

Fotocopie dei trasparenti:

SISTEMI a N gdl

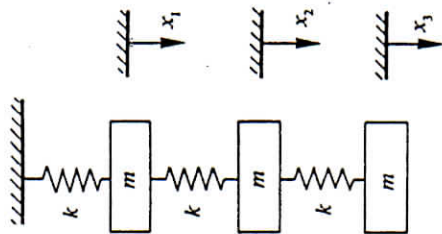


Fig. 6.10 - Sistema oscillante a tre gradi di libertà.

si riconosce che la matrice aggiunta $[A - \mu_i I]$ deve essere formata da colonne ciascuna delle quali è proporzionale all'autovettore $\{X\}_i$.

Vediamo ora un esempio. Si consideri il sistema a 3 gradi di libertà della figura 6.10. Se scegliamo come coordinate gli spostamenti delle masse, la matrice massa risulta diagonale:

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

e la sua inversa è data da:

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 \\ 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 1/m \end{bmatrix}.$$

La matrice rigidezza è:

$$[K] = \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}.$$

Pertanto la matrice dinamica $[A]$ risulta:

$$[A] = [M]^{-1} [K] = \begin{bmatrix} 2k/m & -k/m & 0 \\ -k/m & 2k/m & -k/m \\ 0 & -k/m & k/m \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori si trovano annullando il determinante:

$$\begin{aligned} |A - \mu I| &= \begin{vmatrix} 2k/m - \mu & -k/m & 0 \\ -k/m & 2k/m - \mu & -k/m \\ 0 & -k/m & k/m - \mu \end{vmatrix} = \\ &= \mu^3 - 5(k/m)\mu^2 + 6(k/m)^2\mu - (k/m)^3 = 0. \end{aligned}$$

La funzione:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 1,$$

con $x = \mu/(k/m)$, ha l'andamento mostrato nella figura 6.11. I valori delle radici sono:

$$\mu_1 = 0,198 (k/m) \quad \mu_2 = 1,555 (k/m) \quad \mu_3 = 3,247 (k/m)$$

Troviamo, ora, la matrice aggiunta della $[B] = [A - \mu I]$. La matrice dei cofattori di $[B]$ è:

$$[C_B] = \begin{bmatrix} \frac{(2k/m - \mu)(k/m - \mu) - (k/m)^2}{(k/m)(k/m - \mu)} & \frac{(k/m)(k/m - \mu)}{(2k/m - \mu)(k/m - \mu)} & \frac{(k/m)^2}{(k/m)(2k/m - \mu)} \\ \frac{(k/m)^2}{(k/m)^2} & \frac{(k/m)(2k/m - \mu)}{(k/m)(2k/m - \mu)} & \frac{(k/m)(2k/m - \mu)}{(2k/m - \mu)^2 - (k/m)^2} \end{bmatrix}.$$

La $[C_B]$ è simmetrica, per cui risulta $[C_B] = [C_B]^T = [B]$. Poiché le colonne di $[B]$ sono proporzionali a $\{X\}_i$, è sufficiente calcolarne solo una. Per $\mu_1 = 0,198 (k/m)$ si ottiene:

$$\{X\}_1 = \begin{bmatrix} 0,445 \\ 0,802 \\ 1,000 \end{bmatrix}.$$

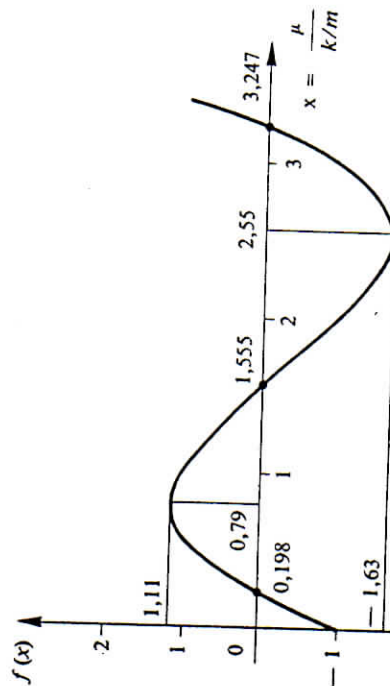


Fig. 6.11 - Determinazione grafica degli autovalori del sistema della figura 6.10.

