Dispensa del corso di
"FLUIDODINAMICA DELLE MACCHINE"

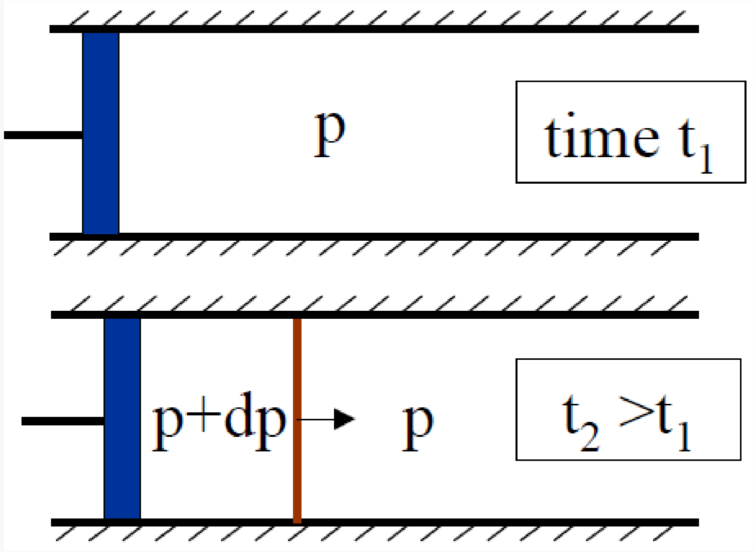
Argomento: velocità del suono
e ipotesi di incomprimibilità

Prof. Pier Ruggero Spina
Dipartimento di Ingegneria

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
- EX LABORE FRUCTUS -

Velocità del suono

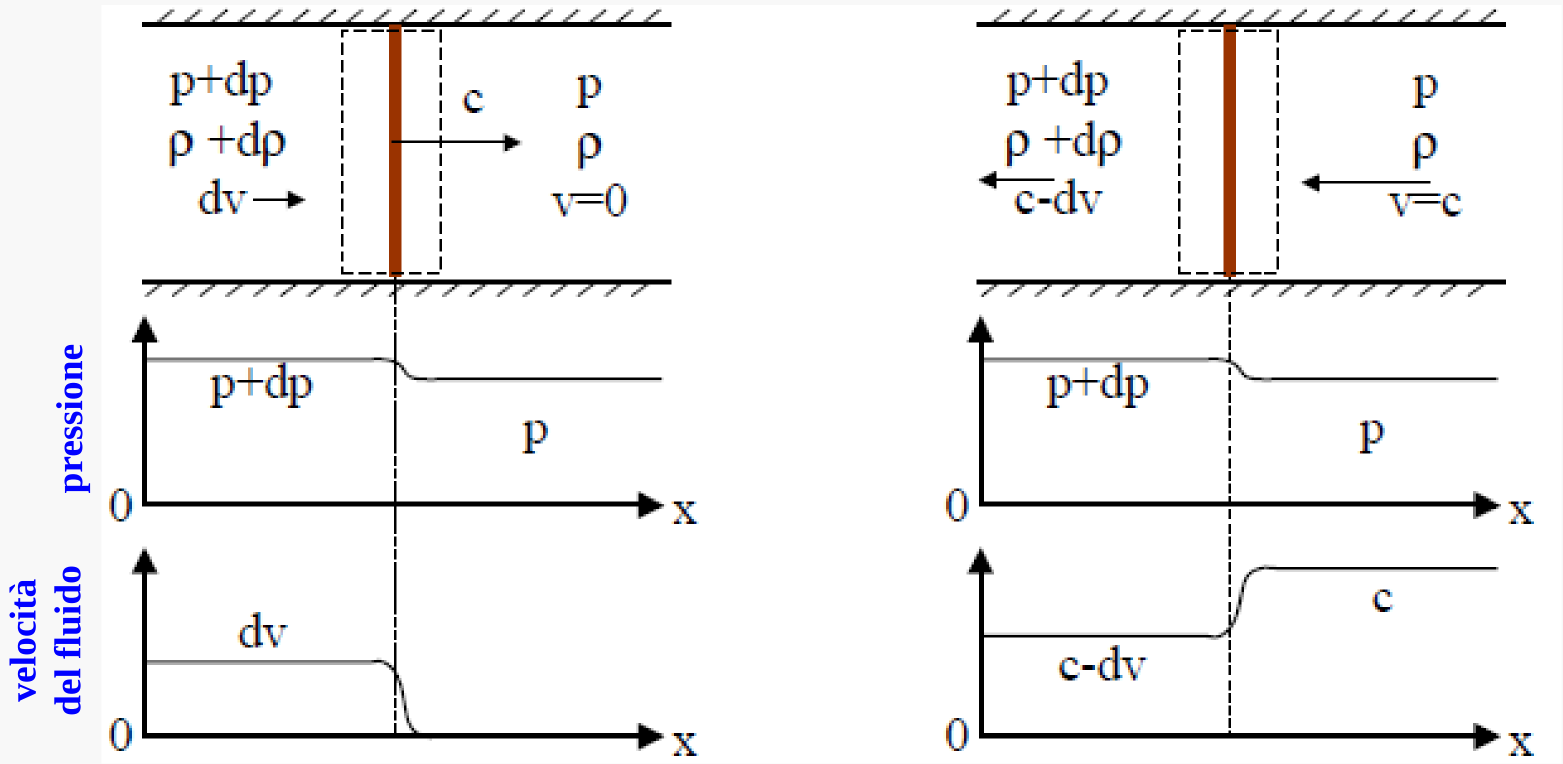
- Si consideri la **propagazione adiabatica monodimensionale di un'onda di pressione debole** (infinitesima) in un fluido comprimibile



