STUDIO DELLA STABILITA' DEI SISTEMI IN RETROAZIONE CON IL METODO DEL LUOGO DELLE RADICI

Un sistema di controllo si definisce in retroazione, o in catena chiusa, se opera utilizzando, oltre al segnale di riferimento solo informazioni che riguardano la variabile controllata. Un sistema in retroazione è definito positivo, se la variabile controllata viene riportata a monte della funzione di trasferimento della catena di amplificazione diretta con il segno invariato, negativo nel caso contrario. L'interesse su tali sistemi è limitato a quelli in retroazione negativa, in quanto la retroazione positiva coincide nella maggior parte dei casi ad un comportamento instabile.
Lo schema a blocchi tipico a cui si può normalmente ricondurre un sistema dinamico in retroazione negativa è presentato in figura 1.

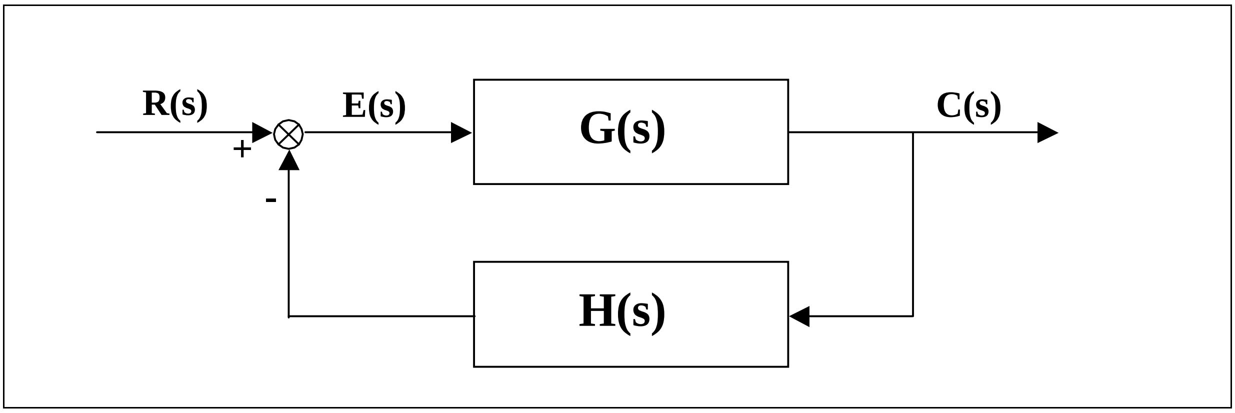


Fig.1

Il significato dei simboli in figura 1 è il seguente:

R(s): segnale di riferimento (SET POINT)
C(s): variabile controllata
E(s): segnale di errore
G(s): funzione di trasferimento della catena di amplificazione diretta
H(s): funzione di trasferimento del trasduttore di segnale in retroazione
G(s)H(s): guadagno di anello

Per lo schema a blocchi in figura 1, è possibile scrivere:

$$C(s) = R(s) \cdot G(s) - C(s) \cdot H(s) \cdot G(s)$$

$$C(s) + C(s) \cdot H(s) \cdot G(s) = R(s) \cdot G(s)$$

$$C(s) \cdot [1 + H(s) \cdot G(s)] = R(s) \cdot G(s)$$

$$C(s) = R(s) \cdot \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

ponendo

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

il sistema in retroazione di figura 1 può essere semplificato secondo lo schema seguente (figura 2).

