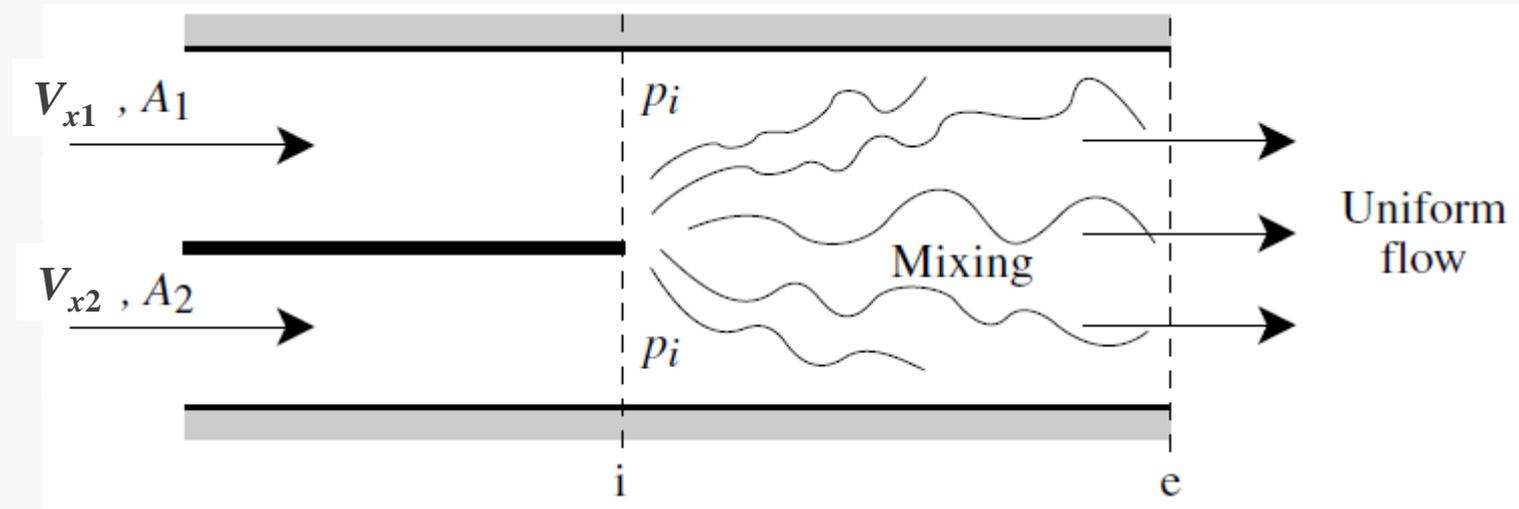
Bilancio di massa ( $\rho = \text{cost.}$ ):

$$A_e V_{xe} = A_1 V_{x1} + A_2 V_{x2} \quad \Rightarrow \quad V_{xe} = f_A V_{x1} + (1 - f_A) V_{x2}$$

$$f_A = \frac{A_1}{A_1 + A_2} = \frac{A_1}{A_e} \quad \Rightarrow \quad f_M = \frac{\dot{M}_1}{\dot{M}_e} = \frac{A_1 V_{x1}}{(A_1 + A_2) V_{xe}} = f_A \frac{V_{x1}}{V_{xe}}$$