Analogamente, per $\mu_2 = 1,555 \text{ (k/m)}$ e $\mu_3 = 3,247 \text{ (k/m)}$ si ottiene:

$$\{X\}_2 = \begin{bmatrix} 1,000 \\ 0,445 \\ -0,802 \end{bmatrix} \quad \{X\}_3 = \begin{bmatrix} -0,802 \\ 1,000 \\ -0,455 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori sopra calcolati sono stati normalizzati in modo che l'elemento di maggior valore assoluto risulti uguale a +1. I tre modi di vibrare sono mostrati nella fig. 6.12.

Talvolta può essere utile (si veda, ad esempio, il paragrafo 7.8) formulare le equazioni del moto delle masse del sistema in modo diverso dalle (6.27). A ciò si perviene utilizzando i coefficienti di influenza per la cedevolezza (flessibilità) δ_{ij} . Essi vengono definiti come lo spostamento del punto i -esimo provocato da una forza unitaria applicata nel punto j -esimo. Nel caso delle oscillazioni libere di un sistema ad n gradi di libertà devono considerarsi come forze applicate solo quelle inerziali e, pertanto, lo spostamento della massa i -esima vale:

$$x_i = - \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \sum_{r=1}^n m_r \ddot{x}_r \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6.36)$$

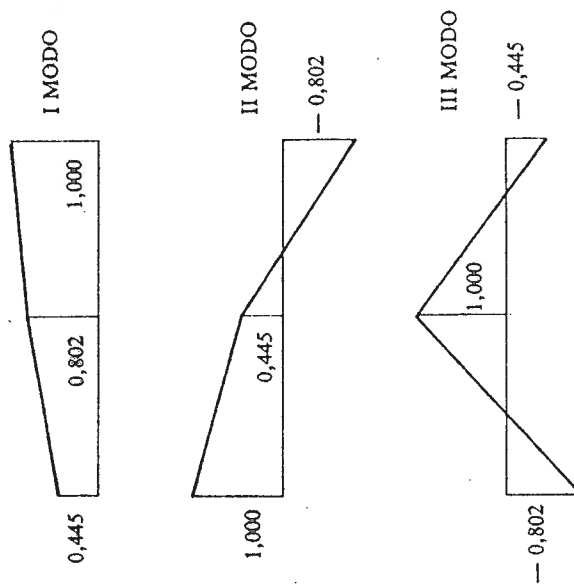


Fig. 6.12 - Modi principali di vibrare per il sistema della figura 6.10.

VIBRAZIONI FORZATE Metodo modale Esempio

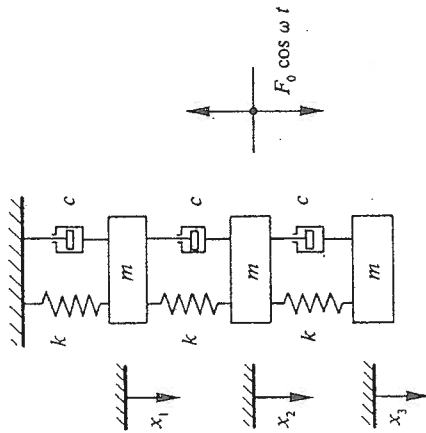


Fig. 6.13 - Sistema oscillante a tre gradi di libertà, con smorzamento viscoso ed eccitazione sinusoidale.

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}, [C] = \begin{bmatrix} 2c & -c & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -c & c \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix},$$

mentre la matrice modale, normalizzata rispetto alle masse, è la stessa trovata per il sistema della fig. 6.10.

