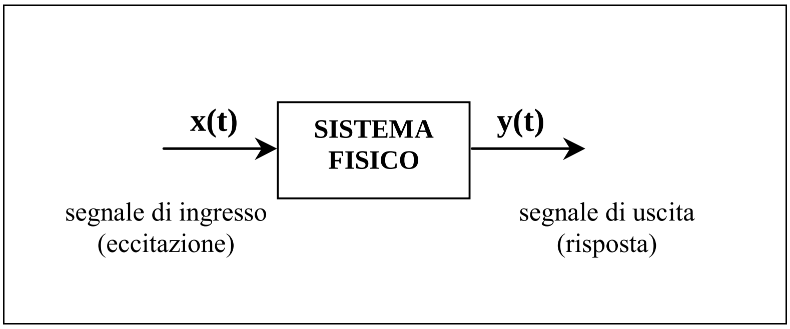
Studio matematico dei sistemi di controllo

Studio di un sistema fisico



y(t) è legata a x(t) da un'equazione differenziale che dipende dal sistema

Facendo le seguenti ipotesi:
- Sistema lineare (vale quindi il principio di sovrapposizione degli effetti)
- Sistema a parametri concentrati
- Sistema a parametri costanti (indipendenti dal tempo)

L'equazione differenziale che lega y(t) a x(t) sarà un'equazione differenziale lineare, alle derivate ordinarie e a coefficienti costanti del tipo:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$$

L'integrale generale di tale equazione è dato da:

$$y(t) = y_T(t) + y_P(t)$$

dove:
- $y_T(t)$ = integrale generale dell'equazione omogenea associata sotto riportata e dipende soltanto dai parametri del sistema e non dall'eccitazione.

  $$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0 \quad \text{(equazione omogenea associata)}$$
- $y_P(t)$ = è la risposta permanente del sistema e tiene conto dell'eccitazione x(t).

Valutazione dell'integrale dell'equazione omogenea associata $y_T(t)$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da:

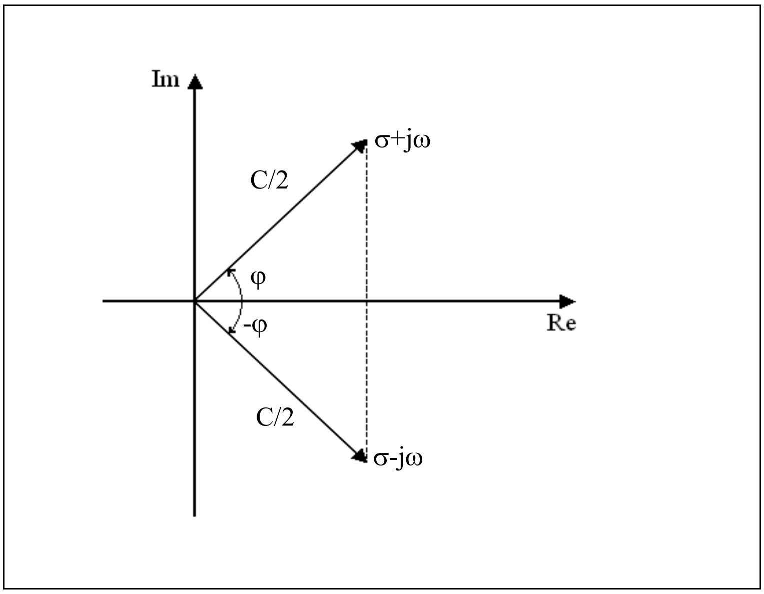
$$y_T(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{s_k t}$$

dove:

- s_k = radici reali o complesse coniugate, semplici o multiple dell'equazione algebrica:
  $a_n s^n + ... + a_1 s + a_0 = 0$ (equazione caratteristica)

- C_k = coefficienti reali o complessi coniugati.

Esempio:
equazione caratteristica con 4 radici, due reali semplici (s_1 e s_2) e due complesse coniugate s_3 e $s_4 = \sigma \pm j\omega$, l'integrale generale dell'omogenea associata è esprimibile come:
$y_T(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + Ce^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi)$
dove C (modulo) e φ (argomento) si determinano come mostrato in figura



Stabilità di un sistema

La stabilità di un sistema può essere verificata attraverso il segno delle radici di $y_T(t)$:

- se le radici della $y_T(t)$ sono tutte reali negative o complesse coniugate, con parte reale negativa, la risposta libera tende a zero, ovvero:

  $$\lim_{t\to\infty} y_T(t) \to 0$$ il sistema è stabile
- se anche solo una radice della $y_T(t)$ è reale positiva o complessa con parte reale positiva, la risposta libera tende ad infinito, ovvero:

  $$\lim_{t\to\infty} y_T(t) \to \infty$$ il sistema è instabile

Determinazione dell'integrale particolare

L'integrale particolare $y_P(t)$ rappresenta la risposta permanente del sistema.
Data l'equazione

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$$

se f(t) è una funzione qualunque del tempo, non esistono metodi generali per la determinazione di $y_P(t)$.
L'integrale particolare si riesce a determinare in modo analitico solo in alcuni casi particolari:

a) $f(t) = x_0 = \cos t \Rightarrow \quad y_P(t) = \dfrac{x_0}{a_0}$

b) $f(t) = x_0 \cdot e^{\gamma t} \quad \Rightarrow \quad y_P(t) = y_0 \cdot e^{\gamma t}$

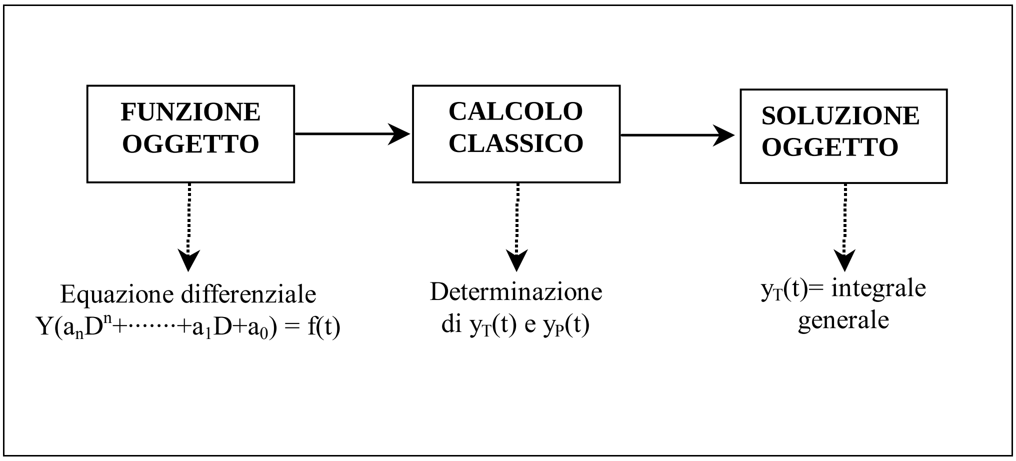
dove

$$y_0 = \frac{x_0}{(a_n\gamma^n + a_{n-1}\gamma^{n-1} \cdots\cdots\cdots + a_0)} = \frac{x_0}{P(\gamma)}$$

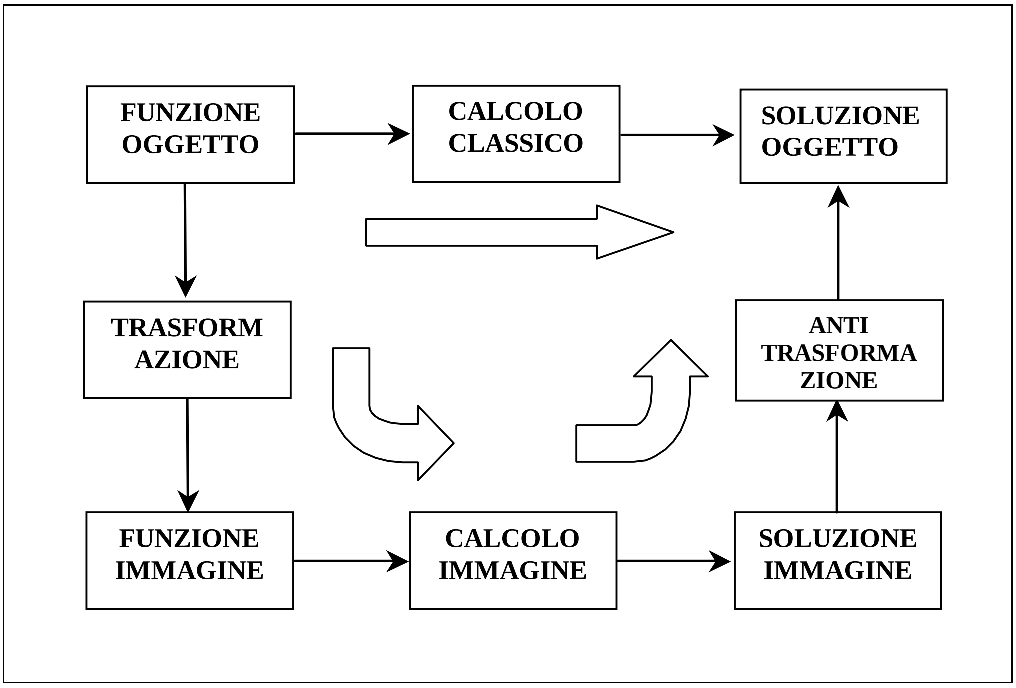
c) $f(t) = x_0 \cdot \mathrm{sen}\,\omega t \quad \Rightarrow \quad y_P(t) = y_0 \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$