Velocità del suono

- Si consideri la **propagazione adiabatica monodimensionale di un'onda di pressione debole** (infinitesima) in un fluido comprimibile, rispetto sia ad un sistema di riferimento fisso (non stazionario), sia ad un sistema di riferimento solidale con l'onda (stazionario).

Sistema di riferimento fisso (non stazionario) | **Sistema di riferimento solidale con l'onda (stazionario)**



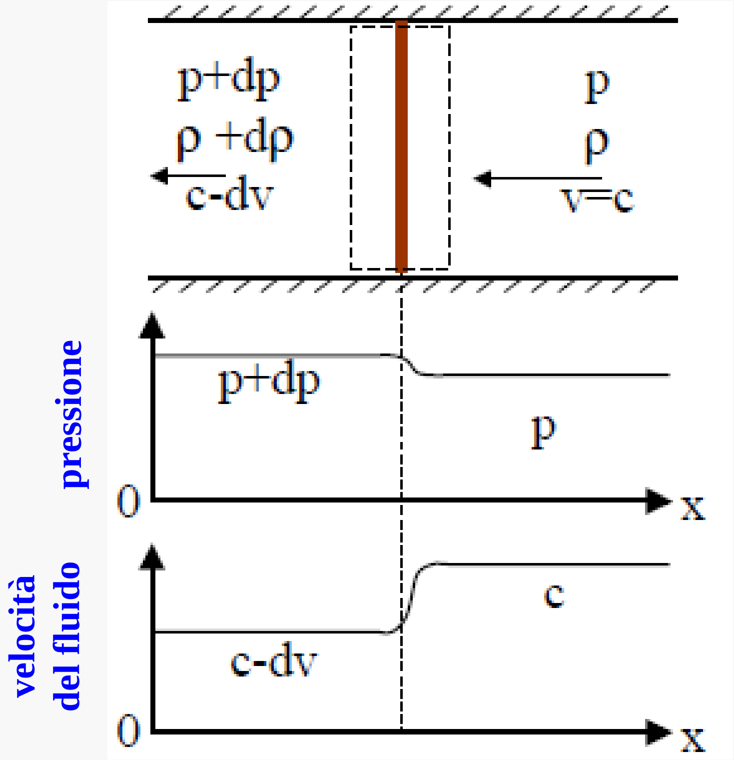
Velocità del suono

Bilancio di massa: $\dot{M}_{in} = \dot{M}_{out} = \dot{M} \;\Rightarrow\; \rho\, c\, A = (\rho + d\rho)(c - dv)\, A$

$$\rho\, c\, A = \rho\, c\, A + d\rho\, c\, A - \rho\, dv\, A - d\rho\, dv\, A$$

$$dv = c\,\frac{d\rho}{\rho + d\rho}$$

Sistema di riferimento solidale con l'onda (stazionario)