Le masse e le rigidità generalizzate valgono, rispettivamente:

$$M_1 = M_2 = M_3 = 1;$$

$$K_1 = \omega_{n1}^2 = 0,198 \frac{k}{m} s^{-2}, K_2 = \omega_{n2}^2 = 1,555 \frac{k}{m} s^{-2}, K_3 = \omega_{n3}^2 = 3,247 \frac{k}{m} s^{-2}.$$

Dalla (6.55) si riconosce che è $\alpha = 0$, $\beta = c/k$ e quindi gli smorzamenti generalizzati valgono:

$$C_1 = \beta K_1 = 0,198 c/m s^{-1}, C_2 = \beta K_2 = 1,555 c/m s^{-1}, C_3 = \beta K_3 = 3,247 c/m s^{-1}.$$

Definiamo, ora, il fattore di smorzamento modale dato, per il modo i -esimo, da:

$$\zeta_i = C_i / (2M_i \omega_{ni}) = C_i / (2\sqrt{K_i M_i}).$$

Risulta:

$$\zeta_1 = C_1 / (2M_1 \omega_{n1}) = 0,222 c / \sqrt{km}$$

$$\zeta_2 = C_2 / (2M_2 \omega_{n2}) = 0,623 c / \sqrt{km}$$

$$\zeta_3 = C_3 / (2M_3 \omega_{n3}) = 0,901 c / \sqrt{km}$$

Calcoliamo le componenti modali dell'eccitazione (forze generalizzate):

$$[F]_p = [X]^T [F] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0,328 & 0,591 & 0,737 \\ 0,737 & 0,328 & -0,591 \\ 0,591 & -0,737 & 0,328 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \cos \omega t \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0,591 F_0 \cos \omega t \\ 0,328 F_0 \cos \omega t \\ -0,737 F_0 \cos \omega t \end{bmatrix}.$$

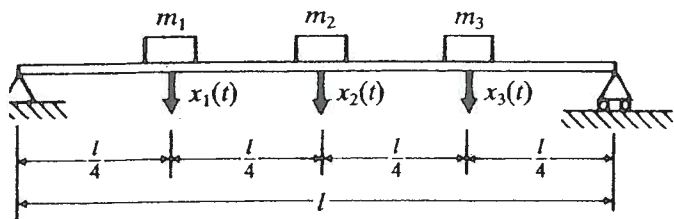
Possiamo ora trovare la risposta modale, a regime, facendo riferimento ai risultati trovati per i sistemi ad un grado di libertà:

$$x_{p1} = (0,591 F_0 / \omega_{n1}^2 \sqrt{m}) / \sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_{n1}^2)^2 + 4\zeta_1^2 \omega^2 / \omega_{n1}^2} \cos(\omega t - \varphi_1) \\ \text{tg } \varphi_1 = 2\zeta_1 (\omega / \omega_{n1}) / (1 - \omega^2 / \omega_{n1}^2)$$

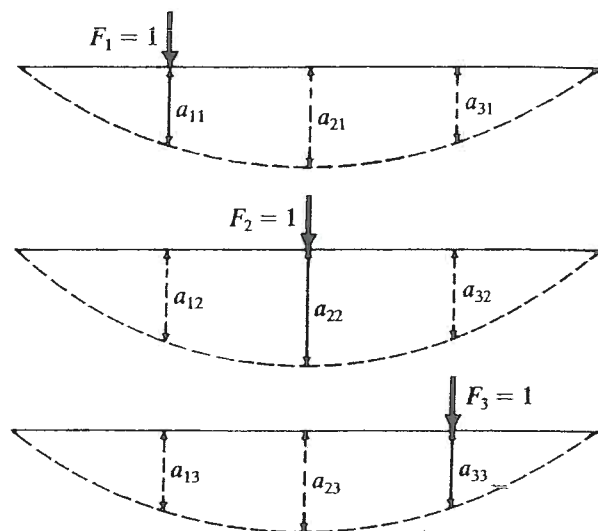
$$x_{p2} = (0,328 F_0 / \omega_{n2}^2 \sqrt{m}) / \sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_{n2}^2)^2 + 4\zeta_2^2 \omega^2 / \omega_{n2}^2} \cos(\omega t - \varphi_2) \\ \text{tg } \varphi_2 = 2\zeta_2 (\omega / \omega_{n2}) / (1 - \omega^2 / \omega_{n2}^2)$$

$$x_{p3} = (-0,737 F_0 / \omega_{n3}^2 \sqrt{m}) / \sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_{n3}^2)^2 + 4\zeta_3^2 \omega^2 / \omega_{n3}^2} \cos(\omega t - \varphi_3) \\ \text{tg } \varphi_3 = 2\zeta_3 (\omega / \omega_{n3}) / (1 - \omega^2 / \omega_{n3}^2).$$

Osserviamo che se non è soddisfatta la (6.55), non è possibile disaccoppiare le equazioni del moto del sistema.



