Dispensa del corso di
“FLUIDODINAMICA DELLE MACCHINE”

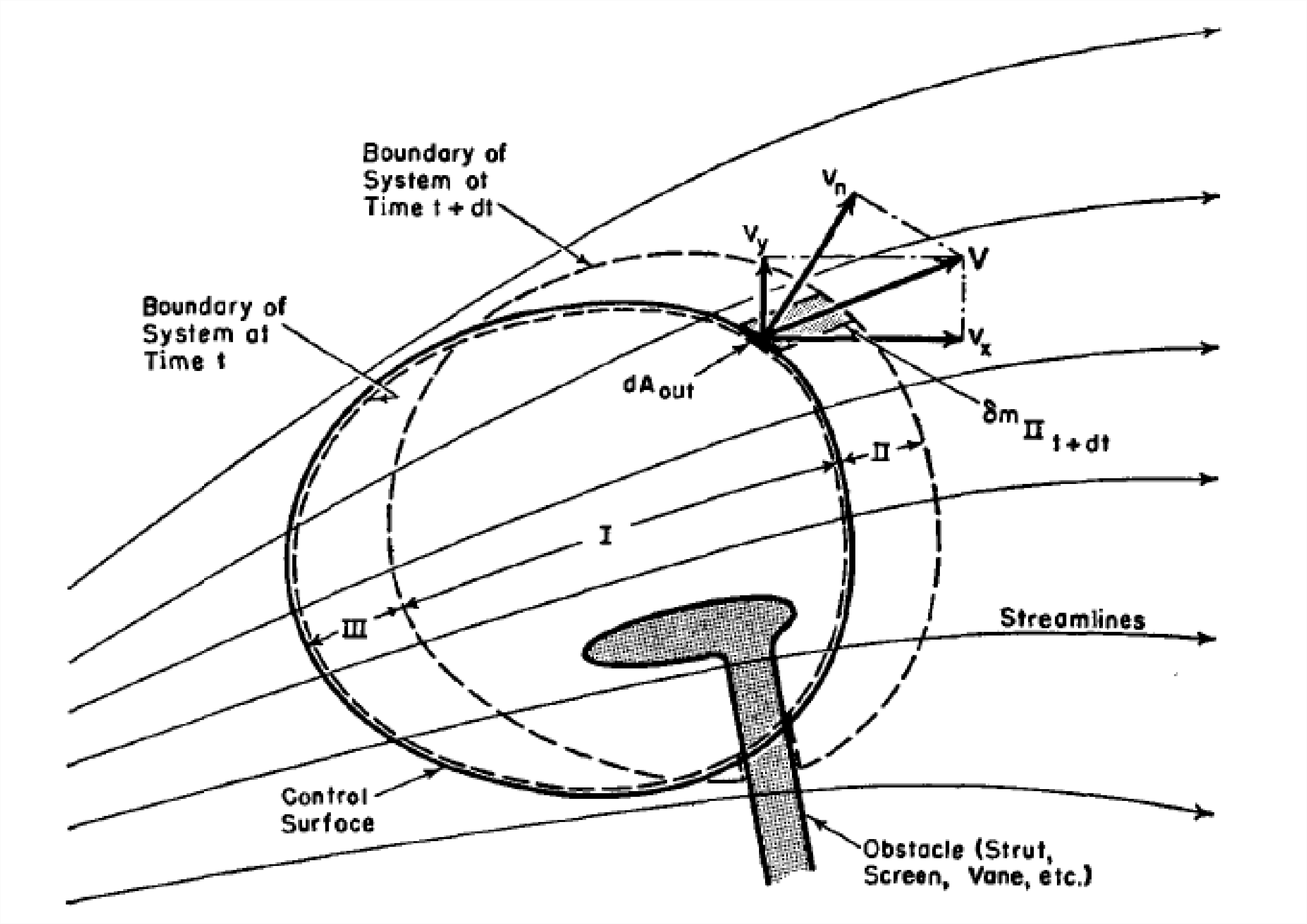
Argomento: Equazioni del moto

Prof. Pier Ruggero Spina
Dipartimento di Ingegneria

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
- EX LABORE FRUCTUS -

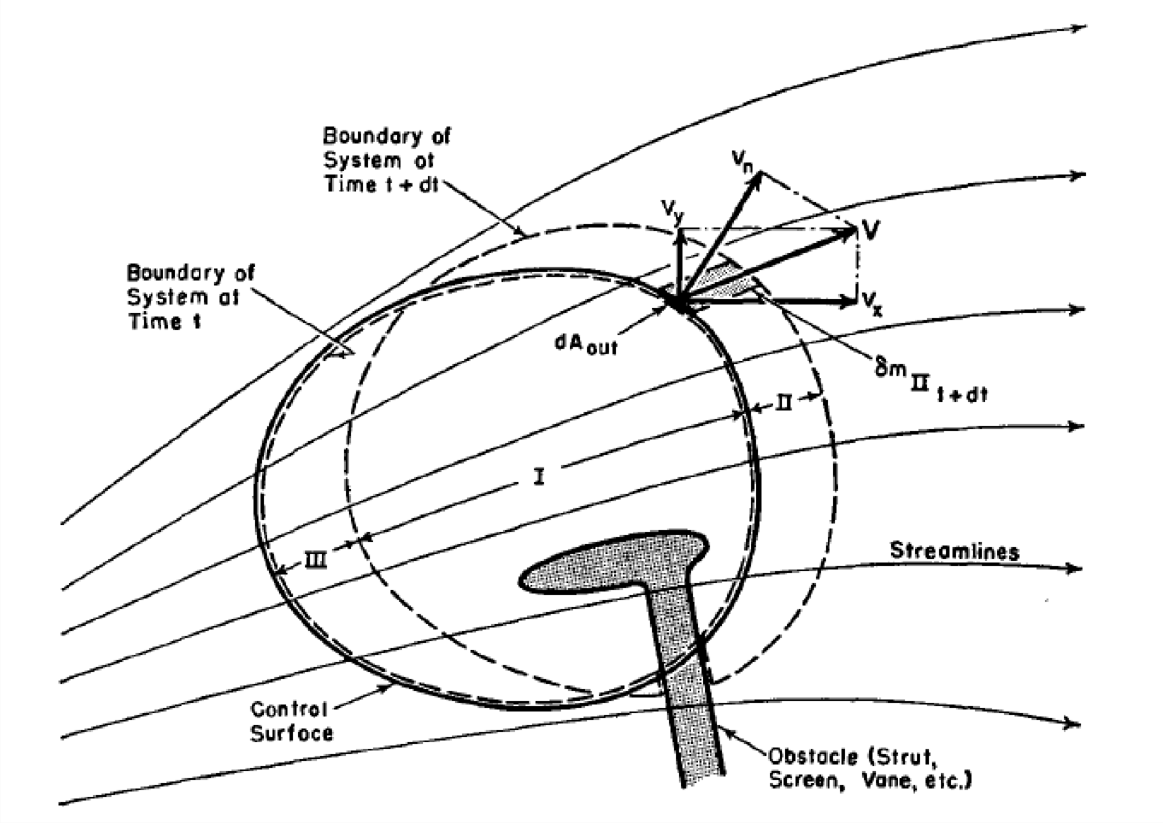
Equazioni del moto

Approccio euleriano



Equazione di bilancio di massa

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v.}\rho\, d\mathcal{V} = \int_{c.v.}\frac{\partial\rho}{\partial t}\, d\mathcal{V} = -\int_{c.s.}\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, dA = \int_{A_{in}}\rho V_n\, dA - \int_{A_{out}}\rho V_n\, dA$$



Equazione di bilancio di massa

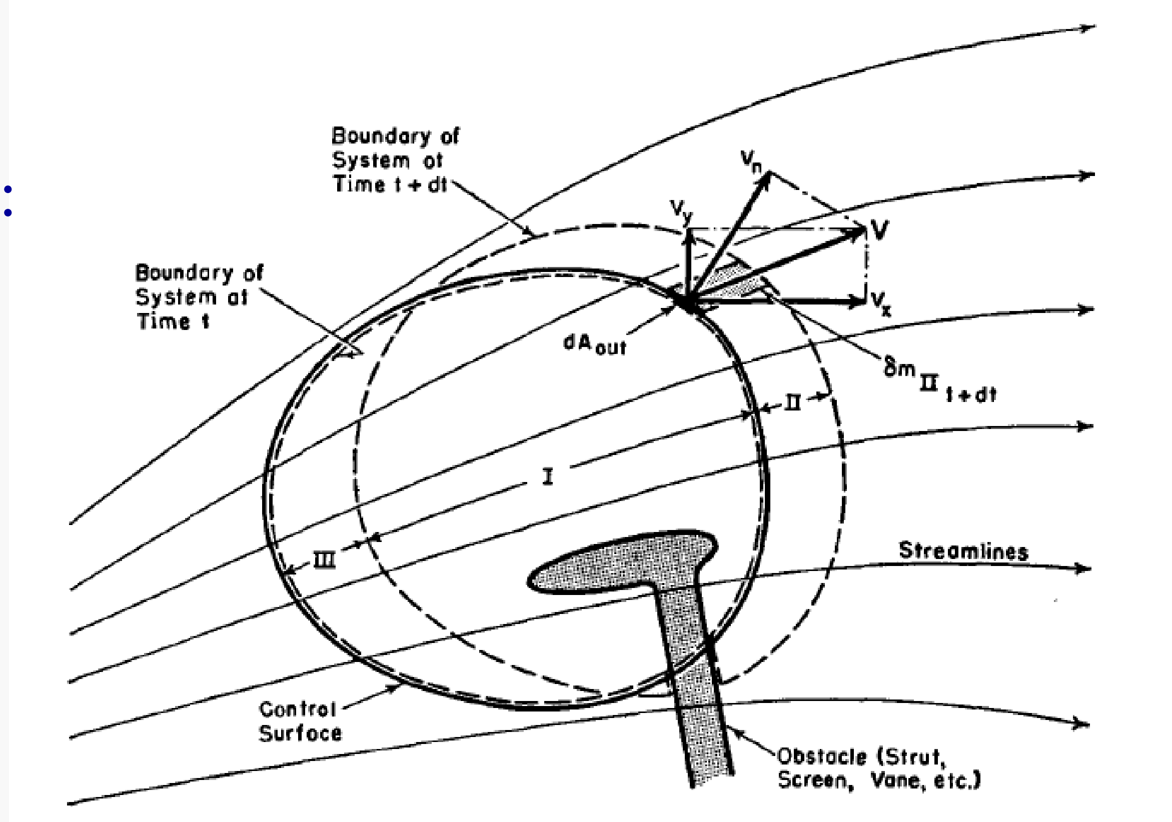
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v.}\rho\, d\mathcal{V} = \int_{c.v.}\frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\mathcal{V} = -\int_{c.s.}\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, dA = \int_{A_{in}}\rho V_n\, dA - \int_{A_{out}}\rho V_n\, dA$$

In condizioni stazionarie:

$$\int_{A_{in}}\rho V_n\, dA = \int_{A_{out}}\rho V_n\, dA$$

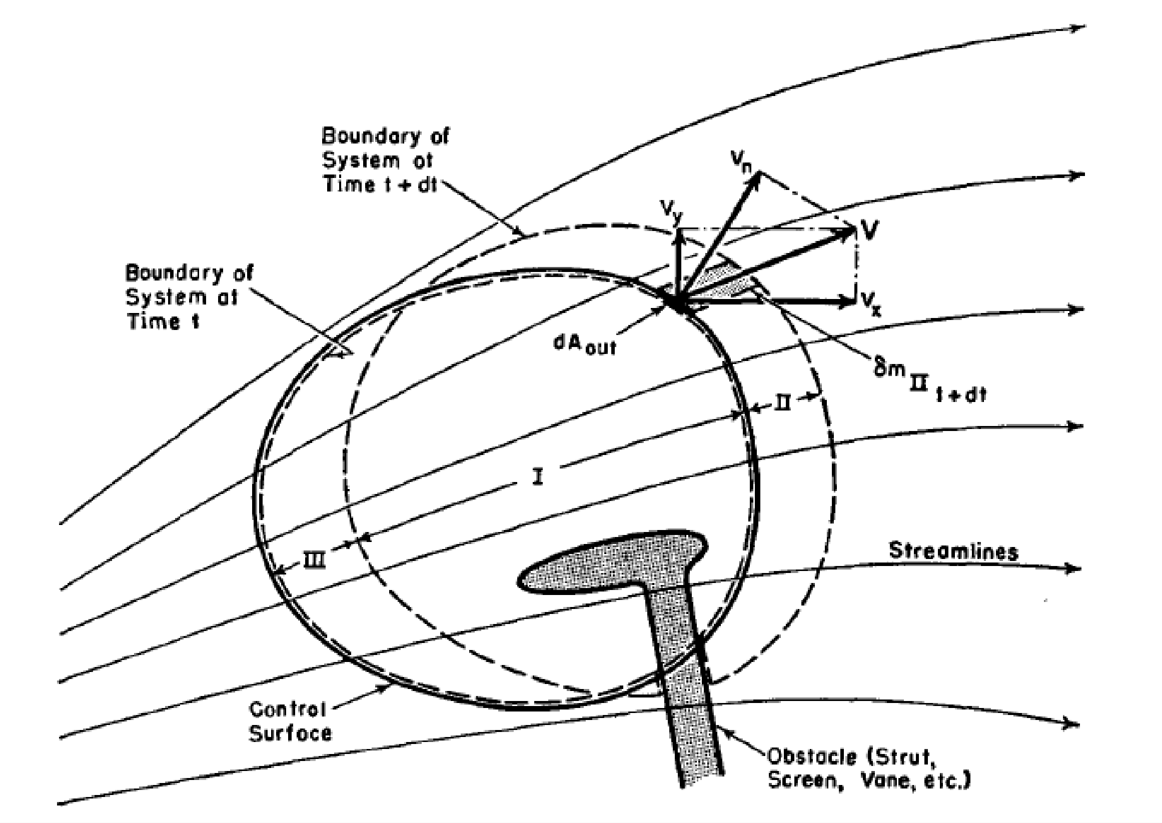
$$\dot{M}_{in} = \dot{M}_{out}$$

$$\dot{M} = \frac{dM}{dt} = \text{cost.}$$



Equazione di bilancio della quantità di moto

$$\sum \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v.} \rho \mathbf{V} \, d\mathcal{V} + \int_{c.s.} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \, dA$$

