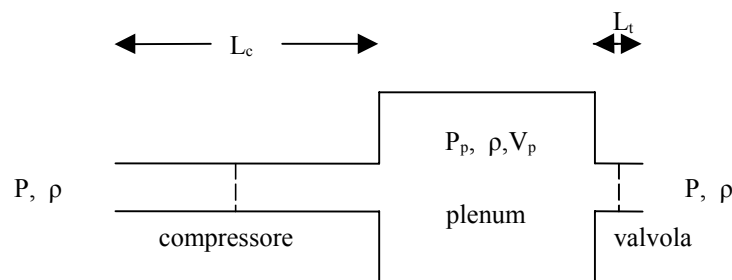

Modello di Greitzer (1976)

Simulazione del comportamento dinamico di compressori

Ipotesi del modello. Si consideri un sistema fisico composto, nell'ordine, da un compressore, un plenum ed una valvola di strozzamento.



Si assuma che il diametro del condotto d'uscita sia molto minore del diametro del plenum e per questo il sistema possa essere descritto come un risonatore di Helmholtz. Questa assunzione implica che tutta l'energia cinetica dell'oscillazione è associata al moto del fluido nei condotti del compressore e della valvola e che l'energia potenziale è associata alla pressione del gas nel plenum.

Il modello sviluppato vale per sistemi di compressione che hanno bassi numeri di Mach all'ingresso e incrementi di pressione ridotti rispetto alla pressione ambiente. Il compressore è simulato come un disco attuatore per tenere conto dell'aumento di pressione e come un condotto di area costante per tenere conto della fluidodinamica. La stessa assunzione è fatta per la valvola benché entrambi i dispositivi non abbiano area costante. Il fluido elaborato è considerato incomprimibile, con densità pari a quella ambiente, dato che il fenomeno del surge ha una frequenza di oscillazione bassa.

Per ogni istante la velocità assiale è considerata costante in ogni condotto.

La lunghezza dei condotti equivalenti è determinata in modo che un dato cambiamento della portata provochi il medesimo cambiamento di pressione che avviene nel condotto reale, mentre l'area è scelta pari ad un'area caratteristica del condotto reale. Detta quindi s una coordinata curvilinea lungo l'asse del condotto, deve valere la relazione

$$\left(\frac{L}{A}\right)_{eq} = \int_{reale} \frac{ds}{A(s)} \quad (G.1)$$

Equazioni costitutive del modello. Le equazioni sulle quali si basa il modello sono le seguenti:

$$(P - P_p)_+ C = \rho L_c \frac{dC_x}{dt} \quad (G.2)$$

che può essere riscritta in termini di portate in massa come

$$-\Delta P + C = \frac{L_c}{A_c} \frac{d\dot{m}_c}{dt} \quad (G.3)$$

L'Eq. (G.3) rappresenta il bilancio della quantità di moto nel condotto del compressore. Analogamente per il condotto della valvola ("throttle") si può scrivere

$$\Delta P - F = \frac{L_t}{A_t} \frac{d\dot{m}_t}{dt} \quad (G.4)$$

Poiché le dimensioni del plenum sono molto minori della lunghezza d'onda di un'onda acustica associata al surge (che è infatti in genere caratterizzato da una bassa frequenza), si può considerare che la pressione al suo interno sia uniforme in ogni istante.

L'equazione di continuità scritta per il plenum è quindi

$$\dot{m}_c - \dot{m}_t = V_p \frac{d\rho_p}{dt} \quad (G.5)$$

Considerando una trasformazione isoentropica si può scrivere

$$\frac{d\rho_p}{dt} = \frac{\rho_p}{\gamma P_p} \frac{dP_p}{dt} \quad (G.6)$$

Avendo assunto che gli incrementi di pressione (e quindi di densità) siano piccoli (così che $T_p \sim T$), si può scrivere:

$$\frac{\rho_p}{P_p} \cong \frac{\rho}{P} \quad (G.7)$$

mediante l'utilizzo dell'Eq. (G.6), l'Eq. (G.5) diventa

$$\dot{m}_c - \dot{m}_t = \frac{\rho V_p}{\gamma P} \frac{dP_p}{dt} \quad (G.8)$$

Le curve di prestazione che forniscono l'aumento di pressione nel compressore in funzione della portata elaborata sono rilevate sperimentalmente in maniera stazionaria. Durante i transitori queste curve non valgono e quindi può essere utilizzato un tempo di ritardo per la lettura della mappa, come espresso nell'Eq. (G.9).

$$\tau \frac{dC}{dt} = (C_{ss} - C) \quad (G.9)$$

Il significato fisico dell'Eq. (G.9) è che se il tempo di ritardo è grande, sono sufficienti piccole variazioni del rapporto di compressione per avere grandi differenze fra i valori del rapporto di compressione stesso in condizioni stazionarie e non-stazionarie.