(a)



(b)

FIGURE 6.9

Given: Beam carrying three masses, Fig. 6.9(a).

Find: Flexibility matrix, $[a]$.

Approach: Use the definition of a_{ij} along with beam deflection formula.

Solution: Let x_1 , x_2 , and x_3 denote the total transverse deflection of the masses m_1 , m_2 , and m_3 , respectively. From the known formula for the deflection of a pinned-pinned beam [6.2], the influence coefficients a_{1j} ($j = 1, 2, 3$) can be found by applying a unit load at the location of m_1 and zero load at the locations of m_2 and m_3 (see Fig. 6.9b):

$$a_{11} = \frac{9}{768} \frac{l^3}{EI}, \quad a_{12} = \frac{11}{768} \frac{l^3}{EI}, \quad a_{13} = \frac{7}{768} \frac{l^3}{EI} \quad (\text{E.1})$$

Similarly, by applying a unit load at the locations of m_2 and m_3 separately (with zero load at other locations), we obtain

$$a_{21} = a_{12} = \frac{11}{768} \frac{l^3}{EI}, \quad a_{22} = \frac{1}{48} \frac{l^3}{EI}, \quad a_{23} = \frac{11}{768} \frac{l^3}{EI} \quad (\text{E.2})$$

and

$$a_{31} = a_{13} = \frac{7}{768} \frac{l^3}{EI}, \quad a_{32} = a_{23} = \frac{11}{768} \frac{l^3}{EI}, \quad a_{33} = \frac{9}{768} \frac{l^3}{EI} \quad (\text{E.3})$$

Thus the flexibility matrix of the system is given by

$$[a] = \frac{l^3}{768EI} \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

Esempio 3. Per il sistema di figura, indichiamo con x lo spostamento del baricentro e con θ la rotazione attorno all'asse baricentrico; sia m la massa e J il momento d'inerzia rispetto al suddetto asse baricentrico. Se

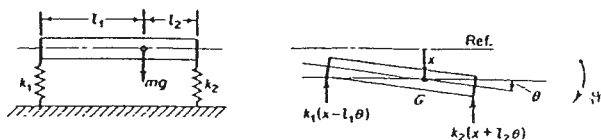


Fig. 6.3-1. Vibrazione accoppiata di traslazione e rotazione.

equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x + (k_2l_2 - k_1l_1)\ddot{\theta} = 0 \\ J\ddot{\theta} + (k_1l_1^2 + k_2l_2^2)\ddot{\theta} + (k_2l_2 - k_1l_1)x = 0 \end{cases}$$

È evidente che le coordinate x e θ sono accoppiate dal termine $(k_2l_2 - k_1l_1)$. Se $k_1l_1 = k_2l_2$, il termine di accoppiamento scompare e otteniamo solo le vibrazioni per x e θ disaccoppiate; vale a dire che una forza applicata al baricentro non produce rotazioni della barra, mentre una coppia applicata alla barra non provoca spostamenti del suo baricentro. In termini matriciali ciò significa diagonalizzare la matrice delle rigidità.

Nel caso che $k_1l_1 \neq k_2l_2$ troveremo che la forza applicata in G provoca sia uno spostamento lineare x che una rotazione θ , analogamente una coppia applicata alla barra provoca entrambi gli spostamenti θ e x . In conclusione, l'accoppiamento che abbiamo ora considerato è definito come accoppiamento statico ed è riconoscibile dai termini della diagonale secondaria della matrice rigidità.

Notiamo ora che esiste un certo punto C (vedi Fig. 6.3-2) lungo la barra tale che, se in esso applichiamo una forza normale alla barra stessa otteniamo solo una traslazione; questo implica che $k_1l_1 = k_2l_2$.