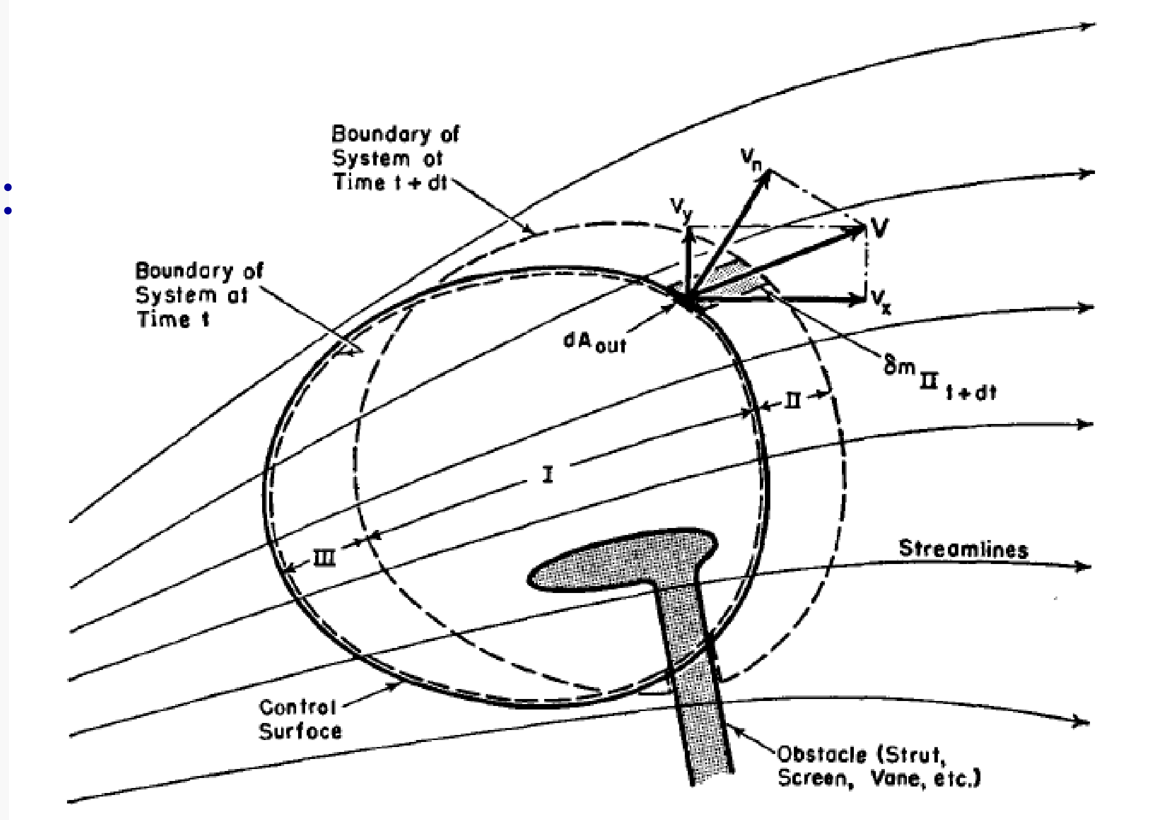


Equazione di bilancio della quantità di moto

$$\sum \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v.} \rho \mathbf{V}\, d\mathcal{V} + \int_{c.s.} \rho \mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\, dA$$

In condizioni stazionarie:

$$\sum \mathbf{F} = \int_{c.s.} \rho \mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\, dA$$



Equazione di bilancio della quantità di moto in direzione x

$$\sum F_x = \frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v.} \rho V_x \, d\mathcal{V} + \int_{A_{out}} \rho V_x \, V_n \, dA - \int_{A_{in}} \rho V_x \, V_n \, dA$$

Equazione di bilancio della quantità di moto in direzione x

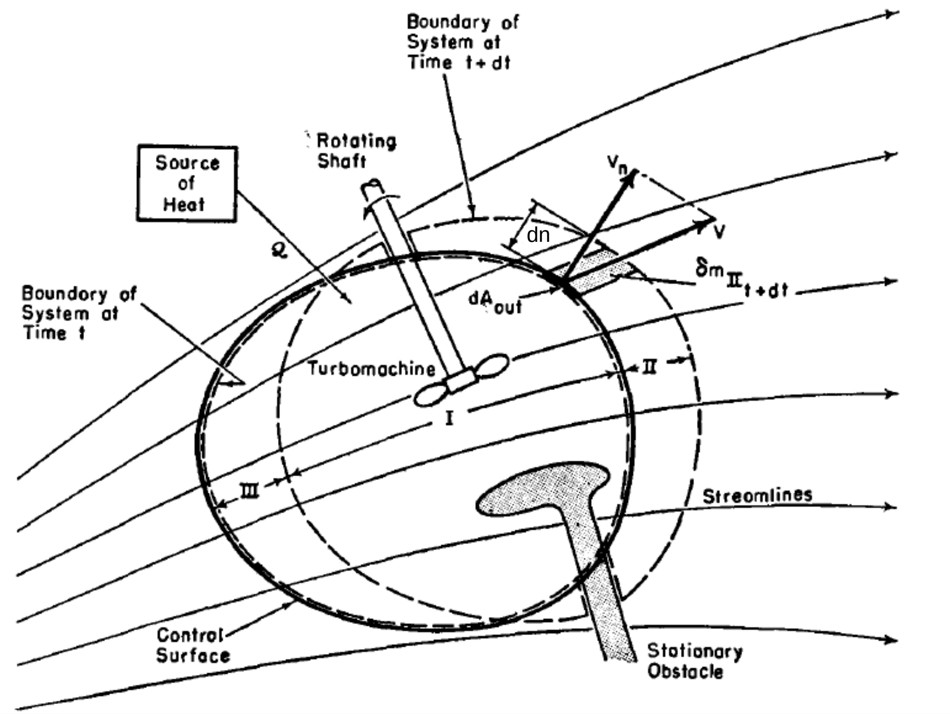
$$\sum F_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v.} \rho V_x \, d\mathcal{V} + \int_{A_{out}} \rho V_x \, V_n \, dA - \int_{A_{in}} \rho V_x \, V_n \, dA$$

In condizioni stazionarie:

$$\sum F_x = \int_{A_{out}} \rho V_x \, V_n \, dA - \int_{A_{in}} \rho V_x \, V_n \, dA$$

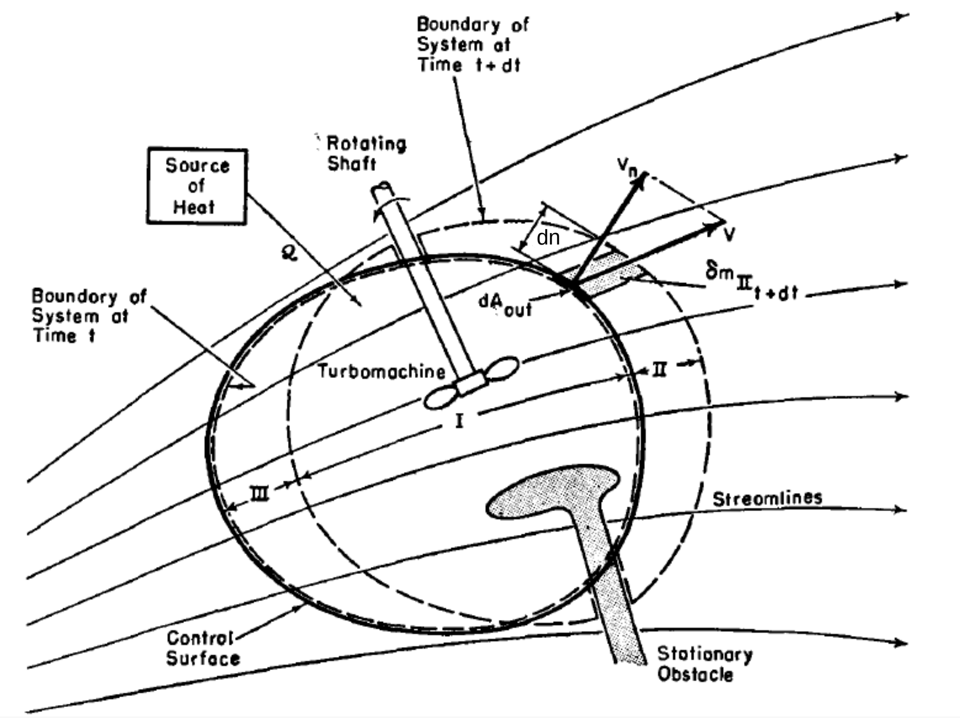
Equazione di bilancio dell'energia
(I principio della termodinamica per un sistema aperto)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta \bar{L}}{dt}$$



Equazione di bilancio dell'energia (I principio della termodinamica per un sistema aperto)

$$\frac{dE}{dt}=\frac{\delta Q}{dt}-\frac{\delta \overline{L}}{dt}$$

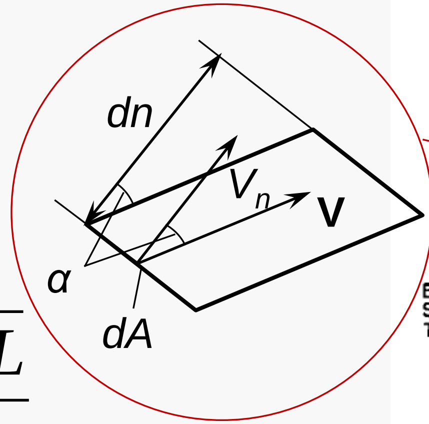


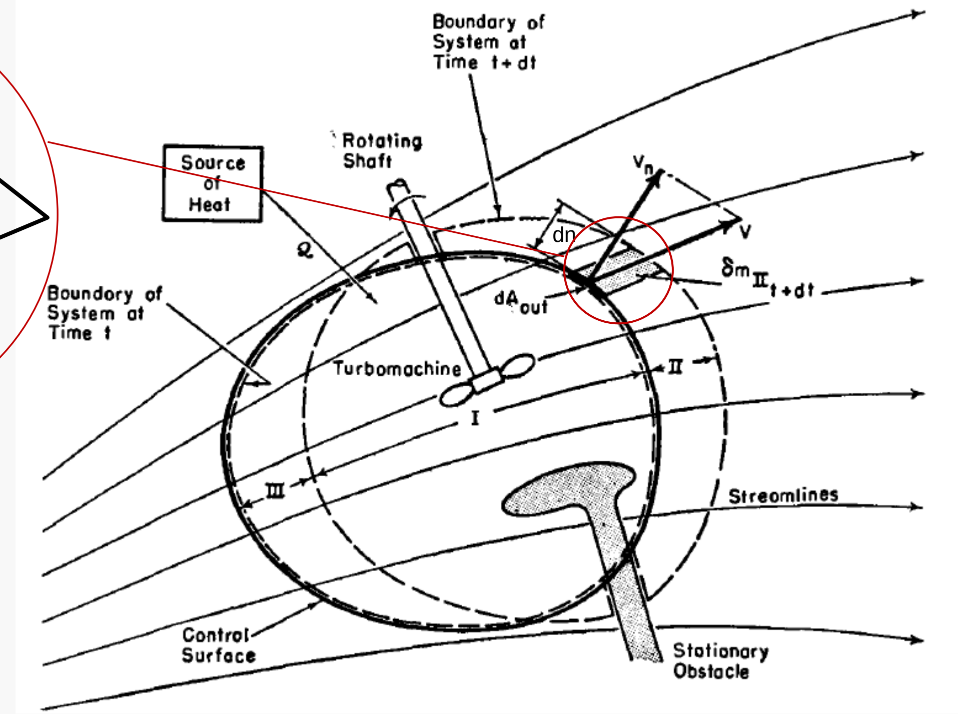
$$\frac{dE}{dt}=\int_{c.v.}\frac{\partial(e\rho)}{\partial t}\,d\mathcal{V}+\int_{c.s.}e\,\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dA \quad , \qquad e=u+\frac{V^2}{2}+g\,z$$

$$\frac{\delta \overline{L}}{dt}=\frac{\delta L}{dt}+\frac{\delta L_{shear}}{dt}+\int_{c.s.}pv\,\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dA$$