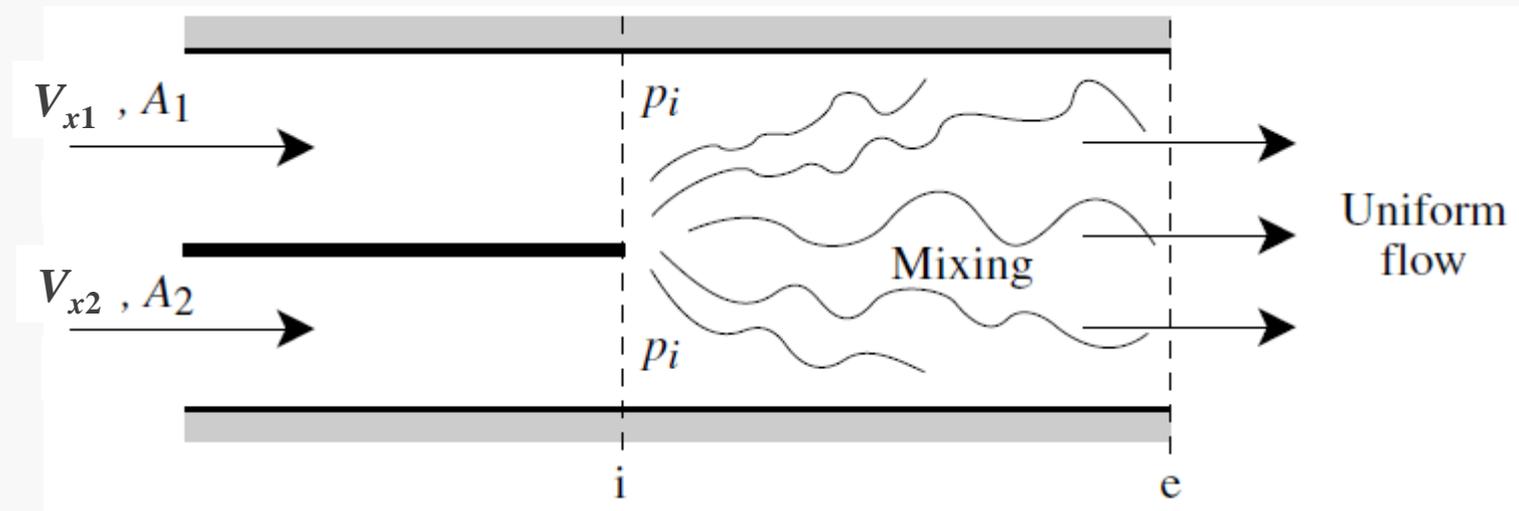
# Miscelazione di due flussi incomprimibili in condotto di area costante



Bilancio della quantità di moto ( $\rho = \text{cost.}$ ):

$$\rho A_1 V_{x1}^2 + p_i A_1 + \rho A_2 V_{x2}^2 + p_i A_2 = \rho A_e V_{xe}^2 + p_e A_e$$
$$p_i - p_e = \rho \left[ V_{xe}^2 - f_A V_{x1}^2 - (1 - f_A) V_{x2}^2 \right]$$

# Miscelazione di due flussi incomprimibili in condotto di area costante



Variazione di pressione totale ( $\rho = \text{cost.}$ ):

$$\begin{aligned}\bar{p}_{0i} - p_{0e} &= [f_M p_{01} + (1 - f_M) p_{02}] - p_{0e} = \\ &= f_M \left( p_i + \rho \frac{V_{x1}^2}{2} \right) + (1 - f_M) \left( p_i + \rho \frac{V_{x2}^2}{2} \right) - p_e - \rho \frac{V_{xe}^2}{2}\end{aligned}$$



# Miscelazione di due flussi incomprimibili in condotto di area costante

$$\begin{aligned}\bar{p}_{0i} - p_{0e} &= f_M \left( p_i + \rho \frac{V_{x1}^2}{2} \right) + (1 - f_M) \left( p_i + \rho \frac{V_{x2}^2}{2} \right) - p_e - \rho \frac{V_{xe}^2}{2} = \\ &= (p_i - p_e) + \frac{\rho}{2} \left( f_M V_{x1}^2 + V_{x2}^2 - f_M V_{x2}^2 - V_{xe}^2 \right)\end{aligned}$$