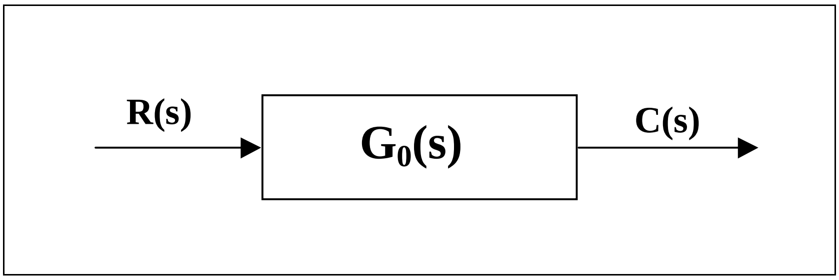


Fig.2

Affinché un sistema in retroazione sia stabile, la sua funzione di trasferimento $G_0(s)$ dovrà contenere solo poli con parte reale negativa. I poli della $G_0(s)$ possono essere calcolati risolvendo

$$1 + G(s) \cdot H(s) = 0$$

equazione caratteristica del sistema in retroazione.
Il prodotto $G(s) \cdot H(s)$ può essere espresso come il rapporto tra due polinomi in s per una costante K. Si scrive quindi:

$$G(s) \cdot H(s) = K \cdot \frac{N(s)}{D(s)}$$

per cui l'equazione caratteristica diventa

$$D(s) + K \cdot N(s) = 0$$

Quest'ultima espressione dell'equazione caratteristica, mostra come i poli della funzione $G_0(s)$ dipendano dal valore che si assume per la costante K. Ipotizzando di far variare K da zero ad infinito, è possibile fare le seguenti osservazioni:

- per $K = 0$ l'equazione caratteristica del sistema in retroazione si riduce a $D(s) = 0$, quindi i poli del sistema in retroazione coincidono con quelli della funzione $G(s) \cdot H(s)$;
- per $K = \infty$ l'equazione caratteristica si riduce alla forma $N(s) = 0$, ovvero i poli del sistema in retroazione, coincidono con gli zeri della funzione $G(s) \cdot H(s)$.

Il tracciamento sul piano immaginario dell'andamento dei poli della funzione di trasferimento del sistema in retroazione al variare di K da zero ad infinito viene definito **luogo delle radici**.

TRACCIAMENTO DEL LUOGO DELLE RADICI

La funzione $G(s)\cdot H(s)$, può essere riscritta nella seguente forma

$$G(s)\cdot H(s)=K\cdot\frac{(1+\tau_a s)\cdot(1+\tau_b s)\cdots\cdots\cdots\cdots(1+\tau_m s)}{(1+\tau_1 s)\cdot(1+\tau_2 s)\cdots\cdots\cdots\cdots(1+\tau_n s)}$$

che riarrangiata diventa

$$G(s)\cdot H(s)=K\frac{\tau_a\tau_b\cdots\cdots\tau_m}{\tau_1\tau_2\cdots\cdots\tau_n}\cdot\frac{\left(s+\frac{1}{\tau_a}\right)\cdot\left(s+\frac{1}{\tau_b}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\left(s+\frac{1}{\tau_m}\right)}{\left(s+\frac{1}{\tau_1}\right)\cdot\left(s+\frac{1}{\tau_2}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\left(s+\frac{1}{\tau_n}\right)}$$

facendo le seguenti posizioni

$$K_1=K\frac{\tau_a\tau_b\cdots\cdots\tau_m}{\tau_1\tau_2\cdots\cdots\tau_n}$$

$$\begin{cases}1/\tau_a=-z_a\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 1/\tau_m=-z_m\end{cases}$$

$$\begin{cases}1/\tau_1=-p_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 1/\tau_n=-p_n\end{cases}$$

la funzione $G(s)\cdot H(s)$ si può scrivere nella seguente forma

$$G(s)\cdot H(s)=K_1\cdot\frac{(s-z_a)\cdot(s-z_b)\cdots\cdots\cdots\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdot(s-p_2)\cdots\cdots\cdots\cdots(s-p_n)}$$