Equazione di bilancio dell'energia
(I principio della termodinamica per un sistema aperto)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta \overline{L}}{dt}$$



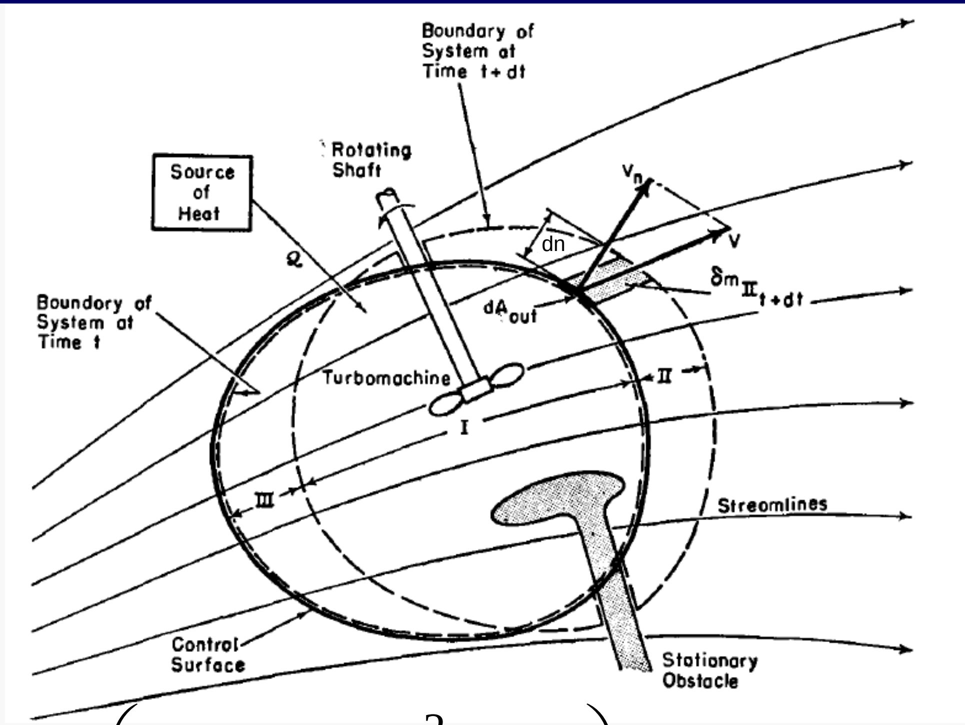


$$\frac{dE}{dt} = \int_{c.v.} \frac{\partial (e\rho)}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{c.s.} e\,\rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, dA \quad , \quad e = u + \frac{V^2}{2} + g\,z$$

$$\frac{\delta \overline{L}}{dt} = \frac{\delta L}{dt} + \frac{\delta L_{shear}}{dt} + \boxed{\int_{c.s.} pv\,\rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, dA}$$

$$\int_{c.s.} p\,\overset{1}{v\,\rho}\,V_n\, dA = \int_{c.s.} p\,\frac{dn}{dt}\, dA = \frac{\int_{c.s.} p\, dA\, dn}{dt}$$

Equazione di bilancio dell'energia
(I principio della termodinamica per un sistema aperto)

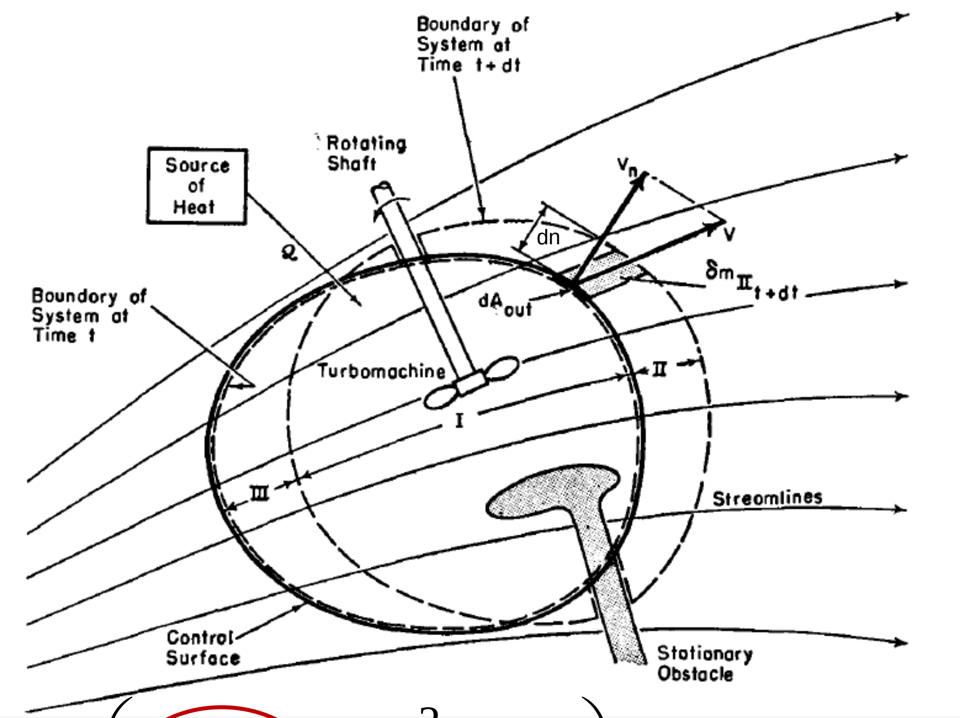


$$\frac{\delta Q}{dt} = \frac{\delta \overline{L}}{dt} + \frac{dE}{dt}$$

$$\frac{\delta Q}{dt} = \frac{\delta L}{dt} + \frac{\delta L_{shear}}{dt} + \int_{c.v.} \frac{\partial (e\rho)}{\partial t} d\mathscr{V} + \int_{c.s.} \left(pv + u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

Equazione di bilancio dell'energia
(I principio della termodinamica per un sistema aperto)

$$\frac{\delta Q}{dt} = \frac{\delta \bar{L}}{dt} + \frac{dE}{dt}$$

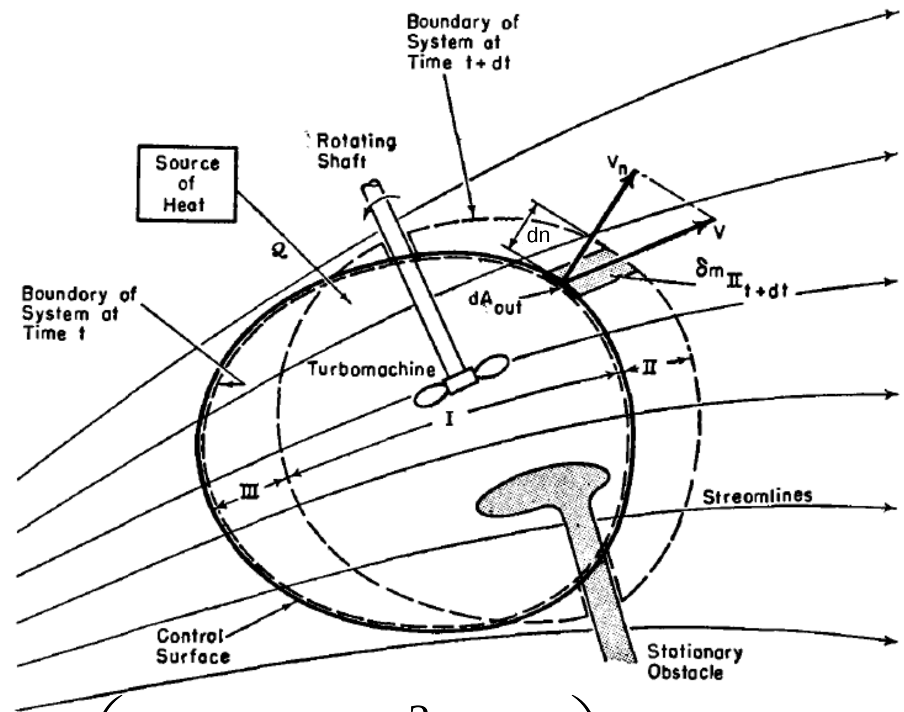


$$\frac{\delta Q}{dt} = \frac{\delta L}{dt} + \frac{\delta L_{shear}}{dt} + \int_{c.v.} \frac{\partial (e\rho)}{\partial t} d\mathscr{V} + \int_{c.s.} \left(pv + u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dA$$

$$h$$

Equazione di bilancio dell'energia
(I principio della termodinamica per un sistema aperto)

$$\frac{\delta Q}{dt} = \frac{\delta \overline{L}}{dt} + \frac{dE}{dt}$$



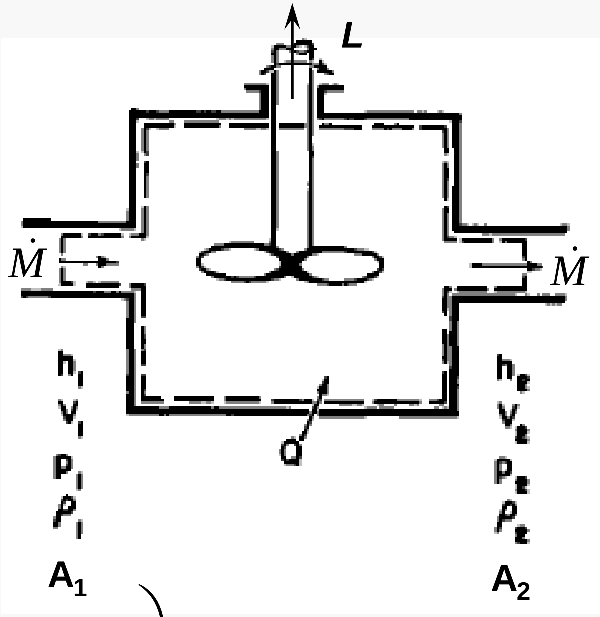
$$\frac{\delta Q}{dt} = \frac{\delta L}{dt} + \frac{\delta L_{shear}}{dt} + \int_{c.v.} \frac{\partial (e\rho)}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{c.s.} \left(pv + u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

$$\frac{\delta Q}{dt} = \frac{\delta L}{dt} + \frac{\delta L_{shear}}{dt} + \int_{c.v.} \frac{\partial (e\rho)}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{c.s.} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

Equazione di bilancio dell'energia in condizioni stazionarie (c. s. coincide con la superficie interna del dispositivo)

$$\dot{M} = \frac{dM}{dt} = \int_{A_1} \rho V_n dA = \int_{A_2} \rho V_n dA$$

$$\int_{c.v.} \frac{\partial(e\rho)}{\partial t} d\mathcal{V} = 0 \quad , \quad \frac{\delta L_{shear}}{dt} = 0$$

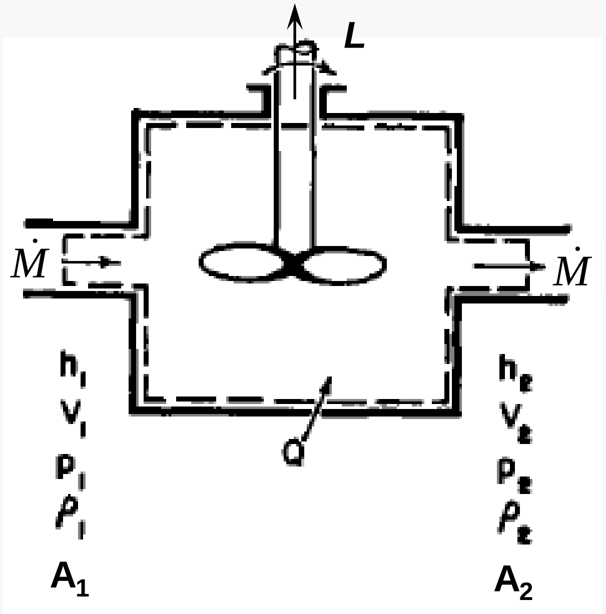


$$\frac{\delta Q}{dt} = \frac{\delta L}{dt} + \frac{\delta L_{shear}}{dt} + \int_{c.v.} \frac{\partial(e\rho)}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{c.s.} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta L}{dt} = \int_{c.s.} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