Ricavando  $(p_i - p_e)$  dall'equazione di bilancio della quantità di moto e scrivendo  $f_M$  in funzione di  $f_A$ :

$$\begin{aligned}\bar{p}_{0i} - p_{0e} &= \rho \left( V_{xe}^2 - f_A V_{x1}^2 - (1 - f_A) V_{x2}^2 \right) + \\ &+ \frac{\rho}{2} \left( f_A \frac{V_{x1}}{V_{xe}} V_{x1}^2 + V_{x2}^2 - f_A \frac{V_{x1}}{V_{xe}} V_{x2}^2 - V_{xe}^2 \right)\end{aligned}$$

$$\bar{p}_{0i} - p_{0e} = \rho \left[ \frac{V_{xe}^2}{2} - \frac{V_{x2}^2}{2} + f_A \left( \frac{V_{x1}}{2V_{xe}} - 1 \right) (V_{x1}^2 - V_{x2}^2) \right]$$



# Miscelazione di due flussi incomprimibili in condotto di area costante

$$Y = \frac{\bar{p}_{0i} - p_{0e}}{\rho \frac{V_{xe}^2}{2}} = 1 - \frac{V_{x2}^2}{V_{xe}^2} + 2f_A \left( \frac{V_{x1}}{2V_{xe}} - 1 \right) \frac{V_{x1}^2 - V_{x2}^2}{V_{xe}^2}$$



# Miscelazione di due flussi incomprimibili in condotto di area costante

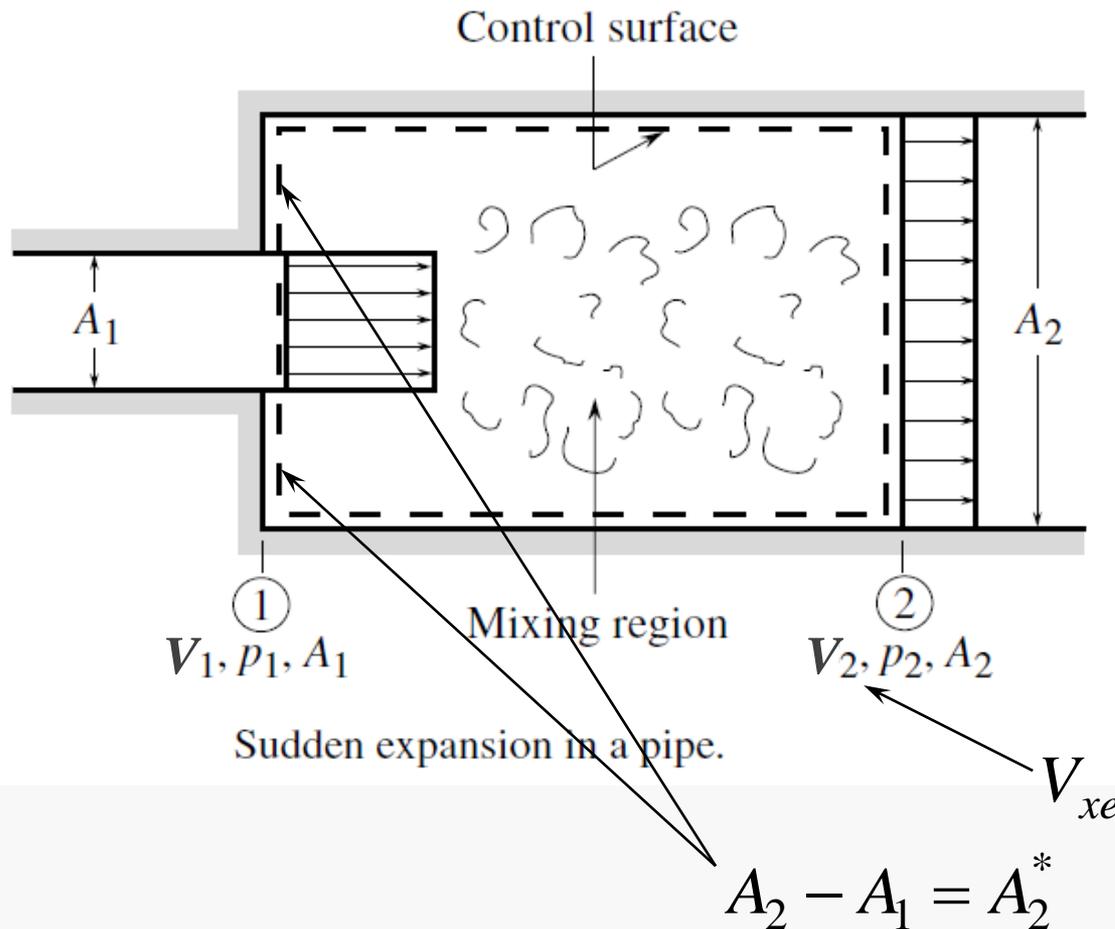
$$Y = \frac{\bar{p}_{0i} - p_{0e}}{\rho \frac{V_{xe}^2}{2}} = 1 - \frac{V_{x2}^2}{V_{xe}^2} + 2f_A \left( \frac{V_{x1}}{2V_{xe}} - 1 \right) \frac{V_{x1}^2 - V_{x2}^2}{V_{xe}^2}$$