Si osservi che K è sicuramente positiva, e quindi variabile tra 0 ed ∞. K_1 è invece variabile tra 0 ed ∞ oppure tra 0 ed $-\infty$ a seconda del segno del rapporto

$$\frac{\tau_a\tau_b\cdots\cdots\tau_m}{\tau_1\tau_2\cdots\cdots\tau_n}$$

Da questo momento in poi sarà quindi necessario, nello studio del luogo delle radici, distinguere tra due casi, ovvero $K_1>0$ e $K_1<0$.
Affinché un generico punto s del piano immaginario appartenga al luogo delle radici, dovrà essere soddisfatta l'equazione caratteristica

$$1+G(s)\cdot H(s)=0$$
$$G(s)\cdot H(s)=-1$$

che, in base alle posizioni fatte, ipotizzando $K_1>0$ e alla figura 3, essendo $-1 = e^{j(2r+1)\pi}$ (con $r = 0, \pm 1, \pm 2 ... ecc.$), può essere scritta come

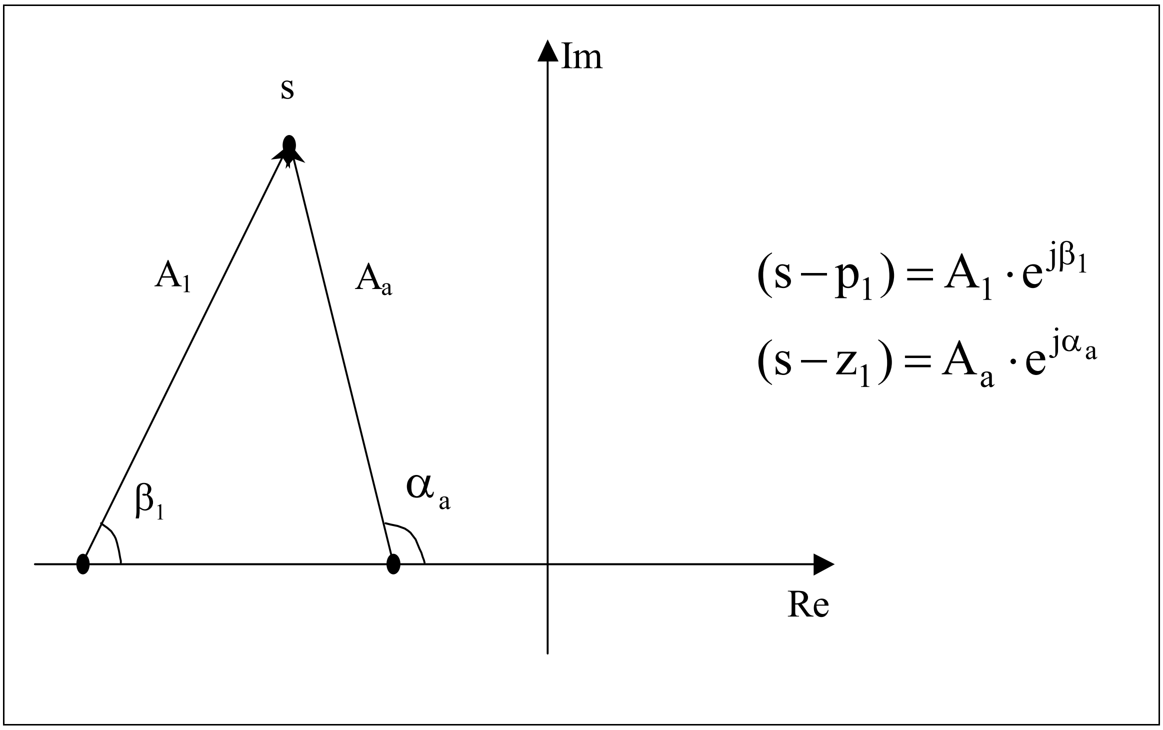


Fig.3

$$K_1 \frac{A_a A_b \cdots\cdots A_m}{A_1 A_2 \cdots\cdots A_n} \cdot \frac{e^{j(\alpha_a + \alpha_b + \cdots\cdots \alpha_m)}}{e^{j(\beta_1 + \beta_2 + \cdots\cdots \beta_n)}} = 1 \cdot e^{j(2r+1)\pi}$$

la precedente equazione può essere scomposta in due uguaglianze

$$\begin{cases} K_1 \dfrac{A_a A_b \cdots\cdots A_m}{A_1 A_2 \cdots\cdots A_n} = 1 & \textit{Equazione dei moduli} \\ (\alpha_a + \alpha_b + \cdots\cdots + \alpha_m) - (\beta_1 + \beta_2 + \cdots\cdots + \beta_n) = (2r+1)\pi & \textit{Equazione degli argomenti} \end{cases}$$