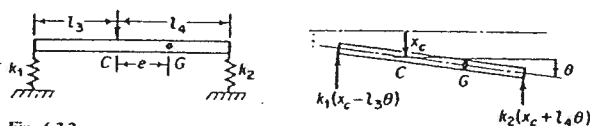


Fig. 6.3-2.

Se noi misuriamo la coordinata x da questo punto e scriviamo le equazioni del moto, otteniamo:

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_c + e\ddot{\theta}) &= -k_1(x_c - l_3\theta) - k_2(x_c + l_4\theta) \\ J\ddot{\theta} + me\ddot{x}_c &= k_1(x_c - l_3\theta)l_3 - k_2(x_c + l_4\theta)l_4 \end{aligned} \quad (6.3-4)$$

dove $\ddot{x}_c + e\ddot{\theta}$ è l'accelerazione di G e il termine $me\ddot{x}_c$ è dovuto al fatto di aver considerato il momento attorno a un punto accelerato che non coincide con il baricentro.

Riscrivendo e tenendo presente che $k_1l_3 = k_2l_4$, le equazioni precedenti si riducono alla forma:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_c + me\ddot{\theta} + (k_1 + k_2)x_c &= 0 \\ J\ddot{\theta} + me\ddot{x}_c - (k_1l_3^2 + k_2l_4^2)\ddot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (6.3-5)$$

o, in scrittura matriciale

$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & 0 \\ 0 & (k_1l_3^2 + k_2l_4^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ \theta \end{Bmatrix} = 0 \quad (6.3-6)$$

È evidente che l'accoppiamento è dovuto al termine e ; tuttavia il termine e appare solo nella diagonale secondaria della matrice massa. Fisicamente questo implica che l'accoppiamento sia *dinamico*; vale a dire che se la barra è spostata da una forza applicata in C e quindi lasciata andare, la forza di inerzia applicata in G creerà un momento attorno a C producendo una rotazione sovrapposta alla traslazione. Abbiamo così cambiato il tipo di accoppiamento passando dallo statico al dinamico ridefinendo le coordinate del sistema e ottenendo ora diagonalizzata la matrice delle rigidità e non quella delle masse.

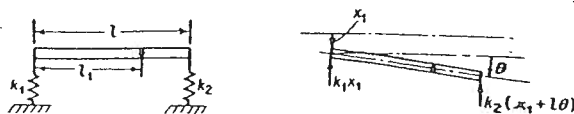


Fig. 6.3-3.

Nei due esempi precedenti abbiamo scelto le coordinate in modo da ottenere accoppiamenti statici e dinamici. È naturalmente possibile scegliere le coordinate in maniera differente rispetto ai due casi mostrati, tali cioè che, sia l'accoppiamento statico che dinamico, compaiano nelle equazioni del moto. Per esempio se x è preso partendo dall'estremo sinistro, come illustrato in Fig. 6.3-3, si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_1 + l_1\ddot{\theta}) &= -k_1x_1 - k_2(x_1 + l_2\theta) \\ J\ddot{\theta} + ml_1\ddot{x}_1 &= -k_2(x_1 + l_2\theta)l \end{aligned} \quad (6.3-7)$$

che, riscritte, divengono

$$\begin{bmatrix} m & ml_1 \\ ml_1 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & k_2l \\ k_2l & k_2l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta \end{Bmatrix} = 0 \quad (6.3-8)$$

Abbiamo così introdotto entrambi gli accoppiamenti, statico e dinamico, come risulta anche evidente dai termini delle diagonali secondarie delle due matrici massa e rigidità.

6.7 APPLICAZIONI

Ci sono molti sistemi a due gradi di libertà di interesse pratico nel campo ingegneristico. Discuteremo diverse di queste applicazioni che illustrano le caratteristiche dei sistemi a due gradi di libertà.