Equazione di bilancio dell'energia in condizioni stazionarie (c. s. coincide con la superficie interna del dispositivo)



$$\frac{\delta Q}{dt}-\frac{\delta L}{dt}=\int_{c.s.}\left(h+\frac{V^2}{2}+gz\right)\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dA=$$

$$=\int_{A_2}\left(h+\frac{V^2}{2}+gz\right)\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dA-\int_{A_1}\left(h+\frac{V^2}{2}+gz\right)\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dA=$$

$$=\dot{M}\left[h_2-h_1+\frac{V_2^2-V_1^2}{2}+g\left(z_2-z_1\right)\right]$$

Equazione di bilancio dell'energia in condizioni stazionarie (c. s. coincide con la superficie interna del dispositivo)

$$\frac{\dfrac{\delta Q}{dt}-\dfrac{\delta L}{dt}}{\dot{M}}=\frac{\dfrac{\delta Q}{dt}-\dfrac{\delta L}{dt}}{\dfrac{dM}{dt}}=\frac{\delta Q}{dM}-\frac{\delta L}{dM}=q-l$$

$$\Downarrow$$

$$q-l=\left[h_2-h_1+\frac{V_2^2-V_1^2}{2}+g\left(z_2-z_1\right)\right]$$

Equazione di bilancio dell'energia in condizioni stazionarie (c. s. coincide con la superficie interna del dispositivo)

Forma differenziale **entalpica:** $\boxed{dh + VdV + gdz = dq - dl}$

ricordando che:

$$h = u + pv \quad \rightarrow \quad dh = du + pdv + vdp$$

$$du = dq - pdv + dR$$

$$du + pdv = dq + dR = dq_{rev} + dq_{irrev} =$$
$$= Tds_{rev} + Tds_{irrev} = Tds$$

risulta: $dh = dq + dR + vdp$

Equazione di bilancio dell'energia in condizioni stazionarie (c. s. coincide con la superficie interna del dispositivo)

Forma differenziale **entalpica:**

$$\boxed{dh + VdV + gdz = dq - dl}$$

ricordando che:

$$dh = dq + dR + vdp$$

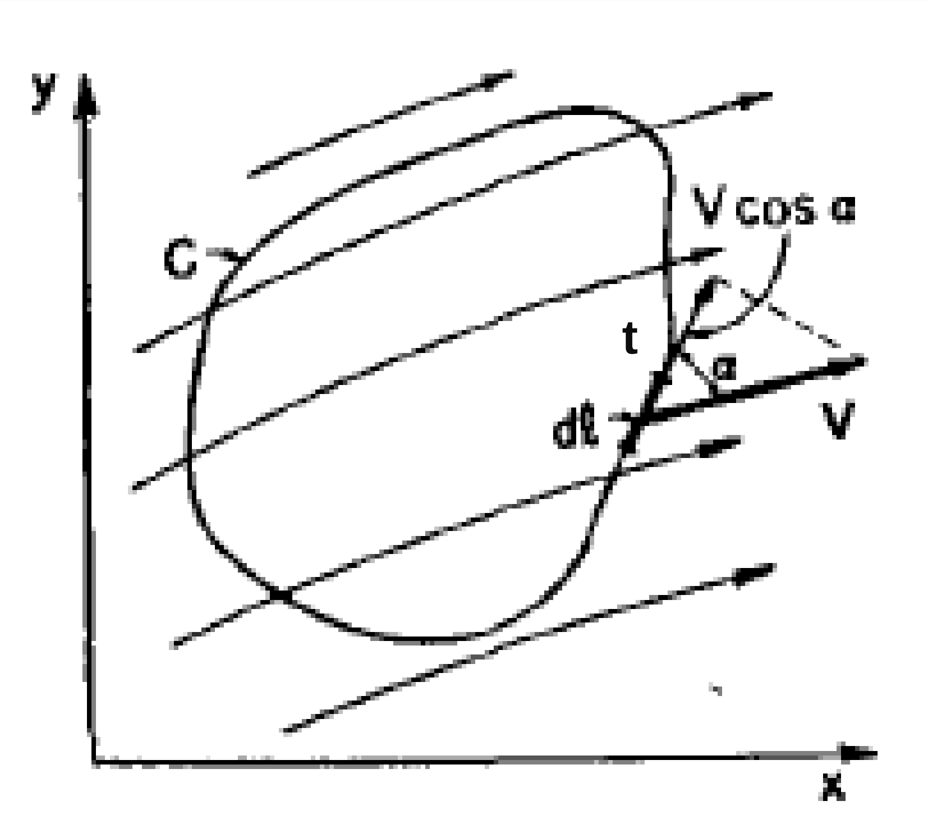
si ottiene la **forma meccanica**:

$$\boxed{VdV + gdz + vdp + dR + dl = 0}$$

Significato fisico di

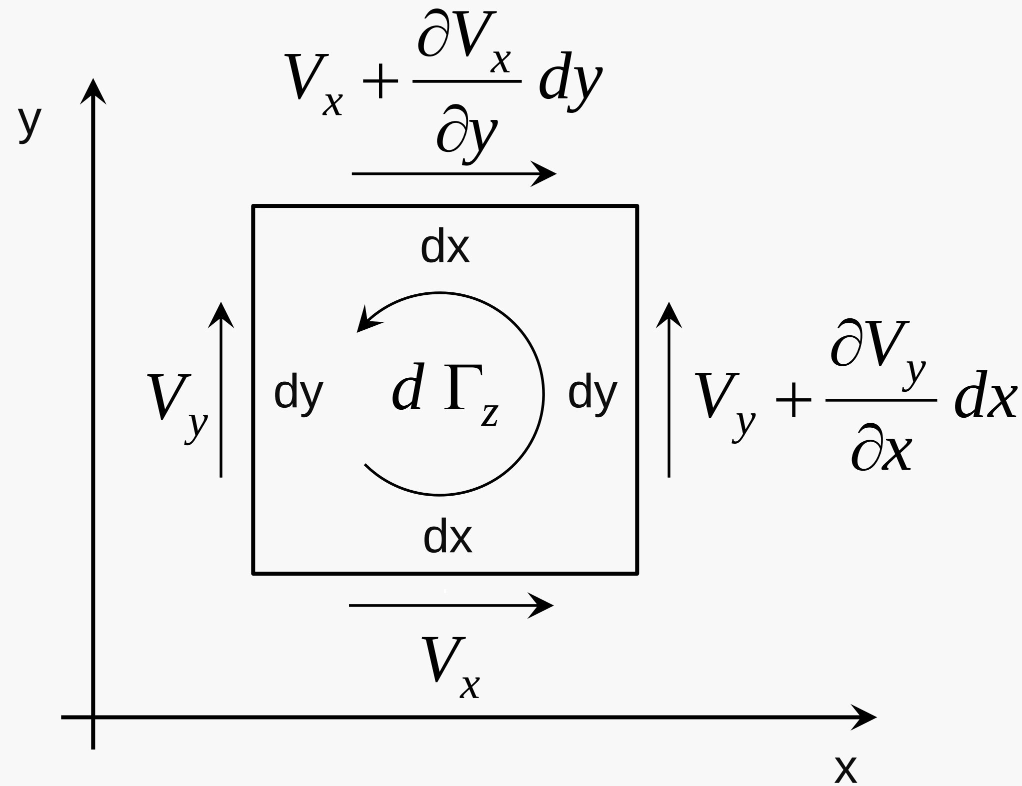
"flusso irrotazionale"

Circolazione



$$\Gamma_z = \oint_C \mathbf{V}\cdot\mathbf{t}\, dl = \oint_C \left(V_x\, dx + V_y\, dy\right) = \oint_C V \cos\alpha \;\, dl$$

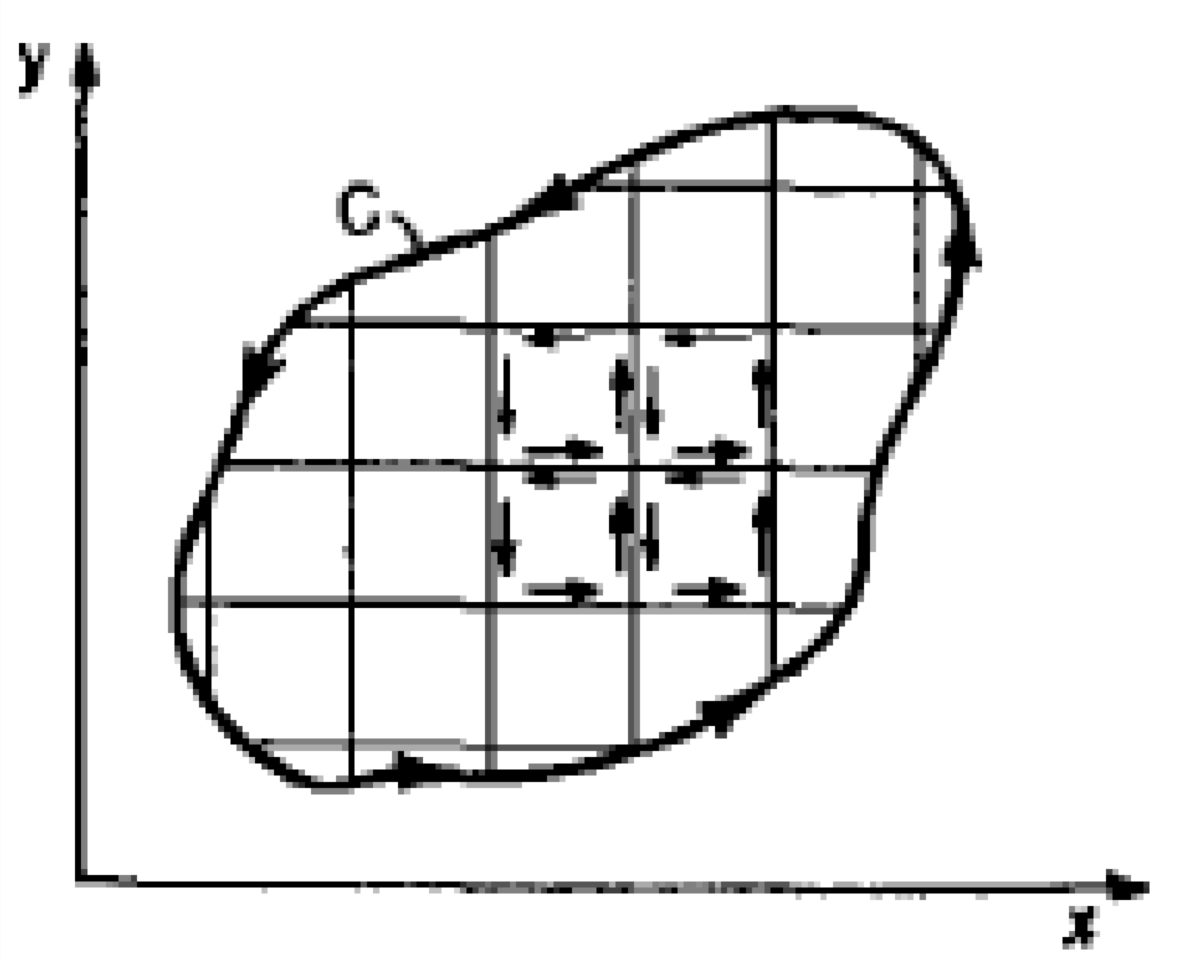
Circolazione



$$d\,\Gamma_z = V_x dx + \left(V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx \right) dy - \left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy \right) dx - V_y dy =$$

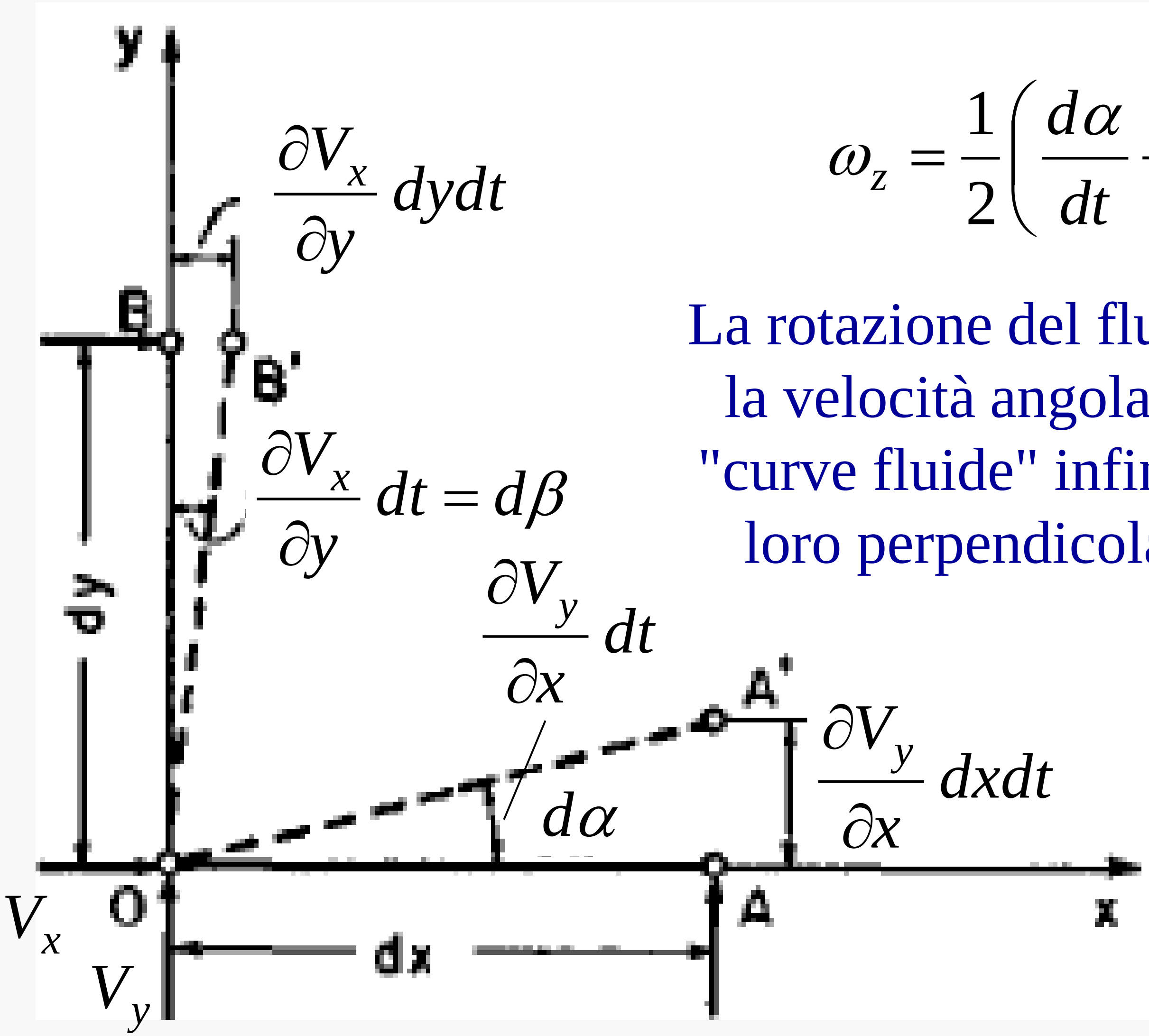
$$= \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dxdy = \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dA_z$$