Trasformate

La risoluzione di un'equazione differenziale può essere effettuata nel dominio dei tempi risolvendo con il metodo classico l'equazione differenziale che lega y(t) a x(t).



La soluzione nel dominio dei tempi può essere estremamente complessa e non sempre accessibile con metodi analitici.
Per queste ragioni è preferibile trasformare in modo opportuno la funzione oggetto in una funzione immagine (che non risulta definita nel dominio dei tempi), determinare la soluzione immagine e quindi, mediante un processo di antitrasformazione, risalire alla soluzione oggetto.



Trasformata di Fourier

Per passare dalla funzione oggetto alla funzione immagine e successivamente dalla soluzione immagine a quella oggetto è possibile effettuare rispettivamente la trasformazione e l'antitrasformazione secondo Fourier:

$$\Im\left[f(t)\right] = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt \qquad \textit{trasformata di Fourier}$$

$$f(t) = \Im^{-1}\left[F(j\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t}\, d\omega \qquad \textit{antitrasformata di Fourier}$$

Come si osserva facilmente, affinché F(jω) esista, è necessario che l'integrale di f(t) converga, cioè abbia valore finito.
Questo è un limite molte forte poiché molte funzioni fondamentali non risultano convergenti e quindi non trasformabili secondo Fourier.

Trasformata di Laplace

Per ovviare alle restrizioni insite nel metodo di trasformazione di Fourier si può utilizzare un diverso metodo di trasformazione.
Si definisce trasformata bilaterale secondo Laplace:

$$L_{II}[f(t)] = F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

con s = σ+jω.

Si può osservare come risulti la seguente uguaglianza:

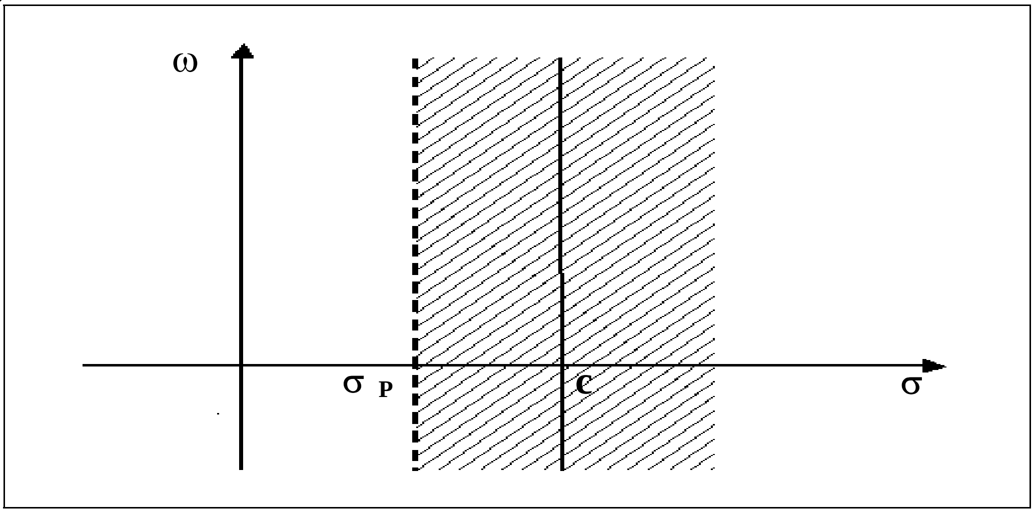
$$L_{II}[f(t)] = F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(t) \cdot e^{-\sigma t}\right] \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \Im\left[f(t) \cdot e^{-\sigma t}\right]$$

Affinché esista F(s) è necessario che la funzione $f(t) \cdot e^{-\sigma t}$ risulti assolutamente integrabile. Tale condizione è molto più facilmente verificata rispetto alla corrispondente del metodo di Fourier, in quanto $e^{-\sigma t}$ assume il ruolo di fattore di convergenza.
Nel caso in cui sia f(t) = 0 per t<0, si definisce

$$L_{I}[f(t)] = F(s) = \int_{0}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$ *trasformata unilaterale secondo Laplace*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \cdot e^{st} \cdot ds$$ *antitrasformata secondo Laplace (formula di Riemann)*

essendo σ = c la parte reale di un punto compreso nel dominio di convergenza (σ_P<c).