Bilancio della quantità di moto:

$$A(p + dp - p) + \dot{M}\left[(c - dv) - c\right] = 0$$

$$A dp = \dot{M}\; dv = (\rho\, c\, A)\, dv$$

$$dp = \rho\, c\, dv$$

che combinate forniscono:

$$dp = \rho\, c^2\,\frac{d\rho}{\rho + d\rho} \;\Rightarrow\; c^2 = \frac{dp}{d\rho}\left(1 + \frac{d\rho}{\rho}\right)$$

Velocità del suono

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho}\left(1 + \frac{d\rho}{\rho}\right)$$

Per un'onda di pressione debole (infinitesima):

- **la velocità *c* dell'onda coincide con la velocità del suono**
- $d\rho/\rho << 1$
- **la trasformazione può essere assunta essere** reversibile, oltre che adiabatica, quindi **isentropica**

La velocità del suono adiabatica risulta pertanto

$$\boxed{c = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s}}$$

Velocità del suono

Per un gas perfetto: $pv = \dfrac{p}{\rho} = \dfrac{R_0}{\mathcal{M}} T = R\,T \quad , \quad R = c_p - c_v$

$$c_p = \left(\frac{dh}{dT}\right) \quad , \quad c_v = \left(\frac{du}{dT}\right)$$

lungo una trasformazione isentropica risulta: $p/\rho^{\gamma} = \text{cost}$

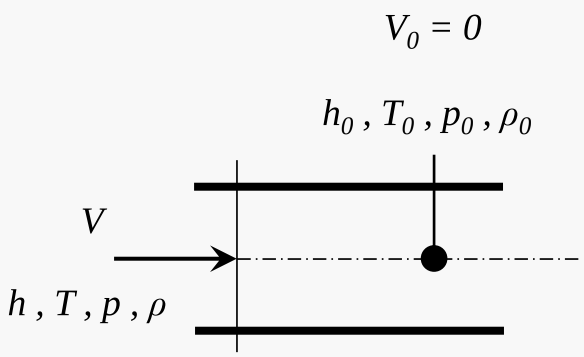
che differenziata fornisce:

$$\frac{dp}{\rho^{\gamma}} - \gamma \frac{p}{\rho^{(\gamma+1)}} d\rho = 0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma\,R\,T$$

$$\boxed{c = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s} = \sqrt{\gamma\,R\,T}}$$

Grandezze statiche e totali

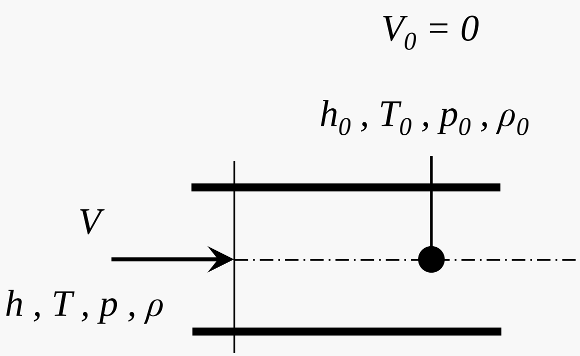
Si consideri un condotto fisso adiabatico all'interno del quale ci sia un punto "0" in cui il fluido ristagna



In condizioni stazionarie, integrando l'equazione di bilancio dell'energia tra la sezione indisturbata e il punto di ristagno "0", si ottiene:

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2}$$ entalpia totale o di ristagno