Circolazione



$$\Gamma_z = \oint_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}\, dl = \oint_C \left(V_x\, dx + V_y\, dy \right) = \oiint_A d\Gamma_z = \oiint_A \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dxdy$$

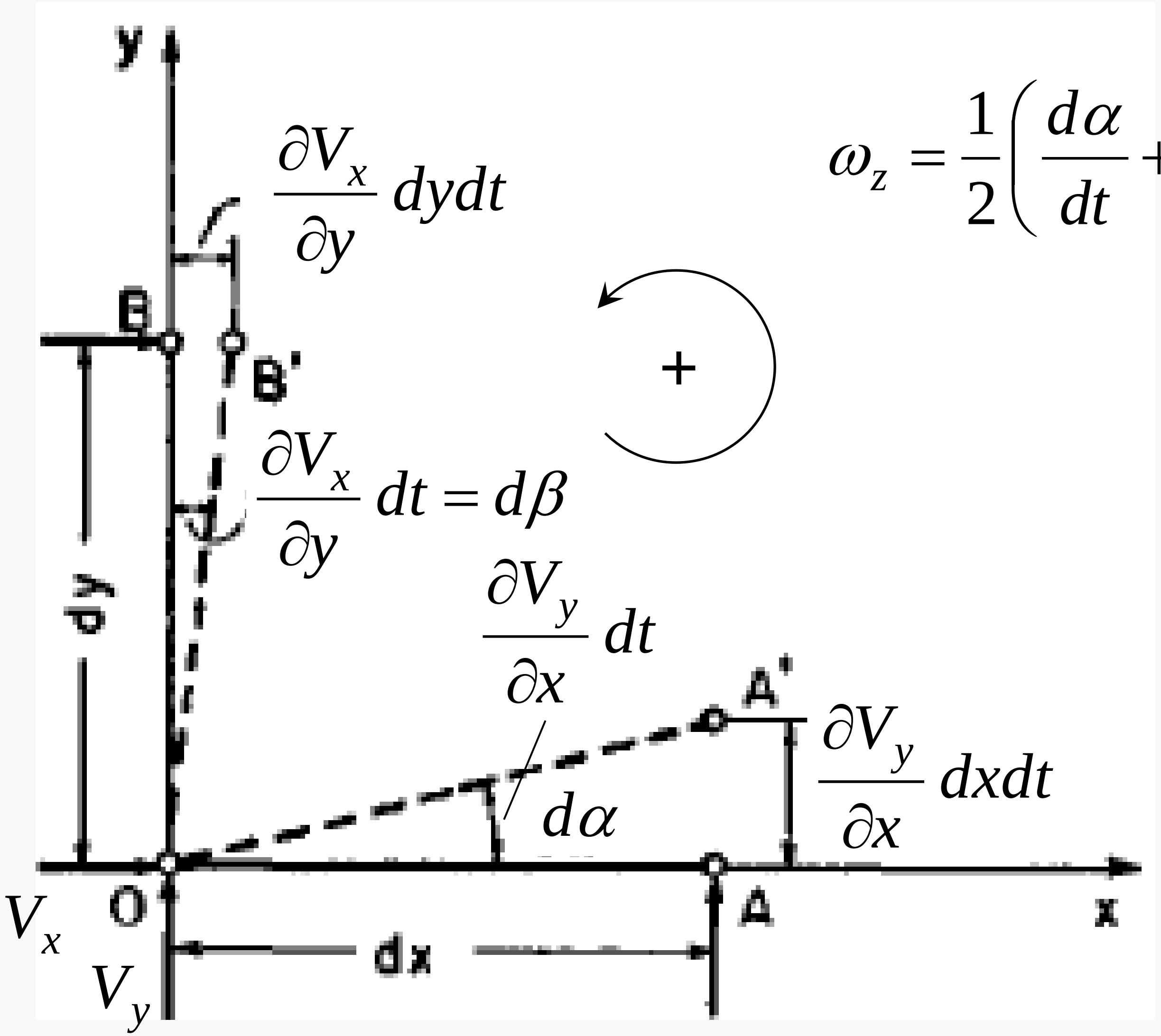
Rotazione (2 dimensioni)



$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\right)$$

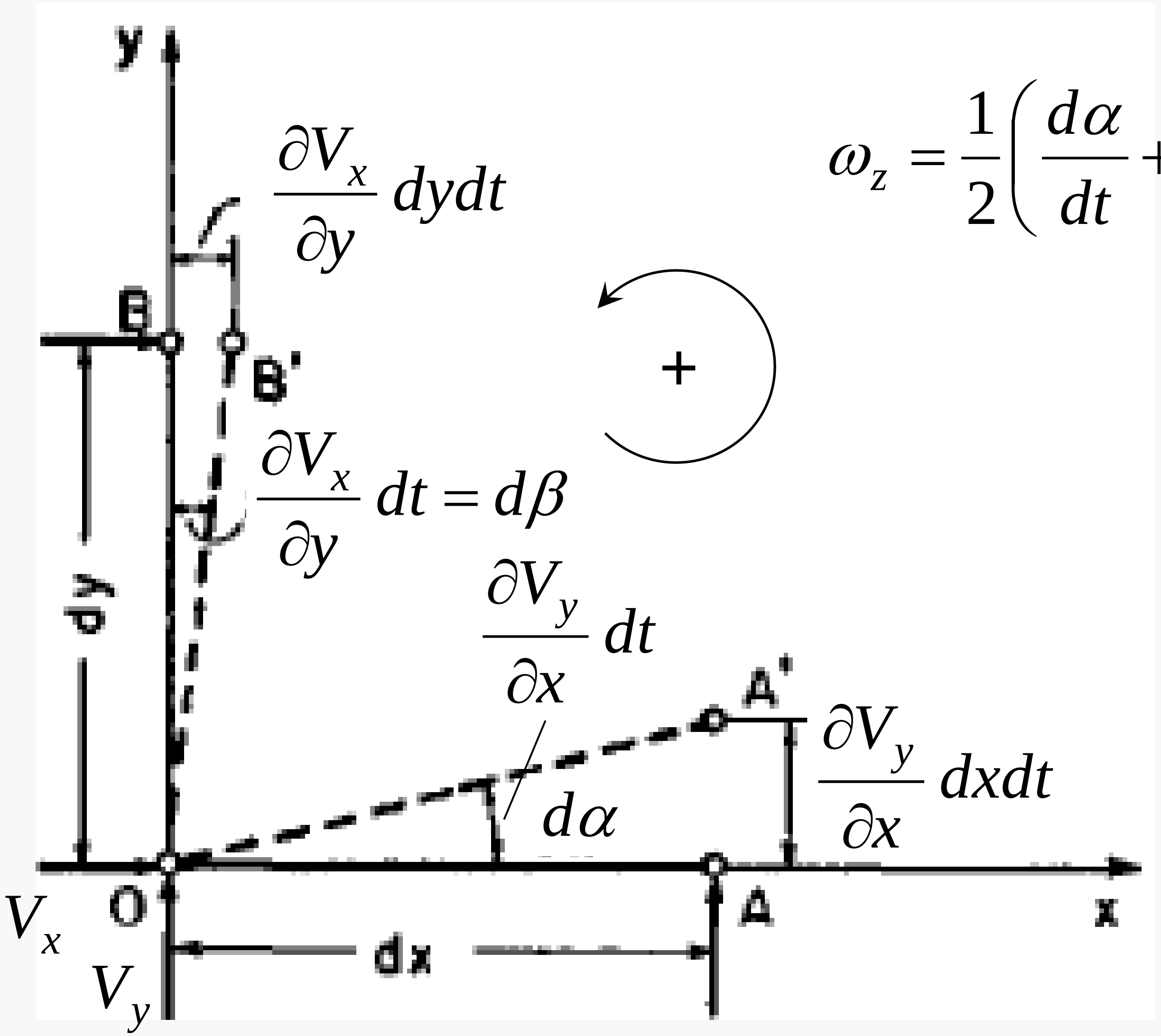
La rotazione del fluido nel punto "O" è la velocità angolare media delle due "curve fluide" infinitesime *dx* e *dy*, tra loro perpendicolari all'istante $t = 0$

Rotazione (2 dimensioni)



$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\right)$$

Rotazione (2 dimensioni)



$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\,\Gamma_z}{dA_z} = 2\omega_z$$

Rotazione (3 dimensioni)

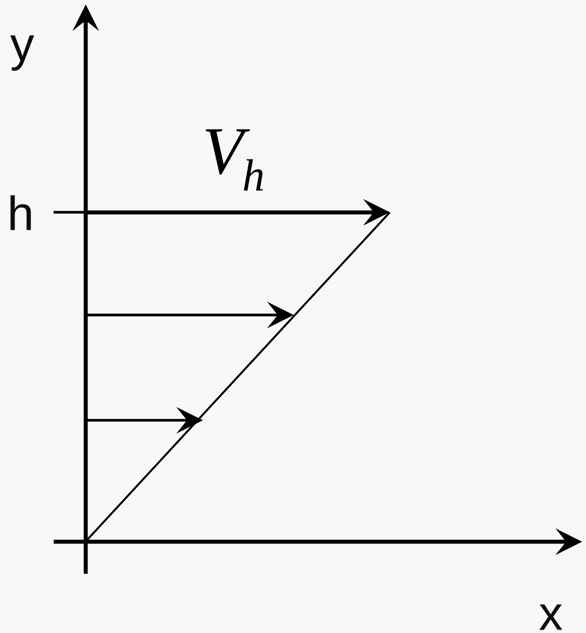
$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{V}$$

In coordinate cartesiane ortogonali:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\,\mathbf{i} + \omega_y\,\mathbf{j} + \omega_z\,\mathbf{k} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Flusso rotazionale



$$V_x = \frac{V_h}{h} y \quad , \quad V_y = 0$$

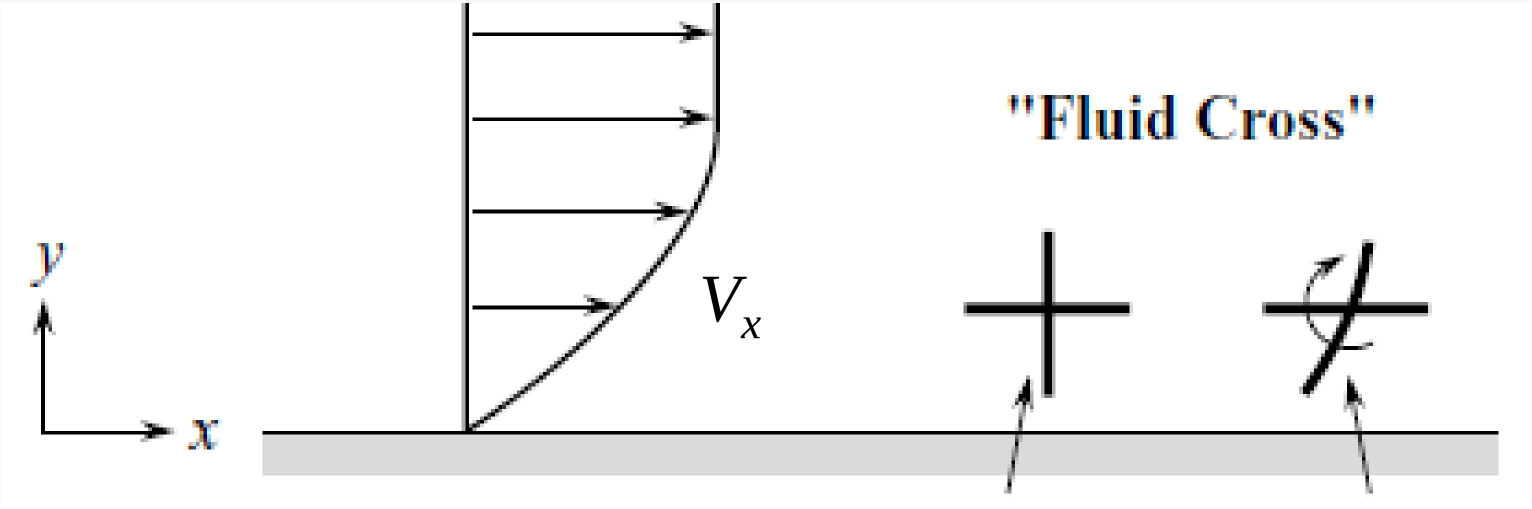
$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{V_h}{h} \quad , \quad \frac{\partial V_y}{\partial x} = 0$$

$$2\omega_z = \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = -\frac{V_h}{h}$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{V} \neq \mathbf{0}}$$