Trasformate di alcune funzioni tipiche

Per tutte le funzioni presentate si considera f(t)=0 per t<0

a) Funzione esponenziale:

$$f(t) = e^{at} \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = \frac{1}{s-a}$$

b) Funzione t^n:

$$f(t) = t^n \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = \frac{1}{s^{n+1}} \cdot n!$$

c) Funzione sinusoidale:

$$f(t) = \text{sen}\ \omega t \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

d) Funzione cosinusoidale:

$$f(t) = \cos \omega t \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Teoremi sulle trasformate

Trasformata della derivata

$$L[f(t)] = F(s) \quad \Rightarrow \quad L[f'(t)] = s \cdot F(s) - f(0)$$

Trasformata dell'integrale

$$L[f(t)] = F(s) \quad \Rightarrow \quad L\left[\int f(t) \cdot dt\right] = \frac{1}{s} \cdot F(s)$$

Teorema del valore finale

$$L[f(t)] = F(s) \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s)$$

Teorema del valore iniziale

$$L[f(t)] = F(s) \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to 0+} f(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s)$$

Teorema della traslazione nel tempo

$$L[f(t)] = F(s) \quad \Rightarrow \quad L[f(t - t_0)] = F(s)e^{-t_0 s}$$

Teorema della traslazione in s

$$L[f(t)] = F(s) \quad \Rightarrow \quad L[e^{-at} \cdot f(t)] = F(s + a)$$

Altri metodi di antitrasformazione

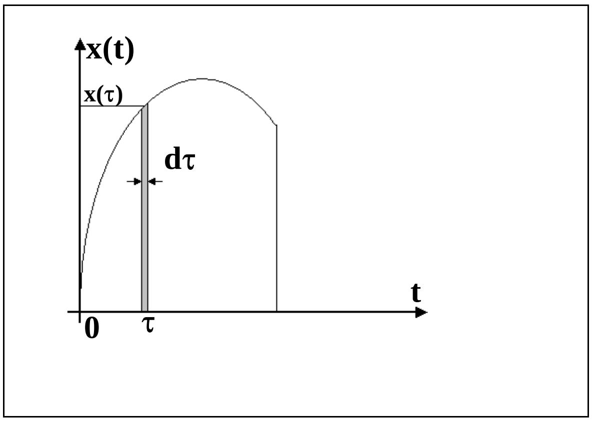
Risalire alla soluzione oggetto, mediante l'antitrasformazione della soluzione immagine, utilizzando la formula di Riemann può essere estremamente complesso, soprattutto dal punto di vista del calcolo.
La formula di Riemann può tuttavia essere “aggirata” nei casi sotto riportati:

a) quando non serve conoscere la risposta transitoria del sistema, ma solo quella permanente, non occorre antitrasformare, ma basta semplicemente applicare il teorema del valore finale

$$y_P = \lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s)$$

b) se si conosce la risposta del sistema ad un impulso (y(t)=g(t)), si può pensare di considerare una qualunque funzione di eccitazione x(t) come una successione di impulsi di ampiezza x(τ) e durata dτ applicati all'istante τ (vedi figura). La risposta y(t) del sistema, sarà la somma delle risposte elementari, in virtù della linearità del sistema:

$$y(t) = \int_0^{\tau} x(\tau) \cdot d\tau \cdot g(t-\tau)$$



c) Analogamente, se si conosce la risposta del sistema ad uno scalino unitario (y(t) = h(t)), è possibile calcolare la risposta del sistema ad una generica eccitazione x(t) come:

$$y(t) = x(0) \cdot h(t) + \int_0^{t} x'(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

d) <u>se la funzione F(s) da antitrasformare è del tipo:</u>

$$F(s) = \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdots\cdots\cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdots\cdots\cdots (s - p_n)}$$

può essere scomposta in fratti semplici come

$$F(s) = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \cdots\cdots\cdots + \frac{C_n}{s - p_n}$$

che si antitrasforma facilmente in

$$f(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \cdots\cdots\cdots + C_n e^{p_n t}$$