In modo del tutto analogo, per $K_1<0$, si ottiene

$$\begin{cases} K_1 \dfrac{A_a A_b \cdots\cdots A_m}{A_1 A_2 \cdots\cdots A_n} = 1 & \textit{Equazione dei moduli} \\ (\alpha_a + \alpha_b + \cdots\cdots + \alpha_m) - (\beta_1 + \beta_2 + \cdots\cdots + \beta_n) = 2r\pi & \textit{Equazione degli argomenti} \end{cases}$$

In generale quindi il tracciamento del luogo delle radici dovrebbe avvenire per tentativi. Nello specifico, dopo aver posizionato sul piano immaginario i poli e gli zeri della funzione $G(s) \cdot H(s)$, preso un generico punto s del piano, si tracciano i vettori che uniscono tale punto a tutte le singolarità (poli + zeri) presenti. Se, per gli angoli così determinati, è soddisfatta l'equazione degli

argomenti, il punto s appartiene al luogo delle radici e, risolvendo l'equazione dei moduli, è possibile determinare il corrispondente valore di K_1.
In realtà il tracciamento del luogo delle radici esula fortunatamente dalla risoluzione dell'equazione degli argomenti e dei moduli, è può essere condotto seguendo una serie di regole pratiche.

PROPRIETA' DEL LUOGO DELLE RADICI

Si passano adesso in rassegna le principali proprietà del luogo delle radici che possono essere impiegate per il tracciamento.

- Il luogo delle radici ha tanti rami quanti sono i poli della funzione $G(s) \cdot H(s)$. Ogni ramo del luogo delle radici parte da un polo e termina in uno zero della $G(s) \cdot H(s)$ o in un punto all'infinito.
- Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.
- Se $K_1>0$ un punto dell'asse reale appartiene al luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale di singolarità (poli + zeri) dispari. Se invece $K_1<0$ perché un punto dell'asse reale appartenga al luogo delle radici dovrà lasciarsi alla sua destra un numero totale di singolarità pari.
- Una radice multipla di ordine h genera un punto del luogo delle radici comune ad h rami. Ad ogni ramo entrante corrisponderà un ramo uscente. Il tracciamento del luogo delle radici in questo caso può essere fatto seguendo i seguenti accorgimenti:
    1) i rami entranti ed uscenti sono alternati
    2) le tangenti ad i rami dividono lo spazio in settori uguali, pari ad h/π

  un esempio di quanto detto è riportato in figura 4.