Flusso rotazionale

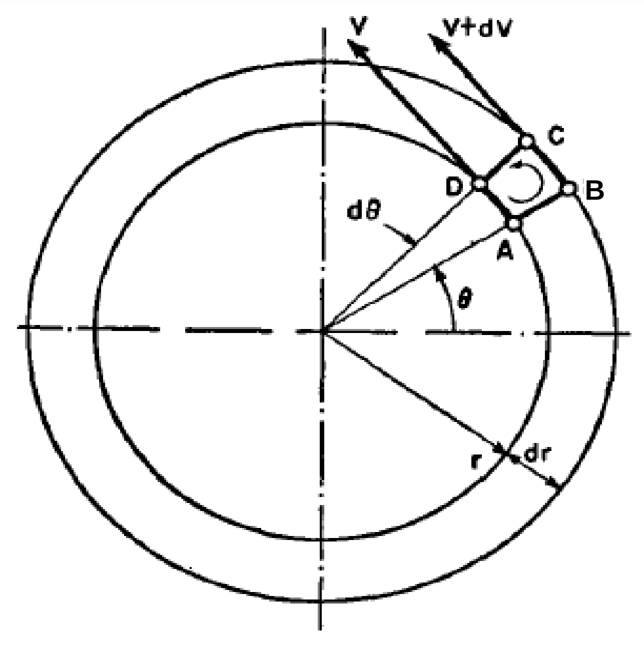
Flusso viscoso



tempo t tempo $t + dt$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{V} \neq \mathbf{0}}$$

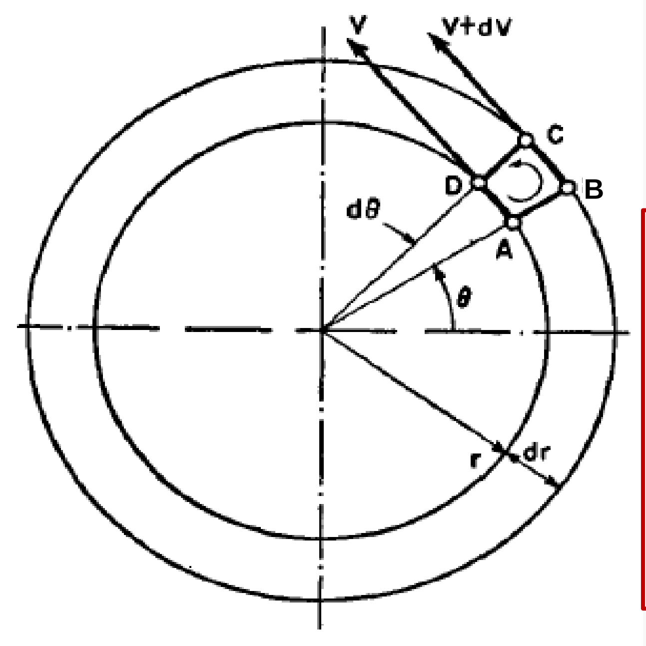
Esempio di flusso irrotazionale: vortice libero



$$V_\theta = V \quad , \quad V_r = 0$$

$$V_\theta \, r = V \, r = K = \text{cost.}$$

Esempio di flusso irrotazionale: vortice libero



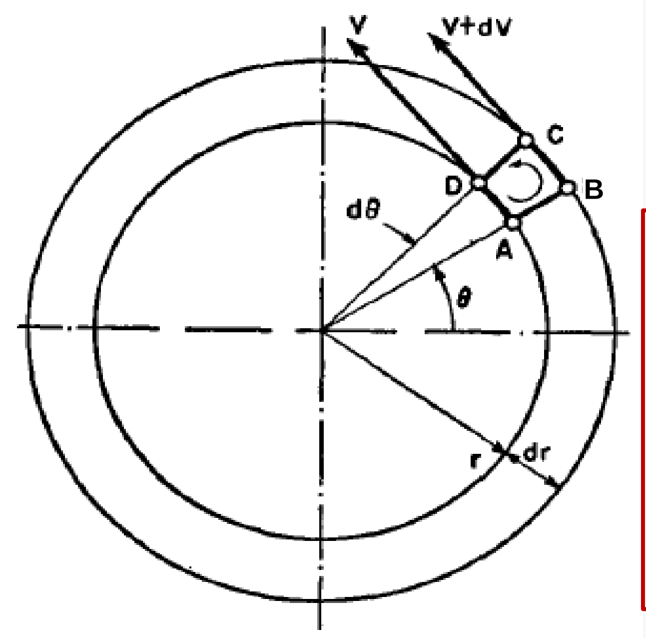
$$V_\theta = V \quad , \quad V_r = 0$$

$$V_\theta\, r = V\, r = K = \text{cost.}$$

$$d\,\Gamma_{ABCD} = (V + dV)(r + dr)\,d\theta - V\,r\,d\theta =$$
$$= (V\,dr + r\,dV)\,d\theta = [d(V\,r)]\,d\theta = 0$$

La circolazione intorno a ciascun elemento non contenente l'origine è zero

Esempio di flusso irrotazionale: vortice libero



$$V_\theta = V \quad , \quad V_r = 0$$

$$V_\theta\, r = V\, r = K = \text{cost.}$$

$$d\,\Gamma_{ABCD} = (V + dV)(r + dr)\,d\theta - V\,r\,d\theta =$$
$$= (V\,dr + r\,dV)\,d\theta = [d(V\,r)]\,d\theta = 0$$

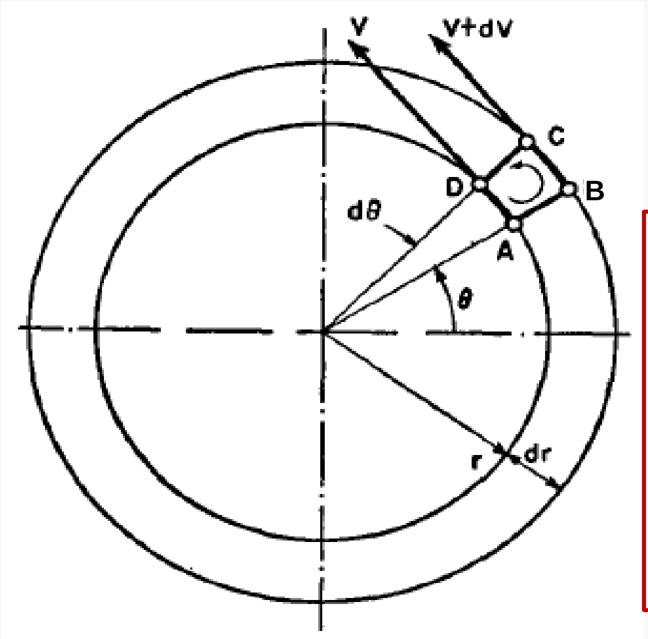
La circolazione intorno a ciascun elemento non contenente l'origine è zero

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} V\,r\,d\theta = 2\pi\,K \Rightarrow V\,r = K = \frac{\Gamma}{2\pi}$$

$$V_\theta = V = \frac{\Gamma}{2\pi\,r}$$

La circolazione su ciascuna linea chiusa contenente l'origine è diversa da zero

Esempio di flusso irrotazionale: vortice libero



$$V_\theta = V \quad , \quad V_r = 0$$

$$V_\theta \, r = V \, r = K = \text{cost.}$$

$$d\,\Gamma_{ABCD} = (V + dV)(r + dr)\,d\theta - V\,r\,d\theta =$$
$$= (V\,dr + r\,dV)\,d\theta = [d(V\,r)]\,d\theta = 0$$

La circolazione intorno a ciascun elemento non contenente l'origine è zero

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} V\,r\,d\theta = 2\pi\,K \Rightarrow V\,r = K = \frac{\Gamma}{2\pi}$$

$$V_\theta = V = \frac{\Gamma}{2\pi\,r}$$

La circolazione su ciascuna linea chiusa contenente l'origine è diversa da zero

Il flusso a vortice libero è ovunque irrotazionale eccetto per una singolarità nell'origine, dove la rotazionalità assume valore infinito

Flusso irrotazionale

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}}$$

è condizione necessaria affinché il campo vettoriale **V** sia conservativo

Flusso irrotazionale

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}}$$

è condizione necessaria affinché il campo vettoriale **V** sia conservativo

$\exists \quad \Phi$ (funzione scalare **potenziale di velocità**) tale per cui: $\mathbf{V} = \nabla \, \Phi$

In coordinate cartesiane ortogonali:

$$\mathbf{V} = V_x \, \mathbf{i} + V_y \, \mathbf{j} + V_z \, \mathbf{k} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{k}$$

Flusso irrotazionale

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}}$$

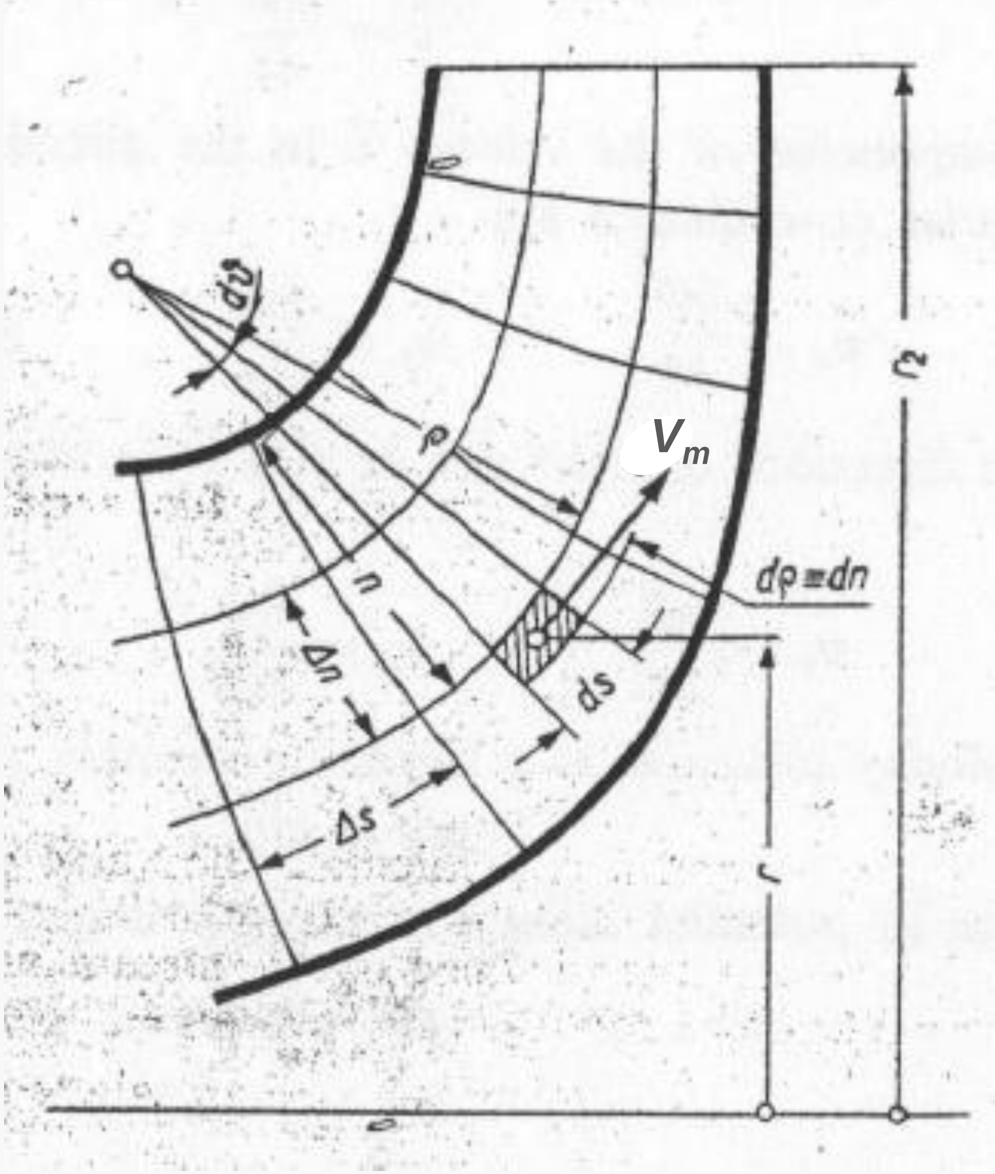
è condizione necessaria affinché il campo vettoriale **V** sia conservativo