Sospensioni automobilistiche. L'automobile rappresenta un sistema complesso a più gradi di libertà. È possibile, tuttavia, semplificare il sistema come mostrato in Fig. 6.7-1 considerando solo i moti più importanti del sistema: (1) movimento traslatorio verticale del telaio; (2) moto angolare di beccheggio del telaio; (3) moto verticale delle ruote.

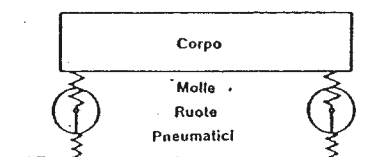


Fig. 6.7-1. Sistema oscillante equivalente di un'automobile.

Le frequenze proprie per i primi due tipi di moto sono dello stesso ordine di grandezza e generalmente inferiori a 1 Hz. Le ruote, invece, si muovono in senso verticale con rapidità maggiore e la loro frequenza è dalle 6 alle 10 volte più grande di quella del corpo. A causa di questa notevole differenza delle frequenze proprie, i moti del corpo (1) e (2) e quello delle ruote (3) avvengono pressoché indipendentemente. Per esempio il movimento delle ruote è troppo rapido per influenzare apprezzabilmente i movimenti del telaio e i movimenti del telaio sono troppo lenti per influenzare quello delle ruote. È evidente quindi che possiamo studiare i moti del telaio e quelli delle ruote separatamente, semplificando notevolmente il problema.

Per studiare il moto del telaio adottiamo la rappresentazione schematica di Fig. 6.7-2 dove

- m = massa sospesa del veicolo
- J = momento di inerzia del veicolo attorno al baricentro
- k_1, k_2 = rigidità della molla anteriore e posteriore.

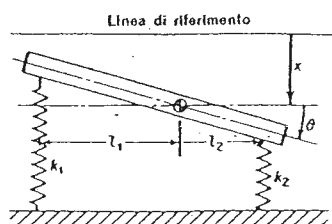


Fig. 6.7-2. Sistema oscillante semplificato di un'automobile.

Ritornando all'Eq. (6.3-2) che si adatta a questo problema e ponendo

$$a = \frac{1}{m} (k_1 + k_2)$$

$$b = \frac{1}{m} (k_2 l_2 - k_1 l_1) \quad (a-1)$$

$$c = \frac{1}{f} (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) = \frac{1}{m r^2} (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)$$

le equazioni del moto sono

$$\ddot{x} + ax + b\theta = 0 \quad (a-2)$$

$$\ddot{\theta} + c\theta + \frac{b}{r^2}x = 0 \quad (a-3)$$

È evidente da queste equazioni che b è il coefficiente di accoppiamento tra il moto verticale e quello di beccheggio e che le equazioni si disaccoppiano quando $k_2 l_2 = k_1 l_1$. Senza accoppiamento una forza applicata al centro di gravità produce solo un moto di traslazione x , mentre una coppia applicata al telaio provoca solo un moto rotatorio θ . Risulta anche evidente dalle equazioni del moto che i moti disaccoppiati hanno le seguenti frequenze:

$$\omega_x = \sqrt{a} \quad (a-4)$$

$$\omega_\theta = \sqrt{c} \quad (a-5)$$

Per i modi principali i movimenti x e θ sono armonici e la soluzione può essere espressa nella forma:

$$x = X \cos \omega t$$

$$\theta = \Theta \cos \omega t \quad (a-6)$$

Sostituendo nelle equazioni del moto otteniamo

$$(a - \omega^2)X + b\Theta = 0$$

$$\left(\frac{b}{r^2}\right)X + (c - \omega^2)\Theta = 0 \quad (a-7)$$

da queste si ricava il rapporto di ampiezza

$$\frac{X}{\Theta} = -\frac{b}{a - \omega^2} = -\frac{c - \omega^2}{b/r^2} \quad (a-8)$$

Risolvendo l'equazione precedente si ottiene l'equazione della frequenza per i modi principali

$$\omega^4 - (a + c)\omega^2 + \left(ac - \frac{b^2}{r^2}\right) = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(a + c) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a + c)^2 - (ac - \frac{b^2}{r^2})} \quad (a-9)$$

$$= \frac{1}{2}(a + c) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a - c)^2 + \frac{b^2}{r^2}}$$