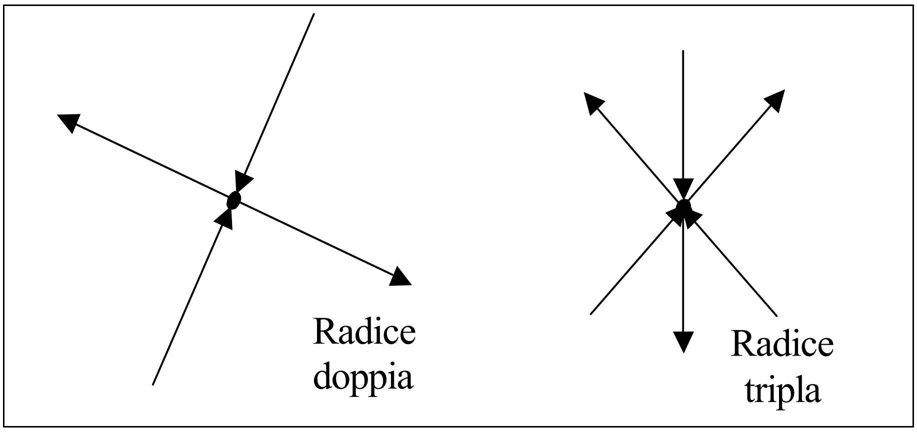


Fig.4

- Se il numero (n) dei poli è maggiore del numero (m) degli zeri, allora m rami partono da un polo e terminano in uno zero mentre i rimanenti n-m partono da un polo e terminano all'infinito seguendo le direzioni individuate dagli asintoti del luogo delle radici. Tutti gli asintoti passeranno per un punto comune dell'asse reale denominato baricentro delle radici dato dalla relazione

$$\sigma_b = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}(p_i) - \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Re}(z_i)}{n-m}$$

  mentre le direzioni degli asintoti saranno

$$\varphi_a = \frac{(2r+1)\pi}{n-m} \qquad \text{per } K_1>0$$

$$\varphi_a = \frac{2r\pi}{n-m} \qquad \text{per } K_1<0$$

- Il luogo delle radici parte da un polo p_i con un angolo

$$\gamma = (2r+1)\pi + \sum_{j=1}^{m} \arg(p_i - z_j) - \sum_{j\in\Im'} \arg(p_i - p_j) \qquad K_1>0$$

$$\gamma = 2r\pi + \sum_{j=1}^{m} \arg(p_i - z_j) - \sum_{j\in\Im'} \arg(p_i - p_j) \qquad K_1<0$$

e termina in uno zero z_i con un angolo

$$\gamma = (2r+1)\pi + \sum_{j\in\Im''} \arg(z_i - z_j) - \sum_{j=1}^{n} \arg(p_i - p_j) \qquad K_1>0$$

$$\gamma = 2r\pi + \sum_{j\in\Im''} \arg(z_i - z_j) - \sum_{j=1}^{n} \arg(p_i - p_j) \qquad K_1<0$$

- I punti di diramazione σ del luogo delle radici si determinano risolvendo l'equazione:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sigma - z_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma - p_i}$$

ESERCIZI SVOLTI

1.Tracciare il luogo delle radici della funzione:

$$G(s)\cdot H(s)=\frac{K_1}{s\cdot(s+1)\cdot(s+3)\cdot(s+4)}$$

per $K_1>0$ e $K_1<0$

Soluzione

$\underline{K_1>0}$

- I segmenti dell'asse reale che appartengono al luogo delle radici, lasciandosi alla propria destra un numero dispari di singolarità, sono: [0,-1] e [-4,-3]
- Il punto d'incontro degli asintoti risulta:

$$\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}=\frac{0-1-3-4}{4}=-2$$

- Gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:
-

$$\varphi_a=\frac{(2r+1)\pi}{n-m}=\frac{(2r+1)\pi}{4}$$

$\varphi_a=\pi/4$ ($\varphi_a=-7\pi/4$)	r=0 (r=-4)
$\varphi_a=3\pi/4$ ($\varphi_a=-5\pi/4$)	r=1 (r=-3)
$\varphi_a=5\pi/4$ ($\varphi_a=-3\pi/4$)	r=2 (r=-2)
$\varphi_a=7\pi/4$ ($\varphi_a=-\pi/4$)	r=3 (r=-1)

- I punti di diramazione sono le radici dell'equazione:

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\sigma-z_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma-p_i}$$

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+3}+\frac{1}{s+4}=0$$

delle tre radici che si ottengono

$$\begin{cases}\sigma_1=-0.42\\ \sigma_2=-2\\ \sigma_3=-3.58\end{cases}$$

si scarta σ_2=-2 in quanto non appartiene al luogo delle radici.