$\exists \quad \Phi$ (funzione scalare **potenziale di velocità**) tale per cui: $\mathbf{V} = \nabla \Phi$

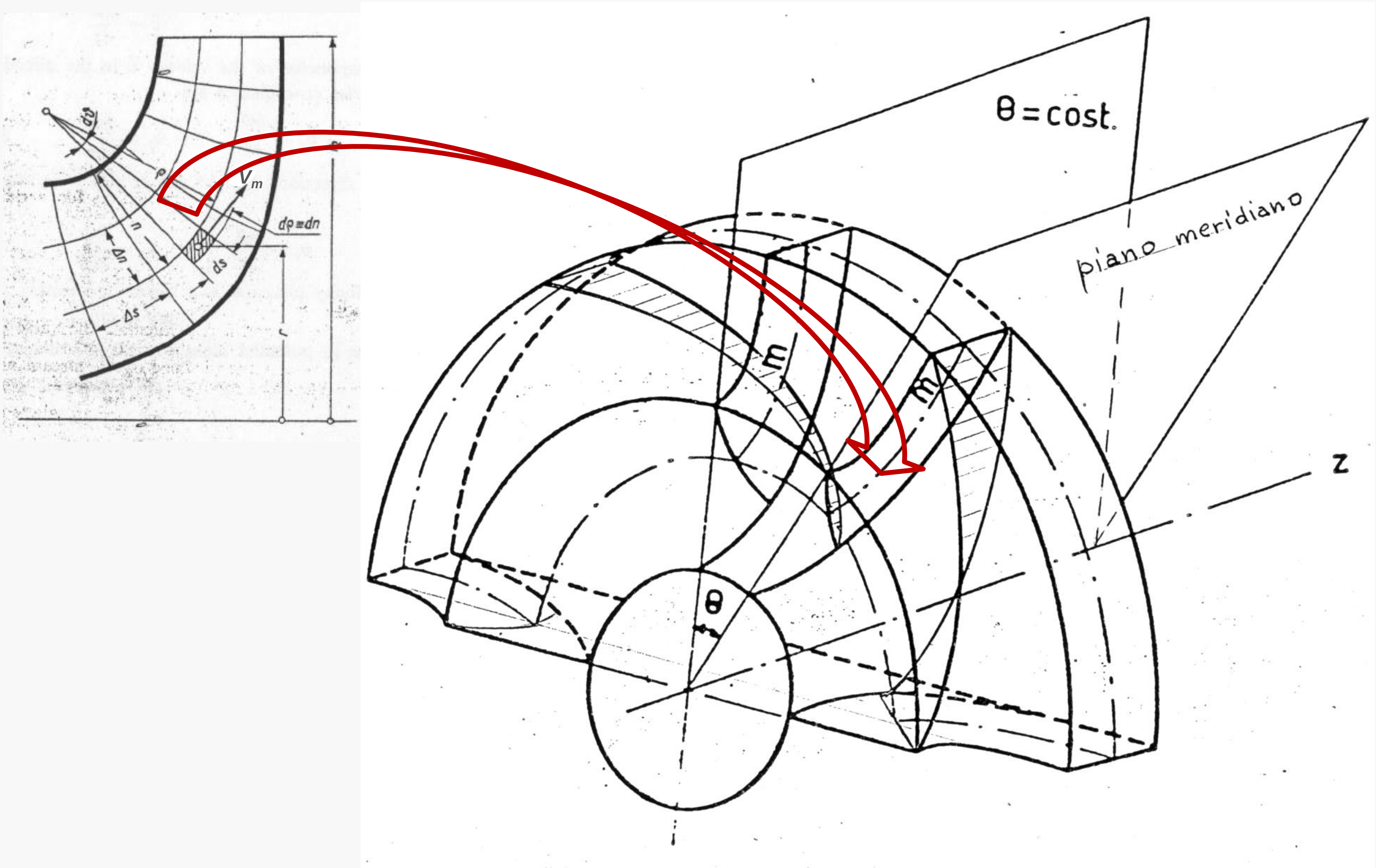
Vortice libero (coordinate cilindriche):

$$\Phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta = \text{cost.}\,\theta \quad \Rightarrow \quad V_\theta = \frac{\partial \Phi}{r\,\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi\, r} \quad , \quad V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$$

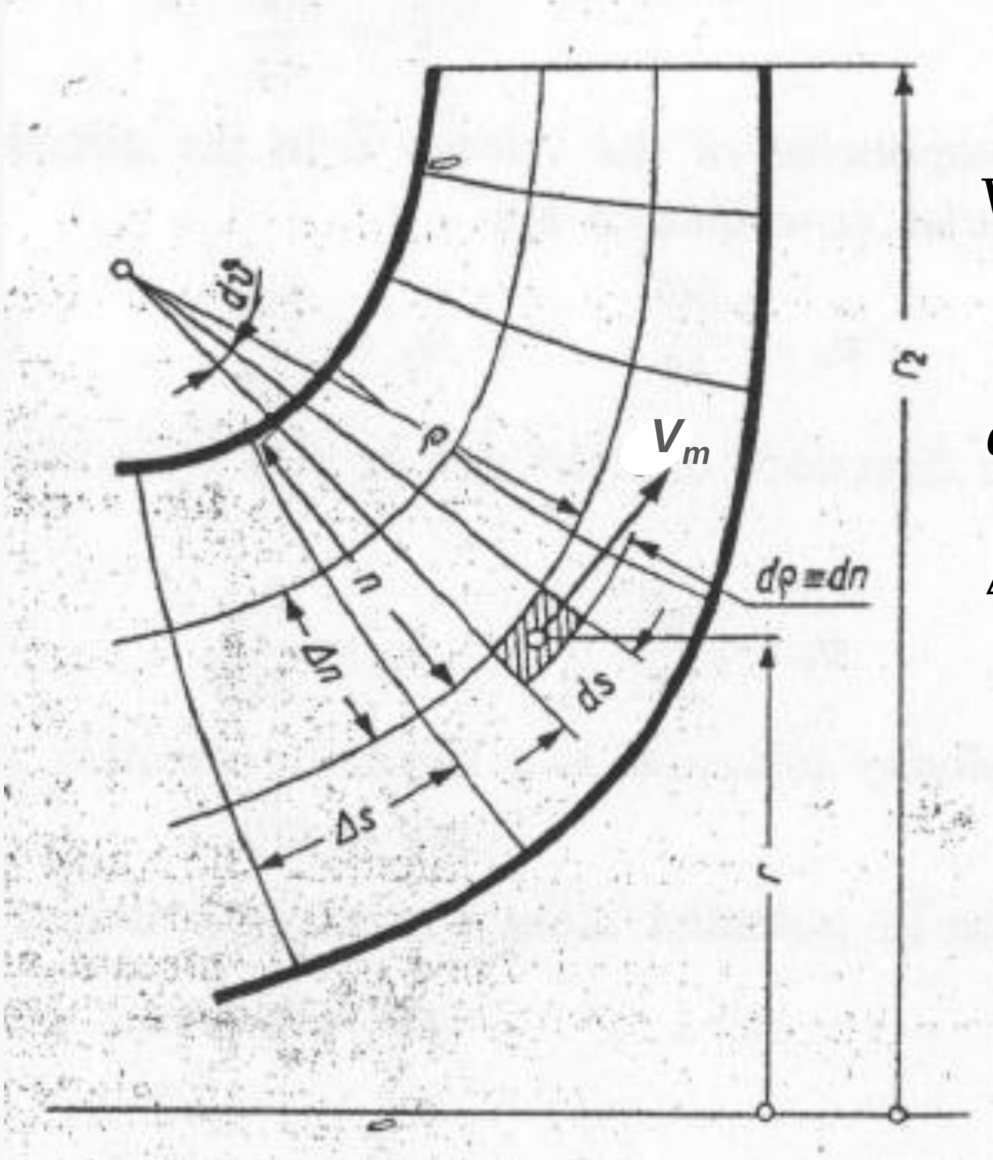
Funzione potenziale di velocità



Funzione potenziale di velocità



Funzione potenziale di velocità



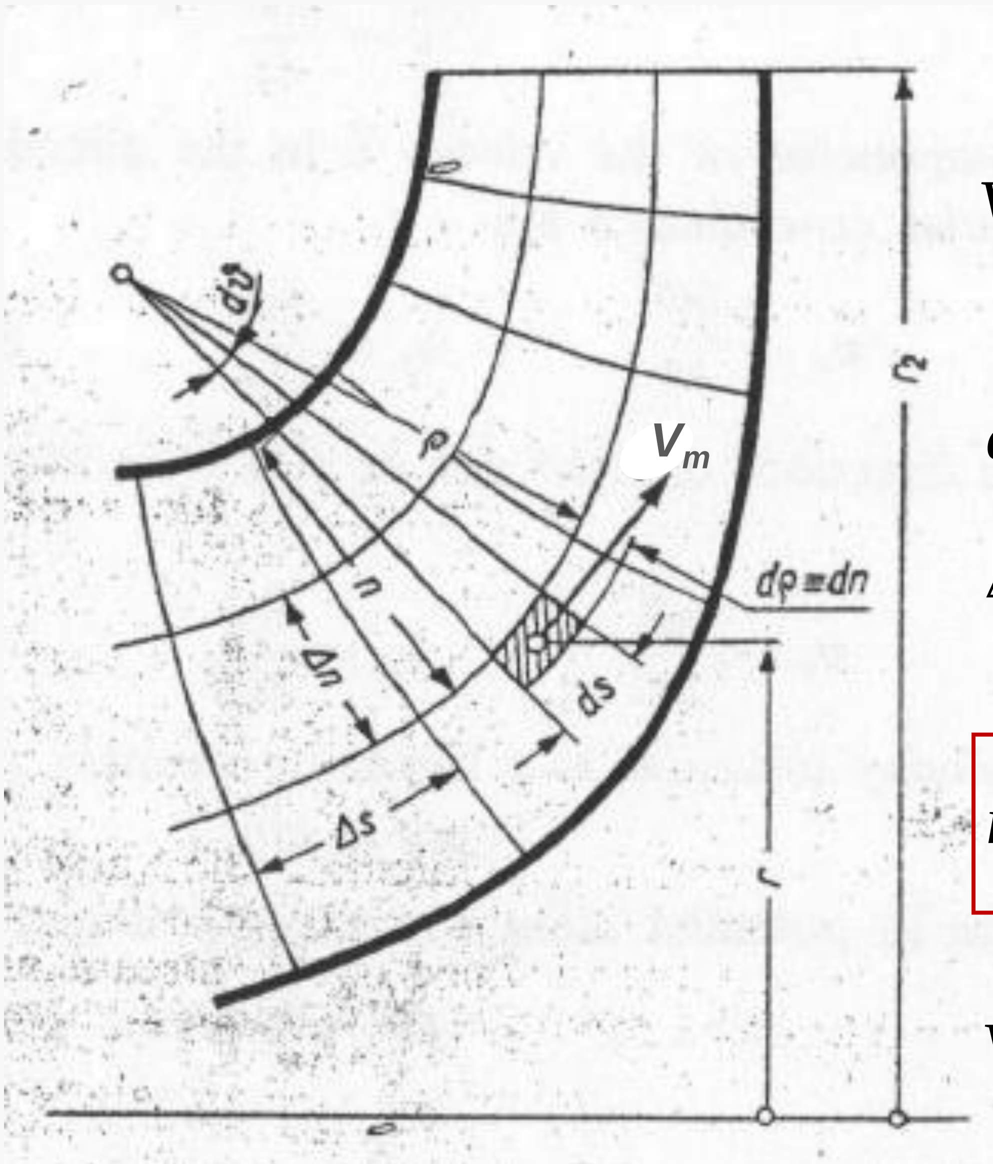
$$\exists \;\; \Phi \quad \longrightarrow \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}}$$

$$V_m = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \quad , \quad dQ = V_m \, 2\pi \, r \, dn$$

$$q = \frac{Q}{n} = \Delta Q = V_m \, 2\pi \, r \, \Delta n = \text{cost.}$$

$$\Delta\Phi = V_m \, \Delta s = \text{cost}$$

Funzione potenziale di velocità



$$\exists \;\; \Phi \quad \longrightarrow \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}}$$

$$V_m = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \quad , \quad dQ = V_m \, 2\pi \, r \, dn$$