Le frequenze accoppiate date dall'equazione precedente sono sempre esterne all'intervallo delle frequenze disaccoppiate, vale a dire una superiore alla più alta, l'altra inferiore alla più bassa delle frequenze disaccoppiate. Espandendo il radicale dell'equazione precedente per mezzo del teorema del binomio, le frequenze accoppiate per piccoli coefficienti di accoppiamento verificano questa affermazione, essendo

$$\omega_1^2 = a - \frac{b^2}{r^2(c - a)} \quad \omega_2^2 = c + \frac{b^2}{r^2(c - a)} \quad (a-10)$$

ESEMPIO 6.7-1. Determinare i modi principali di vibrare di una automobile con i seguenti dati:

$$W = 1450 \text{ kg} \quad l_1 = 1,35 \text{ m} \quad k_1 = 3600 \text{ kg/m}$$

$$r^2 = 1,44 \text{ m}^2 \quad l_2 = 1,65 \text{ m} \quad k_2 = 3900 \text{ kg/m}$$

$$l = 3 \text{ m} \quad k_1 + k_2 = 7500 \text{ kg/m}$$

Soluzione. Le costanti a, b, c si determinano come segue

$$a = \frac{9,81 (3600 + 3900)}{1450} = 50,68$$

$$b = \frac{9,81 (6435 - 4860)}{1450} = 10,65$$

$$c = \frac{9,81 (6552 + 10608)}{1450 \times 1,44} = 80,54$$

$$\left(\frac{b}{r}\right)^2 = 78,7 \quad c \pm a = \begin{cases} 131,22 \\ 29,86 \end{cases}$$

Le frequenze sono allora

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2}(a + c) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a - c)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2}$$

$$= 65,6 \pm \sqrt{222 + 78,7} = \begin{cases} 82,9 \\ 48,3 \end{cases}$$

$$f_{1,2} = \begin{cases} 1,46 \text{ Hz} \\ 1,08 \text{ Hz} \end{cases}$$

I rapporti di ampiezza per le due frequenze sono

$$\frac{X}{\Theta} = \frac{b}{\omega^2 - a} = \begin{cases} \frac{10,65}{82,9 - 50,68} = 0,33 \text{ m/rad} \\ \frac{10,65}{48,3 - 50,68} = -4,47 \text{ m/rad} \end{cases}$$

La posizione dei nodi, allora, determina il tipo di moto, come indicato dalla Fig. 6.7-3.

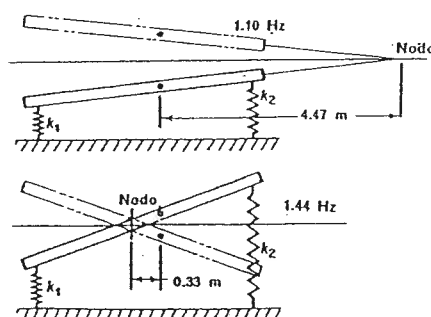


Fig. 6.7-3. Modi principali di vibrare con indicate le posizioni dei nodi (punti di moto nullo).

10

Frequencies and Modes of an Automobile

Determine the pitch (angular motion) and bounce (up and down linear motion) frequencies and the location of oscillation centers (nodes) of an automobile with the following data (see Fig. 5.11):

$$\text{Mass} = m = 1000 \text{ kg}$$

$$\text{Radius of gyration} = r = 0.9 \text{ m}$$

$$\text{Distance between front axle and C.G.} = l_1 = 1.0 \text{ m}$$

$$\text{Distance between rear axle and C.G.} = l_2 = 1.5 \text{ m}$$

$$\text{Front spring stiffness} = k_f = 18 \text{ kN/m}$$

$$\text{Rear spring stiffness} = k_r = 22 \text{ kN/m}$$

Given: Two degree of freedom automobile model, Fig. 5.11, with $m = 1000 \text{ kg}$, $r = 0.9 \text{ m}$, $l_1 = 1.0 \text{ m}$, $l_2 = 1.5 \text{ m}$, $k_1 = 18 \text{ kN/m}$, and $k_2 = 22 \text{ kN/m}$.