Grandezze statiche e totali



$$h_0 = h + \frac{V^2}{2}$$ entalpia totale o di ristagno

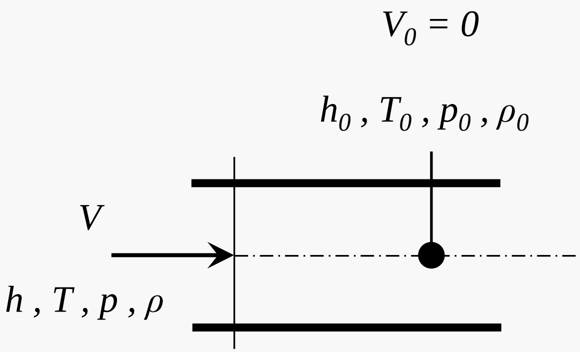
Nell'ipotesi che il fluido sia un gas perfetto:

$$c_p = \left(\frac{dh}{dT}\right) \rightarrow dh = c_p \, dT$$

Nell'ipotesi di poter considerare c_p = cost.:

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}$$ temperatura totale o di ristagno

Grandezze statiche e totali



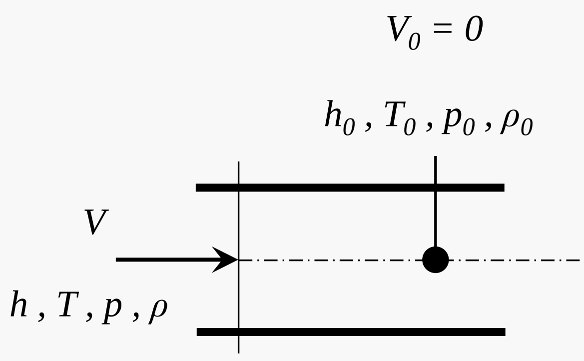
$$h_0 = h + \frac{V^2}{2}$$ entalpia totale o di ristagno

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}$$ temperatura totale o di ristagno

$$T_0 = T\left(1 + \frac{V^2}{2\frac{\gamma R}{\gamma - 1}T}\right) = T\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{V^2}{c^2}\right) =$$

$$= T\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)$$

Grandezze statiche e totali



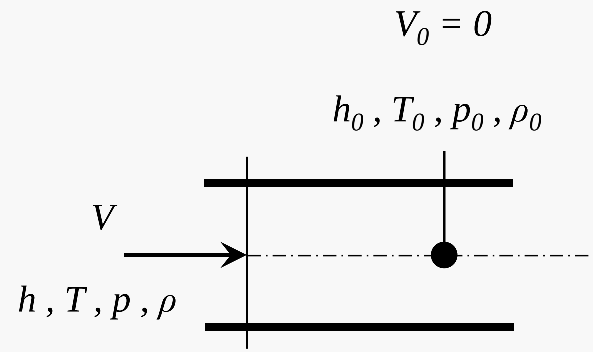
$$h_0 = h + \frac{V^2}{2}$$ entalpia totale o di ristagno

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p} = T\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$$ temperatura totale o di ristagno

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Grandezze statiche e totali



$$h_0 = h + \frac{V^2}{2}$$ entalpia totale o di ristagno

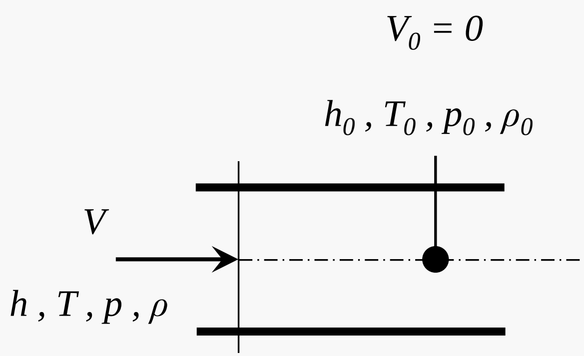
$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p} = T\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$$ temperatura totale o di ristagno

$$p_0 = p\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$ pressione totale

$$\rho_0 = \rho\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$ densità totale

Ipotesi di incomprimibilità

$$\rho_0 = \rho\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$ densità totale



Massima variazione di densità nel punto di ristagno:

$$\frac{\rho_0 - \rho}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - 1$$

Per $\gamma = 1.4$:

M = 0.30 → $\dfrac{\rho_0 - \rho}{\rho} = 0.046 \quad (< 5\ \%)$

M = 0.15 → $\dfrac{\rho_0 - \rho}{\rho} = 0.011 \quad (\approx 1\ \%)$