$$q = \frac{Q}{n} = \Delta Q = V_m \, 2\pi \, r \, \Delta n = \text{cost.}$$

$$\Delta\Phi = V_m \, \Delta s = \text{cost}$$

$$\Downarrow$$

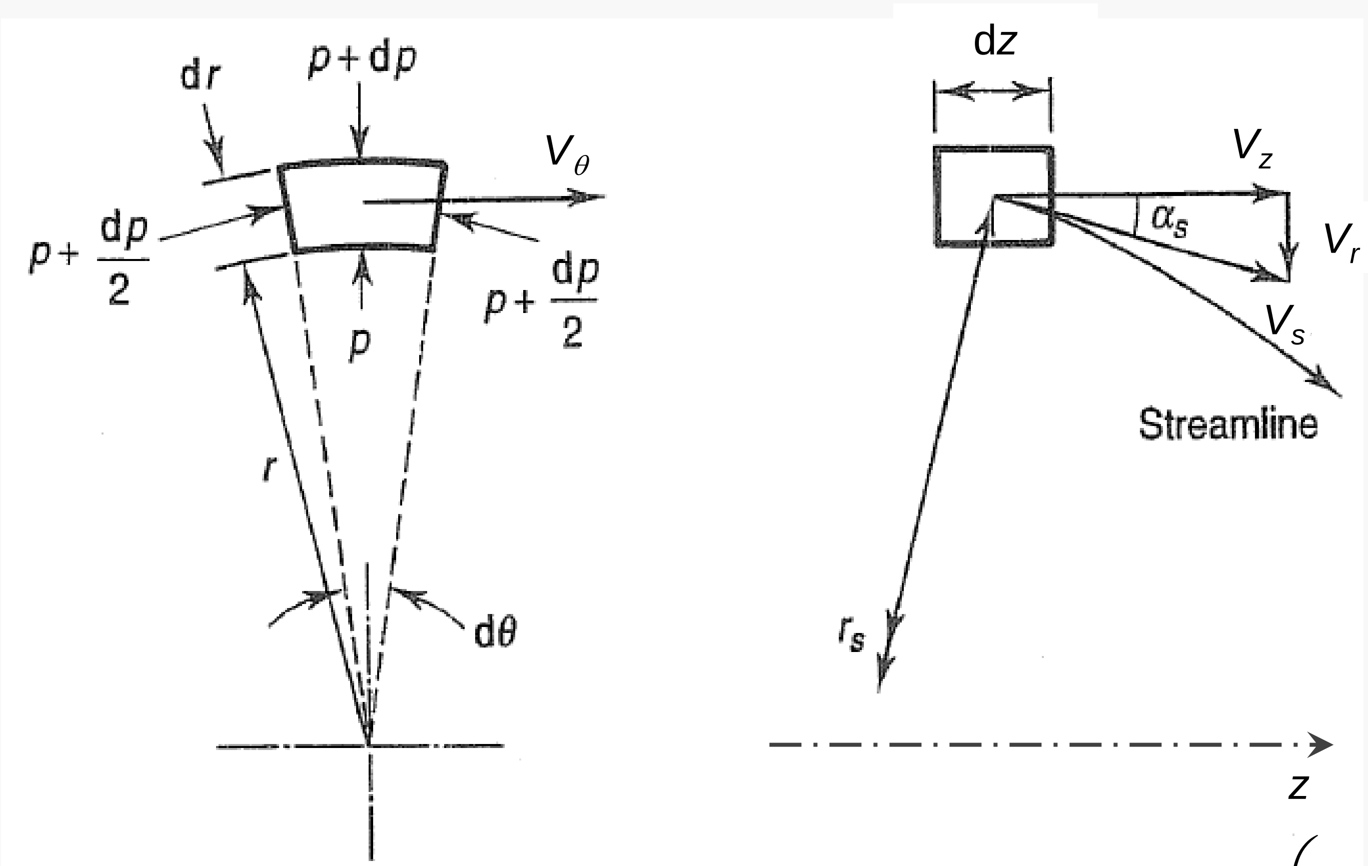
$$\boxed{r \frac{\Delta n}{\Delta s} = K = \text{cost.}}$$

$$V_m = \frac{Q}{2\pi \, r \, n \, \Delta n} = \frac{Q}{K \, 2\pi \, n \, \Delta s}$$

Equilibrio in direzione radiale

(flusso non viscoso)

Equilibrio in direzione radiale



$$\sum F_r = dM \cdot a_r$$

$$dM = \rho\, r\, d\theta\, dr\, dz$$

$$\sum F_r = p\, r\, d\theta\, dz - (p + dp)(r + dr)\, d\theta\, dz + 2\left(p + \frac{dp}{2}\right) dr\, dz\, \frac{d\theta}{2}$$

$$dM \cdot a_r = -\rho\, r\, d\theta\, dr\, dz \left(\frac{V_\theta^2}{r} + \frac{V_s^2}{r_s} \cos\alpha_s + \frac{dV_s}{dt} \operatorname{sen}\alpha_s \right)$$

Equilibrio in direzione radiale

$$\sum F_r = p\,r\,d\theta\,dz - \left(p+dp\right)(r+dr)\,d\theta\,dz + 2\left(p+\frac{dp}{2}\right)dr\,dz\,\frac{d\theta}{2}$$

Sviluppando i prodotti, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al terzo, si ottiene:

$$\sum F_r = \cancel{p\,r\,d\theta\,dz} - \cancel{p\,r\,d\theta\,dz} - \cancel{p\,dr\,d\theta\,dz} - r\,dp\,d\theta\,dz + \cancel{2\,p\,dr\,dz\,\frac{d\theta}{2}} =$$

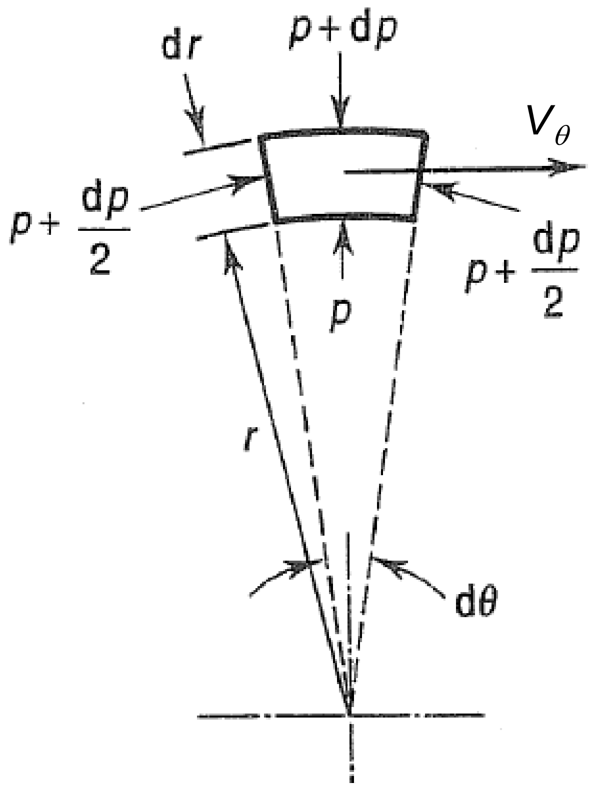
$$= -r\,dp\,d\theta\,dz$$

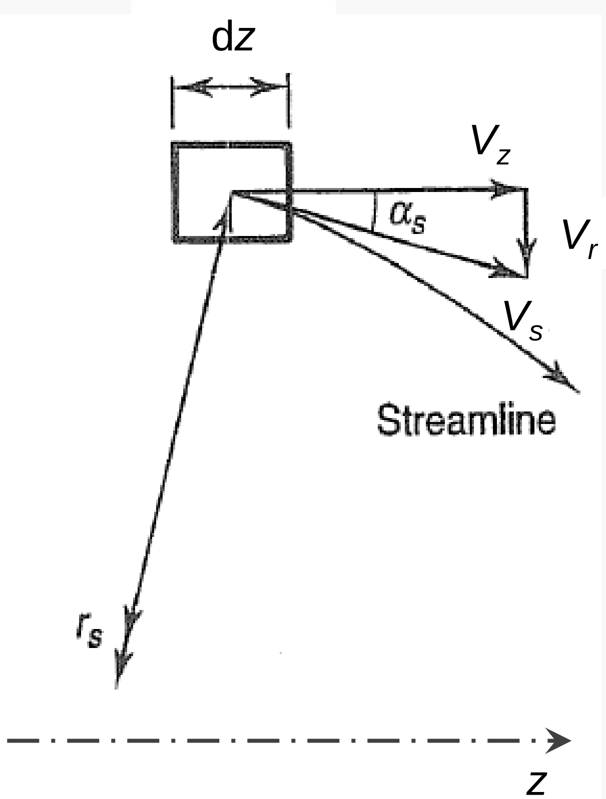
da cui risulta:

$$\sum F_r = -r\,dp\,d\theta\,dz = dM \cdot a_r = -\rho\,r\,d\theta\,dr\,dz\left(\frac{V_\theta^2}{r} + \frac{V_s^2}{r_s}\cos\alpha_s + \frac{dV_s}{dt}\operatorname{sen}\alpha_s\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{V_\theta^2}{r} + \frac{V_s^2}{r_s}\cos\alpha_s + \frac{dV_s}{dt}\operatorname{sen}\alpha_s}$$

Equilibrio in direzione radiale





Nel caso in cui il moto del fluido si sviluppi su superfici di corrente cilindriche coassiali con l'asse z ($V_r = 0$, $\alpha_s = 0$, $r_s \to \infty$) risulta:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{V_\theta^2}{r} + \frac{V_s^2}{r_s}\cos\alpha_s + \frac{dV_s}{dt}\operatorname{sen}\alpha_s \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{V_\theta^2}{r}}$$

Equazione di bilancio dell'energia in condizioni stazionarie

$$dh + d\left(\frac{V^2}{2}\right) + g\,dz = dq - dl$$

$$du + pdv = dh - vdp = dh - \frac{dp}{\rho} = dq + dR =$$

$$= dq_{rev} + dq_{irrev} = Tds_{rev} + Tds_{irrev} = Tds$$

Nell'ipotesi in cui: $dq = 0 \quad , \quad dl = 0 \quad , \quad g\,dz = 0$

risulta:

$$dh + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = dh_0 = d\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} + dR = d\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} + Tds$$

Equazione di bilancio dell'energia in condizioni stazionarie

$$dh_0 = d\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} + Tds$$

Nel caso in cui il moto del fluido si sviluppi su superfici di corrente cilindriche coassiali con l'asse z ($V_r = 0$, $\mathbf{V} = [0 , V_\theta , V_z]^T$) risulta:

$$dh_0 = d\left(\frac{V_\theta^2 + V_z^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} + Tds = V_\theta\, dV_\theta + V_z\, dV_z + \frac{dp}{\rho} + Tds$$

$$\frac{dh_0}{dr} = V_\theta \frac{dV_\theta}{dr} + V_z \frac{dV_z}{dr} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} + T\frac{ds}{dr}$$

Equazione di bilancio dell'energia in condizioni stazionarie

$$dh_0 = d\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} + Tds$$

Nel caso in cui il moto del fluido si sviluppi su superfici di corrente cilindriche coassiali con l'asse z ($V_r = 0$, $\mathbf{V} = [0\ ,\ V_\theta\ ,\ V_z]^T$) risulta:

$$dh_0 = d\left(\frac{V_\theta^2 + V_z^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} + Tds = V_\theta\, dV_\theta + V_z\, dV_z + \frac{dp}{\rho} + Tds$$

$$\frac{dh_0}{dr} = V_\theta \frac{dV_\theta}{dr} + V_z \frac{dV_z}{dr} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} + T\frac{ds}{dr}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{V_\theta^2}{r}}$$

Equilibrio in direzione radiale

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} = V_\theta \frac{dV_\theta}{dr} + V_z \frac{dV_z}{dr} + \frac{V_\theta^2}{r} + T\frac{ds}{dr} = V_z \frac{dV_z}{dr} + \frac{V_\theta}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\,V_\theta\right) + T\frac{ds}{dr}}$$

Equazione energetica del vortice

$$\frac{dh_0}{dr} = V_z \frac{dV_z}{dr} + \frac{V_\theta}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left(r V_\theta\right) + T \frac{ds}{dr}$$

Per flussi non viscosi subsonici (assenza di onde d'urto), si può assumere che $T\, ds/dr = 0$, e quindi:

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} = V_z \frac{dV_z}{dr} + \frac{V_\theta}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left(r V_\theta\right)}$$

Condizione di vortice libero

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} = V_z \frac{dV_z}{dr} + \frac{V_\theta}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left(r\,V_\theta\right)}$$

a) Nell'ipotesi di flusso ad energia totale costante lungo r ($dh_0/dr = 0$) risulta:

$$\boxed{V_z \frac{dV_z}{dr} + \frac{V_\theta}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left(r\,V_\theta\right) = 0}$$

b) Nell'ipotesi che anche V_z sia costante lungo r ($dV_z/dr = 0$) risulta :

$$\boxed{\frac{V_\theta}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left(r\,V_\theta\right) = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r\,V_\theta = \text{cost.}}$$

Condizione di vortice libero