Find: Natural frequencies and mode shapes.

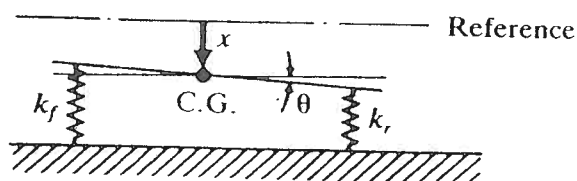
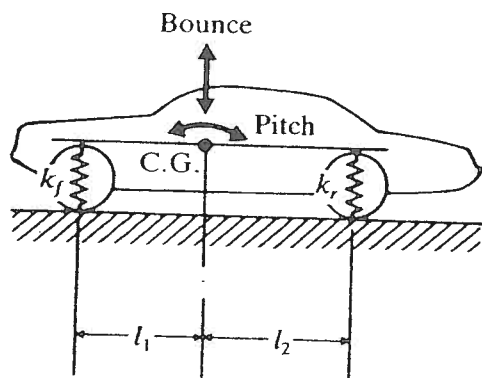


FIGURE 5.11

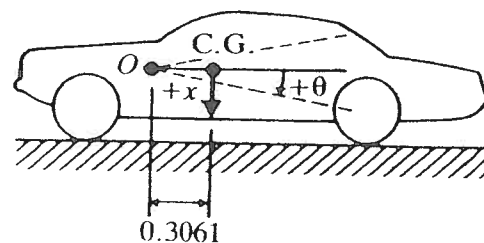
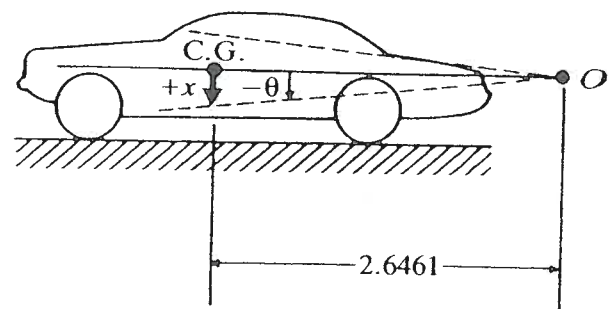


FIGURE 5.12

Approach: Assume harmonic solution for free vibration and solve the resulting equations.

Solution: If x and θ are used as independent coordinates, the equations of motion are given by Eq. (5.23) with $k_1 = k_f$, $k_2 = k_r$, and $J_0 = mr^2$. For free vibration, we assume a harmonic solution:

$$x(t) = X \cos(\omega t + \phi), \quad \theta(t) = \Theta \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{E.1})$$

Using Eqs. (E.1) and (5.23), we obtain

$$\begin{bmatrix} (-m\omega^2 + k_1 + k_2) & (-k_1 l_1 + k_2 l_2) \\ (-k_1 l_1 + k_2 l_2) & (-J_0 \omega^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

For the known data, Eq. (E.2) becomes

$$\begin{bmatrix} (-1000\omega^2 + 40,000) & 15,000 \\ 15,000 & (-810\omega^2 + 67,500) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

from which the frequency equation can be derived:

$$8.1\omega^4 - 999\omega^2 + 24,750 = 0 \quad (\text{E.4})$$

The natural frequencies can be found from Eq. (E.4):

$$\omega_1 = 5.8593 \text{ rad/sec}, \quad \omega_2 = 9.4341 \text{ rad/sec} \quad (\text{E.5})$$

With these values, the ratio of amplitudes can be found from Eq. (E.3):

$$\frac{X^{(1)}}{\Theta^{(1)}} = -2.6461, \quad \frac{X^{(2)}}{\Theta^{(2)}} = 0.3061 \quad (\text{E.6})$$

The node locations can be obtained by noting that the tangent of a small angle is approximately equal to the angle itself. Thus, from Fig. 5.12, we find that the distance between the C.G. and the node is -2.6461 m for ω_1 and 0.3061 m for ω_2 . The mode shapes are shown by dotted lines in Fig. 5.12. ■