Il luogo delle radici per $K_1>0$ è riportato in figura 5

$\underline{K_1<0}$

- I segmenti dell'asse reale che appartengono al luogo delle radici, lasciandosi alla propria destra un numero dispari di singolarità, sono: [-3,-1] e [-∞,-4]
- I punto d'incontro degli asintoti è ovviamente lo stesso del caso precedente: $\sigma_a = -2$
- Gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

$$\varphi_a = \frac{2r\pi}{n-m} = \frac{2r\pi}{4}$$

$\varphi_a = 0 \ (\varphi_a = -2\pi)$	r=0 (r=-4)
$\varphi_a = \pi/2 \ (\varphi_a = -3\pi/2)$	r=1 (r=-3)
$\varphi_a = \pi \ (\varphi_a = -3\pi/4)$	r=2 (r=-2)
$\varphi_a = 3\pi/2 \ (\varphi_a = -\pi/2)$	r=3 (r=-1)

- I punti di diramazione sono gli stessi trovati nel caso precedente

$$\begin{cases} \sigma_1 = -0.42 \\ \sigma_2 = -2 \\ \sigma_3 = -3.58 \end{cases}$$

solo che in questo caso l'unico, dei tre punti, che appartiene al luogo delle radici è σ_2=-2.

Il luogo delle radici per K_1<0 è riportato in figura 6

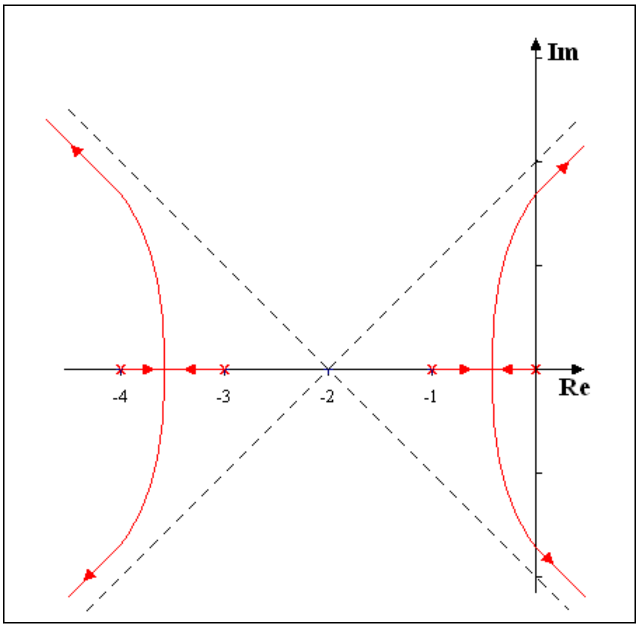


Fig.5

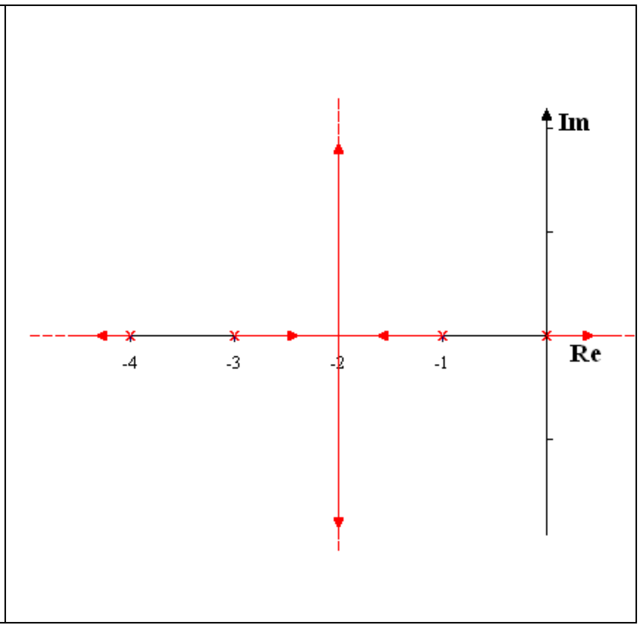
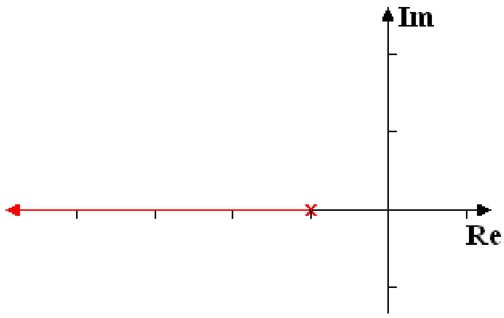