Il tempo di ritardo può poi essere posto in relazione alla velocità di rotazione del compressore (mediante la velocità periferica U) come nell'Eq. (G.10), dove N rappresenta un coefficiente di proporzionalità.

$$\tau = \frac{N \cdot 2\pi R}{U} \quad (G.10)$$

Il significato fisico dell'Eq. (G.10) è che il tempo di ritardo diminuisce al crescere della velocità periferica, cioè per valori elevati della velocità periferica il sistema si porta a regime in un tempo minore.

La caduta di pressione nella valvola può essere descritta mediante la seguente equazione:

$$F = \frac{1}{2} \rho C_{xt}^2 \quad (\text{G.11})$$

e in termini di portate in massa

$$F = \frac{\dot{m}_t^2}{2\rho A_t^2} \quad (\text{G.12})$$

Le equazioni vengono poi adimensionalizzate: portate in massa, pressioni e tempo sono rispettivamente divise per $\rho U A_c$, $\frac{1}{2} \rho U^2$ ed $\frac{1}{\omega}$, dove ω è la frequenza di Helmholtz definita come

$$\omega = a \sqrt{\frac{A_c}{V_p L_c}} \quad (\text{G.13})$$

dove a rappresenta la velocità del suono.

Riassumendo, il sistema di equazioni differenziali ordinarie, adimensionalizzate a partire rispettivamente dalle Eq. (G.3), (G.4), (G.8) e (G.9), diviene

$$\frac{d\tilde{\dot{m}}_c}{d\tilde{t}} = B(\tilde{C} - \Delta\tilde{P}) \quad (\text{G.14})$$

$$\frac{d\tilde{\dot{m}}_t}{d\tilde{t}} = \left(\frac{B}{G}\right)(\Delta\tilde{P} - \tilde{F}) \quad (\text{G.15})$$

$$\frac{d\Delta\tilde{P}}{d\tilde{t}} = \left(\frac{1}{B}\right)(\dot{\tilde{m}}_c - \dot{\tilde{m}}_t) \quad (\text{G.16})$$

$$\frac{d\tilde{C}}{d\tilde{t}} = \left(\frac{1}{\tilde{\tau}}\right)(\tilde{C}_{ss} - \tilde{C}) \quad (\text{G.17})$$

Si riconoscono tre parametri adimensionali: B , G e $\tilde{\tau}$.

$$B = \frac{U}{2\omega L_c} = \frac{U}{2a} \sqrt{\frac{V_p}{A_c L_c}} \quad (\text{G.18})$$

$$G = \frac{L_t A_c}{L_c A_t} \quad (\text{G.19})$$

$$\tilde{\tau} = \frac{2\pi NR\omega}{U} = \left(\frac{\pi R}{L_c}\right)\left(\frac{N}{B}\right) \quad (\text{G.20})$$

Il sistema alle derivate ordinarie composto dalle Eq. (G.14-17) accoppiato con l'Eq. (G.12) adimensionalizzata ed alle mappe di prestazioni adimensionalizzate è ciò che deve essere risolto al fine di predire il comportamento dinamico del compressore.

$$\tilde{F} = \tilde{m}_t^2 \frac{A_c^2}{A_t^2} \quad (\text{G.21})$$

Simbologia adottata

a	velocità del suono
A_c	area del condotto del compressore
A_t	area del condotto della valvola
C	incremento di pressione nel compressore
C_{ss}	incremento di pressione nel compressore in condizioni stazionarie
C_x	velocità assiale
F	caduta di pressione nella valvola
L_c	lunghezza del condotto del compressore
L_t	lunghezza del condotto della valvola
m	massa
P	pressione ambiente
P_p	pressione nel plenum
R	raggio caratteristico del compressore
U	velocità periferica
V_p	volume del plenum
γ	rapporto tra il calore specifico a pressione costante e quello a volume costante

ρ densità
 ω frequenza di Helmholtz
 $\Delta P = P_p - P$

Soprasegni

· portata
~ grandezza adimensionalizzata

Pedici

C compressore
P plenum
t valvola (throttle)