Nel caso in cui:  $V_{x2} = 0 \Rightarrow V_{xe} = f_A V_{x1}$

$$Y = 1 + 2f_A \left( \frac{1}{2f_A} - 1 \right) \frac{1}{f_A^2} = 1 + 2 \frac{A_1 + A_2}{A_1} \left( \frac{1 - 2 \frac{A_1}{A_1 + A_2}}{2 \frac{A_1}{A_1 + A_2}} \right) =$$
$$= 1 + \frac{A_1 + A_2}{A_1} \left( \frac{A_2 - A_1}{A_1} \right) \Rightarrow Y = \frac{A_2^2}{A_1^2}$$



# Perdite per brusco allargamento di sezione (flusso stazionario, incomprimibile, non viscoso)



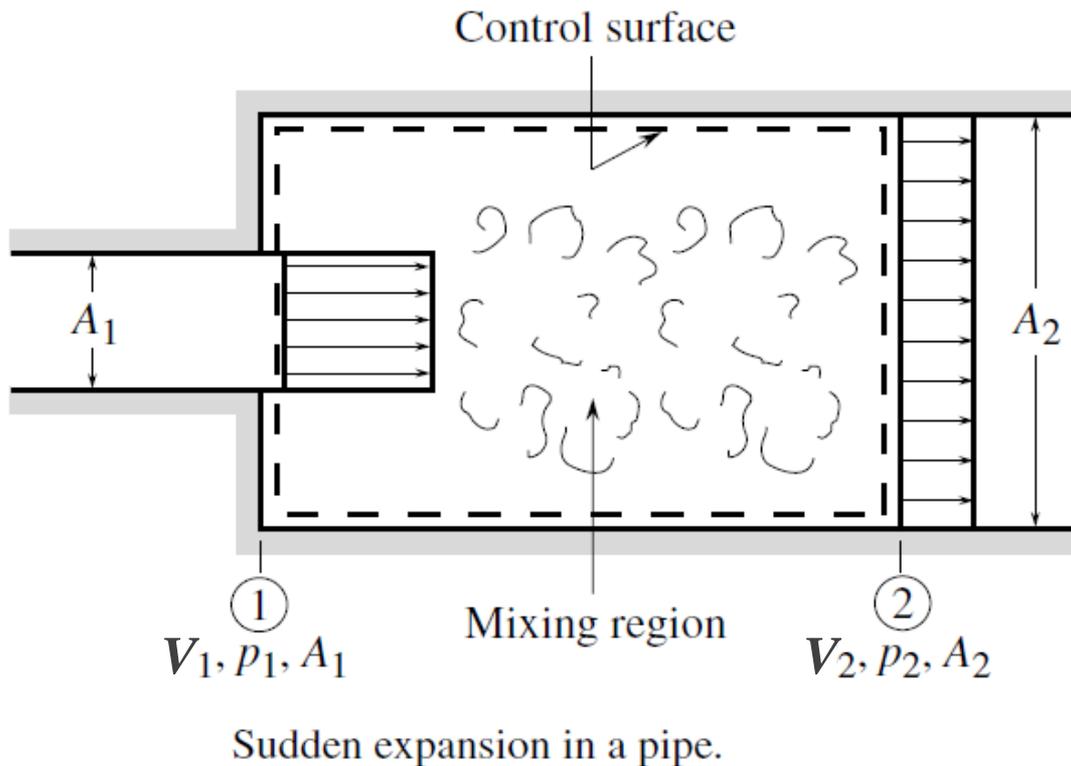
Perdita di pressione totale:

$$Y = \frac{p_{01} - p_{02}}{\rho V_1^2 / 2} = \left(1 - \frac{1}{AR}\right)^2$$

$$Y = \left(\frac{A_2 - A_1}{A_2}\right)^2$$



# Perdite per brusco allargamento di sezione (flusso stazionario, incomprimibile, non viscoso)



Perdita di pressione totale:

$$Y' = \frac{p_{01} - p_{02}}{\rho V_2^2 / 2} = Y \frac{V_1^2}{V_2^2} =$$

$$Y \cdot AR^2 =$$

$$= AR^2 - 2AR + 1 =$$

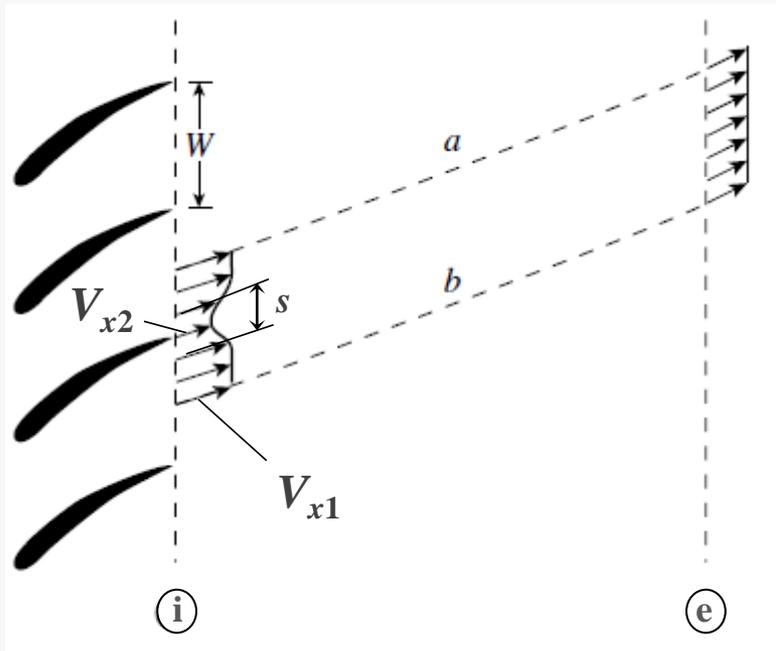
$$= (AR - 1)^2 = \left( \frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2$$

$$Y' = \frac{p_{01} - p_{02}}{\rho V_2^2 / 2} = \left( \frac{A_2 - A_1}{A_1} \right)^2 = \left( \frac{A_2^*}{A_1} \right)^2$$



# Miscelazione della scia a valle di una schiera di pale di turbomacchina

$$Y = \frac{\bar{p}_{0i} - p_{0e}}{\rho \frac{V_{xe}^2}{2}} \cong 1 - \frac{V_{x2}^2}{V_{xe}^2} + 2f_A \left( \frac{V_{x1}}{2V_{xe}} - 1 \right) \frac{V_{x1}^2 - V_{x2}^2}{V_{xe}^2}$$



Nel caso in cui:  $V_{x2} = 0 \Rightarrow V_{xe} = f_A V_{x1}$

$$Y \cong \frac{A_2^2}{A_1^2} = \frac{s^2}{(W - s)^2}$$