Fig.6

ESERCIZI PROPOSTI

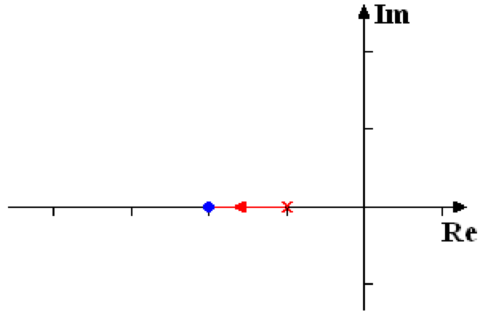
1)

$$G(s)\cdot H(s) = K_1 \cdot \frac{1}{s+1}$$



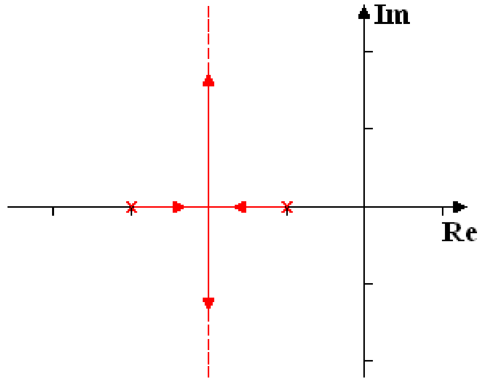
2)

$$G(s)\cdot H(s) = K_1 \cdot \frac{s+2}{s+1}$$



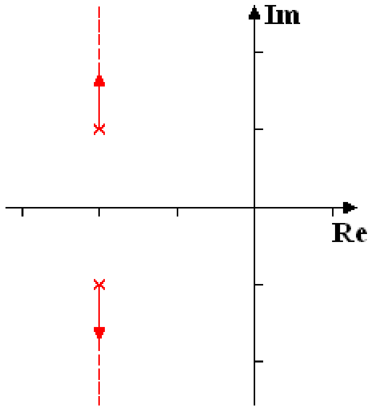
3)

$$G(s)\cdot H(s) = K_1 \cdot \frac{1}{(s+1)\cdot(s+3)}$$



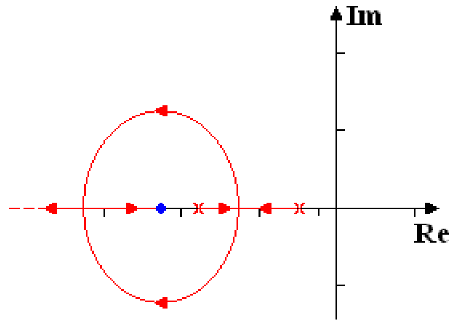
4)

$$G(s)\cdot H(s) = K_1 \cdot \frac{1}{(s+1+j)\cdot(s+1-j)}$$



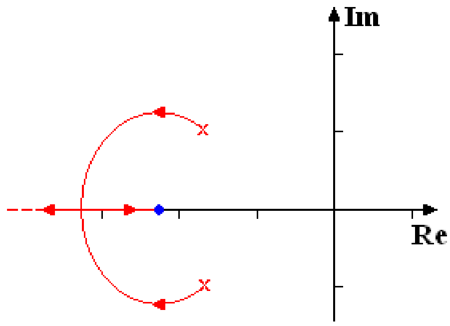
5)

$$G(s)\cdot H(s)=K_1\cdot\frac{(s+2.25)}{(s+0.5)\cdot(s+1.75)}$$



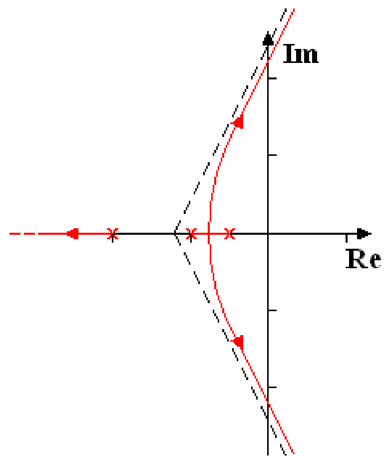
6)

$$G(s)\cdot H(s)=K_1\frac{(s+2.25)}{(s+1.75+j)\cdot(s+1.75-j)}$$



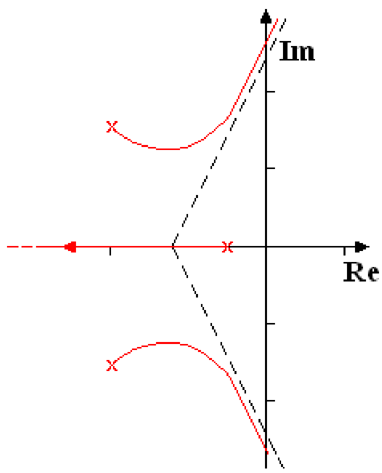
7)

$$G(s)\cdot H(s)=K_1\cdot\frac{1}{(s+0.5)\cdot(s+1)\cdot(s+2)}$$



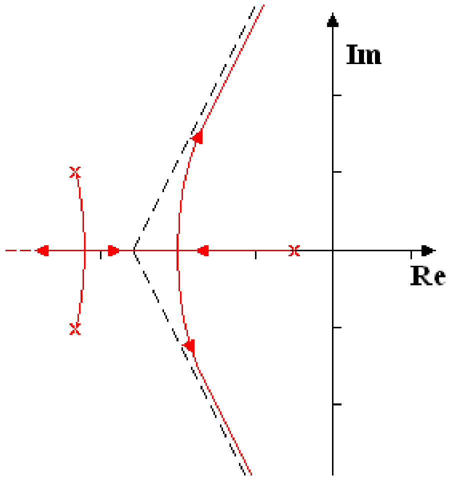
8)

$$G(s)\cdot H(s)=K_1\cdot\frac{1}{(s+0.5)\cdot(s+2+1.25j)\cdot(s+2-1.25j)}$$



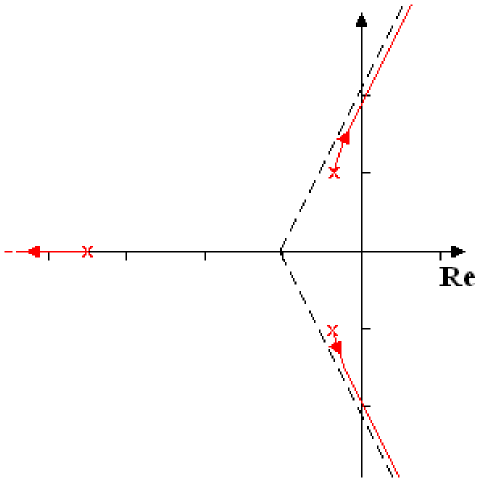
9)

$$G(s)\cdot H(s)=K_1\cdot\frac{1}{(s+0.5)\cdot(s+3.5+1.25j)\cdot(s+3.5-1.25j)}$$



10)

$$G(s)\cdot H(s)=K_1\cdot\frac{1}{(s+0.5+j)\cdot(s+0.5-j)\cdot(s+3.5)}$$



11)

$$G(s)\cdot H(s)=K_1\cdot\frac{(s+4)}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot(s+3)}$$